

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

На правах рукописи



Занько Алена Игоревна

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ
МНОГОСВЯЗНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ НОВЫМИ
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Донецк – 2017

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк.

Научный
руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Калоеров Стефан Алексеевич,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк / профессор кафедры теории упругости и
вычислительной математики

Официальные
оппоненты:

Соловьев Аркадий Николаевич
доктор физико-математических наук, доцент, Феде-
ральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Донской государственной технической универси-
тет», г. Ростов-на-Дону / заведующий кафедрой теоре-
тической и прикладной механики

Левин Виктор Матвеевич

доктор технических наук, профессор, ГОУ ВПО «Дон-
басская национальная академия строительства и архи-
тектуры», г. Макеевка / заведующий кафедрой желе-
зобетонных конструкций

Ведущая
организация:

Федеральное государственное автономное образова-
тельное учреждение высшего профессионального об-
разования «**Южный федеральный университет**»,
г. Ростов-на-Дону

Защита состоится «29» сентября 2017 г. в 14:00 часов на заседании дис-
сертационного совета Д 01.016.03 при ГОУ ВПО «Донецкий национальный
университет» по адресу: 83001, г. Донецк, проспект Театральный 13, ауд. 264.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Донецкий
национальный университет» по адресу: 83001, г. Донецк, ул. Университетская,
24, <http://donnu.ru>.

Автореферат разослан « ___ » _____ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета (Д 01.016.03)

И.А. Моисеенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современной промышленности и, в первую очередь, в авиастроении, приборостроении, в космической промышленности в качестве элементов конструкций широко используются тонкие пластинки из композиционных материалов. По техническим соображениям или эксплуатационным причинам эти пластинки могут иметь концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. Под действием различных механических сил вблизи таких концентраторов напряжений могут возникать высокие уровни напряжений, которые могут приводить к потере прочности указанных элементов. Поэтому необходимо иметь надежные методы определения напряженно-деформированного состояния (НДС) многосвязных пластин и решения прикладных задач, возникающих при проектировании соответствующих конструкций. Для случая, когда пластинки находятся в условиях обобщенного плоского НДС, такие методы и их приложения даны в различных работах. Для поперечного же изгиба пластин, называемых плитами, таких исследований значительно меньше, не разработаны методы, позволяющие получать результаты с достаточной степенью точности, если расстояния между контурами малы. Кроме того, для анизотропных плит не разработаны методы и не решены задачи вязкоупругости, когда нужно определять изменение НДС с течением времени после приложения нагрузок. Поэтому актуальна тема данной диссертационной работы, посвященная разработке надежных методов определения НДС многосвязных плит с контурами произвольной конфигурации и расположения, а также изменения НДС с течением времени.

Связь с научными программами, планами, темами. Проведенные в работе исследования связаны с разработкой конкурсных фундаментальных научно-исследовательских проектов «Исследование вязкоупругого и электромагнитоупругого состояния многосвязных сред» (№ госрегистрации 0111U000406, 2011–2013 гг.) и «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (№ госрегистрации 0117D000071, 2017 г.). Результаты исследований по теме диссертации представлены в отчетных материалах по указанным НИР.

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка методов определения НДС и его изменения с течением времени для однородных многосвязных анизотропных плит с отверстиями произвольной конфигурации, решение на их основе практических задач с установлением закономерностей влияния на НДС геометрических характеристик плит, физико-механических свойств их материалов и времени действия нагрузок. Для достижения этой цели необходимо было

– исследовать и установить общий вид комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных плит;

- распространить на задачи изгиба плит метод определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов с учетом конформных отображений, разложений голоморфных в соответствующих областях функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК);

- разработать метод решения задач изгиба многосвязных анизотропных плит из вязкоупругих материалов;

- исследовать эффективность разработанных методов и достоверность получаемых результатов;

- с использованием разработанных методов получить теоретические решения конкретных задач с их алгоритмизацией;

- составить комплексы программ на алгоритмическом языке для численной реализации получаемых решений;

- провести численные исследования с целью установления закономерностей изменения НДС плит в зависимости от их геометрических характеристик, физико-механических свойств их материалов и времени приложения нагрузок.

Объектом исследования является НДС однородных анизотропных плит с отверстиями и трещинами произвольной конфигурации при действии механических сил, зависящее от геометрических характеристик, физико-механических свойств их материалов, времени приложения нагрузок.

Предметом исследования является разработка эффективных методов, позволяющих определять НДС находящихся в условиях изгиба многосвязных плит с произвольно расположенными отверстиями и трещинами; получение решения новых задач с исследованием влияния геометрических и физико-механических характеристик плит и времени приложения нагрузок на возникающее в них НДС.

Методы исследования. Для достижения сформулированной цели в работе исследованы и установлены общие представления комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных плит; на задачи изгиба плит распространен метод определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов с использованием конформных отображений, разложений голоморфных в соответствующих областях функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий ОМНК. Для анизотропных плит разработан метод решения задач линейной вязкоупругости. Исследованы эффективность разработанных методов и достоверность получаемых результатов. Получены теоретические решения конкретных задач с их алгоритмизацией, проведены численные исследования с целью установления закономерностей изменения НДС плит в зависимости от их геометрических характеристик, физико-механических свойств их материалов, времени действия нагрузок.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что

- исследованы и установлены общие представления комплексных потен-

циалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит;

- на задачи изгиба тонких плит распространен метод определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворении граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов;

- разработана методика сведения методом малого параметра задач линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит к последовательности задач классической теории изгиба тонких плит;

- решен ряд новых задач изгиба для многосвязных плит с отверстиями различной конфигурации, в частности, для плит с криволинейными контурами и трещинами;

- проведены алгоритмизация и численная реализация указанных решений на компьютерах;

- проведены численные исследования, с помощью которых установлены новые закономерности влияния на значения основных характеристик НДС плит их геометрических характеристик, физико-механических свойств материалов, времени действия нагрузок.

Достоверность полученных результатов и выводов работы обеспечивается корректным использованием соотношений механики деформируемого твердого тела; строгостью постановок рассматриваемых задач и применяемых математических методов; использованием проверенных численных математических методов и алгоритмов; контролем степени точности удовлетворения граничных условий в многочисленных точках контуров; согласованием для частных задач получаемых результатов с известными в литературе, найденными другими авторами иными методами, совпадением для частных задач результатов, получаемых по приближенным и точным решениям.

Практическая ценность результатов состоит в возможности использования разработанных методов решения задач и программных средств для их численной реализации в расчетах, связанных с проектированием и определением рабочих параметров элементов конструкций в виде тонких плит, с отверстиями; в получении результатов, позволяющих оценивать влияние физико-механических свойств материалов, способа внешнего воздействия, количества, взаимного расположения и сочетания отверстий и времени действия усилий на НДС элементов конструкций.

Апробация результатов диссертации. Основные положения работы были доложены и обсуждены на ряде заседаний объединенного научного семинара по механике сплошных сред Донецкого национального университета, на ряде научных конференций, в том числе: на VII Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (г. Донецк – пос. Мелекино, 11–14 июня, 2013 г.), на V Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций» (г. Запорожье, 21-24 мая, 2015 г.), на XVIII междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону,

7-10 ноября, 2016 г.), на I Междунар. науч. конф. «Донецкие чтения 2016» (г. Донецк, 16-18 мая, 2016 г.). В полном объеме диссертационная работа докладывалась на объединенном научном семинаре по механике сплошных сред Донецкого национального университета, на научном семинаре кафедры теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. А. Н. Соловьева, на объединенном научном семинаре кафедр железобетонных конструкций и теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры» под руководством д-ра техн. наук, проф. В. М. Левина.

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах [1–10], из которых 6 статей [1–6], в научных журналах, утвержденных ВАК ДНР изданиями, в которые можно опубликовать материалы по кандидатским и докторским диссертациям, 3 в материалах конференций и 1 в тезисах научных конференций [7–10].

Личный вклад соискателя. Основные результаты получены автором самостоятельно. В работах [1–10] соавтору С. А. Калоерову принадлежит участие в постановке задач, выборе метода исследования и обсуждении получаемых результатов. В работах [2, 9, 7] соавтору А. А. Кошкину принадлежит участие в проведении численных исследований для частных задач и обсуждении полученных результатов. В работах [1–10] автору принадлежит получение теоретических решений задач, их алгоритмизация, составление и отладка программ численной реализации алгоритмов, проведение численных исследований с анализом их результатов. Лично автору принадлежат такие, включенные в диссертационную работу и публикации, научные результаты:

- получение уточненных общих представлений комплексных потенциалов для многосвязных плит с их подтверждением решением частных задач [2];
- распространение на задачи изгиба плит метода определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворении граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов; решение на этой основе ряда задач [1–4, 8, 9];
- разработка методики сведения методом малого параметра задачи линейной вязкоупругости для многосвязных однородных плит к последовательности задач классической теории изгиба тонких плит; решение впервые задач вязкоупругости для анизотропных плит [6, 7, 9].

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованной литературы и двух приложений с таблицами и рисунками. Общий объем диссертации составляет 200 страниц, из которых текст диссертации занимает 140 страниц, рисунки основного текста 5 страниц, список литературы из 190 источников 20 страниц, приложения 40 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы; сформулированы цель работы и основные научные результаты, выносимые на защиту; указана связь работы с научными программами, планами; охарактеризованы научная новизна, практическое значение полученных результатов и личный вклад автора в совместные работы.

В первом разделе дается краткое описание истории становления и развития моделей теории изгиба тонких плит, методов решения задач и, в первую очередь, методов решения задач для многосвязных анизотропных плит и их применений. Изучены вопросы разработки методов и решения задач линейной вязкоупругости, когда учитывается изменение НДС во времени. Анализом литературы охвачено 190 работ отечественных и зарубежных авторов. Замечено, что в отличие от плоской задачи теории упругости результаты в данной области исследований значительно скромнее и получены, в основном, для изотропных плит. Отмечена ведущая роль в развитии теории и ее приложений к решению теоретических и практических задач работ Н. Х. Арутюняна, А. П. Бронского, Г. А. Ван Фо Фы, А. О. Ватуляна, И. И. Воровича, А. Н. Гузя, Ж. С. Ержанова, Д. Д. Ивлева, А. А. Ильюшина, С. А. Калоерова, А. А. Каминского, В. Г. Карнаухова, Н. А. Кильчевского, М. А. Колтунова, А. С. Космодамианского, С. Г. Лехницкого, А. И. Лурье, Н. С. Можаровского, Ю. Н. Немиша, Б. Е. Победри, Ю. Н. Работнова, В. Л. Рвачева, А. Р. Ржаницына, М. И. Розовского, Г. Н. Савина, А. Н. Соловьева, Ю. А. Устинова, В. А. Шалдырвана, М. А. Шленева, О. К. Аксентяна, В. В. Меглинского, Г. М. Иваова, В. И. Копниной, Л. Н. Шкодиной, Д. Бленда, Дж. Бойля, L. Boltzmann, P. Кристенсена, V. Volterra и многих других отечественных и зарубежных ученых. С помощью анализа литературных источников выявлены области теории и практики, которые до настоящего времени оставались мало изученными. Установлено, что к настоящему времени разработаны физические и математические основы различных теорий изгиба тонких плит в упругой и вязкоупругой постановках, с применением прикладной теории изгиба тонких плит и метода комплексных потенциалов решены некоторые частные задачи с использованием метода рядов, общие методы решения задач для многосвязных анизотропных однородных плит с отверстиями произвольной конфигурации не разработаны, поэтому не решены многие практически важные задачи даже для случая механических воздействий, не говоря о задачах вязкоупругости, которые вообще не рассматривались. На этой основе обоснована актуальность темы диссертационной работы.

Во втором разделе работы даны основные соотношения для комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных и изотропных плит, выражения через них основных характеристик НДС плит (изгибающих и крутящих моментов, поперечных сил и прогиба), граничные условия для определения комплексных потенциалов. Для произвольной многосвязной области получены общие представления комплексных потенциалов, подтверждены эти представления нахождением точных решений некоторых частных задач без учета этих представле-

ний, определением логарифмических слагаемых из граничных условий.

Рассматривается отнесенная к прямоугольной декартовой системе координат Oxy анизотропная многосвязная плита S , ограниченная внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Плита находится под действием приложенных к ее контурам изгибающих моментов, поперечных усилий и сосредоточенных сил во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) области S , а также распределенных по верхнему основанию нормальных усилий $q(x, y)$. Как частный, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, рассматривается случай бесконечной многосвязной плиты.

Определение напряженного состояния рассматриваемой плиты при использовании комплексных потенциалов сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) из граничных условий, которые на контуре L_i ($i = \overline{0, \mathcal{L}}$) получаются такими:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ki\alpha} W'_k(z_k) = f_{i\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \quad (1)$$

причем в случае загруженного контура

$$\begin{aligned} g_{ki1} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{ki2} = q_k, \quad f_{i1} = - \int_0^s (f_i dx + m_i dy) + J_{01} - c_i x + c_{1i}, \\ f_{i2} &= - \int_0^s (m_i dx - f_i dy) - J_{02} + c_i y + c_{2i}, \\ J_{01} &= \int_0^s (N_{0xy} - H_{0xy}) dx + M_{0x} dy, \\ J_{02} &= - \int_0^s M_{0y} dx - (N_{0xy} + H_{0xy}) dy, \\ f_i(s) &= \int_0^s p_i(s) ds, \quad N_{0xy} = - \int_0^s N_{0y} dx - N_{0x} dy, \end{aligned} \quad (2)$$

в случае подкрепленного контура

$$g_{ki1} = 1, \quad g_{ki2} = \mu_k, \quad f_{i1} = - \frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{1i}, \quad f_{i2} = - \frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{2i}, \quad (3)$$

c_i – вещественная, c_{1i} , c_{2i} – комплексные постоянные (для жестко защемленного контура $c_{1i} = c_{2i} = 0$).

Производные комплексных потенциалов $W'_k(z_k)$ определены в областях S_k , получаемых из заданной области аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$,

где μ_k – корни известного характеристического уравнения теории изгиба плит, и в общем случае имеют вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + W'_{0k}(z_k), \quad (4)$$

в котором

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0), \quad (5)$$

Γ_k, A_{kl}, B_{kl} – постоянные, определяемые из решения систем уравнений

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right); \quad (7)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi D_{11}} \right); \quad (8)$$

C_{ij} – постоянные, зависящие от коэффициентов деформаций; P_l и M_{xl}, M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента относительно осей координат внешних воздействий, приложенных к контуру L_l ;

$$\begin{aligned} P_{0l} &= - \int_{L_l} (N_{0y} dx - N_{0x} dy), \\ M_{0xl} &= \int_{L_l} \left[(y N_{0x} - H_{0xy}) dy - (y N_{0y} - M_{0y}) dx \right], \\ M_{0yl} &= \int_{L_l} \left[(x N_{0y} - H_{0xy}) dx - (x N_{0x} - M_{0x}) dy \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

N_{0x}, N_{0y}, H_{0xy} – величины, возникающие за счет действия поперечных усилий $q(x, y)$ на основании плиты. Аналогичные формулы имеют место для коэффициентов A_{kr}^0, B_{kr}^0 , соответствующих действию сосредоточенных сил; $W'_{0k}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k . От известных формул приведенные отличаются наличием в них дополнительных слагаемых P_{0l} и M_{0xl}, M_{0yl} .

Аналогичные соотношения имеют место для комплексных потенциалов теории изгиба изотропных плит:

$$\varphi(z) = \Gamma_1 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^R (A_r^0 z + B_r^0) \ln(z - z_r^0) + \varphi_0(z),$$

$$\psi(z) = \Gamma_2 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \bar{B}_l \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^R \left[\bar{B}_r^0 \ln(z - z_r^0) + \frac{b_r^0(-1)}{8\pi D(z - z_r^0)} \right] + \psi_0(z), \quad (10)$$

Γ_i , A_l , B_l , $b_{r(-1)}^0$ – постоянные; $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ – голоморфные в области функции.

В этом же разделе получены точные решения задач об изгибе изотропного кругового диска, находящегося под действием равномерно распределенных по контуру моментов, равномерного давления по верхнему основанию, кругового кольца, находящегося под действием равномерно распределенных моментов или поперечных усилий на контурах, нормального давления по основанию кольца, для диска с произвольно расположенным круговым отверстием при действии поперечных усилий. При получении этих решений неизвестные коэффициенты логарифмических слагаемых и рядов определялись из граничных условий без учета приведенных выше общих представлений комплексных потенциалов. Полученные коэффициенты оказались полностью совпадающими с их значениями по общим представлениям (10). Такие же задачи рассмотрены для анизотропных плит, для определения коэффициентов логарифмических слагаемых из граничных условий получены системы, полностью совпадающие с системами (7), (8).

В третьем разделе работы дано решение задачи для многосвязной анизотропной плиты с отверстиями произвольной конфигурации. Рассматривается анизотропная многосвязная плита S (рис. 1), ограниченная внешним контуром L_0 и

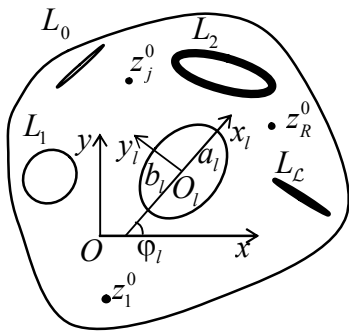


Рис. 1

контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Плита находится под действием приложенных к ее контурам L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) изгибающих моментов, поперечных усилий и

сосредоточенных сил во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) области S , а также распределенных по верх-

нему основанию нормальных усилий $q(x, y)$. Некоторые из контуров плиты жестко подкреплены или защемлены.

Как частный, когда контур L_0 полностью уходит в бес-

конечность, рассматривается случай бесконечной многосвязной области. В последнем случае предполагается, что на бесконечности действуют изгибающие моменты $M_x^\infty = m_x$, $M_y^\infty = m_y$, $H_{xy}^\infty = 0$. Случай изотропной плиты рассматривается только в расчетах и как частный случай анизотропной плиты с упругими постоянными, весьма близкими к реальным для изотропных материалов.

Используя методы конформных отображений и разлагая голоморфные в соответствующих областях функции в ряды Лорана или по полиномам Фабера,

для функций (9) и их производных получим выражения

$$W'_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi_{kln}(z_k), \quad (11)$$

$$W''_k(z_k) = g\Gamma_k \delta_k + N'_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi'_{kln}(z_k), \quad (12)$$

в которых $g = 0$ для конечной области, $g = 1$ для бесконечной области;

$$\begin{aligned} \varphi_{k0n}(z_k) &= (z_k - z_{k0})^{n-1} / R_{k0}^{n-1}, \quad \Phi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n}; \\ \varphi'_{k0n}(z_k) &= n(z_k - z_{k0})^{n-1} / R_{k0}^n, \quad \Phi'_{kln}(z_k) = -n / \left[R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl}) \right]; \end{aligned}$$

ζ_{kl} – переменные, получаемые из конформных отображений

$$\begin{aligned} z_k &= z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}), \quad z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2, \\ m_{kl} &= \left[a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l) \right] / 2 R_{kl}. \end{aligned}$$

внешности единичного круга на внешности соответствующих эллипсов. Входящие в эти функции неизвестные постоянные a_{kln} определяются из граничных условий на контурах плиты обобщенным методом наименьших квадратов. Для этого на каждом из контуров выбирается набор точек, в которых удовлетворяются граничные условия с получением систем вида

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{ki\alpha} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} + \bar{g}_{ki\alpha} \bar{\delta}_{k,s} \overline{\varphi'_{kln}(t_{klm})} \bar{a}_{kln} \right) = \\ = - \sum_{k=1}^2 \left[g_{ki\alpha} \delta_{k,s} (g\Gamma_k + N'_k(t_{klm})) + \bar{g}_{ki\alpha} \bar{\delta}_{k,s} (g\bar{\Gamma}_k + \right. \\ \left. + \overline{N'_k(t_{klm})}) \right] + \frac{df_{i\alpha}(t_{im})}{ds} \quad (i = \overline{g, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_l}; \alpha = 1, 2), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\delta_{k,s} = dz_k / ds$, содержащих уравнения от каждой точки.

Кроме приведенных уравнений, для каждого отверстия должно выполняться уравнение

$$\sum_{k=1}^2 i (a_{ki1} R_{ki} - \bar{a}_{ki1} \bar{R}_{ki}) = 0 \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (14)$$

следующее из условия однозначности функции прогиба.

Для получения псевдорешений указанных систем используются сингулярные разложения. После решения этих систем искомые функции (11) становятся известными и по ним можно вычислять основные характеристики НДС плиты в любой точке плиты, а в случае трещин или линейных включений и коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) для их вершин. Приведенное решение может использоваться для плит с отверстиями любой конфигурации. При этом случай $b_l / a_l = 0$ соответствует прямолинейному разрезу, контуры криволиней-

ных отверстий аппроксимируются совокупностями дуг эллипсов или берегов прямолинейных разрезов, причем, если имеются участки границы в виде сторон углов, то части этих стороны в окрестности вершины угла аппроксимируются вписанной окружностью.

С использованием приведенного решения были проведены численные исследования для различных

задач. Были рассмотрены случаи эллиптической плиты с отверстием или трещиной при действии различных нагрузок на контурах и сосредоточенных сил во внутренних

Таблица 1

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^4$, $МПа^{-1}$	$a_{22} \cdot 10^4$, $МПа^{-1}$	$a_{12} \cdot 10^4$, $МПа^{-1}$	$a_{66} \cdot 10^4$, $МПа^{-1}$	
М1	0,1408	0,1408	-0,035	0,352	1,000
М2	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571

точках; для бесконечной плиты с двумя эллиптическими отверстиями или трещинами, с одним или двумя квадратными отверстиями, с треугольным отверстием. Рассматривались плиты из различных анизотропных и изотропных материалов. В работе полученные результаты приведены в таблицах и на рисунках, дан анализ изменений НДС в зависимости от геометрических характеристик плит, свойств их материалов и типа приложенных воздействий. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для плит, изготовленных из изотропного материала алюминий (материал М1) и стеклопластика косоугольной намотки (М2), коэффициенты деформаций которых приведены в табл. 1.

При проведении расчетов количество членов в рядах по Лорана и по полиномам Фабра (11), (12) и «коллокационных» точек M_l на контурах L_l , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (13) увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности, пока относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента. Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических и упругих характеристик необходимо было в указанных рядах оставлять от 5 до 90 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 500 «коллокационных точек». При этом значения моментов всюду приведены в $МПа \cdot м^2$ (или $МН \cdot м$), КИМ в $МПа \cdot м^2 \sqrt{м}$ (или $МН \cdot м \sqrt{м}$).

На рис. 2 для кругового диска с центральной диаметральной трещиной длины $2a_1$ с внешним контуром L_0 радиуса a_0 при действии равномерно распределенных по внешнему контуру изгибающих моментов интенсивности m_0 в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и значения отношения a_1/a_0 приведены графики распределения изгибающих моментов M_s/m_0 (возникающих от нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру) вблизи контура L_0 , а на рис. 3 графики изменения КИМ k_{1M}^\pm для вершин трещины. Сплошные линии здесь и далее относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1. Из

рис. 2, 3 видно, что с увеличением длины трещины значения моментов около

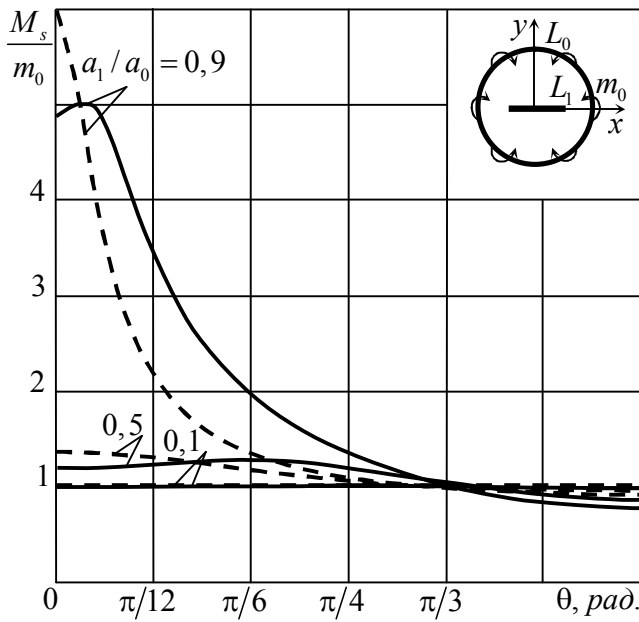


Рис. 2

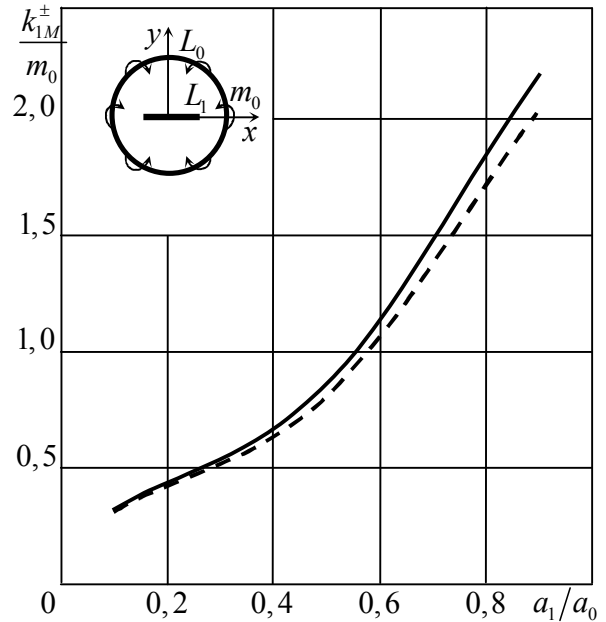


Рис. 3

внешнего контура и КИМ для концов трещины растут. При малых значениях a_1/a_0 ($a_1/a_0 < 0,1$) влияние трещины на НДС около внешнего контура и внешнего контура на КИМ незначительны: моменты около внешнего контура получаются такими, как в круглой плите без отверстия (равными m_0), а КИМ – как в бесконечной плите с трещиной, находящейся под действием всестороннего изгиба плиты моментами m_0 .

На рис. 4 для кругового кольца с жестко зашпеленным внутренним контуром L_1 радиуса a_1 и нагруженным равномерно распределенными поперечными усилиями интенсивности p_0 внешним контуром L_0 радиуса a_0 , в зависимости от центрального угла θ и значения отношения a_1/a_0 изображены графики распределения моментов M_s/p_0 около контура L_1 . Из данных рис. 4 и других полученных результатов следует, что чем выше «степень анизотропии» (степень отличия a_{11}/a_{22} от 1), тем больше уровень концентрации изги-

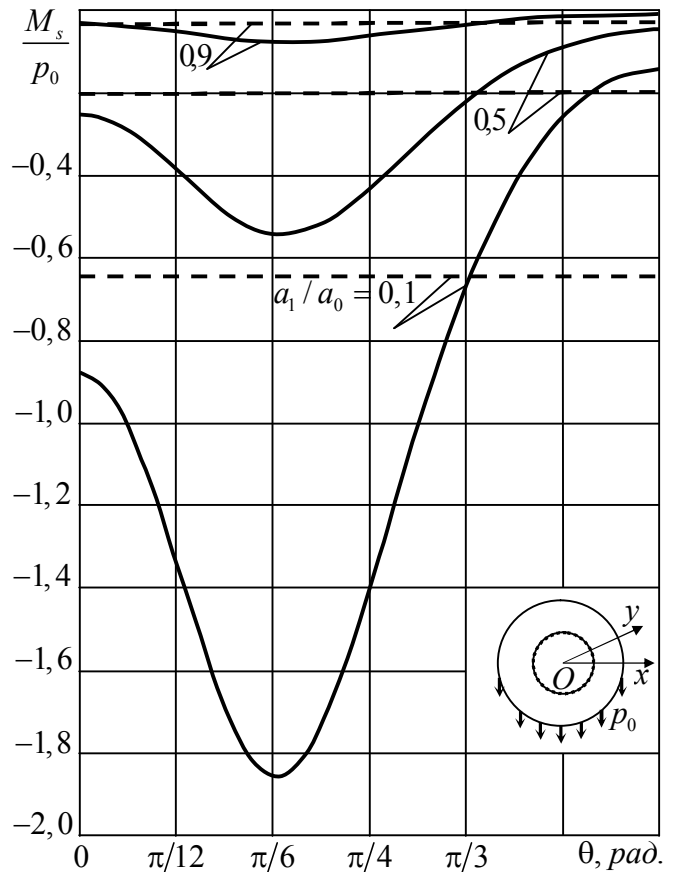


Рис. 4

бающих моментов; с ростом отношения a_1/a_0 значения моментов по модулю убывают, что связано с приближением внешнего контура L_0 к жестко заземленному внутреннему контуру L_1 . При $a_1/a_0 \rightarrow 1$ значения моментов стремятся к нулю. При уменьшении a_1/a_0 значения моментов возрастают в точках, лежащих вблизи точки, соответствующей углу $\theta = 0$.

На рис. 5 для нагруженного равномерно распределенными по основанию усилиями интенсивности q_0 кругового кольца с внешним жестко заземленным

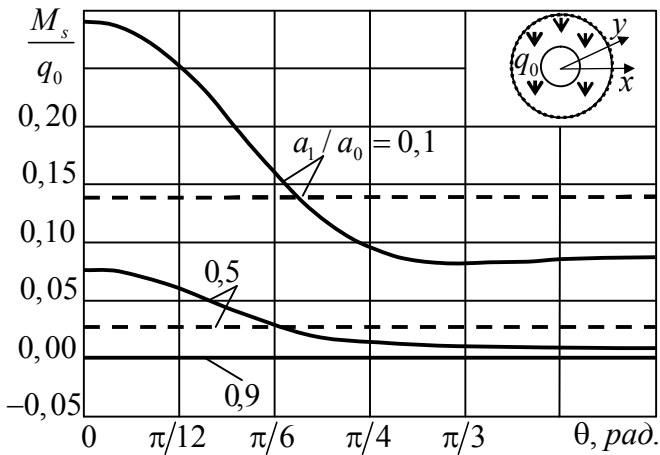


Рис. 5

контуром L_0 радиуса a_0 и внутренним незагруженным контуром L_1 радиуса a_1 в зависимости от центрального угла θ и значения отношения a_1/a_0 изображены графики распределения моментов M_s/q_0 вблизи внутреннего контура L_1 . Видно, что с ростом отношения a_1/a_0 значения изгибающих моментов на контурах по модулю уменьшаются, что связано с уменьшением суммарной нагрузки,

действующей на плиту, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень

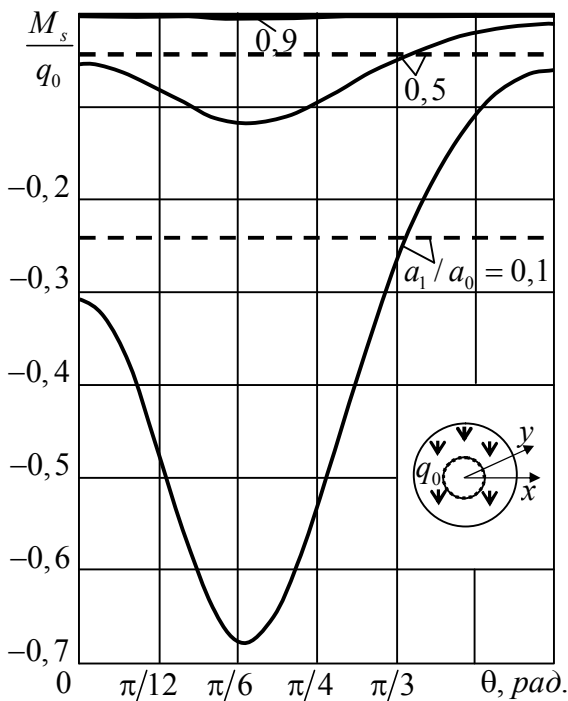


Рис. 6

концентрации изгибающих моментов. Заметим, что такая задача рассматривалась и другими авторами, но системы для определения коэффициентов при логарифмических слагаемых, как уже отмечалось, содержали ошибки, из-за чего полученные этими авторами значения изгибающих моментов отличаются от описанных выше. На рис. 6 изображены графики распределения моментов M_s/q_0 около внутреннего контура L_1 для случая предыдущей задачи, когда жестко заземлен внутренний контур. Как видно, в отличие от предыдущего, в этом случае с уменьшением отношения a_1/a_0 происходит резкая концентрация моментов около внутреннего контура, при этом, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень этой концентрации. Заметим, что

полученные нами результаты достаточно хорошо согласуются с данными других авторов, найденными методом рядов. Однако метод рядов не позволил этим ав-

торам рассматривать достаточно близкие расстояния между контурами, поэтому у них рассмотрены случаи, когда контуры далеки друг от друга ($a_1/a_0 \leq 0,2$) и влияние одних контуров на НДС около других незначительно.

На рис. 7 для кругового кольца с внешним жестко защемленным контуром L_0 радиуса a_0 и внутренним незагруженным контуром L_1 радиуса $a_1 = 0,2a_0$, при действии сосредоточенной силы P_1^0 в точке $z = c$ оси Ox , в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и отношения c/a_0 изображены графики распределения моментов M_s/P_1^0 для точек контура L_1 . Графики распределения моментов даны для $\theta \leq \pi/2$, т. к. при $\theta > \pi/2$ не наблюдается существенных изменений значений моментов. Из данных рис. 7 видно, что с ростом отношения c/a_0 значения изгибающих моментов уменьшаются, стремясь к нулю, что связано с отдалением сосредоточенной силы от контура L_1 , чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов около этого контура. Для изотропной плиты, полученные результаты хорошо согласуются с известными, полученными для достаточно больших расстояний между контурами и точкой приложения силы, для анизотропной плиты задача решена впервые.

На рис. 8 для случая изгиба бесконечной плиты с двумя одинаковыми круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = a$) моментами $M_y^\infty = m_y$ изображены графики распределения моментов M_s/m_y , возникающих около контура ле-

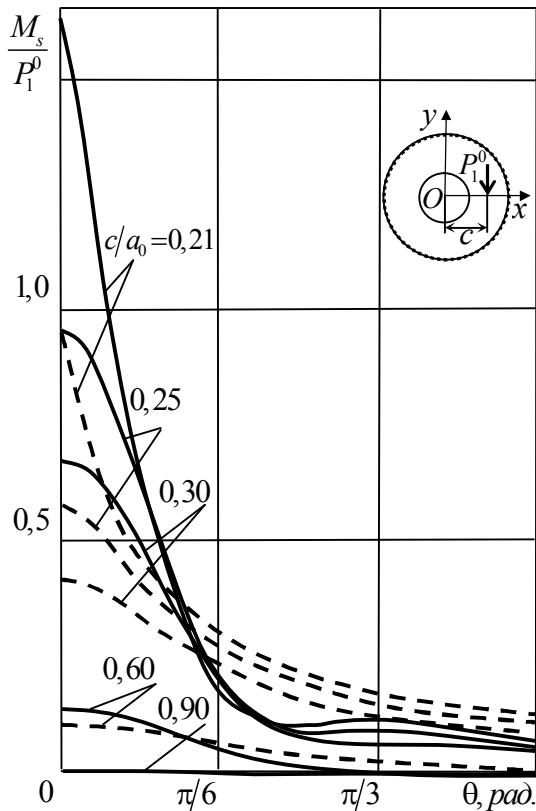


Рис. 7

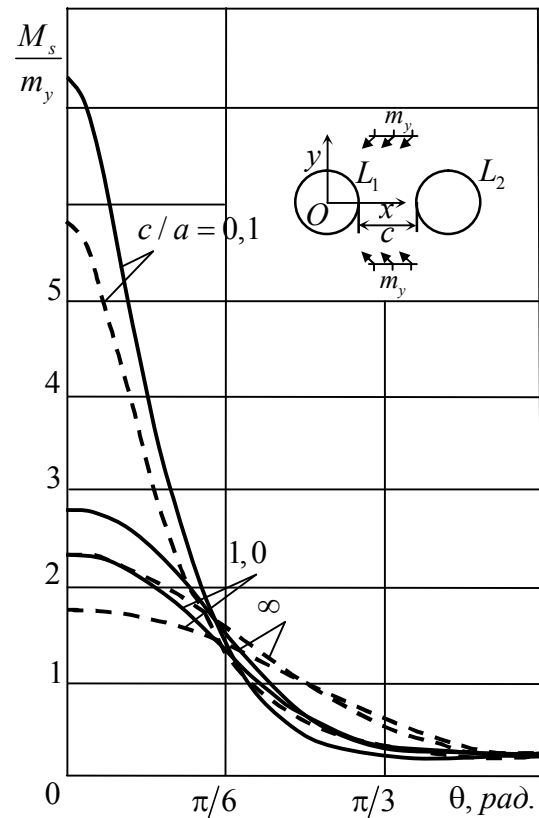


Рис. 8

вого отверстия, в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и от отношения c/a , где c – расстояние между контурами отверстий. Значения моментов для $c/a = \infty$ относятся к случаю плиты с одним круговым отверстием. Как видно, с уменьшением расстояния между контурами значения моментов около контуров в зоне между отверстиями растут. Вдали от перемычки между отверстиями значения моментов при сближении отверстий изменяются незначительно. Чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов в зоне между отверстиями.

Исследованиями для плит с криволинейными отверстиями установлено, что известные до сих пор в литературе методы решения таких задач приводят к результатам, значительно отличным от реальных. Достаточно близкие к реальным значения изгибающих моментов получаются лишь при использовании описанного выше метода ОМНК. При установлении этого факта вначале были проведены исследования для случая плоской задачи, которая для пластинки с криволинейными отверстиями является наиболее исследованной. Нашими исследованиями для изотропной пластинки с квадратным отверстием установлено, что получаемые при использовании предложенного выше метода ОМНК результаты сравнительно хорошо согласуются с известными, найденными первоисследователем задач для пластинки с многоугольным отверстием академиком Г. Н. Савиным методами конформных отображений и интегралов типа Коши, причем последние результаты тем ближе к нашим, чем больше оставлял Г. Н. Савин членов в отображающей функции, т. е. чем точнее функция отображала внешность единичного круга на внешность заданного квадрата. Наши результаты в случае использования закруглений окрестностей вершин квадрата становятся еще ближе к данным Г. Н. Савина. Результаты, полученные другими авторами, которые использовали в основном метод рядов, значительно далеки от реальных. Для анизотропной пластинки с аналогичным отверстием указанный выше метод Г. Н. Савина не применим, а результаты, полученные методом рядов, оказались

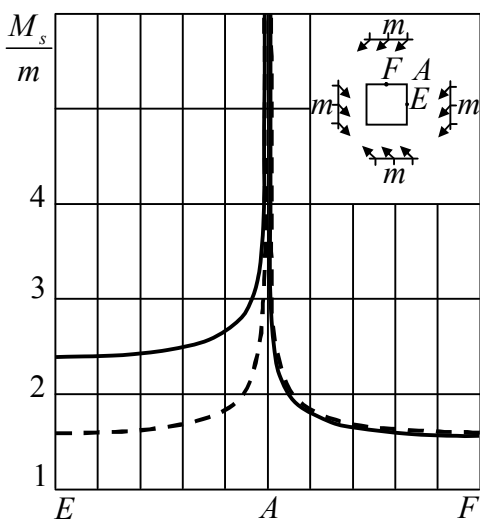


Рис. 9

еще более неточными. Затем аналогичные исследования были проведены для случая изгиба плиты с криволинейным отверстием, которые подтвердили значительные погрешности известных в литературе результатов от реальных, вплоть до больших отличий в закономерности распределения изгибающих моментов около контуров отверстий. На рис. 9 для всестороннего изгиба плиты с квадратным отверстием с длиной стороны $2a$ моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = t$ изображены полученные нами с использованием приведенного выше решения графики распределения изгибающих моментов в точках отрезков сторон квадрата EA (M_y/m) и AF (M_x/m).

Для остальных частей сторон квадрата значения моментов легко восстанавлива-

ются по имеющейся симметрии. Как и ранее, сплошные кривые относятся к материалу М2, штриховые – к изотропному материалу М1. Как и следовало ожидать, для изотропной плиты имеет место симметрия распределения моментов вдоль сторон квадрата, для анизотропного материала симметрия не наблюдается. При приближении к вершинам квадрата моменты стремятся к $+\infty$. Результаты, полученные в работах других авторов методом рядов, несколько согласуются с нашими лишь в точках вблизи середин сторон квадрата, существенно отличаясь от них в окрестностях вершин. На рис. 10 представлены графики распределения тех же моментов, что на рис. 9, в случае одно-стороннего изгиба плиты с квадратным отверстием моментами $M_y^\infty = m_y$. Как видно,

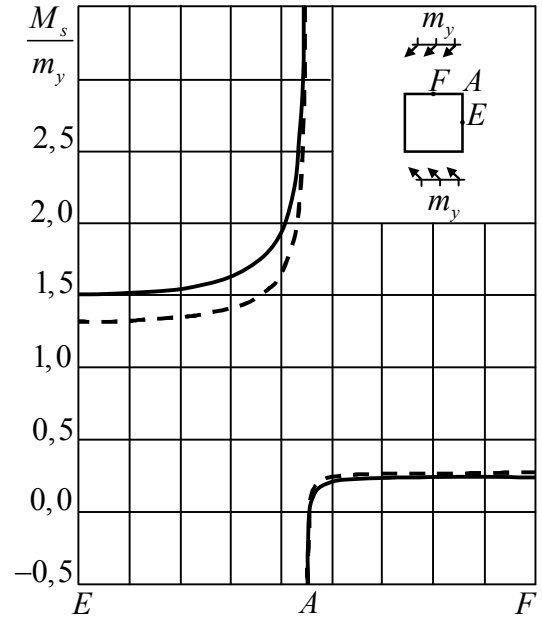


Рис. 10

в отличие от предыдущего, всестороннего изгиба плиты, в случае одно-стороннего изгиба при приближении к вершинам квадрата значения моментов стремятся к бесконечностям разных знаков и, естественно, они не могут аппроксимироваться одной кривой в окрестностях вершин, что предполагают исследователи при использовании метода рядов. При подходе к вершинам вдоль горизонтальных сторон моменты стремятся к $-\infty$, при подходе вдоль вертикальных сторон – к $+\infty$, причем, чем выше «степень анизотропии» (отличие a_{11}/a_{22} от 1), тем больше значения моментов вдоль вертикальных сторон и меньше вдоль горизонтальных сторон. Эти закономерности не изменяются при аппроксимации окрестностей вершин углами дугами вписанных окружностей даже весьма малых радиусов. Заметим, что такая закономерность стремления моментов к бесконечности разных знаков при подходе к вершинам углов для некоторых сильно анизотропных материалов наблюдается и при рассмотренном выше всестороннем изгибе плиты. В частности, для плиты из березовой фанеры моменты стремятся к $+\infty$, если приближение к вершине происходит вдоль горизонтальных сторон, перпендикулярных направлению с наибольшей жесткостью волокон ($a_{11} \ll a_{22}$ или $E_1 \gg E_2$); если же это приближение происходит вдоль сторон, перпендикулярных к мягким во-

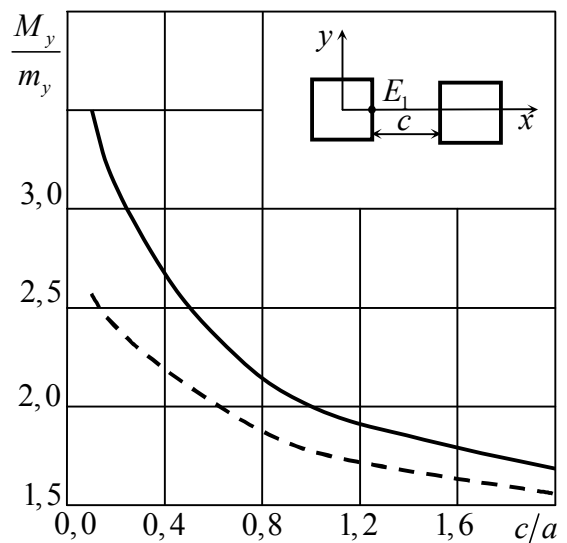


Рис. 11

локнам, то моменты стремятся к $-\infty$.

На рис. 11 для одностороннего изгиба плиты с двумя квадратными отверстиями с длиной сторон $2a$ моментами $M_y^\infty = m_y$ для различных значений c/a , отношения расстояния между отверстиями c к полудлине их сторон a , изображены графики изменения изгибающих моментов M_y/m_y вблизи точки перемычки $E_1(a, 0)$ на контуре левого отверстия. Видно, что с уменьшением расстояния между отверстиями (отношения c/a) значения изгибающих моментов вблизи контуров и точках перемычки растут, особенно в плите из анизотропного материала. Если расстояние между отверстиями более трех длин сторон ($c/a > 6$), то влиянием одного отверстия на значения моментов около другого незначительно и им можно пренебречь. Для близких расстояний между контурами особенно большие значения моментов возникают в точках перемычки вблизи контуров отверстий.

На рис. 12 для плиты с треугольным отверстием в виде равнобедренного треугольника с высотой $2a$ по оси абсцисс и углом при вершине φ изгибаемой моментами $M_y^\infty = m_y$ изображены графики распределения моментов в точке оси Ox

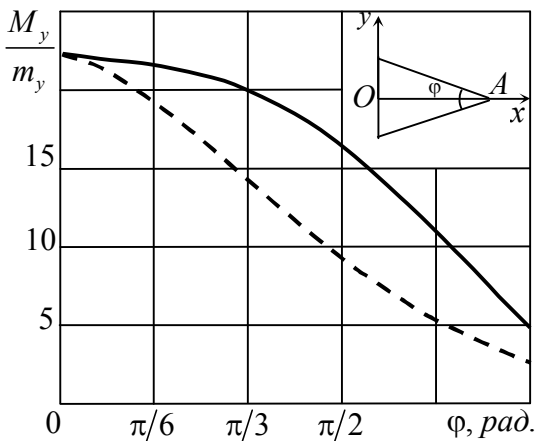


Рис. 12

вблизи вершины A (в точке $x = 2,001a$) в зависимости от угла φ . Как показали расчеты, с уменьшением угла φ значения изгибающих моментов вблизи боковых сторон треугольника уменьшаются, вблизи основания растут. Видно, что с уменьшением угла φ значения моментов растут и при $\varphi = 0$ они получаются такими же, как в плите с одной трещиной, причем это значение не зависит от анизотропии материала. Последнее согласуется с известным фактом для пластинки с трещиной в плоской задаче, когда σ_y вблизи вершины на

продолжении трещины (и коэффициент интенсивности напряжений k_1), чему при изгибе плиты соответствует M_y , не зависит от анизотропии материала. Как показали расчеты, в точках плиты на продолжении высоты, удаленных от вершины A на расстояния более высоты $2a$, значения моментов такие же, как в плите без отверстия, т. е. влияние отверстия на напряженное состояние можно пренебречь.

В четвертом разделе диссертации разработана аналогичная решению плоской задачи вязкоупругости методика сведения задач изгиба вязкоупругих плит с помощью метода малого параметра к последовательности задач классической теории изгиба плит, использующей комплексные потенциалы; получены основные соотношения для комплексных потенциалов приближений, их общие представления для многосвязной области, граничные условия для их определения; дано общее решение задачи вязкоупругости для многосвязных областей.

Рассматривается задача о вязкоупругом изгибе анизотропной плиты с использованием комплексных потенциалов. Если решение задачи проводить на основе принципа Вольтерра, то после нахождения выражений основных характеристик изгиба (например, изгибающих моментов), заменой упругих постоянных в этих выражениях соответствующими временными операторами можно найти значения этих величин в любой момент времени. Но это возможно в простейших задачах, когда для исследуемых величин получаются аналитические формулы в виде дробно-линейных функций от упругих постоянных. Для анизотропных плит, тем более многосвязных, такие решения получить невозможно. Поэтому непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу НДС вязкоупругих анизотропных плит невозможно. В связи с этим возникает необходимость и в этих случаях получать такие решения, которые были бы дробно-линейными функциями от упругих постоянных. Для этого в работе на анизотропные плиты распространен разработанный для решения плоских задач вязкоупругости метод сведения их к ряду задач классической теории изгиба плит. Если, как и в плоской задаче, вводить малый параметр

$$\lambda = \nu_{12} - \nu_{120}, \quad (15)$$

где ν_{120} – мгновенно-упругое значение коэффициента Пуассона ν_{12} . то все величины, характеризующие НДС плиты, в т. ч. комплексные потенциалы вязкоупругости, представляются рядами по степеням малого параметра λ :

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j W'_{jk}(z_k), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} W'_{jk}(z_k) &= \Gamma_{jk} z_k + W'_{j0k}(z_k); \quad (17) \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} &= \left(-\frac{a_{11} M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{12}^0 M_y^\infty}{D_0}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{a_{66} H_{xy}^\infty}{2D_0}, -\frac{a_{12}^0 M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{22} M_y^\infty}{D_0}, 0 \right), \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} &= \left(\frac{a_{11} M_y^\infty}{D_0}, 0, \frac{a_{11} M_x^\infty}{D_0}, 0 \right), \quad (18) \end{aligned}$$

$\Gamma_{jk} = 0$ ($j \geq 2$); $W'_{j0k}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими L_l при известных аффинных преобразованиях. После подстановки рядов (16) в граничные условия на контурах и сравнения в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях λ , получается следующая рекуррентная последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0k\alpha} W'_{jk}(z_k) = f_{j\alpha}(t) \quad (\alpha = 1, 2), \quad (19)$$

где $g_{0ki\alpha}$, $f_{ji\alpha}(t)$ – постоянные и функции, зависящие от граничных условий на контурах, например, для неподкрепленного контура L_l

$$g_{0ki1} = \frac{p_{0k}}{\mu_k}, \quad g_{0ki2} = \frac{q_{0k}}{\mu_k},$$

$$f_{ji1} = -\delta_j^0 \left(\int_0^s m_i dy + c_i x \right) - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{j-1} \frac{p_{j-n,k}}{\mu_k} W'_{nk}(z_k),$$

$$f_{ji2} = -\delta_j^0 \left(\int_0^s m_i dx - c_i y \right) - (1 - \delta_j^0) 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{j-1} q_{j-n,k} W'_{nk}(z_k).$$

После удовлетворения граничным условиям (19) функции приближений $W'_{jk}(z_k)$ становятся известными и, заменив степени малого параметра λ^j временными операторами, можно найти комплексные потенциалы (16), а по ним и исследуемые величины в любой момент времени. Для этого, исходя из формулы (15) и заменив v_{12} временным оператором, для малого параметра λ получим

$$\lambda = D_1 \cdot \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_1 - \delta_1) + D_2 \cdot \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_2), \quad (20)$$

где

$$D_1 = \frac{\delta_1}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2}{\beta_1 - \beta_2 + \delta_1} + 1 - 4v_{12}^0 \right], \quad D_2 = \frac{\delta_2}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2 + \delta_1};$$

E_i^0 – мгновенно упругие значения модулей Юнга E_i ; δ_i , β_i – реологические постоянные материала плиты, связанные с изменением E_i во времени. Тогда для степеней малого параметра λ^j будем иметь

$$\lambda^j = \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathcal{E}_\alpha^{*j-k}(-\beta_1 - \delta_1) \cdot \mathcal{E}_\alpha^{*k}(-\beta_2). \quad (21)$$

По известным функциям приближений (17) и степеням малого параметра λ (21) можем найти комплексные потенциалы задачи (16), а, следовательно, и значения исследуемых величин в любой момент времени.

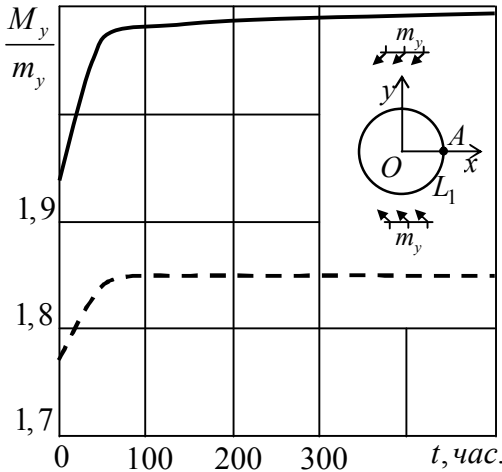


Рис. 13

значения исследуемых величин в любой момент времени.

Для бесконечной плиты с круговым отверстием радиуса a ($a_1 = b_1 = a$) при одностороннем изгибе моментами $M_y^\infty = m_y$ были проведены численные исследования изменения изгибающих моментов в зависимости от времени. Плита считалась изготовленной из материалов алюминий (материал М1) и эпоксид (М3). Коэффициенты деформаций и реологические постоянные для этих материалов

приведены в табл. 2. Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

На рис. 13 изображены графики изменения изгибающих моментов M_y/m_y в точке $A(a,0)$, где они достигают максимальных значений. Сплошные линии относятся к плите из материала МЗ, штриховые – к плите из материала М1. Из рис. 13 видно, что с течением времени значения моментов в плите изменяются. При этом большие изменения моментов происходят лишь в первые 50 час. после приложения нагрузки, а через 200 час. они практически не изменяются, т.е. в плите устанавливается стационарное состояние. Как показывают расчеты, и в других задачах стационарное состояние устанавливается примерно в такое же время. Поэтому в дальнейшем результаты расчетов будем приводить для двух случаев: когда $t=0$ (начальный момент времени) и $t=400$ (через 400 час. от начала процесса деформирования), когда, наверняка, уже установилось стационарное состояние. Как следует из указанных результатов, при переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов около контура отверстия претерпевают большие изменения. На рис. 14 для описанной задачи изображены графики распределения моментов M_s/m_y около контура

отверстия в начальном и стационарном состояниях в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox . Сплошные и пунктирные линии рисунка соответствуют начальному и стационарному состояниям. Как следует из данных рис. 14, при переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов вблизи отверстия претерпевают значительные изменения, причем наибольшие изменения претерпевают значения моментов в точках A и B , соответствующих углам $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$. Так, если плита изготовлена из материала М1 значения M_s/m_y в точке A увеличиваются на 4,6%, в точке B уменьшаются на 35%, в случае плиты из материала МЗ

Таблица 2

Постоянные материала	Материал	
	М1	М3
$a_{11} \cdot 10^4, МПа^{-1}$	0,1408	0,4347
$a_{22} \cdot 10^4, МПа^{-1}$	0,1458	0,6250
$a_{12} \cdot 10^4, МПа^{-1}$	-0,0352	-0,0478
$a_{66} \cdot 10^4, МПа^{-1}$	0,3521	3,2467
α^*	0,5000	0,8460
$\beta_1^*, c^{\alpha-1}$	0,00050	0,1570
$\beta_2^*, c^{\alpha-1}$	0,00049	0,2745
$\delta_1^*, c^{\alpha-1}$	0,00615	0,0323
$\delta_2^*, c^{\alpha-1}$	0,00614	0,1295

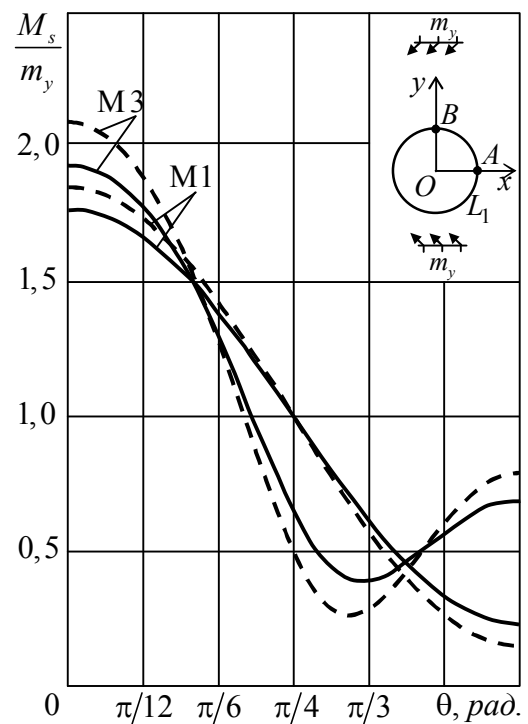


Рис. 14

значения M_s/m_y в точке A увеличиваются на 8,2%, а в точке B на 14,7%.

Заметим, что для изотропного материала полученные результаты совпадают с найденными ранее другими авторами. Для стационарного состояния они с точностью до 4 цифр совпадают с найденными при использовании принципа Вольтерра к приведенному в работе точному решению задачи.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В результате проведенных в работе исследований разработана методика решения задач классической теории изгиба плит, основанная на использовании комплексных потенциалов и ОМНК, предложен метод решения задач линейной вязкоупругости, дано приложение этих подходов к решению различных классов задач для многосвязных однородных плит с отверстиями и трещинами, при различных механических воздействиях.

Основные научные результаты и выводы, полученные в работе, следующие.

1. Исследован и установлен общий вид комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит, решением частных задач подтверждены эти общие представления.

2. На задачи изгиба распространен численно-аналитический метод решения плоской задачи теории упругости анизотропного тела с отверстиями и трещинами, основанный на использовании конформных отображений, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, применении обобщенного метода наименьших квадратов для удовлетворения граничным условиям на контурах.

3. Методом малого параметра разработана методика решения задач линейной вязкоупругости сведением исходной задачи к последовательности задач классической теории изгиба анизотропных плит.

4. Получены решения ряда новых задач об изгибе плит с отверстиями и трещинами как в упругой, так и в вязкоупругой постановках.

5. Составлены комплексы программ для численной реализации полученных решений.

6. Численными исследованиями установлена сходимость решений задач и устойчивость получаемых результатов, совпадение этих результатов для частных задач с известными в литературе, а также с найденными в данной работе с помощью точных аналитических решений для изотропных плит с круговыми контурами.

7. Для всех решенных задач проведены подробные численные исследования НДС, с помощью которых установлены механические закономерности влияния на значения основных характеристик НДС геометрических характеристик отверстий, их количества и взаимного расположения, физико-механических параметров материалов плит, вида внешнего воздействия, а в задачах вязкоупругости и времени приложения нагрузки. Установлено, что вблизи угловых точек контуров возникает высокая концентрация изгибающих моментов, увеличение

количества отверстий и их сближение их контуров приводит к росту значений основных характеристик, подкрепление или защемление контуров уменьшают эти значения, если материал плиты обладает вязкоупругими свойствами, то их НДС существенно изменяется со временем, иногда даже до 200%, причем существенные изменения НДС происходят в первые десятки часов после загрузки. Поэтому при исследовании НДС таких тел нельзя ограничиться решением задачи классической теории изгиба с пренебрежением реологических свойств материалов, а нужно решать задачу вязкоупругости.

Результаты, представленных в диссертационной работе исследований, имеют как теоретический, так и практический интерес. Предложенные методики могут использоваться для решения разнообразных инженерных задач.

Основное содержание диссертационной работы отражено в публикациях:

1. Калоеров, С.А. Результаты новых исследований по изгибу многосвязной анизотропной плиты / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природ. науки.– 2014.– Вып. 1.– С. 48–56.

2. Калоеров, С. А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С. А. Калоеров, А. И. Занько, А. А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 55. – С. 99–138.

3. Калоеров, С.А. Решение задач об изгибе многосвязных плит под действием распределенных по основанию усилий / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки.– 2015.– Вып. 2.– С. 94–104.

4. Калоеров, С.А. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 456–464.

5. Калоеров, С.А. Эффективный метод определения напряженного состояния пластинки с криволинейными отверстиями / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Прикладная механика. – 2017.– Т. 53, № 1.– С. 108–120. **Тоже:** Kaloerov, S. A. A Method for Determining the Stress State of Plates with a Curved Hole / S.A. Kaloerov, A.I. Zan'ko // International Applied Mechanics. – 2017.– Vol. 53, Iss. 1.– P. 89–103.

6. Калоеров, С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Прикладная механика и техническая физика. – 2017.– Т. 58, № 2.– С. 141–151. **Тоже:** Kaloerov, S. A. Solving the Problem of Linear Viscoelasticity for Multiply Connected Anisotropic Plates / S.A. Kaloerov, A.I. Zan'ko // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2017.– Vol. 58, No. 2.– P. 308–317.

7. Калоеров, С. А. Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XVIII междунар. конф., Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. –Т. 1. – С. 349–353.

8. Калоеров, С. А. Изгиб многосвязной анизотропной плиты сложной конфигурации / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Актуальные проблемы механики дефор-

мируемого твердого тела: Матер. VI Междунар. науч. конф., Донецк-Мелекино, 11–14 июня 2013 г. – Донецк: Юго-Восток. – 2013. – Т. 1. – С. 158–162.

9. Занько, А. И. Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит / А.И. Занько, С.А. Калоеров, А.А. Кошкин // Современные пробл. механики сплошной среды: Тез. док. XVIII междунар. конф., Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 79.

10. Калоеров, С. А. Приближенный метод решения задач об изгибе анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Донецкие чтения 2016: Матер. I Междунар. науч. конф., Донецк, 16-18 мая 2016 г. – Т. 1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета.– 2016.– С.30–31.

АННОТАЦИИ

Занько А.И.: Решение задач теории изгиба тонких многосвязных анизотропных плит новыми численно-аналитическими методами.– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк, 2017.

В работе исследованы и установлены общие представления комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит; на задачи изгиба плит распространен метод определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворении граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов. Методом малого параметра разработана методика сведения задач линейной вязкоупругости для анизотропных плит к последовательности задач классической теории изгиба анизотропных плит. Решен ряд новых задач для многосвязных плит с отверстиями различной конфигурации, в частности, для плит с квадратными и треугольными отверстиями и трещинами. Проведены подробные численные исследования НДС, установлены механические закономерности влияния на значения основных характеристик НДС геометрических характеристик отверстий, их количества и взаимного расположения, физико-механических параметров материалов плит, вида внешнего воздействия, а в задачах вязкоупругости и времени приложения нагрузки. Установлено, что вблизи угловых точек контуров возникает высокая концентрация изгибающих моментов, увеличение количества отверстий и сближение их контуров приводит к росту значений основных характеристик, подкрепление или защемление контуров уменьшают эти значения, если материал плиты обладает вязкоупругими свойствами, то их НДС существенно изменяется со временем, причем значительные изменения НДС происходят в первые десятки часов после загрузки. Поэтому при исследовании НДС вязкоупругих плит нельзя ограничиться решением задачи классической теории изгиба с пренебрежением реологических свойств материалов, а нужно решать задачу вязкоупругости.

Результаты, представленных в работе исследований, имеют как теоретический, так и практический интерес. Предложенные методики могут использоваться для решения разнообразных инженерных задач.

Ключевые слова:

многосвязная плита, вязкоупругость, комплексные потенциалы, конформные отображения, обобщенный метод наименьших квадратов, стационарное состояние, принцип Вольтерра, метод малого параметра.

Zanko A.I.: New numerically-analytical solving methods for bending problems for multiply connected anisotropic plates.– The manuscript.

The thesis for the Candidate of physical and mathematical sciences degree on specialty 01.02.04 – mechanics of a deformable solid body, GOU VPO «Donetsk National University», Donetsk, 2017.

In this paper, we investigated and established general representations of complex potentials in the theory of bending of multiply connected anisotropic plates. The method for determining the complex potentials of the plane elasticity problem was used to solve the plate bending problem. This method consists in constructing a general form of complex potentials, expanding functions in a Laurent series and Faber polynomials, and satisfying the boundary conditions with the generalized least-squares method. The method of reducing linear viscoelasticity problems for anisotropic plates to a sequence of problems of the classical theory of the bending of anisotropic plates has been developed by the small parameter method. A number of new problems for multiply connected plates with holes of various configurations were solved, in particular, for plates with square and triangular holes and cracks. Detailed numerical studies were undertaken for the stress-strain state. The mechanical influence pattern of the geometric characteristics of the holes, their number and mutual arrangement, the physical and mechanical parameters of the plate materials, the type of external influence, on the values of the basic characteristics of the stress-strain state are established. In problems of viscoelasticity, the influence of the load application time is also considered. It is established that a high concentration of bending moments occurs near the corner points of the contours. The increase in the number of holes and the convergence of their contours lead to an increasing values of the main characteristics. Supporting or fixing of the contours reduces these values. If the plate material has viscoelastic properties, then stress-strain state of the contours varies significantly over time. Significant changes in the stress-strain state occur in the first ten hours after the loading. Thus, when studying the stress-strain state of viscoelastic plates, one cannot confine oneself to the solving the problem of the classical theory of bending, neglecting the rheological properties of materials. In this case, it is necessary to solve the problem of viscoelasticity.

The results of the research presented in this paper have both theoretical and practical interest. The proposed methods can be used to solve a variety of engineering problems.

Key words:

multiply connected plate, viscoelasticity, complex potentials, conformal mappings, generalized least squares method, stationary state, Volterra principle, small parameter method.