

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

На правах рукописи

Занько Алена Игоревна

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ МНОГОСВЯЗНЫХ
АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ НОВЫМИ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ
МЕТОДАМИ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор, Калоеров С. А.

Донецк – 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО РАЗРАБОТКЕ ТЕОРИИ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛИТ	13
1.1. Разработка и развитие моделей и методов теории изгиба тонких плит	13
1.2. Методы решения задач для анизотропных плит	19
1.3. Решение задач вязкоупругости	29
1.4. Выводы по разделу 1	32
РАЗДЕЛ 2. ИССЛЕДОВАНИЯ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛИТ. ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ	34
2.1. Основные соотношения для комплексных потенциалов	34
2.2. Построение точных решений задач для изотропной плиты с круговыми контурами с определением логарифмических членов комплексных потенциалов из граничных условий	48
2.3. Построение решений задач для анизотропного кольца с определением логарифмических членов комплексных потенциалов из граничных условий	65
2.4. Выводы по разделу 2	75
РАЗДЕЛ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ	77
3.1. Постановка задачи	77
3.2. Решение задачи	78
3.3. Исследования напряженного состояния эллиптической плиты с эллиптическим отверстием	85
3.4. Исследования напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптическими отверстиями или разрезами	95
3.5. Исследования напряженного состояния плиты с криволинейными	

отверстиями.....	98
3.6. Исследование напряженного состояния при действии сосредоточенных сил.....	107
3.7. Выводы по разделу 3.....	112
РАЗДЕЛ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ	114
4.1. Принцип Вольтерра и операторы Работнова	114
4.2. Выражения упругих постоянных через упругие операторы	117
4.3. Решение задач вязкоупругости с использованием принципа Вольтерра.....	121
4.4. Метод малого параметра для решения задач вязкоупругости	126
4.5. Решение задач вязкоупругости методом малого параметра.....	132
4.6. Исследование вязкоупругого состояния плит с отверстиями	134
4.7. Выводы по разделу 4.....	136
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	139
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	141
ПРИЛОЖЕНИЯ	160
Приложение А	161
Приложение Б.....	176

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В современной промышленности и, в первую очередь, в авиастроении, приборостроении, в космической промышленности в качестве элементов конструкций широко используются тонкие пластинки из композиционных материалов. По техническим соображениям или эксплуатационным причинам эти пластинки могут иметь концентраторы напряжений типа отверстий или трещин. Под действием различных механических сил вблизи таких концентраторов напряжений могут возникать высокие уровни напряжений, которые могут приводить к потере прочности указанных элементов. Поэтому необходимо иметь надежные методы определения напряженно-деформированного состояния (НДС) многосвязных пластин и решения прикладных задач, возникающих при проектировании соответствующих конструкций. Для случая, когда пластинки находятся в условиях обобщенного плоского НДС, такие методы и их приложения даны в различных работах. Для поперечного же изгиба пластин, называемых плитами, таких исследований значительно меньше, не разработаны методы, позволяющие получать результаты с достаточной степенью точности, если расстояния между контурами малы. Кроме того, для анизотропных плит не разработаны методы и не решены задачи вязкоупругости, когда нужно определять изменение НДС с течением времени после приложения нагрузок. Поэтому актуальна тема данной диссертационной работы, посвященная разработке надежных методов определения НДС многосвязных плит с контурами произвольной конфигурации и расположения, а также изменения НДС с течением времени.

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка методов определения НДС и его изменения с течением времени для однородных многосвязных анизотропных плит с отверстиями произвольной конфигурации, решение на их основе практических задач с установлением закономерностей влияния на НДС геометрических характеристик плит, физико-механических свойств их материалов и времени действия нагрузок. Для достижения этой цели необходимо было

– исследовать и установить общий вид комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных плит;

– распространить на задачи изгиба плит метод определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов с учетом конформных отображений, разложений голоморфных в соответствующих областях функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК);

– разработать метод решения задач изгиба многосвязных анизотропных плит из вязкоупругих материалов;

– исследовать эффективность разработанных методов и достоверность получаемых результатов;

– с использованием разработанных методов получить теоретические решения конкретных задач с их алгоритмизацией;

– составить комплексы программ на алгоритмическом языке для численной реализации получаемых решений;

– провести численные исследования с целью установления закономерностей изменения НДС плит в зависимости от их геометрических характеристик, физико-механических свойств их материалов и времени приложения нагрузок.

Объектом исследования является НДС однородных анизотропных плит с отверстиями и трещинами произвольной конфигурации при действии механических сил, зависящее от геометрических характеристик, физико-механических свойств их материалов, времени приложения нагрузок.

Предметом исследования является разработка эффективных методов, позволяющих определять НДС находящихся в условиях изгиба многосвязных плит с произвольно расположенными отверстиями и трещинами; получение решения новых задач с исследованием влияния геометрических и физико-механических характеристик плит и времени приложения нагрузок на возникающее в них НДС.

Методы исследования. Для достижения сформулированной цели в работе исследованы и установлены общие представления комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных плит; на задачи изгиба плит распространен метод определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов с использованием конформных отображений, разложений голоморфных в соответствующих областях функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий ОМНК. Для анизотропных плит разработан метод решения задач линейной вязкоупругости. Исследованы эффективность разработанных методов и достоверность получаемых результатов. Получены теоретические решения конкретных задач с их алгоритмизацией, проведены численные исследования с целью установления закономерностей изменения НДС плит в зависимости от их геометрических характеристик, физико-механических свойств их материалов, времени действия нагрузок.

Связь с научными программами, планами, темами. Проведенные в работе исследования связаны с разработкой конкурсных фундаментальных научно-исследовательских проектов «Исследование вязкоупругого и электромагнитно-упругого состояния многосвязных сред» (№ госрегистрации 0111U000406, 2011–2013 гг.) и «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (№ госрегистрации 0117D000071, 2017 г.). Результаты исследований по теме диссертации представлены в отчетных материалах по указанным НИР.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованной литературы и двух приложений с таблицами и рисунками. Общий объем диссертации составляет 200 страниц, из которых текст диссертации занимает 140 страниц, рисунки основного текста 5 страниц, список литературы из 190 источников 20 страниц, приложения 40 страниц.

В первом разделе дается краткое описание истории становления и развития моделей теории изгиба тонких плит, методов решения задач и, в первую очередь, методов решения задач для многосвязных анизотропных плит и их применений. Изучены вопросы разработки методов и решения задач линейной вязкоупругости, когда учитывается изменение НДС во времени. Анализом литературы охвачено 190 работ отечественных и зарубежных авторов. С помощью анализа литературных источников установлено, что к настоящему времени разработаны физические и математические основы различных теорий изгиба тонких плит в упругой и вязкоупругой постановках, с применением прикладной теории изгиба тонких плит и метода комплексных потенциалов решены некоторые частные задачи с использованием метода рядов, общие методы решения задач для многосвязных анизотропных однородных плит с отверстиями произвольной конфигурации не разработаны, поэтому не решены многие практически важные задачи даже для случая механических воздействий, не говоря о задачах вязкоупругости, которые вообще не рассматривались. На этой основе обоснована актуальность темы диссертационной работы.

Во втором разделе работы даны основные соотношения для комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных и изотропных плит, выражения через них основных характеристик НДС плит (изгибающих и крутящих моментов, поперечных сил и прогиба), граничные условия для определения комплексных потенциалов. Для произвольной многосвязной области получены общие представления комплексных потенциалов, подтверждены эти представления нахождением точных решений некоторых частных задач без учета этих представлений, определением логарифмических слагаемых из граничных условий.

В третьем разделе работы дано решение задачи для многосвязной анизотропной плиты с отверстиями произвольной конфигурации и месторасположения. Методами конформных отображений и разложения функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера найдены общие представления комплексных потенциалов, содержащие неизвестные постоянные, определение которых обобщенным методом наименьших квадратов приведено к решению переопределенной систе-

мы линейных алгебраических уравнений, решаемой с помощью сингулярного разложения. Проведены численные исследования для конечных и бесконечных плит с различными отверстиями круговых, эллиптических, квадратных и треугольных контуров, а также с трещинами. Исследования проводились как для анизотропных, так и для изотропных материалов. Выявлены закономерности влияния на НДС геометрических характеристик отверстий, их количества и взаимного расположения, физико-механических параметров материалов плит, вида внешнего воздействия.

В четвертом разделе диссертации разработана аналогичная решению плоской задачи вязкоупругости методика сведения задач изгиба вязкоупругих плит с помощью метода малого параметра к последовательности задач классической теории изгиба плит, использующей комплексные потенциалы; получены основные соотношения для комплексных потенциалов приближений, их общие представления для многосвязной области, граничные условия для их определения; дано общее решение задачи вязкоупругости для многосвязных областей, для некоторых частных задач проведены численные исследования, с помощью которых установлено влияние времени на изменение НДС.

В заключении сформулированы основные обобщенные научные результаты проведенных в работе теоретических и численно-аналитических исследований.

На защиту выносятся следующие полученные в работе научные результаты:

– установление общего вида комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит;

– распространение на задачи изгиба тонких плит метода определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающегося в построении общего вида комплексных потенциалов, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворении граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов;

– разработка методики сведения методом малого параметра задач линейной

вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит к последовательности задач классической теории изгиба тонких плит;;

– решение ряда новых задач изгиба для многосвязных плит с отверстиями различной конфигурации, в частности, для плит с криволинейными контурами и трещинами;

– проведение численных исследований с установлением новых механических закономерностей влияния на значения основных характеристик НДС плит их геометрических характеристик, физико-механических свойств материалов, времени действия нагрузок.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что

– исследованы и установлены общие представления комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит;

– на задачи изгиба тонких плит распространен метод определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворении граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов;

– разработана методика сведения методом малого параметра задач линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит к последовательности задач классической теории изгиба тонких плит;

– решен ряд новых задач изгиба для многосвязных плит с отверстиями различной конфигурации, в частности, для плит с криволинейными контурами и трещинами;

– проведены алгоритмизация и численная реализация указанных решений на компьютерах;

– проведены численные исследования с установлением новых закономерностей влияния на значения основных характеристик НДС плит их геометрических характеристик, физико-механических свойств материалов, времени действия нагрузок.

Достоверность полученных результатов и выводов работы обеспечивается корректным использованием соотношений механики деформируемого твердого тела; строгостью постановок рассматриваемых задач и применяемых математических методов; использованием проверенных математических и численных методов и алгоритмов; контролем степени точности удовлетворения граничных условий в многочисленных точках контуров; согласованием для частных задач получаемых результатов с известными в литературе, найденными другими авторами иными методами, совпадением для частных задач результатов, получаемых по приближенным и точным решениям.

Практическая ценность результатов состоит в возможности использования разработанных методов решения задач и программных средств для их численной реализации в расчетах, связанных с проектированием и определением рабочих параметров элементов конструкций в виде тонких плит, с отверстиями; в получении результатов, позволяющих оценивать влияние физико-механических свойств материалов, способа внешнего воздействия, количества, взаимного расположения и сочетания отверстий и времени действия усилий на НДС элементов конструкций.

Апробация результатов диссертации. Основные положения работы были доложены и обсуждены на ряде заседаний объединенного научного семинара по механике сплошных сред Донецкого национального университета, на ряде научных конференций, в том числе: на VII Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (г. Донецк – пос. Мелекино, 11–14 июня, 2013 г.), на V Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной механики и прочности конструкций» (г. Запорожье, 21-24 мая, 2015 г.), на XVIII междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 7-10 ноября, 2016 г.), на I Междунар. науч. конф. «Донецкие чтения 2016» (г. Донецк, 16-18 мая, 2016 г.). В полном объеме диссертационная работа докладывалась на объединенном научном семинаре по механике сплошных сред Донецкого национального университета, на научном семинаре кафедры теоретической и при-

кладной механики Донского государственного технического университета под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. А.Н.Соловьева, на объединенном научном семинаре кафедр железобетонных конструкций и теоретической и прикладной механики ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры» под руководством д-ра техн. наук, проф. В.М.Левина.

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах [29, 46, 47, 57–59, 61, 62, 66], из которых 6 статей [47, 57, 58, 61, 62, 66], в научных журналах, утвержденных ВАК ДНР изданиями, в которые можно опубликовать материалы по кандидатским и докторским диссертациям, 3 в материалах конференций и 1 в тезисах научных конференций [29, 46, 56, 59].

Личный вклад соискателя. Основные результаты получены автором самостоятельно. В работах [29, 46, 47, 57–59, 61, 62, 66] соавтору С. А. Калоеру принадлежит участие в постановке задач, выборе метода исследования и обсуждении получаемых результатов. В работах [29, 59, 62] соавтору А. А. Кошкину принадлежит участие в проведении численных исследований для частных задач и обсуждении полученных результатов. В работах [29, 46, 47, 57–59, 61, 62, 66] автору принадлежит получение теоретических решений задач, их алгоритмизация, составление и отладка программ численной реализации алгоритмов, проведение численных исследований с анализом их результатов. Лично автору принадлежат такие, включенные в диссертационную работу и публикации, научные результаты:

– получение уточненных общих представлений комплексных потенциалов для многосвязных плит с их подтверждением решением частных задач [62];

– распространение на задачи изгиба плит метода определения комплексных потенциалов плоской задачи теории упругости, заключающийся в построении общего вида комплексных потенциалов, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, удовлетворении граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов; решение на этой основе ряда задач [29, 46, 47, 57, 61, 62];

– разработка методики сведения методом малого параметра задачи линей-

ной вязкоупругости для многосвязных однородных плит к последовательности задач классической теории изгиба тонких плит; решение впервые задач вязкоупругости для анизотропных плит [29, 58, 59].

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО РАЗРАБОТКЕ ТЕОРИИ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛИТ

1.1. Разработка и развитие моделей и методов теории изгиба тонких плит

Первые попытки решить задачу об изгибе упругих поверхностей, т. е. упругих тел, у которых одно измерение мало по сравнению с двумя другими, были предприняты Эйлером в 1764 г. Описывая колебания идеально гибкой мембраны [165, 166], он рассматривал ее как совокупность двух систем упругих струн, натянутых в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Используя вариационное исчисление и исследуя минимум функционала

$$\int_0^s \frac{1}{\rho^2} ds, \quad (1.1)$$

выражающего энергию деформации изгиба, он для определения прогиба плиты w получил дифференциальное уравнение [165]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (1.2)$$

в котором ρ – кривизна стержня, A и B – постоянные.

Я. Бернулли-младший, используя эту же идею, для прогиба пластинки в 1789 г. получил дифференциальное уравнение [160]

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (1.3)$$

в котором D – жесткость пластинки при изгибе, q – интенсивность приложенной к ее поверхности поперечной нагрузки.

В 1809 г. Французская Академия назначила премию за разработку

математической теории поперечных колебаний пластин. В октябре 1811 г. к заключительной дате конкурса выявился лишь единственный претендент – Софи Жермен. Основываясь на результаты работы Эйлера [158] и используя вариационное исчисление, она для потенциальной энергии деформации пластинки приняла значение интеграла [158]

$$A \iint \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 ds \quad (1.4)$$

где ρ_1 и ρ_2 – главные радиусы кривизны изогнутой поверхности, A – неопределенная постоянная. Однако при вычислении вариации интеграла Софи Жермен допустила ошибку и не получила правильного уравнения для прогиба. Лагранж, входивший в состав жюри конкурса, заметил ее ошибку и, введя нужное исправление, в 1811 г. получил уравнение в правильном виде [181]:

$$k \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.5)$$

где k – неопределенный коэффициент.

Академия объявила повторный конкурс с новым сроком к октябрю 1813 г., и Софи Жермен вновь приняла в нем участие. На этот раз она представила правильное уравнение, но члены жюри потребовали физического обоснования для начального допущения (1.4). Ее постигла неудача вторично. Академия решила повторить конкурс еще раз. И в этом третьем конкурсе в 1816 г. Софи Жермен получила премию, хотя члены жюри и не были вполне удовлетворены ее работой, т. к. в последней отсутствует надлежащая мотивировка формы выражения (1.4). Результаты своих исследований она опубликовала в 1821 г. [171] и в 1826 г. [170].

Еще в середине XVIII в. сербо-хорватским математиком Ружером Бошковичем было развито известное представление об упругом теле, как о множестве мельчайших частиц, между которыми действуют силы притяжения при одних расстояниях между ними и силы отталкивания при других расстояниях. Эту теорию к изгибу плит в 1812 г. впервые применил Пуассон [184]. Чтобы придать физический смысл уравнению (1.5), Пуассон ввел допущение, согласно

которому пластинка состоит из частиц, между которыми действуют молекулярные силы, пропорциональные изменениям расстояний между молекулами. Ему удалось вывести уравнение (1.5) из условий равновесия такой системы частиц. Но, поскольку он предполагал, что все частицы распределены в срединной плоскости пластинки, постоянная k в его уравнении (1.5) получалась пропорциональной квадрату толщины пластинки, а не ее кубу, как это должно быть в действительности. В том же мемуаре Пуассон показал, что уравнение (1.5) может быть получено не только из интеграла (1.4), но и из интеграла

$$A \iint \left[\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 + m \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) \right] ds,$$

который при надлежащем выборе постоянных A и m точно выражает энергию деформации изгиба упругой пластинки. Этим объясняется, почему Софи Жермен нашла правильную форму (1.5) дифференциального уравнения пластинки, хотя интеграл (1.4) и не выражает энергии деформации изогнутой пластинки. Позднее Пуассон получил граничные условия для определения прогиба w . Но для загруженного края были получены три граничных условия, тогда как общее решение основного уравнения позволяло удовлетворить лишь двум.

Навье, как и ранее Пуассон, в своей работе [180], представленной в Академию наук 14 августа 1820 г. и опубликованной в 1823 г., предположил, что пластинка состоит из молекул, но он распределил их по всей толщине пластинки и принял, что их перемещения при изгибе параллельны срединной плоскости пластинки и пропорциональны расстояниям от нее. Таким путем он нашел правильное дифференциальное уравнение для прогиба в виде

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q, \quad (1.6)$$

где q – интенсивность приложенной нагрузки, D – жесткость пластинки при изгибе. Из-за того, что Навье принимал допущения Бошковича, полученные им результаты оказались выраженными в зависимости лишь от одной упругой константы, а его значение D совпадало с тем значением этой величины, которое

является общепринятым и в наше время, если для коэффициента Пуассона принять значение $\nu = 1/4$. Свое уравнение (1.6) Навье применил к задаче о свободно опертой прямоугольной пластинке, для которой он установил правильные граничные условия и получил решение в виде двойного тригонометрического ряда. Рассмотрел случаи равномерно распределенной нагрузки и нагрузки, сосредоточенной в середине пластинки. Это были первые удовлетворительные решения, полученные для задач изгиба пластинок.

В 1850 г. Кирхгоффом была впервые сформулирована приближенная прикладная или техническая теория изгиба тонких плит [176, 177]. Свою теорию он построил на основе двух гипотез, получивших ныне всеобщее признание. Эти гипотезы следующие: 1) каждая прямая, первоначально перпендикулярная к срединной плоскости пластинки, остается при изгибе прямой и перпендикулярной к срединной поверхности изогнутой пластинки; 2) элементы срединной плоскости пластинки при малых прогибах пластинки не испытывают удлинения. Исходя из этих двух предпосылок, Кирхгофф нашел правильное выражение для потенциальной энергии V изогнутой пластинки:

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (1.7)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластинки; w – прогиб ее срединной поверхности. Используя принцип виртуальной работы, согласно которому работа, произведенная нагрузкой q , распределенной по основанию пластинки, на всяком возможном перемещении, равна приращению потенциальной энергии пластинки, т. е.

$$\iint q \delta w dx dy = \delta V. \quad (1.8)$$

Вводя сюда значение V из (1.7) и производя указанную операцию варьирования, Кирхгофф выводит известное уравнение изгиба пластинки

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (1.9)$$

Кроме того, пользуясь принципом Сен-Венана, Кирхгофф в отличие от Пуассона, заменил упомянутые три граничных условия двумя, что позволило корректно ставить краевые задачи для основного уравнения изгиба.

В курсе лекций [178] Кирхгофф обобщил свою теорию пластинок так, что она охватила и случай, когда прогибы нельзя считать весьма малыми. Появление такой теории пластинок было большим шагом вперед в теории упругости, и вся его важность выяснилась позднее в том широком применении, которое она получила в проектировании различного рода тонкостенных конструкций.

Несмотря на некоторую логическую непоследовательность построения, прикладная теория достаточно верно описывает деформацию изгиба тонких плит и служит основой при расчете на прочность плит. Для большинства задач это подтверждено результатами, полученными на основании трехмерной теории изгиба пространственных плит. Однако, хотя Кирхгоффом были выведены основные соотношения и вскоре нашли применения в акустике, широкое использование этой теории в инженерном деле началось лишь в XX столетии [147]. Выбором прогиба в виде некоторых функций, в частности, тригонометрических рядов был решен ряд задач для плит прямоугольной, эллиптической, треугольной, секторной форм. Использовались и приближенные методы, например, методы Ритца или конечных разностей.

В работах Фёпля–Кармана [167, 175] исследования по теории тонких пластин, находящиеся в условиях изгиба и растяжения-сжатия, сведено к нахождению функции прогиба w и функции напряжений F из следующей системы дифференциальных уравнений Т. Кармана [175]

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w &= \frac{1}{D} \left\{ q + h \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\}, \\ \Delta\Delta F &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

при соответствующих граничных условиях.

В элементарной теории пластинок принимается, что прогибы пластинки

малы по сравнению с ее толщиной. При больших прогибах необходимо принимать во внимание и растяжение срединной плоскости. Соответствующие уравнения были выведены Кирхгоффом [178] и Клебшем [164]. Эти уравнения нелинейны и с трудом поддаются решению; Кирхгофф применил их лишь в одном простейшем случае, а именно в случае равномерного растяжения срединной плоскости. Клебш исследовал условия, которым должно удовлетворять распределение сил по контуру при плоском напряженном состоянии и получил общие выражения для перемещений. Общие уравнения для больших прогибов весьма тонких пластинок были приведены к более простому виду А. Фёпплем, применившим функцию напряжений для напряжений, действующих в срединной плоскости пластинки [167]. Лимитирующее условие, по которому пластинка должна быть «весьма тонкой», было отброшено Карманом [175], уравнения которого нашли использование в книге А. Надаи [147] и в исследовании больших прогибов прямоугольных пластинок Самюэля Леви [147].

Во второй половине XX века были предложены методы сведения пространственных задач теории упругости к двумерным, которые позволили рассматривать задачи для пластин и оболочек, как частный случай задач для пространственных упругих тел. При этом широкое развитие получили асимптотические методы сведения пространственных задач к двумерным задачам, с помощью которых решения трехмерных задач ищутся в виде некоторых разложений по безразмерным параметрам (чаще всего зависящим от толщины), асимптотическим в некоторой области их изменения. Эти методы предложены в работах Воровича И. И. и его учеников [2–4, 18, 19, 22], для многосвязной области – в работах Космодамианского А. С. и его учеников [5, 93, 97, 108]. Анализ и классификация этих методов даны в обзорных статьях Воровича И. И. [20, 21], Гузя А. Н. и Немиша Ю. Н. [23], Кильчевского Н. А. [70], Космодамианского А. С. [95], Немиша Ю. Н., Хомы И. Ю. [127], Устинова Ю. А. и Шленева М. А. [149], а также в монографиях Космодамианского А. С. и его учеников [93, 97], Гузя А. Н. и Немиша Ю. Н. [24], Алтухова Е. В. и Фоменко М. В. [5]. Асимптотический метод распространен и на случай

трансверсально-изотропных плит [157].

Особенно интенсивно стала развиваться теория изгиба тонких плит в результате приложения к ней теории функций комплексного переменного.

Впервые задачу об изгибе **изотропной плиты** с помощью функций комплексного переменного в 1928 году решил А. И. Лурье [109], рассмотрел произвольно нагруженную круглую плиту, опертую по краю. В 1938 году С. Г. Лехницкий [105], рассматривая изотропную плиту как частный случай анизотропной, снова получил основные соотношения для комплексных потенциалов, в том числе граничные условия. Эти условия по своей структуре оказались такими же, как аналогичные граничные условия первой и второй основных задач плоской задачи теории упругости. В дальнейшем были найдены общие представления этих комплексных потенциалов [90], решен ряд задач. В частности, разложением искомым функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера были получены общие представления комплексных потенциалов с неизвестными коэффициентами, которые определялись из граничных условий методом рядов. На этой основе были решены задачи для круглой или эллиптической плиты с круговым или эллиптическим отверстиями под действием моментов на контурах, сосредоточенных сил и моментов во внутренних точках, нормальной нагрузки $q(x, y)$ по основанию плиты [34, 52, 89, 90, 98, 100, 107, 120]. Рассматривались случаи бесконечной плиты с круговыми контурами [90, 187] с использованием метода рядов, с криволинейными контурами с использованием интегралов типа Коши [77, 126], случаи кусочно-однородных плит с упругими включениями кругового [78, 79, 90, 113, 121, 122, 152], эллиптического [33], криволинейного [123, 135] форм.

1.2. Методы решения задач для анизотропных плит

Несмотря на многочисленные работы по построению теории изгиба тонких плит, вопрос учета анизотропии их материалов долгое время не рассматривался. Но

разнообразные применения **анизотропных плит** послужили поводом для решения этой проблемы. И здесь наиболее плодотворным оказалось использование прикладной теории Кирхгофа с учетом свойств анизотропии материала плиты.

Хотя основы прикладной теории изгиба анизотропных плит были разработаны в работах Геринга Ф. Д. [169], Буссенеска Ж. В. [162] и Губера М. Т. [172–174], но фундаментальные результаты с привлечением функций комплексного переменного были получены лишь в 30-е годы XX века Лехницким С. Г. [105]. Им была построена общая теория изгиба анизотропных плит, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Были введены комплексные потенциалы теории изгиба анизотропных плит, получены через них выражения для основных характеристик, граничные условия для определения этих функций, впервые решена задача об изгибе плиты с эллиптическим отверстием. При построении теории изгиба анизотропных плит гипотезы Кирхгофа были дополнены условиями по анизотропии материала плиты: считалось, что в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости плиты. То есть предполагалось, что 1) каждая прямая, первоначально перпендикулярная к срединной плоскости плиты, остается при изгибе прямой и перпендикулярной к срединной поверхности изогнутой плиты; 2) элементы срединной плоскости плиты при ее малых прогибах не испытывают удлинений, влиянием взаимодействия продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, малы, в связи с чем напряжениями σ_z внутри плиты по сравнению с другими можно пренебречь; 3) плита изготовлена из анизотропного материала, имеющего в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости.

При этих условиях рассматривалась отнесенная к прямоугольной декартовой системе координат $Oxuz$ с плоскостью Oxy в срединной плоскости тонкая анизотропная плита постоянной толщины $2h$, находящаяся под действием внешних усилий, приложенных к боковой поверхности, и усилий $q(x, y)$, распределенных по верхнему основанию.

На основе указанных гипотез возникающие в плите напряжения и деформации удовлетворяют основной системе уравнений теории упругости, состоящей из уравнений равновесия [105, 125, 148]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

уравнений обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz}, \\ \gamma_{xz} &= a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.12)$$

и соотношений Коши для малых деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где a_{ij} – коэффициенты деформации материала плиты, при заданных на боковой поверхности граничных условиях. При этом в силу условий загрузки оснований плиты

$$\begin{aligned} \sigma_z = -q, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = -h, \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = h. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Учитывая приведенные гипотезы и условия загрузки, для определения прогиба плиты $w(x, y)$ Лехницкий С. Г. получил следующее дифференциальное уравнение в частных производных [105]:

$$D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial x} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial y \partial x^3} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = q(x, y). \quad (1.15)$$

где $D_{ij} = b_{ij}D_0$ – жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$ – постоянная, зависящие от толщины

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{\Delta}(a_{22}a_{66} - a_{26}^2), & b_{12} &= \frac{1}{\Delta}(a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66}), \\ b_{16} &= \frac{1}{\Delta}(a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22}), & b_{22} &= \frac{1}{\Delta}(a_{11}a_{66} - a_{16}^2), \\ b_{26} &= \frac{1}{\Delta}(a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11}), & b_{66} &= \frac{1}{\Delta}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \\ \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

После решения уравнения (1.15) при соответствующих граничных условиях на боковой поверхности основные характеристики напряженно-деформированного состояния (моменты и перерезывающие силы, создаваемые соответствующими напряжениями, сами напряжения) находятся по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ H_{xy} &= -\left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ N_x &= -\left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right), \\ N_y &= -\left(D_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right); \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3M_x}{2h^3} z, & \sigma_y &= \frac{3M_y}{2h^3} z, & \tau_{xy} &= \frac{3H_{xy}}{2h^3} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{3N_x}{4h^3} (h^2 - z^2), & \tau_{yz} &= \frac{3N_y}{4h^3} (h^2 - z^2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Уравнение (1.15) нужно решать при соответствующих граничных условиях

на контурах области, занимаемой срединной плоскостью плиты, в зависимости от условий их загрузки и закрепления.

Решение уравнения (1.15) Лехницким С. Г. получил в виде [105]

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2\operatorname{Re}[W_1(z_1) + W_2(z_2)], \quad (1.18)$$

где $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1.15); $W_k(z_k)$ ($k=1, 2$) – функции обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$, в которых μ_k – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0.$$

Для случая равных корней μ_k решение уравнения (1.15) принимает вид

$$w(x, y) = w_0(x, y) + 2\operatorname{Re}[W_1(z_1) + z_1 W_2(z_1)],$$

где $z_1 = x + \mu_1 y$. Случай изотропной плиты следует из последнего при $\mu_1 = i$. Тогда решение уравнения (1.15)

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \operatorname{Re}[W_1(z) + zW_2(z)]$$

совпадает (с точностью до обозначений – $W_2(z) \sim \varphi(z)$, $W_1(z) \sim \int \psi(z) dz$) с формой Колосова-Мусхелишвили. Для этого случая получены выражения для основных характеристик и граничные условия, согласующиеся с соответствующими соотношениями плоской задачи теории упругости.

Лехницким С. Г. были исследованы некоторые свойства комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных плит, решена задача для пластинки с эллиптическим отверстием [105]. В дальнейшем были получены общие представления этих функций для конечных многосвязных областей [112], но в этих представлениях неверно было учтено влияние распределенных усилий $q(x, y)$. В дальнейшем были получены общие представления комплексных потенциалов для любых конечных и бесконечных многосвязных областей, учитывающие действие произвольных распределенных усилий и моментов на контурах плиты, сосредоточенных сил во внутренних точках, распределенных усилий $q(x, y)$ по основанию плиты, а также моментов в бесконечно удаленной точке [51, 61].

Без учета действия распределенных усилий $q(x, y)$ по основанию плиты был решен ряд задач. При этом голоморфные в соответствующих областях функции разлагались в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, которые определялись из граничных условий методом рядов. Были решены задачи для круглой или эллиптической плиты с круговым или эллиптическим отверстиями под действием распределенных моментов или поперечных усилий на контурах, сосредоточенных сил [30, 35, 51, 75, 76, 83, 84, 86, 110–112, 114–116, 118, 119]. Рассматривались также случаи кусочно-однородных плит с упругими включениями кругового [81, 82, 85, 116], эллиптического [80, 87, 117] форм. Что же касается рассмотрения случая действия усилий $q(x, y)$ по основанию плиты, первые решения [112] оказались неверными, а последующие результаты [118] были получены лишь для частной задачи, когда внутренний контур двусвязной плиты был жестко заземлен.

Таким же образом были получены первые решения задач для плит с криволинейными отверстиями, которые имеют существенные недостатки.

Если контур отверстия является криволинейным, то при решении задач возникают серьезные трудности математического и вычислительного характера и для нахождения этих решений были предложены различные приближенные методы. Наиболее серьезные результаты в этом направлении получены для случая плоской задачи изотропной пластинки, поэтому вначале несколько слов об этой задаче.

Впервые задачу для изотропной пластинки с отверстием в виде многоугольника рассматривал Г. Н. Савин [143]. Решение задачи он получил, используя комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ обычного комплексного переменного z и конформное отображение внешности единичного круга на внешность многоугольника. При этом для построения отображающих функций он использовал интеграл Кристоффеля–Шварца, когда приближенную формулу для отображающей функции можно получить в виде полинома. Раскладывая подынтегральную функцию в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки и интегрируя, он получил отображающую функцию

в виде

$$\omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\zeta^k} \right), \quad (1.19)$$

где R , δ_k – постоянные, определяемые из геометрических характеристик контуров отверстий. Сохраняя в отображающей функции (1.19) несколько начальных слагаемых, он впервые решил ряд задач для пластинки с отверстием в форме квадрата, прямоугольника, трапеции, равностороннего треугольника. При этом удовлетворяя граничным условиям на контуре отверстия и используя методы интегралов типа Коши, т. е. восстановления функций на основе граничных условий, он получил точные аналитические выражения для комплексных потенциалов и напряжений, вычислил численные значения напряжений в точках контура, на площадках, перпендикулярных ему. Но таким подходом можно было решить задачу лишь для пластинки с одним отверстием, так как в той форме, в какой использовался метод интегралов типа Коши, многосвязные области рассматриваться не могут. Космодамианский А. С. и его ученики [94], решая аналогичные задачи, при удовлетворении граничным условиям на контуре криволинейного отверстия использовали метод рядов и получили приближенные решения. Ими была исследована роль кривизны контура в угловых точках на аппроксимацию сторон углов, на значения напряжений, полученные результаты распространены на случай многосвязных областей, решено большое количество разнообразных задач для свободных, жестко и упруго подкрепленных контуров. Но такие приближенные решения задач, когда внешность единичной окружности функция (1.19) отображает на внешность контура, несколько отличного от заданного контура, и для определения комплексных потенциалов используется метод рядов, приводит к результатам, значительно отличным от истинных, особенно вблизи угловых точек.

Гораздо сложнее обстоят дела с решением проблемы для анизотропных сред. В этом случае для решения плоской задачи нужно из соответствующих граничных условий находить комплексные потенциалы С. Г. Лехницкого $\Phi_k(z_k)$

($k = 1, 2$), определенные в двух различных плоскостях обобщенных комплексных переменных z_k , получаемых из заданной плоскости известными аффинными преобразованиями. При этом, если на заданной плоскости комплексного переменного z отверстие имеет контур L , то в плоскостях z_k ему соответствуют два различных контура L_k , получаемые из L аффинными преобразованиями. При конформных отображениях внешности единичного круга на внешности контуров L и L_k точки, соответствующие одним и тем же точкам плоскостей основной и обобщенных переменных переходят в одну и ту же точку только в случае эллиптических (круговых) контуров L и L_k . Причем в этих случаях задачи для анизотропных пластинок решаются такими же методами, как для изотропных пластинок с отверстиями, и этими методами решены различные задачи для пластинки с одним отверстием или со многими отверстиями. Если же контур L , а следовательно, и L_k являются криволинейными, то при конформных отображениях внешности единичного круга на внешности контуров L и L_k соответствующие точки σ , σ_1 , σ_2 на единичной окружности не совпадают друг с другом и решить задачу можно связав их друг с другом. В работе [92] был предложен приближенный метод решения задачи для пластинки с криволинейным отверстием. Он основан на построении функций, отображающих внешность единичного круга на внешности контуров L_k в областях обобщенных комплексных переменных и установлении связи между точками при аффинном и конформном отображениях с использованием опять малого параметра, характеризующего отклонение исходного контура от эллиптического. Для удовлетворения граничным условиям использовался метод рядов. Этот метод был распространен и на многосвязные области [92]. Но он оказался весьма громоздким, сложным и не эффективным при численной реализации. В работе [91] при решении задачи для пластинки с одним криволинейным отверстием в отличие от предыдущего были введены два малых параметра, характеризующих отклонение криволинейных контуров L_k на плоскостях z_k от некоторых других криволинейных контуров на этих же плоскостях. Это позволило несколько

ускорить сходимость решений и получить результаты для некоторых задач. Однако и этот подход оказался малоэффективным и не позволил получать результаты с достаточной степенью точности. Более того, как и в предыдущем случае для многосвязных областей с криволинейными контурами необходимо было проводить разложения функций в ряды по полиномам Фабера для областей с криволинейными контурами, что приводило к весьма сложным алгоритмам и было малопродуктивным.

В работах [42] решения задач для областей с криволинейными отверстиями приводились к решениям аналогичных задач для областей с системой произвольно расположенных эллиптических отверстий и прямолинейных разрезов и при удовлетворении граничным условиям применялся дискретный метод наименьших квадратов (ДМНК). Исходя из граничных условий на контурах составлялся некоторый функционал невязок и его минимизация приводила к системе линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем. Но, будучи универсальным и достаточно эффективным, ДМНК при своей реализации в случае многочисленных контуров приводит к довольно громоздким формулам и требует высоких профессиональных навыков при составлении и отладке программ на алгоритмических языках. Поэтому в дальнейшем при удовлетворении граничным условиям нами был применен обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [63], когда граничные условия удовлетворяются в некотором наборе «коллокационных» точек. В отличие от метода обычной коллокации, в ОМНК количество точек на границах тела значительно больше, чем количество неизвестных в комплексных потенциалах и использование такого подхода приводит к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, псевдорешения которых получается с использованием сингулярных разложений.

Аналогично обстоят дела с решениями задач для изгиба плит с криволинейными отверстиями. В статьях [28, 126] для решения задачи правые части граничных условий представлялись разложениями по малому параметру и для нахождения функций использовались интегралы типа Коши. В работах [88],

как и в случае плоской задачи, для решения задач по изгибу плит с криволинейными отверстиями использовалась мало эффективная методика основанная на построении функций, отображающих внешность единичного круга на внешности контуров L_k в областях обобщенных комплексных переменных и установлении связи между точками при аффинном и конформном отображениях с использованием опять малого параметра, характеризующего отклонение исходного контура от эллиптического. В работе [91] при решении задачи для пластинки с одним криволинейным отверстием в отличие от предыдущего были введены два малых параметра, характеризующих отклонение криволинейных контуров L_k на плоскостях z_k от некоторых других криволинейных контуров на этих же плоскостях. Это позволило несколько ускорить сходимость решений и получить результаты для некоторых задач. Однако и этот подход оказался малоэффективным и не позволил получать результаты с достаточной степенью точности. Более того, как и в предыдущем случае для многосвязных областей с криволинейными контурами необходимо было проводить разложения функций в ряды по полиномам Фабера для областей с криволинейными контурами, что приводило к весьма сложным алгоритмам и было малопродуктивным.

В 3 разделе нашей работы приведен новый подход решения задач для плит с криволинейными контурами, позволяющий получать результаты достаточно высокой точности.

Для решения задач изгиба анизотропных плит с каноническими контурами использовались и методы, отличные от методов комплексных потенциалов. В работах [182, 183, 185, 186] решены задачи об изгибе круглой и эллиптической ортотропных плит под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки $q(x, y)$. Многочисленные исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных плит проведены численными методами, прежде всего методом конечных элементов [12, 13, 99, 146, 145].

По аналогии с результатами для тонких изотропных пластинок, находящихся в условиях изгиба и растяжения-сжатия, получены аналогичные результаты для

анизотропных тонких пластин. В работах [14, 16, 17, 136] решения задач по теории тонких ортотропных пластин, находящихся в условиях изгиба и растяжения-сжатия, сведены к нахождению функции прогиба w и функции напряжений F из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= hL(w, \Phi), \\ \delta_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} &= -\frac{1}{2}L(w, w), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\begin{aligned} L(w, \Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \\ L(w, w) &= 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]; \\ D_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)} - \end{aligned}$$

изгибные жесткости по главным направлениям; $D_3 = \frac{1}{2}(D_1 \mu_2 + D_2 \mu_1 + 4D_k)$ –

приведенная жесткость; $D_k = \frac{1}{12}Gh^3$ – крутильная жесткость; $\delta_1 = \frac{1}{E_1}$, $\delta_2 = \frac{1}{E_2}$,

$2\delta_3 = \frac{1}{G} - \frac{\mu_1}{E_1} - \frac{\mu_2}{E_2}$. Но конкретные решения этих уравнений и их использование

до сих пор отсутствуют.

К настоящему времени разработан ряд аналитических и численно-аналитических методов решения и пространственных задач теории упругости анизотропного тела. Многие из них освещены в обзорной статье Немиша Ю. Н. [128].

1.3. Решение задач вязкоупругости

Начальное напряженно-деформированное состояние тел из вязкоупругих материалов не является стационарным. Из-за изменения значений упругих постоянных, входящих в уравнения закона Гука, оно также изменяется. Порой

напряженное состояние тел не может рассматриваться стационарным даже за сравнительно короткий промежуток времени, соизмеримый со сроком эксплуатации конструкций. Поэтому при расчете конструкций на прочность и долговечность, особенно в случаях предполагаемого возникновения в их элементах высоких концентраций напряжений, нужно учитывать изменение напряженно-деформированного состояния таких элементов во времени, особенно в тех случаях, когда напряжения изначально достигают предельных случаев, т. е. нужно решать для них задачи вязкоупругости.

Основы современной теории вязкоупругости были заложены еще в классических трудах Максвелла, Больцмана и Вольтерра [161, 179, 189], но интенсивное развитие математическая теория вязкоупругости получила лишь в последние 60–70 лет в связи с широким внедрением в различные отрасли народного хозяйства новых композиционных материалов. В разработку этой теории большой вклад внесли Ю.Н. Работнов, А.А. Ильюшин, Р. Кристенсен, Н.Х. Арутюнян, М.А. Колтунов, А.Р. Ржаницын, Г.Н. Савин, М.И. Розовский, Ж.С. Ержанов, В.В. Москвитин, Дж. Ферри, В. Воигт, чьи работы [7, 27, 36, 37, 71–74, 101, 124, 130–132, 137, 138, 141, 142, 150, 188] в середине XX века заложили основы этой теории, дали возможность исследовать различные аспекты ползучести и релаксации при деформировании тел. Ряд других методов решения задач был предложен в работах [1, 6, 9, 11, 69, 102, 103, 129].

Наряду с разработкой и обоснованием общей теории, были разработаны общие методы решения прикладных задач вязкоупругости, и в первую очередь, решения задач линейной вязкоупругости. Это методы операторный, аппроксимаций, операторных цепных дробей и другие.

Исследованиями установлено, что достаточно простым методом определения напряженно-деформированного состояния тел является использование принципа Вольтерра, в соответствии с которым для исследования вязкоупругого состояния тела вначале решается граничная задача для упругого тела, затем в полученном решении упругие постоянные заменяются соответствующими упругими временными операторами и определяются воздействия получившихся

операторных функций на функции координат. Этот принцип легко использовать, если решение задачи теории упругости представляется произведением рациональной функции упругих постоянных на функции координат. Тогда, заменив в решении упругие постоянные упругими операторами, можно найти значения соответствующих величин во времени. Но такое возможно в простейших задачах. Для многосвязных областей такие решения задач теории упругости получать невозможно. Поэтому непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно-деформированного состояния многосвязных тел невозможно.

Для решения задач вязкоупругости в случае многосвязных изотропных пластинок, находящиеся в условиях плоской задачи, в работах [31, 41, 49, 50, 154–156] предложен метод малого параметра решен ряд задач. Этот метод распространен на задачи теории упругости и термоупругости [60], электромагнитоупругости [45] для анизотропных пластинок. Что же касается задач теории изгиба тонких плит, то до сих пор такие исследования выполнялись только для изотропных плит, а для анизотропных плит такие исследования полностью отсутствуют.

Но, несмотря на важность проблемы, исследований в этом направлении выполнено недостаточно. До сих пор мало решений прикладных задач. До недавнего времени такие решения были известны лишь для односвязных изотропных [143] и анизотропных [68] пластинок, находящихся в условиях плоской задачи теории упругости.

Изгиб изотропных плит изучался методом малого параметра с использованием комплексных потенциалов [32]. В работе [153] сделана попытка переноса этого метода решения на случай плит на упругом основании. В работе [143] рассматривался изгиб треугольной плиты с круговым отверстием. Для многосвязных изотропных плит с отверстиями и включениями задачи вязкоупругого изгиба исследованы в [38–40, 43, 44, 48, 54, 64, 65]. Задача определения КИН вокруг треугольного отверстия с армированным волокном композитной пластины при равномерном растяжении или чистом изгибе с

использованием метода эффективных модулей сведена к соответствующей задаче для анизотропного упругого материала [159]. В статье показано насколько распределение напряжений вокруг отверстия изменяется с течением времени, а также как КИН зависит от параметров материала.

1.4. Выводы по разделу 1

В данном разделе приведен обзор литературы по теме диссертации и смежным темам, описаны развитие теории изгиба тонких упругих и вязкоупругих плит, существующие методы решения задач в случае многосвязных плит, решения конкретных задач с численными исследованиями. Из приведенного обзора литературы следует, что к настоящему времени разработаны основы теории изгиба тонких упругих плит, при этом широкое использование получила прикладная теория, разработаны различные методы решения задач, при этом широко использовалась теория комплексных потенциалов, методом рядов решен ряд задач для плит с эллиптическими или круговыми контурами при больших расстояниях между ними, при этом в общих представлениях комплексных потенциалов не верно было учтено влияние распределенных усилий по основанию плиты, не были рассмотрены случаи плит с отверстиями произвольной конфигурации и расположения относительно друг друга, с разрезами, в том числе выходящими на контуры плиты. Разработаны физические и математические основы вязкоупругости, для изотропных плит разработаны методы решения и получены решения различных задач, но для анизотропных плит методы решения задач вязкоупругости не разработаны, следовательно, не решена ни одна задача.

В связи с этим тема данной работы, посвященной разработке методов решения задач изгиба тонких многосвязных анизотропных плит и их приложений для решения практических задач, актуальна, и в ней необходимо было:

1. Установить общий вид комплексных потенциалов для многосвязных анизотропных плит при их произвольном нагружении.
2. Разработать метод, позволяющий решать задачи теории упругости для

многосвязных анизотропных плит с контурами произвольной конфигурации и взаимного расположения.

3. Для многосвязных анизотропных плит разработать метод решения задач линейной вязкоупругости.

4. Исследовать эффективность разработанных методов и достоверность получаемых результатов.

5. С применением этих методов получить теоретические решения конкретных задач с их алгоритмизацией.

6. Составить комплексы программ на алгоритмическом языке для численной реализации полученных решений.

7. Провести численные исследования для выявления закономерностей изменения НДС рассматриваемых плит в зависимости от их геометрических и упругих характеристик, способа и времени внешнего воздействия.

РАЗДЕЛ 2

ИССЛЕДОВАНИЯ ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛИТ. ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

2.1. Основные соотношения для комплексных потенциалов

Анизотропные плиты. Рассмотрим тонкую анизотропную плиту постоянной толщины $2h$, имеющую в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совместим со срединной плоскостью. Срединная поверхность плиты занимает многосвязную область S , ограниченную гладкими контурами L_l . Плита находится под действием приложенных к боковой поверхности изгибающих моментов, поперечных сил и усилий $q(x, y)$, распределенных по верхнему основанию, а также сосредоточенных воздействий во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ области S . В частном случае, когда L_0 полностью уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную многосвязную плиту. В последнем случае будем считать, что на бесконечности действуют изгибающие моменты $M_x^\infty = m_x$, $M_y^\infty = m_y$, $H_{xy}^\infty = h_{xy}$, а главный вектор всех приложенных к плите поперечных сил равен нулю.

Определение напряженного состояния рассматриваемой плиты с использованием комплексных потенциалов сводится к нахождению функций $W_k(z_k)$ ($k=1, 2$) обобщенных комплексных переменных z_k из соответствующих граничных условий. После нахождения этих функций, основные характеристики изгиба плит (прогиб, моменты, перерезывающие силы) вычисляются по формулам [51, 61, 62, 105]

$$w = w_0(x, y) + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W_k(z_k); \quad (2.1)$$

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) W_k''(z_k); \quad (2.2)$$

$$(N_x, N_y) = (N_{0x}, N_{0y}) - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k s_k, -s_k) W_k'''(z_k), \quad (2.3)$$

где $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y); \quad (2.4)$$

$$M_{0x} = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ M_{0y} = - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right), \\ H_{0xy} = - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right); \quad (2.5)$$

$$N_{0x} = - \left(D_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + 3D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right), \\ N_{0y} = - \left(D_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right); \quad (2.6)$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2, \\ r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2, \\ s_k = -D_{16} - (D_{12} + 2D_{66})\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3; \quad (2.7)$$

μ_k ($k=1, 2$) – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0; \quad (2.8)$$

$D_{ij} = b_{ij} D_0$ – жесткости материала, в которых

$$b_{11} = (a_{22}a_{66} - a_{26}^2)/\Delta, \quad b_{12} = (a_{16}a_{26} - a_{12}a_{66})/\Delta,$$

$$\begin{aligned}
b_{16} &= (a_{12}a_{26} - a_{16}a_{22})/\Delta, & b_{22} &= (a_{11}a_{66} - a_{16}^2)/\Delta, \\
b_{26} &= (a_{12}a_{16} - a_{26}a_{11})/\Delta, & b_{66} &= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)/\Delta, \\
\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{vmatrix};
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$D_0 = 2h^3/3$; h – полутолщина плиты.

Граничные условия для определения функций $W'_k(z_k)$ на контуре L_i ($i = \overline{0, \mathcal{L}}$) получаются такими [51, 61, 62]:

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ki\alpha} W'_k(z_k) = f_{i\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \tag{2.10}$$

причем в случае загруженного контура

$$\begin{aligned}
g_{ki1} &= \frac{p_k}{\mu_k}, & g_{ki2} &= q_k, \\
f_{i1} &= -\int_0^s (f_i dx + m_i dy) + J_{01} - c_i x + c_{1i}, \\
f_{i2} &= -\int_0^s (m_i dx - f_i dy) - J_{02} + c_i y + c_{2i}, \\
J_{01} &= \int_0^s (N_{0xy} - H_{0xy}) dx + M_{0x} dy, & J_{02} &= -\int_0^s M_{0y} dx - (N_{0xy} + H_{0xy}) dy, \\
f_i(s) &= \int_0^s p_i(s) ds, & N_{0xy} &= -\int_0^s N_{0y} dx - N_{0x} dy,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

в случае подкрепленного контура

$$g_{ki1} = 1, \quad g_{ki2} = \mu_k, \quad f_{i1} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{1i}, \quad f_{i2} = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{2i}, \tag{2.12}$$

c_i – вещественная, c_{1i} , c_{2i} – комплексные постоянные (для жестко заземленного контура $c_{1i} = c_{2i} = 0$).

Комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) определены в областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемыми из заданной области S аффинными пре-

образованиями

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (2.13)$$

Как установлено в работах [51, 61, 62], в общем случае многосвязной плиты производные этих функций $W'_k(z_k)$ представляются в виде

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + W'_{k0}(z_k), \quad (2.14)$$

где

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0), \quad (2.15)$$

z_{kl} – точки, соответствующие при аффинных преобразованиях (2.13) произвольным точкам $z_l(x_l, y_l)$ внутри контуров L_l ; $z_{kr}^0 = x_r^0 + \mu_k y_r^0$, x_r^0 , y_r^0 – координаты точек приложения сосредоточенных воздействий; $W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , включая точки приложения сосредоточенных воздействий. Об остальных величинах можно сказать следующее. В случае конечной области постоянные Γ_k нужно полагать равными нулю; для бесконечной области, когда на бесконечности заданы моменты M_x^∞ , M_y^∞ , H_{xy}^∞ , и на бесконечности $N_x + iN_y = 0$, для нахождения Γ_k получается система [51, 61, 62]

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

или вместо последнего уравнения, равенство

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= \frac{1}{D_{11}} \left[-3D_{16} (C_{11} M_x^\infty + C_{21} M_y^\infty + C_{31} H_{xy}^\infty) - \right. \\ &\quad \left. -(D_{12} + 2D_{66}) (C_{12} M_x^\infty + C_{22} M_y^\infty + C_{32} H_{xy}^\infty) - \right. \\ &\quad \left. -D_{26} (C_{13} M_x^\infty + C_{23} M_y^\infty + C_{33} H_{xy}^\infty) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (2D_{22}D_{66} - 2D_{26}^2) / \Delta_1, & C_{21} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}) / \Delta_1, \\
C_{31} &= (2D_{12}D_{26} - 2D_{16}D_{22}) / \Delta_1, & C_{12} &= (D_{12}D_{26} - D_{16}D_{22}) / \Delta_1, \\
C_{22} &= (D_{12}D_{16} - D_{11}D_{26}) / \Delta_1, & C_{32} &= (D_{11}D_{22} - D_{12}^2) / \Delta_1, \\
C_{13} &= (2D_{16}D_{26} - 2D_{12}D_{66}) / \Delta_1, & C_{23} &= (2D_{11}D_{66} - 2D_{16}^2) / \Delta_1, \\
C_{33} &= (2D_{12}D_{16} - 2D_{11}D_{26}) / \Delta_1, \\
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} D_{11} & 2D_{16} & D_{12} \\ D_{12} & 2D_{26} & D_{22} \\ D_{16} & 2D_{66} & D_{26} \end{vmatrix};
\end{aligned} \tag{2.17}$$

A_{kl}, B_{kl} – постоянные, определяемые из условий равновесия кольца $L_l L'_l$, ограниченного контурами L_l (контур исходного отверстия) и L'_l (некоторый контур, окружающий только L_l), и однозначности углов поворотов серединой плоскости относительно осей координат при прогибе, а также изгибающих и крутящих моментов [51, 61, 62]:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(0, 0, 0, \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}} \right), \tag{2.18}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i B_{kl} = \left(0, 0, -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi D_{11}} \right), \tag{2.19}$$

P_l и M_{xl}, M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента относительно начала координат внешних воздействий, приложенных к контуру L_l ;

$$\begin{aligned}
P_{0l} &= - \int_{L_l} (N_{0y} dx - N_{0x} dy), \\
M_{0xl} &= - \int_{L_l} \left[(y N_{0y} - M_{0y}) dx - (y N_{0x} - H_{0xy}) dy \right], \\
M_{0yl} &= \int_{L_l} \left[(x N_{0y} - H_{0xy}) dx - (x N_{0x} - M_{0x}) dy \right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

По аналогии с (2.18), (2.19) для определения постоянных A_{kr}^0, B_{kr}^0 получают систему [51, 61, 62]

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) iA_{kr}^0 = \left(0, 0, 0, \frac{P_r^0}{2\pi D_{11}} \right), \quad (2.21)$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) iB_{kr}^0 = \left(0, 0, -\frac{M_{xr}^0}{2\pi D_{22}}, -\frac{M_{yr}^0}{2\pi D_{11}} \right), \quad (2.22)$$

в которых P_r^0 и $M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0$, $M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$ – сосредоточенная сила в точке $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ и ее моменты относительно осей Ox , Oy .

Кроме указанных соотношений, из условия однозначности прогиба при полном обходе по контуру отверстия L_l , получим также равенство

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 ib_{kl(-1)} = 0, \quad (2.23)$$

где $b_{kl(-1)}$ – вычеты функций $W'_{k0}(z_k)$ в точке z_{kl} . Это условие можно использовать для нахождения вещественной постоянной c_l в граничных условиях.

Заметим, что для конечных односвязных плит при отсутствии сосредоточенных сил во внутренних точках комплексные потенциалы будут голоморфными в областях S_k , т. е. $W'_k(z_k) = W'_{k0}(z_k)$.

Так, в случае эллиптической плиты с внешним контуром L_0 с полуосями a_0 , b_0 , если использовать конформные отображения внешности единичного круга на внешности эллипсов (более подробно о построении этих функций см. п. 3.2 раздела 3)

$$z_k = R_{k0} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right), \quad (2.24)$$

где

$$R_{k0} = \frac{a_0 - ib_0 \mu_k}{2}, \quad m_{k0} = \frac{a_0 + ib_0 \mu_k}{2R_{k0}},$$

то, функции $W'_{k0}(z_k)$, голоморфные внутри L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера для внутренностей контуров L_{k0} и для комплексных потенциалов получим

$$W'_k(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k), \quad (2.25)$$

где $P_n(z_k)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства [96]

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n}. \quad (2.26)$$

a_{k0n} – постоянные, которые определяются из граничных условий. Рассмотрим частные случаи.

Изгиб эллиптической плиты распределенными моментами по контуру. Если эллиптическая плита (рис. 2.1) по внешнему контуру L_0 изгибается равномерно распределенными моментами интенсивности m_0 , т. е. $m(s) = m_0$. Тогда граничные условия (2.10) имеют вид

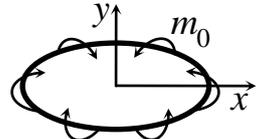


Рис. 2.1

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{\mu_k} W'_k(z_k) &= -m_0 y + c_{10}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k W'_k(z_k) &= -m_0 x + c_{20}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где c_{10}, c_{20} – комплексные постоянные.

Подставляя функции (2.25) в условия (2.27) и учитывая, что на контуре

$$x = a_0 \cos \vartheta = \frac{a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = b_0 \sin \vartheta = -\frac{ib_0}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad \zeta_{k0} = \sigma, \quad (2.28)$$

получим

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_k}{\mu_k} a_{k0n} \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) &= m_0 \frac{ib_0}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) + c_{10}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} q_k a_{k0n} \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) &= -m_0 \frac{a_0}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + c_{20}. \end{aligned}$$

Приравнивая в последних равенствах коэффициенты при одинаковых степенях σ , найдем, что $a_{k0n} = 0$ при $n \geq 2$ и

$$\sum_{k=1}^2 \left(\frac{p_k}{\mu_k} a_{k01} m_{k0} + \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{a}_{k01} \right) = -m_0 \frac{ib_0}{2},$$

$$\sum_{k=1}^2 (q_k a_{k01} m_{k0} + \bar{q}_k \bar{a}_{k01}) = -m_0 \frac{a_0}{2}. \quad (2.29)$$

для определения a_{k01} . Тогда функции (2.25) примут вид

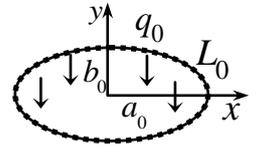
$$W'_k(z_k) = a_{k01} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right) = a_{k01} \frac{z_k}{R_{k0}}, \quad (2.30)$$

где a_{k01} – постоянные, вычисляемые из решения системы (2.29). Зная a_{k01} , а следовательно и функции (2.25), для моментов (2.2) получим

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \frac{a_{k01}}{R_{k0}}. \quad (2.31)$$

Подставляя в эти выражения значения p_k , q_k и r_k , и учитывая (2.29) найдем, что изгибающие моменты M_s постоянны во всех точках плиты, причем для любых материалов и значений полуосей эллиптического диска они получаются одинаковыми и равными m_0 .

Действие равномерного давления по основанию плиты. Пусть сплошная эллиптическая плита по верхнему основанию загружена равномерно распределенным давлением интенсивности q_0 (рис. 2.2).



По контуру L_0 плита жестко закреплена.

Рис. 2.2

В данном случае функции $W'_k(z_k)$ опять имеют вид (2.25), но в отличие от предыдущего постоянные определяются из граничных условий (2.10) для жесткого защемления, куда входит частное решение $w_0(x, y)$ дифференциального уравнения (2.4). Частное решение этого уравнения выберем в виде

$$w_0(x, y) = q_* (x^2 + y^2)^2, \quad (2.32)$$

в котором q_* – постоянная.

Подставляя выражение (2.32) в дифференциальное уравнение (2.4) и учитывая, что в данном случае $q(x, y) = q_0$, получим

$$q_* = \frac{q_0}{8 \left[3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \right]}. \quad (2.33)$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 4q_*(3x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 4q_*(3y^2 + x^2), \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = 8q_*xy; \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} M_{0x} &= -4q_* \left[D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right], \\ M_{0y} &= -4q_* \left[D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right], \\ H_{0xy} &= -4q_* \left[D_{16}(3x^2 + y^2) + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Тогда граничные условия (2.10) на контуре плиты примут вид

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 W'_k(z_k) &= -4q_*(x^2 + y^2)x + c_{10}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k W'_k(z_k) &= -4q_*(x^2 + y^2)y + c_{20}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где q_* – постоянная, вычисляемая по формуле (2.33).

Подставляя функции (2.25) в граничные условия (2.36) и учитывая равенства (2.28), получим

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{k0n} \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) &= \\ &= -\frac{q_* a_0}{2} \left[a_0^2 \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right)^2 - b_0^2 \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right)^2 \right] \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + c_{10}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k a_{k0n} \left(\sigma^n + \frac{m_{k0}^n}{\sigma^n} \right) &= \\ &= -\frac{i q_* b_0}{2} \left[a_0^2 \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right)^2 - b_0^2 \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right)^2 \right] \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + c_{20}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Приравнявая в (2.37) коэффициенты при одинаковых степенях σ , получим $a_{k0n} = 0$ при $n \neq 1, n \neq 3$ и систему

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left[a_{k0n} m_{k0}^n + \bar{a}_{k0n} \right] &= -\frac{q_* a_0}{2} \left[(3a_0^2 + b_0^2) \delta_{1n} + (a_0^2 - b_0^2) \delta_{3n} \right], \\ \sum_{k=1}^2 \left[\mu_k a_{k0n} m_{k0}^n + \bar{\mu}_k \bar{a}_{k0n} \right] &= \end{aligned}$$

$$= -\frac{q_* i b_0}{2} \left[(a_0^2 + 3b_0^2) \delta_{1n} + (a_0^2 - b_0^2) \delta_{3n} \right], \quad n = 1, 3. \quad (2.38)$$

Следовательно,

$$W'_k(z_k) = \sum_{n=1,3} a_{k0n} \left(\zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n} \right) = (a_{k01} - 3m_{k0}) \frac{z_k}{R_{k0}} + a_{k03} \frac{z_k^3}{R_{k0}^3}, \quad (2.39)$$

где a_{k01} , a_{k03} – постоянные вычисляемые из решения систем (2.38).

Подставив функции (2.39) в (2.2), получим выражения для моментов

$$\begin{aligned} (M_x, M_y, H_{xy}) &= (M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}) - \\ &- 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \left(\frac{a_{k01} - 3m_{k0} a_{k03}}{R_{k0}} + 3a_{k03} \frac{z_k^2}{R_{k0}^3} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Изотропные плиты. В случае изотропной плиты комплексные потенциалы будут существенно отличаться от комплексных потенциалов для анизотропных плит. В этом случае

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}, \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}, \quad a_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E}, \quad a_{16} = a_{26} = 0, \quad (2.41)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Тогда корни характеристического уравнения (2.8) будут двукратными и равными $+i$, $-i$ и для определения напряженно-деформированного состояния плиты нужно использовать комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Если эти функции найдены, то основные характеристики изгиба плиты вычисляются по формулам [52, 104, 105]

$$w = w_0(x, y) + \operatorname{Re} \left[\bar{z} \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right]; \quad (2.42)$$

$$M_x + M_y = M_{0x} + M_{0y} - 4D(1+\nu) \operatorname{Re} \varphi'(z),$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = M_{0y} - M_{0x} + 2iH_{0xy} + 2D(1-\nu) [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]; \quad (2.43)$$

$$N_x = N_{0x} - 2D \left[\varphi''(z) + \overline{\varphi''(z)} \right],$$

$$N_y = N_{0y} - 2iD \left[\varphi''(z) - \overline{\varphi''(z)} \right], \quad (2.44)$$

где $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(x, y)}{D}; \quad (2.45)$$

$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ – двумерный оператор Лапласа; $D = \frac{E}{1-\nu^2} D_0$ – жесткость

материала плиты;

$$\begin{aligned} M_{0x} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \\ M_{0y} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ H_{0xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$N_{0x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w_0, \quad N_{0y} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_0; \quad (2.47)$$

Если контур L_l загружен распределенными моментами $m_l(s)$ и поперечными усилиями $p_l(s)$, то на нем должно выполняться граничное условие [52]

$$\begin{aligned} \alpha \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} &= \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s \left[(M_{0y} - iH_{0xy}) dx + i(M_{0x} + iH_{0xy}) dy \right] + \\ &+ \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{0xy} dt - \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s [m_l(s) + i p_l(s)] dt - ic_l t + c_l^*, \end{aligned} \quad (2.48)$$

где $\alpha = (3+\nu)/(1-\nu)$, c_l и c_l^* – вещественная и комплексная постоянные. Для незагруженного контура в (2.48) нужно принять $m_l(s) = p_l(s) = 0$.

Если на контуре L_l плиты заданы прогиб w_l^* и угол поворота по нормали $w_{nl}^* = (dw/dn)_l^*$, то граничное условие на нем имеет вид [52]

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} + \\ &+ \left[-\frac{\partial w_l^*}{\partial x} \cos ny + \frac{\partial w_l^*}{\partial y} \cos nx + w_{nl}^* \right] (\cos ny - i \cos nx). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Если край плиты жестко защемлен, то из условия (2.49) найдем

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y}. \quad (2.50)$$

Если край плиты жестко подкреплён, то граничное условие имеет вид

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i \frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{1l} + ic_{2l}. \quad (2.51)$$

В общем случае многосвязной области функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ имеют вид [52, 61, 62, 105]

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma_1 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_r^0 z + B_r^0) \ln(z - z_r^0) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma_2 z + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \bar{B}_l \ln(z - z_l) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} \left[\bar{B}_r^0 \ln(z - z_r^0) + \frac{b_{r(-1)}^0}{8\pi D (z - z_r^0)} \right] + \psi_0(z), \end{aligned} \quad (2.52)$$

где Γ_1, Γ_2 – постоянные, равные нулю в случае конечной области S и определяемые равенствами

$$\Gamma_1 = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma_2 = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2D(1-\nu)} \quad (2.53)$$

для случая, когда область S бесконечна; $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$ – значения соответствующих моментов на бесконечности;

$$A_l = \frac{P_l + P_{0l}}{8\pi D}, \quad B_l = -\frac{(P_l + P_{0l})z_l}{8\pi D} = -\frac{M_{yl} + M_{0yl} - i(M_{xl} + M_{0xl})}{8\pi D}; \quad (2.54)$$

$$A_r^0 = \frac{P_r^0}{8\pi D}, \quad B_r^0 = -\frac{P_r^0 z_r^0 - i(M_{xr}^0 + iM_{yr}^0)}{8\pi D}; \quad (2.55)$$

P_l, M_{xl}, M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента внешних воздействий, приложенных к L_l ; P_{0l}, M_{0xl}, M_{0yl} – главный вектор и компоненты главного момента усилий по контуру L_l от воздействия по нему нагрузки $q(x, y)$; $P_r^0, M_{xr}^0 = y_r^0 P_r^0, M_{yr}^0 = -x_r^0 P_r^0$ – сосредоточенная сила и компоненты ее момента в точке $z_r^0 = x_r^0 + iy_r^0$ относительно начала координат; $b_{r(-1)}^0$ – вычет функции $\psi(z)$ в точке z_r^0 приложения P_r^0 , причем

$$b_{r(-1)}^0 = -i \left(M_{xr}^0 + i M_{yr}^0 \right) \bar{z}_r^0; \quad (2.56)$$

$\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ – функции, голоморфные в многосвязной области, включая точки приложения сосредоточенных воздействий, причем в случае бесконечной области они в точке $z = \infty$ имеют полюс нулевого порядка.

Кроме указанных соотношений, из условия однозначности прогиба при полном обходе по контуру отверстия L_l , получим также равенство

$$\operatorname{Re} \left[i \left(b_{l(-1)} - z_l \bar{B}_l \right) \right] = 0, \quad (2.57)$$

где $b_{l(-1)}$ – вычет функции $\psi_0(z)$ в точке z_l . Это условие можно использовать для нахождения вещественной постоянной c_l в граничных условиях.

Заметим, что общий вид комплексных потенциалов существенно упрощается для конечных односвязных областей при отсутствии сосредоточенных сил во внутренних точках. В этом случае $\varphi(z) = \varphi_0(z)$, $\psi(z) = \psi_0(z)$, где $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ – функции, голоморфные в области. Достаточно простые выражения для этих функций получаются в случае круга. В этом случае эти функции можно представить рядами Тейлора и

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \quad (2.58)$$

Изгиб эллиптической плиты распределенными моментами по контуру. Если круговая плита (рис. 2.3) по внешнему контуру L_0 изгибается равномерно распределенными моментами интенсивности m_0 , т. е. $m(s) = m_0$, граничные условия для определения комплексных потенциалов на основании (2.48) имеют вид

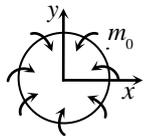


Рис. 2.3

$$\Re \left[\varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} \right] = -\frac{m_0 t}{D(1-\nu)}. \quad (2.59)$$

Подставляя функции (2.58) в граничные условия (2.59), учитывая, что на контуре диска $t = R_0 \sigma$, и применяя метод рядов, получаем

$$a_1 = -\frac{m_0}{D(\alpha-1)(1-\nu)} = -\frac{m_0}{2D(1+\nu)}, \quad b_1 = a_k = b_k = 0 \quad (k=2,3,\dots). \quad (2.60)$$

Тогда функции (2.58) примут вид

$$\varphi(z) = a_1 z, \quad \psi(z) = 0, \quad (2.61)$$

а для моментов (2.43) получим

$$M_x = M_y = m_0, \quad H_{xy} = 0. \quad (2.62)$$

Видно, что изгибающие моменты постоянны во всех точках плиты, причем для любых материалов и значений радиусов кругового диска они получаются одинаковыми и равными m_0 .

Действие равномерного давления по основанию плиты. Пусть круговая плита по верхнему основанию находится под действием равномерного давления интенсивности q_0 (рис. 2.4). По контуру L_0 плита жестко подкреплена.

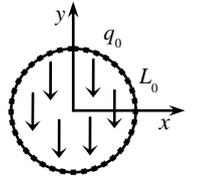


Рис. 2.4

Комплексные потенциалы $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и в этом случае имеют вид (2.58), а частное решение дифференциального уравнения (2.45) можно выбрать в виде (2.32). Подставляя выражение (2.32) в дифференциальное уравнение (2.45) и учитывая, что в данном случае $q(x, y) = q_0$, получим

$$q_* = \frac{q_0}{64D} = \frac{1-\nu^2}{E} q_0. \quad (2.63)$$

Учитывая выражения (2.32), (2.34) и (2.46), находим

$$\begin{aligned} M_{0x} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = -4Dq_* \left[(3+\nu)x^2 + (1+3\nu)y^2 \right], \\ M_{0y} &= -D \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) = -4Dq_* \left[(3+\nu)y^2 + (1+3\nu)x^2 \right], \\ H_{0xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -8D(1-\nu)q_*xy; \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$N_{0x} = -32q_*Dx, \quad N_{0y} = -32q_*Dy. \quad (2.65)$$

Граничные условия на контуре плиты на основании (2.50) примут вид

$$\varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -4q_* R_0^2 t. \quad (2.66)$$

Подставляя функции (2.58) в граничные условия (2.66), учитывая, что на контуре, $t = R_0 \sigma$, применяя метод рядов, получим

$$a_1 = -2R_0^2 q_* = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} R_0^2 q_0, \\ b_1 = a_k = b_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (2.67)$$

Тогда функции (2.58) примут вид

$$\varphi(z) = a_1 z, \quad \psi(z) = 0, \quad (2.68)$$

а для моментов (2.43) получим

$$M_x + M_y = M_{0x} + M_{0y} - 4D(1+\nu)a_1, \\ M_y - M_x + 2iH_{xy} = M_{0y} - M_{0x} + 2iH_{0xy}; \\ M_x = -4D \frac{1-\nu^2}{E} \left[x^2(3+\nu) + y^2(1+3\nu) + (1+\nu)R_0^2 \right] q_0, \\ M_y = -4D \frac{1-\nu^2}{E} \left[y^2(3+\nu) + x^2(1+3\nu) + (1+\nu)R_0^2 \right] q_0, \\ H_{xy} = -8D \frac{(1-\nu^2)(1-\nu)}{E} xy q_0. \quad (2.69)$$

В силу симметрии такие же значения будут иметь моменты вдоль любых радиальных направлений.

2.2. Построение точных решений задач для изотропной плиты с круговыми контурами с определением логарифмических членов комплексных потенциалов из граничных условий

1. Круговое кольцо под действием равномерно распределенных моментов на контурах. Рассмотрим изотропную кольцевую плиту с круговыми контурами L_0 и L_1 с радиусами R_0 и R_1 (рис. 2.5). Плита изгибается под действием распределенных моментов с интенсивностями m_0 и m_1 , действующих соответ-

ственно на L_0 и L_1 .

Учитывая, что функции, голоморфные в кольце, можно представить рядами Лорана, функции (2.52) для данной задачи запишем в виде

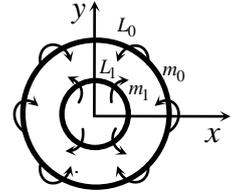


Рис. 2.5

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= (A_1 z + B_1) \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \\ \psi(z) &= \bar{B}_1 \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k.\end{aligned}\quad (2.70)$$

где a_k, b_k – неизвестные постоянные.

На контурах кольца $z = t = R_l (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = R_l \sigma$, где ϑ – параметр параметрического задания круга, равный центральному углу, $\sigma = e^{i\vartheta}$. Тогда граничные условия (2.48) для данной задачи на контурах L_l ($l = 0, 1$) примут вид

$$\Re \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = -\frac{1}{D(1-\nu)} m_l R_l \sigma. \quad (2.71)$$

Подставляя функции (2.70) в граничные условия (2.71) на контурах L_0, L_1 и применяя метод рядов (сравнивая коэффициенты при $\sigma \ln \sigma$, $\ln \sigma$ и степенях σ) получим, что $a_k = 0$ ($k \neq 1$), $b_k = 0$ ($k \neq -1$), $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, а также выражения

$$a_1 = -\frac{R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1}{2D(1+\nu)(R_0^2 - R_1^2)}, \quad b_{-1} = \frac{2R_1^2(1+\nu)a_1}{1-\nu} + \frac{R_1^2 m_1}{D(1-\nu)}. \quad (2.72)$$

Следовательно,

$$\varphi(z) = a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}. \quad (2.73)$$

Для моментов (2.43) вдоль оси Ox находим

$$\begin{aligned}M_x + M_y &= 2 \frac{R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1}{R_0^2 - R_1^2}, \\ M_y - M_x &= \frac{2R_1^2 (R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1)}{x^2 (R_0^2 - R_1^2)} - \frac{2R_1^2 m_1}{x^2}, \quad H_{xy} = 0\end{aligned}$$

или

$$M_x = \left[\frac{R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1}{(R_0^2 - R_1^2)} - \frac{R_1^2 (R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1)}{x^2 (R_0^2 - R_1^2)} + \frac{R_1^2 m_1}{x^2} \right],$$

$$M_y = \left[\frac{R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1}{(R_0^2 - R_1^2)} + \frac{R_1^2 (R_0^2 m_0 - R_1^2 m_1)}{x^2 (R_0^2 - R_1^2)} - \frac{R_1^2 m_1}{x^2} \right], \quad H_{xy} = 0. \quad (2.74)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор и компоненты главного момента усилий, приложенных к контуру L_1 , равны нулю, т. е. $P_1 = M_{x1} = M_{y1} = 0$. Учитывая это, по формулам (2.54) получаем, что $A_1 = B_1 = 0$, что подтверждает правильность формул (2.54) для коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52).

Если в приведенных формулах принять $R_1 = 0$, то получится решение задачи из п. 2.1, рассмотренной ранее.

При $R_0 = \infty$, $m_0 = 0$ из приведенных формул получится решение задачи для бесконечной плиты с круговым отверстием радиуса R_1 , на контуре которого действуют моменты интенсивности m_1 . В этом случае

$$M_x = \frac{R_1^2}{x^2} m_1, \quad M_y = -\frac{R_1^2}{x^2} m_1, \quad H_{xy} = 0. \quad (2.75)$$

2. Бесконечная плита с круговым отверстием. Рассмотрим бесконечную плиту с круговым отверстием радиуса R_1 (рис. 2.6). Контур отверстия свободен от внешних воздействий или жестко подкреплён, на бесконечности плита находится под действием моментов $M_x^\infty = m_x$, $M_y^\infty = m_y$, $H_{xy}^\infty = 0$.

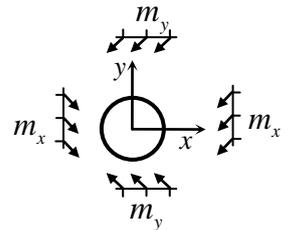


Рис. 2.6

Учитывая, что функции, голоморфные вне круга, можно представить рядами Лорана по отрицательным степеням z , функции (2.52) для данной задачи запишем в виде

$$\varphi(z) = \Gamma_1 z + (A_1 z + B_1) \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k,$$

$$\psi(z) = \Gamma_2 z + \overline{B_1} \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k, \quad (2.76)$$

где

$$\Gamma_1 = -\frac{m_x + m_y}{4D(1+\nu)}, \quad \Gamma_2 = \frac{m_y - m_x}{2D(1-\nu)};$$

a_k и b_k – неизвестные постоянные, которые определим из граничных условий на контуре отверстия.

На контуре отверстия $z = t = R_1(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = R_1 \sigma$, где ϑ – параметр параметрического задания круга, равный центральному углу, $\sigma = e^{i\vartheta}$. Тогда граничное условие (2.48) для данной задачи на контуре L_1 примут вид

$$\alpha \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = 0. \quad (2.77)$$

Если контур отверстия не подкреплен и не загружен, то, подставив функции (2.76) в граничные условия (2.77) на контурах L_0 , L_1 и применяя метод рядов (сравнивая коэффициенты при $\sigma \ln \sigma$, $\ln \sigma$ и степенях σ) получим, что $a_2 = a_3 = b_2 = a_k = b_k = 0$ ($k = 4, 5, \dots$), $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, а также выражения

$$a_1 = \frac{R_1^2 \Gamma_2}{\alpha}, \quad b_1 = (\alpha - 1) R_1^2 \Gamma_1, \quad b_3 = a_1 R_1^2. \quad (2.78)$$

В случае жесткого подкрепления контура отверстия для определения неизвестных коэффициентов рядов (2.76) используются граничные условия (2.51) и получаются аналогичные формулы. Эти формулы совпадают с приведенными, если принять в них $\alpha = -1$.

Комплексные потенциалы в общем случае примут вид

$$\varphi(z) = \Gamma_1 z + \frac{a_1}{z}, \quad \psi(z) = \Gamma_2 z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_3}{z^3}, \quad (2.79)$$

а для моментов получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} M_x + M_y &= -4D(1+\nu) \left(\Gamma_1 - \operatorname{Re} \frac{a_1}{z^2} \right), \\ M_y - M_x + 2iH_{xy} &= 2D(1-\nu) \left[\Gamma_2 + \frac{2a_1}{z^3} \bar{z} - \frac{b_1}{z^2} - \frac{3b_3}{z^4} \right]. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Если $m_x = m_y = m$, то из приведенных формул получится решение задачи для всестороннего изгиба бесконечной плиты с круговым отверстием радиуса R_1 . В этом случае, если контур отверстия не загружен, то учитывая формулы (2.78), из формул (2.80) получим

$$M_x + M_y = 2m, \quad M_y - M_x + 2iH_{xy} = \frac{2R_1^2}{z^2} m.$$

Учитывая, что $M_n + M_s = M_x + M_y$, для точек контура отверстия, где $M_n = 0$, получим

$$M_s = 2m. \quad (2.81)$$

Если контур отверстия жестко подкреплён, то по формулам (2.80) получим

$$M_x + M_y = 2m, \quad M_y - M_x + 2iH_{xy} = -\frac{2R_1^2(1-\nu)}{(1+\nu)z^2} m.$$

В этом случае на основе равенства $M_n + M_s = M_x + M_y$ с учетом связи $M_s = \nu M_n$, получим

$$M_n = \frac{2m}{1+\nu}, \quad M_s = \frac{2m\nu}{1+\nu}, \quad (2.82)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор и компоненты главного момента усилий, приложенных к контуру L_1 , равны нулю, т. е. $P_1 = M_{x1} = M_{y1} = 0$. Учитывая это, по формулам (2.54) получаем, что $A_1 = B_1 = 0$, что подтверждает правильность формул (2.54) для коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52).

3. Круговое кольцо под действием равномерно распределенных поперечных усилий на контурах. Рассмотрим изотропную круговую кольцевую плиту с контурами L_0 и L_1 , радиусами R_0 и R_1 (рис. 2.7). Один из контуров жестко закреплён, на втором действует равномерно распределенные поперечные усилия.

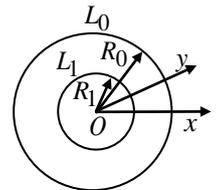


Рис. 2.7

Учитывая, что функции, голоморфные в кольце, можно представить рядами Лорана, функции (2.52) для данной задачи запишем в виде

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= (A_1 z + B_1) \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \\ \psi(z) &= \bar{B}_1 \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k z^k.\end{aligned}\quad (2.83)$$

На контурах кольца $z = t = R_l (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = R_l \sigma$, где ϑ – параметр параметрического задания круга, равный центральному углу, $\sigma = e^{i\vartheta}$. Если на контуре L_l действуют равномерно распределенные поперечные усилия интенсивности p_l , то имеем

$$f_l(s) = \pm \int_0^s p_l ds = \pm p_l R_l \vartheta = \mp i p_l R_l \ln \sigma; \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned}\int_0^s f_l(s) dt &= \pm p_l R_l \int_0^{\vartheta} \vartheta (dx + idy) = \mp p_l R_l^2 \int_0^{\vartheta} \vartheta (\sin \vartheta - i \cos \vartheta) d\vartheta = \\ &= \pm p_l R_l^2 [(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)(\vartheta + i)] = \mp p_l R_l^2 i (\sigma \ln \sigma - \sigma).\end{aligned}\quad (2.85)$$

причем верхние и нижние знаки относятся соответственно к внешнему и внутреннему контурам кольца.

Используя приведенные равенства, получим решения частных задач.

а) *Действие поперечной нагрузки на внутреннем контуре кольца.* Пусть внешний контур кольца жестко заземлен, внутренний находится под действием равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности p_1 (рис. 2.8). На внешнем жестко заземленном контуре кольца имеет место условие (2.50), в котором правая часть равна нулю. На внутреннем нагруженном поперечными усилиями контуре граничное условие имеет вид (2.48), причем на основе (2.85) правая часть получается такой:

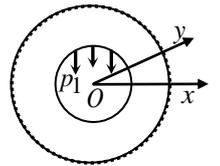


Рис. 2.8

$$-\frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s f_1(s) dt = \frac{R_1^2 p_1}{D(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \quad (2.86)$$

Подставляя функции (2.83) в условия (2.48) на L_1 и (2.50) на L_0 с учетом (2.86) и применяя метод рядов (сравнивая коэффициенты при $\sigma \ln \sigma$, $\ln \sigma$ и сте-

пенях σ) получим $b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0$ ($k \geq 2$) и выражения

$$A_1 = \frac{R_1 p_1}{D(1-\nu)(\alpha + 1)} = \frac{R_1 p_1}{4D} = \frac{2\pi R_1 p_1}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.87)$$

$$a_1 = -\frac{D(1-\nu) \left[A_1 R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) + A_1 R_1^2 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1) \right] + p_1 R_1^3}{D(1-\nu) \left((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2 \right)},$$

$$b_{-1} = -\left\{ D(1-\nu) \left[A_1 (\alpha - 1) (2 \ln R_0 + 1) - 2A_1 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1) \right] - \right.$$

$$\left. - 2p_1 R_1 \right\} \frac{R_0^2 R_1^2}{D(1-\nu) \left((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2 \right)}. \quad (2.88)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен $P_1 = 2\pi R_1 p_1$, а компоненты их главного момента в силу геометрической и силовой симметрии равны нулю. Учитывая это, по формулам (2.54) для A_1 и B_1 получаем опять выражения (2.87), что подтверждает правильность формул (2.54) для коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52).

Окончательно функции (2.83) примут вид

$$\varphi(z) = A_1 z \ln z + a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{b_{-1}}{z}. \quad (2.89)$$

Для моментов в точках вещественной оси (при $y = 0$) получим

$$M_x + M_y = -4D(1+\nu) \left[A_1 \ln x + a_1 + A_1 \right],$$

$$M_y - M_x = 2D(1-\nu) \left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2} \right), \quad H_{xy} = 0$$

или

$$M_x = -2D(1+\nu) \left[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1 \right] - D(1-\nu) \left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2} \right),$$

$$M_y = -2D(1+\nu) \left[A_1 \ln(x) + a_1 + A_1 \right] + D(1-\nu) \left(A_1 - \frac{b_{-1}}{x^2} \right). \quad (2.90)$$

В силу симметрии такие же значения будут иметь моменты вдоль любых радиальных направлений.

При $R_1 \rightarrow 0$ из приведенных формул следует решение задачи для случая действия сосредоточенной силы со значением $P_1^0 = 2\pi R_1 p_1$ в центре кругового диска

(рис. 2.9). Действительно, учитывая, что

$\lim_{R_1 \rightarrow 0} R_1 \ln R_1 = \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{\ln R_1}{1/R_1} = 0$, и переходя в (2.87), (2.88) к пределу

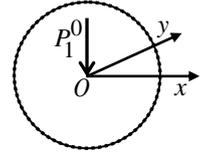


Рис. 2.9

при $R_1 \rightarrow 0$, получаем

$$A_1 = \frac{P_1^0}{8\pi D} = A_1^0, \quad B_1 = B_1^0 = 0; \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow 0} a_1 &= \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{D(1-\nu) \left((\alpha - 1)R_1^2 + 2R_0^2 \right)} \times \\ &\times \left\{ -D(1-\nu) \left[A_1 R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) + A_1 R_1^2 \left((\alpha - 1) \ln R_1 - 1 \right) \right] - p_1 R_1^3 \right\} = \\ &= -\frac{A_1 (2 \ln R_0 + 1)}{2} = -\frac{A_1^0 (2 \ln R_0 + 1)}{2}, \\ \lim_{R_1 \rightarrow 0} b_{-1} &= \lim_{R_1 \rightarrow 0} \left\{ -D(1-\nu) \left[A_1 R_1^2 (\alpha - 1) (2 \ln R_0 + 1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2A_1 R_1^2 \left((\alpha - 1) \ln R_1 - 1 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2p_1 R_1 \right\} \frac{R_0^2}{D(1-\nu) \left((\alpha - 1)R_1^2 + 2R_0^2 \right)} = 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Комплексные потенциалы примут вид

$$\varphi(z) = A_1^0 z \ln z + a_1 z, \quad \psi(z) = 0. \quad (2.93)$$

б) Действие поперечной нагрузки на внешнем контуре кольца. Пусть внутренний контур кругового кольца жестко заземлен, внешний находится под действием равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности p_0 (рис. 2.10). В этом случае комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, как и выше, представляются в виде

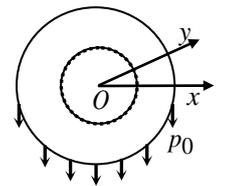


Рис. 2.10

(2.83). На внутреннем жестко заземленном контуре кольца имеет место условие (2.50), в котором правая часть равна нулю. На внешнем нагруженном поперечными усилиями контуре граничное условие имеет вид (2.48), причем на основе (2.85) правая часть получается такой:

$$-\frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s f_0(s) dt = -\frac{R_0^2 p_0}{D(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \quad (2.94)$$

Подставляя функции (2.83) в условия (2.48) на L_0 и (2.50) на L_1 , учитывая (2.94) и применяя метод рядов, получим равенства $b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0$ ($k \geq 2$), а также выражения

$$A_1 = -\frac{R_0 p_0}{D(1-\nu)(\alpha + 1)} = -\frac{R_0 p_0}{4D} = -\frac{2\pi R_0 p_0}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.95)$$

$$a_1 = -\frac{D(1-\nu) \left[A_1 R_1^2 (2 \ln R_1 + 1) + A_1 R_0^2 ((\alpha - 1) \ln R_0 - 1) \right] - p_0 R_0^3}{D(1-\nu) \left((\alpha - 1) R_0^2 + 2R_1^2 \right)},$$

$$b_{-1} = -\left\{ D(1-\nu) \left[A_1 (\alpha - 1) (2 \ln R_1 + 1) - 2A_1 ((\alpha - 1) \ln R_0 - 1) \right] + 2p_0 R_0 \right\} \frac{R_0^2 R_1^2}{D(1-\nu) \left((\alpha - 1) R_0^2 + 2R_1^2 \right)}. \quad (2.96)$$

Функции (2.83) опять примут вид (2.89) и т. к. сила реакции опоры равна $P_0 = 2\pi R_0 p_0$, то главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 равен $P_1 = -P_0$, а компоненты их главного момента равны нулю, по формулам (2.54) для A_1 и B_1 получаем опять выражения (2.95), что подтверждает правильность формул (2.54) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52). Для моментов получим выражения (2.90).

При $R_1 \rightarrow 0$ из приведенных формул следует решение задачи для случая действия сосредоточенной силы $P_1^0 = -2\pi R_0 p_0$ в центре кругового диска (рис. 2.11), когда внешний контур загружен поперечными усилиями p_0 . Действительно, переходя в (2.95), (2.96) к пределу при $R_1 \rightarrow 0$ получим

$$A_1^0 = A_1 = \frac{P_1^0}{8\pi D}, \quad B_1^0 = B_1 = 0; \quad (2.97)$$

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} a_1 = \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{D(1-\nu) \left((\alpha - 1) R_0^2 + 2R_1^2 \right)} \times \\ \times \left\{ -D(1-\nu) \left[A_1 R_1^2 (2 \ln R_1 + 1) + A_1 R_0^2 ((\alpha - 1) \ln R_0 - 1) \right] + p_0 R_0^3 \right\} =$$

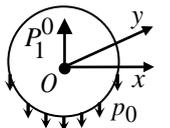


Рис. 2.11

$$\begin{aligned}
&= -\frac{D(1-\nu)\left[A_1 R_0^2((\alpha-1)\ln R_0 - 1)\right] - p_0 R_0^3}{D(1-\nu)(\alpha-1)R_0^2} = \\
&= -A_1 \ln R_0 + \frac{A_1}{(\alpha-1)} + \frac{p_0 R_0}{D(1-\nu)(\alpha-1)}, \\
\lim_{R_1 \rightarrow 0} b_{-1} &= \lim_{R_1 \rightarrow 0} \left\{ -D(1-\nu)\left[A_1 R_1^2(\alpha-1)(2\ln R_1 + 1) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2A_1 R_1^2((\alpha-1)\ln R_0 - 1)\right] - 2p_0 R_0 R_1^2 \right\} \times \\
&\quad \times \frac{R_0^2}{D(1-\nu)\left((\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2\right)} = 0. \tag{2.98}
\end{aligned}$$

Такое же решение можно получить, если использовать общий вид комплексных потенциалов (2.52).

в) Действие поперечной нагрузки на внешнем и внутреннем контурах кольца.

Пусть внешний и внутренний контуры кругового кольца находятся под действием равномерно распределенных поперечных усилий интенсивностей p_0 и p_1 (рис. 2.12). При этом кольцо находится в равновесии, поэтому главные векторы усилий на контурах равны друг другу и противоположны по направлению, т. е. $2\pi R_0 p_0 = -2\pi R_1 p_1$, а следовательно,

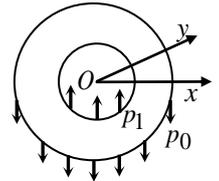


Рис. 2.12

$$p_1 = -\frac{R_0 p_0}{R_1}. \tag{2.99}$$

В этом случае комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, представляются в виде (2.83), а граничные условия на контурах плиты имеют вид (2.48), причем на основе (2.85) правые части получаются такими:

$$-\frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s f_l(s) dt = \mp \frac{R_l^2 p_l}{D(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma), \tag{2.100}$$

где верхний знак соответствует внешнему контуру кольца, внутренний – внутреннему контуру.

Подставляя функции (2.83) в условия (2.48), учитывая (2.100) и приравнявая коэффициенты при одинаковых логарифмах в граничных условиях на контурах

L_0 и L_1 , найдем соответственно равенства $A_1 = -\frac{R_0 p_0}{D(1-\nu)(\alpha+1)}$, $B_1 = 0$ и

$A_1 = \frac{R_1 p_1}{D(1-\nu)(\alpha+1)}$, $B_1 = 0$, которые на основании (2.99) означают одно и то же.

Учитывая это и применяя метод рядов, из граничных условий получим $b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0$ ($k \geq 2$), а также выражения

$$A_1 = \frac{R_1 p_1}{D(1-\nu)(\alpha+1)} = -\frac{R_0 p_0}{D(1-\nu)(\alpha+1)} = -\frac{R_0 p_0}{4D} = -\frac{2\pi R_0 p_0}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.101)$$

$$a_1 = \frac{-A_1(\alpha-1)(R_0^2 \ln R_0 - R_1^2 \ln R_1) + A_1(R_0^2 - R_1^2) + \frac{p_0 R_0^3 + p_1 R_1^3}{D(1-\nu)}}{(\alpha-1)(R_0^2 - R_1^2)},$$

$$b_{-1} = A_1 R_1^2 \ln R_1 (\alpha-1) - A_1 R_1^2 + \frac{p_1 R_1^3}{D(1-\nu)}. \quad (2.102)$$

Функции (2.83) опять примут вид (2.89) и, как выше, т. к. сила реакции опоры равна $P_0 = 2\pi R_0 p_0$, то главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 равен $P_1 = -P_0$, а компоненты их главного момента равны нулю, по формулам (2.54) для A_1 и B_1 получаем опять выражения (2.95), что подтверждает правильность формул (2.54) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52). Для моментов получим выражения (2.90).

При $R_1 \rightarrow 0$ из приведенных формул следует решение задачи для случая действия сосредоточенной силы $P_1^0 = -2\pi R_0 p_0$ в центре кругового диска (рис. 2.11), загруженного по внешнему контуру усилиями p_0 . Действительно, переходя в (2.101), (2.102) к пределу при $R_1 \rightarrow 0$, получим

$$A_1^0 = A_1 = \frac{P_1^0}{8\pi D}, \quad B_1^0 = B_1 = 0; \quad (2.103)$$

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} a_1 = \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{D(1-\nu)(\alpha-1)(R_0^2 - R_1^2)} \left\{ D(1-\nu) \times \right. \\ \left. \times \left[-A_1(\alpha-1)(R_0^2 \ln R_0 - R_1^2 \ln R_1) + A_1(R_0^2 - R_1^2) \right] + p_0 R_0^3 + p_1 R_1^3 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{D(1-\nu)\left[A_1 R_0^2((\alpha-1)\ln R_0 - 1)\right] - p_0 R_0^3}{D(1-\nu)(\alpha-1)R_0^2} =, \\
&= -A_1 \ln R_0 + \frac{A_1}{(\alpha-1)} + \frac{p_0 R_0}{D(1-\nu)(\alpha-1)} \\
\lim_{R_1 \rightarrow 0} b_{-1} &= \lim_{R_1 \rightarrow 0} A_1 R_1^2 \ln R_1 (\alpha-1) - A_1 R_1^2 + \frac{p_1 R_1^3}{D(1-\nu)} = 0. \quad (2.104)
\end{aligned}$$

Такое же решение можно получить, если использовать общий вид комплексных потенциалов (2.52).

4. Действие давления по основанию кругового кольца. Рассмотрим изотропную кольцевую плиту с контурами L_0 и L_1 , радиусами R_0 и R_1 . Один из контуров кольца жестко защемлен, второй свободен от воздействий, а по верхнему основанию плиты действует равномерно распределенное давление интенсивности q_0 .

В этом случае частное решение дифференциального уравнения теории изгиба (2.45) опять выберем в виде (2.32).

Вычислим интегралы, входящие в правые части граничных условий (2.48) на контурах кругового кольца радиуса R_l , где $x = R_l \cos \vartheta$, $y = R_l \sin \vartheta$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^s (M_{0y} - iH_{0xy}) dx + i(M_{0x} + iH_{0xy}) dy = \\
&= -4Dd_0 R_l^3 (3+\nu)(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = -4Dd_0 R_l^3 (3+\nu)\sigma, \\
&\int_0^s N_{0xy} (dx + idy) = -32Dd_0 R_l^3 (\vartheta + i)(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = \\
&= 32Dd_0 R_l^3 i(\sigma \ln \sigma - \sigma). \quad (2.105)
\end{aligned}$$

Используя приведенные интегралы, получим решения частных задач.

а) Плита с жестко защемленным внешним контуром. Пусть круговое кольцо по контуру L_0 жестко защемлено, внутренний контур L_1 свободен от воздействий (рис. 2.13).

На внешнем жестко защемленном контуре кольца имеет место

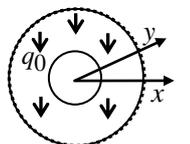


Рис. 2.13

условие (2.50), в котором правая часть на основе (2.34) имеет вид

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} = 4q_* R_0^2 (x + iy) = 4q_* R_0^3 \sigma. \quad (2.106)$$

На внутреннем незагруженном контуре граничное условие имеет вид (2.48), причем на основе (2.105) правая часть получается такой:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s \left[(M_{0y} - iH_{0xy}) dx + i(M_{0x} + iH_{0xy}) dy \right] + \\ & + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{0xy} dt = \frac{-4q_* R_1^3 (3+\nu)}{(1-\nu)} \sigma - \frac{32q_* R_1^3}{(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, как и выше, представляются в виде (2.83). Подставляя функции (2.83) в условия (2.48) на L_1 и условия (2.50) на L_0 с учетом (2.106), (2.107) и применяя метод рядов, получим равенства $b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0$ ($k \geq 2$), а также выражения

$$A_1 = -\frac{32q_* R_1^2}{(1-\nu)(\alpha + 1)} = -\frac{q_0 R_1^2}{8D} = -\frac{q_0 \pi R_1^2}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} a_1 = & -\frac{A_1 R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) + A_1 R_1^2 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1) + 4q_* R_0^4}{(\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2} + \\ & + \frac{4(5-\nu)q_* R_1^4}{(1-\nu)((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2)}, \\ b_{-1} = & -\left\{ (1-\nu) \left[A_1 (\alpha - 1) (2 \ln R_0 + 1) - 2A_1 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1) \right] + \right. \\ & \left. + 8(1+\nu)q_* R_0 + 4(5-\nu)q_* R_1^2 \right\} \frac{R_0^2 R_1^2}{(1-\nu)((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2)}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Тогда функции (2.83) опять примут вид (2.89) и, как выше, т. к. главный вектор усилий по контуру L_1 от частного решения $w_0(x, y)$ равен

$$P_{01} = \int_{L_1} N_{0xy} dt = -32q_* D R_1^2 \int_0^{2\pi} \mathcal{G}(dx + idy) = -\pi R_1^2 q_0, \quad (2.110)$$

а компоненты их главного момента равны нулю, то по формулам (2.54) для A_1 и B_1 получаем опять выражения (2.108), что дополнительно подтверждает пра-

тельность формул (2.54) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52).

Для рассматриваемого случая для моментов получаются формулы, следующие из (2.90), если к правым частям добавить соответственно M_{0x} и M_{0y} , вычисляемые по формулам (2.64).

При $R_1 \rightarrow 0$ из приведенных формул следует решение задачи для случая диска находящегося под действием равномерно распределенного давления интенсивности q_0 (рис. 2.14). Переходя в (2.108), (2.109) к пределу при $R_1 \rightarrow 0$, получаем равенства $b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0$ ($k \geq 2$), $B_1 = 0$, а также выражения

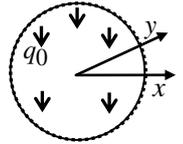


Рис. 2.14

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} A_1 = - \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \frac{q_0 \pi R_1^2}{8\pi D} = 0; \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \lim_{R_1 \rightarrow 0} a_1 &= \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{-A_1 R_0^2 (2 \ln R_0 + 1) - A_1 R_1^2 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1) - 4q_* R_0^4}{(\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2} + \\ &+ \lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{4(5 - \nu) q_* R_1^4}{(1 - \nu) ((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2)} = -2q_* R_0^2, \\ \lim_{R_1 \rightarrow 0} b_{-1} &= \lim_{R_1 \rightarrow 0} \left\{ (1 - \nu) \left[-A_1 R_1^2 (\alpha - 1) (2 \ln R_0 + 1) - \right. \right. \\ &- 2A_1 R_1^2 ((\alpha - 1) \ln R_1 - 1) \left. \right] - 8(1 + \nu) q_* R_0 R_1^2 - \\ &- 4(5 - \nu) q_* R_1^4 \left. \right\} \frac{R_0^2}{(1 - \nu) ((\alpha - 1) R_1^2 + 2R_0^2)} = 0. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Комплексные потенциалы примут вид

$$\varphi(z) = a_1 z, \quad \psi(z) = 0.$$

Заметим, что приведенное решение полностью совпадает с полученным ранее в п. 2.1 с использованием общего вида комплексных потенциалов.

б) *Плита с жестко заземленным внутренним контуром.* Рассмотрим теперь случай, когда круговое кольцо по контуру L_0 свободно, внутренний контур L_1 заземлен (рис. 2.15).

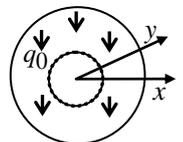


Рис. 2.15

В этом случае на внешнем незагруженном контуре кольца имеет место условие (2.48), в котором правая часть, на основе (2.105) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D(1-\nu)} \int_0^s \left[(M_{0y} - iH_{0xy}) dx + i(M_{0x} + iH_{0xy}) dy \right] + \\ & + \frac{i}{D(1-\nu)} \int_0^s N_{0xy} dt = \frac{-4q_*R_0^3(3+\nu)}{(1-\nu)} \sigma - \frac{32q_*R_0^3}{(1-\nu)} (\sigma \ln \sigma - \sigma). \end{aligned} \quad (2.113)$$

На внутреннем жестко защемленном контуре граничное условие имеет вид (2.50), причем на основе (2.34) правая часть получается такой:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + i \frac{\partial w_0}{\partial y} = 4q_*R_1^2(x + iy) = 4q_*R_1^3\sigma. \quad (2.114)$$

Комплексные потенциалы $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, как и выше, представляются в виде (2.83). Подставляя функции (2.83) в условия (2.48) на L_0 и (2.50) на L_1 с учетом (2.113), (2.114) и применяя метод рядов получаем равенства $b_1 = a_{-1} = a_k = b_k = a_{-k} = b_{-k} = 0$ ($k \geq 2$), а также выражения

$$A_1 = -\frac{32q_*R_0^2}{(1-\nu)(\alpha+1)} = -\frac{q_0R_0^2}{8D} = -\frac{q_0\pi R_0^2}{8\pi D}, \quad B_1 = 0; \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} a_1 = & -\frac{A_1R_1^2(2\ln R_1 + 1) + A_1R_0^2((\alpha-1)\ln R_0 - 1) + 4q_*R_1^4}{(\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2} - \\ & - \frac{4(5-\nu)q_*R_0^4}{(1-\nu)((\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2)}, \\ b_{-1} = & -\left\{ (1-\nu) \left[A_1(\alpha-1)(2\ln R_1 + 1) - 2A_1((\alpha-1)\ln R_0 - 1) \right] + \right. \\ & \left. + 8(1+\nu)q_*R_1 + 4(5-\nu)q_*R_0^2 \right\} \frac{R_0^2R_1^2}{(1-\nu)((\alpha-1)R_0^2 + 2R_1^2)}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Тогда функции (2.83) опять примут вид (2.89) и, как выше, т. к. сила реакции опоры равна $P_0 = q_0\pi(R_0^2 - R_1^2)$, а главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 равен сумме

$$P_1 + P_{01} = -P_0 + \int_{L_1} N_{0xy} dt = -q_0\pi(R_0^2 - R_1^2) - q_0\pi R_1^2 = -\pi R_0^2 q_0,$$

а компоненты их главного момента равны нулю, по формулам (2.54) для A_1 и B_1 получаем опять выражения (2.115), что дополнительно подтверждает правильность формул (2.54) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52).

Для моментов получаются формулы, следующие из (2.90), если к правым частям добавить соответственно M_{0x} и M_{0y} , вычисляемые по формулам (2.64).

5. Круговой диск с произвольно расположенным круговым отверстием.

Аналитические выражения для коэффициентов при логарифмических слагаемых комплексных потенциалов можно найти и для произвольного расположения внутреннего контура кольца (рис. 2.16), хотя точное решение здесь получить невозможно. Покажем это. Пусть изотропная плита с контуром L_0 и радиусом R_0 ослаблен круговым отверстием с контуром L_1 , радиусом R_1 и центром в произвольной точке $z_1(x_{01}, y_{01})$. Один из контуров плиты жестко зашпемлен, на втором действуют равномерно распределенные поперечные усилия.

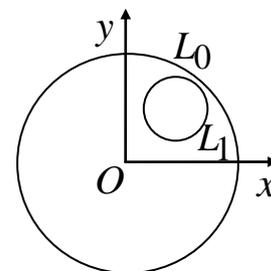


Рис. 2.16

Учитывая, что функцию, голоморфную в круге можно представить степенным рядом, а функцию, голоморфную вне отверстия с центром в точке z_1 , – рядом Лорана, комплексные потенциалы (2.52) запишем в виде

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= (A_1 z + B_1) \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{1k}}{(z - z_1)^k}, \\ \psi(z) &= \bar{B}_1 \ln z + \sum_{k=0}^{\infty} b_{0k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{1k}}{(z - z_1)^k}.\end{aligned}\quad (2.117)$$

Используя приведенные равенства, получим решения частных задач.

а) *Действие поперечной нагрузки на внутреннем контуре плиты.* Пусть внешний контур плиты жестко зашпемлен, внутренний находится под действием равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности p_1 (рис. 2.17).

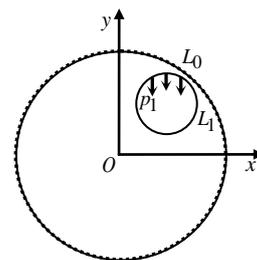


Рис. 2.17

На внешнем жестко защемленном контуре кольца имеет место условие (2.50), в котором правая часть равна нулю. На внутреннем нагруженном поперечными усилиями контуре граничное условие имеет вид (2.48), причем для его правой части имеют место формулы (2.86). Учитывая это, подставляя функции (2.117) в эти условия и сравнивая коэффициенты при $\sigma \ln \sigma$, $\ln \sigma$, получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{R_1 p_1}{D(1-\nu)(\alpha + 1)} = \frac{R_1 p_1}{4D} = \frac{2\pi R_1 p_1}{8\pi D}, \\ B_1 &= -\frac{z_1 p_1 R_1}{4D} = -\frac{z_1 2\pi p_1 R_1}{8\pi D}. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Одновременно, сравнивая коэффициенты при степенях σ , найдем систему для определения a_{0k} , a_{1k} , b_{0k} , b_{1k} , из которой найдем

$$b_{11} = z_1 \bar{B}_1, \quad (2.119)$$

что обеспечивает выполнение условия (2.57) однозначности прогиба

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен $P_1 = 2\pi R_1 p_1$, а компоненты их главного момента равны $M_{x1} = y_{01} P_1$ и $M_{y1} = -x_{01} P_1$. Учитывая это, по формулам (2.54) для A_1 и B_1 получаем опять выражения (2.118), что подтверждает правильность формул (2.54) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52).

б) *Действие поперечной нагрузки на внешнем контуре круговой плиты.* Пусть внутренний контур плиты жестко защемлен, внешний находится под действием равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности p_0 (рис. 2.18).

На внутреннем жестко защемленном контуре кольца имеет место условие (2.50), в котором правая часть равна нулю. На внешнем нагруженном поперечными усилиями контуре граничное условие имеет вид (2.48), причем для его правой части имеют место формулы (2.94). Учитывая это и подставляя функции (2.117) в эти условия и сравнивая коэффициенты при $\sigma \ln \sigma$, $\ln \sigma$, получим

$$A_1 = -\frac{R_0 p_0}{D(1-\nu)(\alpha + 1)} = -\frac{R_0 p_0}{4D} = -\frac{2\pi R_0 p_0}{8\pi D},$$

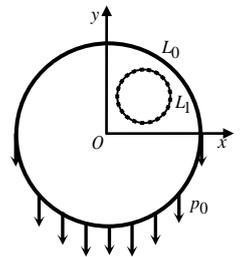


Рис. 2.18

$$B_1 = \frac{z_1 p_0 R_0}{4D} = \frac{z_1 2\pi p_0 R_0}{8\pi D}. \quad (2.120)$$

Одновременно, сравнивая коэффициенты при степенях σ , найдем систему для определения a_{0k} , a_{1k} , b_{0k} , b_{1k} , из которой найдем

$$b_{11} = z_1 \bar{B}_1, \quad (2.121)$$

что обеспечивает выполнение условия (2.57) однозначности прогиба

Заметим, что в данном случае сила реакции опоры равна $P_0 = 2\pi R_0 p_0$, поэтому главный вектор сил реакции жесткого защемления контура L_1 равен $P_1 = -P_0$, а компоненты их главного момента равны $M_{x1} = y_{01} P_1$ и $M_{y1} = -x_{01} P_1$. Учитывая это, по формулам (2.54) для A_1 и B_1 получаем опять выражения (2.120), что подтверждает правильность формул (2.54) для нахождения коэффициентов при логарифмах комплексных потенциалов (2.52).

2.3. Построение решений задач для анизотропного кольца с определением логарифмических членов комплексных потенциалов из граничных условий

1. Бесконечная плита с эллиптическим отверстием. Рассмотрим бесконечную анизотропную плиту с эллиптическим отверстием L_1 с полуосями a_1 , b_1 (рис. 2.19). В этом случае комплексные потенциалы, голоморфные вне эллиптических отверстий L_{k1} , можно представить рядами Лорана, и на основе (2.14) для них получить разложения

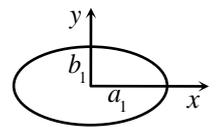


Рис. 2.19

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + (A_{k1} z_k + B_{k1}) \ln z_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (2.122)$$

где a_{k1n} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий (2.10) на контуре отверстия. Если контур отверстия свободен от нагрузок и произ-

вольная постоянная $c_1 = 0$, то эти условия примут вид

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{\mu_k} W'_k(z_k) = c_{11}, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k W'_k(z_k) = c_{21}. \quad (2.123)$$

Подставляя в эти условия функции (2.122) и учитывая, что на контуре отверстия

$$x = a_1 \cos \vartheta = \frac{a_1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = b_1 \sin \vartheta = -\frac{ib_1}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad \zeta_{k1} = \sigma, \quad \text{получим}$$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{\mu_k} \frac{a_{k1n}}{\sigma^n} &= \\ &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{\mu_k} \left[(\Gamma_k + A_{k1} \ln \sigma) R_{k1} \left(\sigma + \frac{m_{k1}}{\sigma} \right) + B_{k1} \ln \sigma \right] - c_{11}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 q_k \frac{a_{k1n}}{\sigma^n} &= \\ &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 q_k \left[(\Gamma_k + A_{k1} \ln \sigma) R_{k1} \left(\sigma + \frac{m_{k1}}{\sigma} \right) + B_{k1} \ln \sigma \right] - c_{21}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Приравнявая в (2.124) коэффициенты при одинаковых степенях σ , $\ln \sigma$, $\sigma \ln \sigma$ получим, что $a_{k1n} = 0$ при $n \geq 2$, $A_{k1} = B_{k1} = 0$ и систему уравнений

$$\sum_{k=1}^2 \frac{p_k}{\mu_k} a_{k11} = \beta_{k1}, \quad \sum_{k=1}^2 q_k a_{k11} = \gamma_{k1}, \quad (2.125)$$

в которой

$$\begin{aligned} \beta_{k1} &= -\sum_{k=1}^2 \left[\frac{p_k}{\mu_k} \Gamma_k R_{k1} m_{k1} + \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{\Gamma}_k \bar{R}_{k1} \right], \\ \gamma_{k1} &= -\sum_{k=1}^2 \left[q_k \Gamma_k R_{k1} m_{k1} + \bar{q}_k \bar{\Gamma}_k \bar{R}_{k1} \right]. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Тогда для комплексных потенциалов получим выражения

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}, \quad (2.127)$$

где Γ_k – постоянные, вычисляемые из решения системы (2.16), а a_{k11} – из системы (2.125).

Если контур отверстия жестко подкреплён, то в граничных условиях (2.10)

вместо выражений (2.11) нужно использовать (2.12) для подкрепленного контура. Тогда получится то же самое решение, где всюду $\frac{p_k}{\mu_k}$ и q_k нужно заменить на 1 и μ_k соответственно.

Продифференцировав (2.127) и подставив $W_k''(z_k)$ в (2.2), получим выражения для моментов

$$(M_x, M_y, H_{xy}) = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 (p_k, q_k, r_k) \left(\Gamma_k - \frac{a_{k11}}{R_{k1}(\zeta_{k1}^2 - m_{k1})} \right). \quad (2.128)$$

Если $b_1=0$, то эллипс переходит в разрез (трещину или линейное жесткое включение) и для него можно вычислять КИМ по формулам [55]

$$k_{1M}^{\pm} = -2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{\sqrt{a_1} q_k a_{k11}}{2R_{k1}}, \quad k_{2M}^{\pm} = 0, \quad (2.129)$$

Если $M_y^{\infty} = m_y$, $M_x^{\infty} = H_{xy}^{\infty} = 0$, то система (2.16) примет вид

$$\begin{aligned} 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= C_{21} m_y, & 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= C_{22} m_y, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= C_{23} m_y, & 2\text{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= 0. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Во всех последующих параграфах изучаются только логарифмические слагаемые комплексных потенциалов, так как получить точные решения даже для анизотропных многосвязных плит, включая и простейшие задачи для кругового кольца, не представляется возможным. Для них применимы численно-аналитические методы, которые представлены в разделе 3. Там же описаны результаты численных исследований, включая и результаты по точным решениям задач и для изотропных, и для анизотропных плит.

2. Круговая плита с круговым отверстием под действием равномерно распределенных поперечных усилий на контурах. Рассмотрим анизотропную круговую плиту с внешним контуром L_0 и радиуса R_0 с круговым отверстием L_1 радиуса R_1 с центром в точке $z_1(x_{01}, y_{01})$. Один из контуров жестко защемлен, на

втором действует равномерно распределенные поперечные усилия.

Вычислим вначале некоторые интегралы, входящие в граничные условия. Для координат точек на контурах плиты имеем $x = x_{0l} + R_l \cos \vartheta$, $y = y_{0l} + R_l \sin \vartheta$, ϑ – параметр параметрического задания эллипса, $\sigma = e^{i\vartheta}$. В случае действия равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности p_l по контуру L_l с учетом (2.84) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^s f_l(s) dx &= \mp \frac{p_l R_l^2 i}{2} \left[\ln \sigma \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) - \sigma + \frac{1}{\sigma} \right], \\ \int_0^s f_l(s) dy &= \pm \frac{p_l R_l^2}{2} \left[-\ln \sigma \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) + \sigma + \frac{1}{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (2.131)$$

где верхний знак соответствует внешнему контуру, нижний – внутренним контурам отверстий. Рассмотрим частные случаи.

В данном случае комплексные потенциалы (2.14) имеют вид

$$W_k'(z_k) = (A_{k1} z_k + B_{k1}) \ln(z_k - z_{k1}) + W'_{k0}(z_k), \quad (2.132)$$

$W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{k0} , L_{k1} , получаемыми из контуров L_0 , L_1 заданной области S аффинными преобразованиями (2.13).

В силу того, что контуры кольца L_l являются круговыми, конформные отображения внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} будут иметь вид

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl} \right), \quad (2.133)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \quad R_{kl} = R_l (1 - i\mu_k) / 2, \quad m_{kl} = (1 + i\mu_k) / (1 - i\mu_k). \quad (2.134)$$

На контурах плиты $\zeta_{kl} = \sigma$. Поэтому

$$\begin{aligned} \ln(z_k - z_{k1}) &= \ln \sigma + \text{ряд по степеням } \sigma, \\ z_k \ln(z_k - z_{k1}) &= \left[z_{k1} + R_{k1} \left(\sigma + \frac{m_{k1}}{\sigma} \right) \right] \ln \sigma + \text{ряд по степеням } \sigma, \end{aligned} \quad (2.135)$$

Используя приведенные формулы, рассмотрим частные задачи.

a) Круговая плита с жестко заземленным внешним контуром. Рассмотрим круговую плиту с жестко заземленным внешним контуром L_0 и загруженным равномерно распределенными поперечными усилиями интенсивности p_1 внутренним контуром L_1 (см. рис. 2.17).

На внешнем жестко заземленном контуре имеют место условия (2.12), в которых правые части равны нулю. На внутреннем загруженном поперечными усилиями контуре граничные условия имеют вид (2.11), причем для правых частей этого условия справедливы формулы (2.131).

Используя конформные отображения (2.133) и принимая во внимание выражения (2.135), подставляя функции (2.132) в граничные условия (2.11) и приравнявая коэффициенты при $\ln \sigma$ и $\sigma \ln \sigma$ получим следующие системы для определения неизвестных постоянных A_{k1} и B_{k1}

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (A_{k1} m_{k0} R_{k0} - \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k0}) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (A_{k1} m_{k0} R_{k0} \mu_k - \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k0} \bar{\mu}_k) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left(\frac{p_k}{\mu_k} A_{k1} m_{k1} R_{k1} - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k1} \right) &= p_1 R_1^2, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (q_k A_{k1} m_{k1} R_{k1} - \bar{q}_k \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k1}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (B_{k1} - \bar{B}_{k1}) &= 0, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (B_{k1} \mu_k - \bar{B}_{k1} \bar{\mu}_k) = 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left[\frac{p_k}{\mu_k} (A_{k1} z_{k1} + B_{k1}) - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} (\bar{A}_{k1} \bar{z}_{k1} + \bar{B}_{k1}) \right] &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left[q_k (A_{k1} z_{k1} + B_{k1}) - \bar{q}_k (\bar{A}_{k1} \bar{z}_{k1} + \bar{B}_{k1}) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен $P_1 = 2\pi R_1 p_1$, а компоненты их главного момента равны $M_{y1} = -x_{01} P_1$

и $M_{x1} = y_{01}P_1$.

Подставляя в (2.136), (2.137) равенства (2.134), (2.7) и принимая во внимание соотношения (2.18), (2.19) и то, что

$$2\operatorname{Re}(a) = 2\operatorname{Re}(\bar{a}), \quad (2.138)$$

придем к системе тождеств. На основании этого можем утверждать, что системы (2.18), (2.19) верны и их можно использовать при решении задач.

Если контур отверстия находится в начале координат, то в решении нужно принимать $x_{01} = y_{01} = 0$.

б) Круговая плита с жестко заземленным внутренним контуром. Рассмотрим круговую плиту с жестко заземленным внутренним контуром L_1 и нагруженным равномерно распределенными поперечными усилиями интенсивности p_0 внешним контуром L_0 (см. рис. 2.18).

На внутреннем жестко заземленном контуре кольца имеют место условия (2.12), в которых правые части равны нулю. На внешнем нагруженном поперечными усилиями контуре граничные условия имеют вид (2.11), причем для правых частей этого условия справедливы формулы (2.131).

Используя конформные отображения (2.133) и принимая во внимание выражения (2.135), подставляя функции (2.132) в граничные условия (2.11), (2.12) и приравнявая коэффициенты при $\ln \sigma$ и $\sigma \ln \sigma$ получим следующие системы для определения неизвестных постоянных A_{k1} и B_{k1}

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (A_{k1} m_{k0} R_{k0} - \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k0}) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (A_{k1} m_{k0} R_{k0} \mu_k - \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k0} \bar{\mu}_k) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left(\frac{p_k}{\mu_k} A_{k1} m_{k1} R_{k1} - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k1} \right) &= -p_0 R_0^2, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (q_k A_{k1} m_{k1} R_{k1} - \bar{q}_k \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k1}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i(B_{k1} - \bar{B}_{k1}) &= 0, & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i(B_{k1}\mu_k - \bar{B}_{k1}\bar{\mu}_k) &= 0, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left[\frac{p_k}{\mu_k} (A_{k1}z_{k1} + B_{k1}) - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} (\bar{A}_{k1}\bar{z}_{k1} + \bar{B}_{k1}) \right] &= 0, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left[q_k (A_{k1}z_{k1} + B_{k1}) - \bar{q}_k (\bar{A}_{k1}\bar{z}_{k1} + \bar{B}_{k1}) \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Заметим, что сила реакции опоры равна $P_0 = 2\pi R_0 p_0$, поэтому в силу равновесия плиты главный вектор усилий опоры на контуре L_1 , $P_1 = -P_0$, т.е. $P_1 = -P_0 = -2\pi R_0 p_0$, а компоненты главного момента усилий опоры равны $M_{y1} = -x_{01}P_1$ и $M_{x1} = y_{01}P_1$.

Подставляя в (2.139), (2.140) соотношения (2.134), (2.7) и принимая во внимание соотношения (2.18), (2.19) и то, что

$$2\operatorname{Re}(a) = 2\operatorname{Re}(\bar{a}), \tag{2.141}$$

придем к системе тождеств. На основании этого можем утверждать, что системы (2.18), (2.19) верны и их можно использовать при решении задач.

Если контур отверстия находится в начале координат, то в решении нужно принимать $x_{01} = y_{01} = 0$.

3. Круговое анизотропное кольцо под действием нормального давления по основанию. Рассмотрим анизотропное круговое кольцо с внешним контуром L_0 радиуса R_0 и внутренним контуром L_1 радиуса R_1 . Плита находится под действием равномерно распределенного давления q_0 по верхнему основанию плиты. Один из контуров жестко заземлен, второй незагружен.

Вычислим вначале некоторые интегралы, входящие в граничные условия. Для координат точек на контурах плиты имеем $x = R_l \cos \vartheta$, $y = R_l \sin \vartheta$, ϑ – параметр параметрического задания эллипса, $\sigma = e^{i\vartheta}$. В случае действия равномерно распределенного давления интенсивности q_0 по верхнему основанию частное решение дифференциального уравнения (2.4), опять выберем в виде (2.32). Тогда из (2.34), (2.35) следует, что

$$N_{0xy} = 4q_* R_l^2 \left[6 \cos^2(\vartheta)(D_{16} + D_{26}) - \vartheta(2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + 3 \cos(\vartheta) \sin(\vartheta)(D_{22} - D_{11}) \right]; \quad (2.142)$$

$$J_{01} = \frac{4R_l^3 q_*}{3} \left[4 \cos^3(\vartheta)(3D_{16} + D_{26}) - \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)(5D_{11} - 2D_{12} - 3D_{22} - 4D_{66}) - 3\vartheta \cos(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) + 3 \cos(\vartheta)(D_{16} + 3D_{26}) + \sin(\vartheta)(5D_{11} + D_{12} + 6D_{22} + 8D_{66}) \right],$$

$$J_{02} = \frac{4R_l^3 q_*}{3} \left[\cos^3(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} - 5D_{22} + 4D_{66}) + 4 \cos^2(\vartheta) \sin(\vartheta)(D_{16} + 3D_{26}) - 3\vartheta \sin(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) - 3 \cos(\vartheta)(3D_{11} + D_{12} + 4D_{66}) + \sin(\vartheta)(5D_{16} + 3D_{26}) \right]. \quad (2.143)$$

В данном случае комплексные потенциалы (2.14) имеют вид

$$W_k'(z_k) = (A_{k1} z_k + B_{k1}) \ln z_k + W'_{k0}(z_k), \quad (2.144)$$

$W'_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{k0} , L_{k1} , получаемыми из заданной области S аффинными преобразованиями (2.13).

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl}

$$z_k = R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right). \quad (2.145)$$

На контурах плиты $\zeta_{kl} = \sigma$ и имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \ln z_k &= \ln \sigma + \text{ряд по степеням } \sigma, \\ z_k \ln z_k &= \ln \sigma R_{kl} \left(\sigma + \frac{m_{kl}}{\sigma} \right) + \text{ряд по степеням } \sigma. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Используя приведенные формулы, рассмотрим частные задачи.

а) *Круговая плита с жестко заземленным внешним контуром.* Рассмотрим круговое кольцо с жестко заземленным внешним контуром L_0 и не загруженным внутренним контуром L_1 , находящиеся по действием равномерно распределенного давления интенсивности q_0 по основанию (рис. 2.13).

На внешнем жестко заземленном контуре кольца граничные условия имеют вид (2.12), причем для правых частей этого условия справедливы формулы (2.34). На внутреннем незагруженном кольца имеют место условия (2.11), причем для правых частей этого условия справедливы формулы (2.143).

Используя конформные отображения (2.145) и принимая во внимание выражения (2.146), подставляя функции (2.144) в граничные условия (2.11), (2.12) и приравнявая коэффициенты при $\ln \sigma$ и $\sigma \ln \sigma$ получим следующие системы для определения неизвестных постоянных A_{k1} и B_{k1}

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i(A_{k1}m_{k0}R_{k0} - \bar{A}_{k1}\bar{R}_{k0}) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i(A_{k1}m_{k0}R_{k0}\mu_k - \bar{A}_{k1}\bar{R}_{k0}\bar{\mu}_k) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i\left(\frac{p_k}{\mu_k} A_{k1}m_{k1}R_{k1} - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{A}_{k1}\bar{R}_{k1}\right) &= -\frac{R_1^2 q_0}{2}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i(q_k A_{k1}m_{k1}R_{k1} - \bar{q}_k \bar{A}_{k1}\bar{R}_{k1}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i(B_{k1} - \bar{B}_{k1}) &= 0, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i(B_{k1}\mu_k - \bar{B}_{k1}\bar{\mu}_k) = 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i\left[\frac{p_k}{\mu_k} B_{k1} - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{B}_{k1}\right] &= 0, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i[q_k B_{k1} - \bar{q}_k \bar{B}_{k1}] = 0. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Подставляя в (2.147), (2.148) соотношения (2.134), (2.7) и принимая во внимание соотношения (2.18), (2.19) и то, что

$$2\operatorname{Re}(a) = 2\operatorname{Re}(\bar{a}), \quad (2.149)$$

придем к системе тождеств. На основании этого можем утверждать, что системы (2.18), (2.19) верны и их можно использовать при решении задач.

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к конту-

ру L_1 , равен $P_1 = 0$, $P_{01} = - \int_0^{2\pi} (N_{0y} dx - N_{0x} dy) = -\pi q_0 R_1^2$, а компоненты их главного

момента равны нулю. Поэтому на основе систем (2.18), (2.147), получаем, что $A_{k1} \neq 0$, а из однородности систем (2.19), (2.148) получаем, что $B_{k1} = 0$.

б) *Круговая плита с жестко заземленным внутренним контуром.* Рассмотрим круговое кольцо с жестко заземленным внутренним контуром L_1 и не нагруженным внешним контуром L_0 , находящиеся по действию равномерно распределенного давления интенсивности q_0 по основанию (рис. 2.15).

На внутреннем жестко заземленном контуре кольца граничные условия имеют вид (2.12), причем для правых частей этого условия справедливы формулы (2.34). На внешнем незагруженном кольца имеют место условия (2.11), причем для правых частей этого условия справедливы формулы (2.143).

Используя конформные отображения (2.145) и принимая во внимание выражения (2.146), подставляя функции (2.144) в граничные условия (2.11), (2.12) и приравнявая коэффициенты при $\ln \sigma$ и $\sigma \ln \sigma$ получим следующие системы для определения неизвестных постоянных A_{k1} и B_{k1}

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (A_{k1} m_{k0} R_{k0} - \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k0}) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (A_{k1} m_{k0} R_{k0} \mu_k - \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k0} \bar{\mu}_k) &= 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left(\frac{p_k}{\mu_k} A_{k1} m_{k1} R_{k1} - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k1} \right) &= -\frac{R_0^2 q_0}{2}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (q_k A_{k1} m_{k1} R_{k1} - \bar{q}_k \bar{A}_{k1} \bar{R}_{k1}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (B_{k1} - \bar{B}_{k1}) &= 0, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i (B_{k1} \mu_k - \bar{B}_{k1} \bar{\mu}_k) = 0, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i \left[\frac{p_k}{\mu_k} B_{k1} - \frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k} \bar{B}_{k1} \right] &= 0, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i [q_k B_{k1} - \bar{q}_k \bar{B}_{k1}] = 0. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Подставляя в (2.150), (2.151) соотношения (2.134), (2.7) и принимая во вни-

мание соотношения (2.18), (2.19) и то, что

$$2\operatorname{Re}(a) = 2\operatorname{Re}(\bar{a}), \quad (2.152)$$

придем к системе тождеств. На основании этого можем утверждать, что системы (2.18), (2.19) верны и их можно использовать при решении задач.

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен

$$P_1 + P_{01} = -P_0 - \int_0^{2\pi} (N_{0y}dx - N_{0x}dy) = -\pi q_0 (R_0^2 - R_1^2) - \pi q_0 R_1^2 = -\pi q_0 R_0^2,$$

а компоненты их главного момента равны нулю. Поэтому на основе систем (2.18), (2.150), получаем, что $A_{k1} \neq 0$, а из однородности систем (2.19), (2.151) получаем, что $B_{k1} = 0$.

2.4. Выводы по разделу 2

В данном разделе диссертации приведены основные соотношения для комплексных потенциалов теории изгиба анизотропных и изотропных плит, выражения через них основных характеристик изгиба плит, граничные условия для определения комплексных потенциалов. Для произвольной многосвязной области исследованиями установлены общие представления этих функций для многосвязных областей, подтверждены эти представления получением точных решений некоторых частных задач без учета этих представлений, определением логарифмических слагаемых из граничных условий.

Получены точные решения задач об изгибе изотропного кругового диска, находящегося под действием равномерно распределенных по контуру моментов, равномерного давления по верхнему основанию, кругового кольца, находящегося под действием равномерно распределенных моментов или поперечных усилий на контурах, нормального давления по основанию кольца, для диска с произвольно расположенным круговым отверстием при действии поперечных усилий. Найде-

ны аналитические выражения для комплексных потенциалов, формулы для вычисления КИН в случае трещин. При нахождении решений неизвестные коэффициенты логарифмических слагаемых и рядов определялись из граничных условий без учета общих представлений комплексных потенциалов. Полученные коэффициенты оказались полностью совпадающими с их значениями по общим представлениям. Такие же задачи рассмотрены для анизотропных плит, для определения коэффициентов логарифмических слагаемых из граничных условий получены системы, полностью совпадающие с приведенными для коэффициентов в общих представлениях. Установлено, что приведенный в работе общий вид комплексных потенциалов точен и его можно использовать при решении задач изгиба многосвязных анизотропных плит.

Результаты проведенных в данном разделе исследований могут быть использованы различными исследователями для оценки получаемых тем или другим подходом результатов на достоверность. Нами они использованы в последующих разделах для оценки получаемых результатов обобщенным методом наименьших квадратов.

По результатам, представленным в разделе 2, опубликованы работы [46, 57, 61, 62].

РАЗДЕЛ 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy анизотропную плиту, занимающую многосвязную область S (рис. 3.1), ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l , причем в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей вдоль осей эллипсов их параметрические уравнения будут такими:

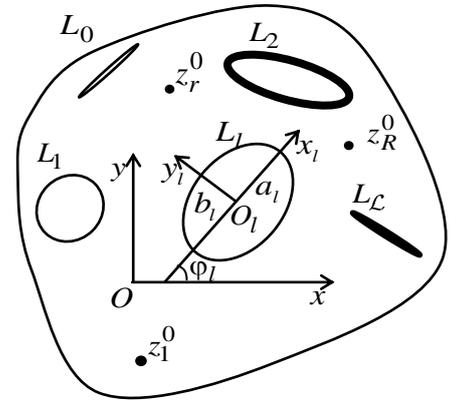


Рис. 3.1

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (3.1)$$

а в основной системе координат Oxy имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от Ox против часовой стрелки; x_{0l} , y_{0l} – координаты начала координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π . Плита находится под действием приложенных к ее контурам L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) изгибающих моментов, поперечных сил, а также распределенных по верхнему основанию нормальных усилий $q(x, y)$

и сосредоточенных воздействий во внутренних точках $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) области S . Некоторые из контуров плиты жестко подкреплены или заземлены. Как частный, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем рассматривать случай бесконечной многосвязной области. В последнем случае будем предполагать, что на бесконечности действуют изгибающие моменты $M_x^\infty = m_x$, $M_y^\infty = m_y$, $H_{xy}^\infty = 0$.

3.2. Решение задачи

Определение напряженного состояния рассматриваемой плиты сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $W_k'(z_k)$ из соответствующих граничных условий. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которые не будут содержать комплексных постоянных, входящих в граничные условия. На основе (2.10), (2.11), (2.12) эти граничные условия имеют вид

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ki\alpha} \delta_{k,s} W_k''(z_k) = \frac{df_{i\alpha}(t)}{ds} \quad (\alpha = 1, 2), \quad (3.3)$$

в котором

$$\begin{aligned} \delta_{k,s} &= dz_k/ds; \\ g_{ki1} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{ki2} = q_k, \\ \frac{df_{i1}}{ds} &= -\left(f_i \frac{dx}{ds} + m_i \frac{dy}{ds} \right) + \frac{dJ_{01}}{ds} - c_i \frac{dx}{ds}, \\ \frac{df_{i2}}{ds} &= -\left(m_i \frac{dx}{ds} - f_i \frac{dy}{ds} \right) - \frac{dJ_{02}}{ds} + c_i \frac{dy}{ds}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

в случае загруженного контура

$$g_{ki1} = 1, \quad g_{ki2} = \mu_k,$$

$$\frac{df_{i1}(t)}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right), \quad \frac{df_{i1}(t)}{ds} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (3.5)$$

если контур жестко заземлен или жестко подкреплён.

В рассматриваемом случае на основе (2.14) для производных комплексных потенциалов имеем представления

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \\ + \sum_{r=1}^R (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0) + W_{k0}'(z_k), \quad (3.6)$$

где $g=0$ в случае конечной области S , $g=1$, если область S бесконечна; Γ_k , A_{kl} , B_{kl} , A_{kr}^0 , B_{kr}^0 – величины, определяемые из решения систем линейных уравнений (2.16), (2.18), (2.19), (2.21), (2.22); $W_{k0}'(z_k)$ – функции голоморфные в многосвязных областях S_k , получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$ и ограниченных контурами L_{kl} ; z_{kl} и z_{kr}^0 – точки в областях S_k , соответствующие при аффинных преобразованиях произвольным точкам внутри контуров L_l и точкам приложения сосредоточенных сил. Последние функции $W_{k0}'(z_k)$ можно представить в виде

$$W_{k0}'(z_k) = \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} W_{kl0}'(z_k), \quad (3.7)$$

в котором $W_{k00}'(z_k)$ – функции, голоморфные внутри внешних контуров L_{k0} ; $W_{kl0}'(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров отверстий L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешность единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [42]:

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (3.8)$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}.$$

Функции $W'_{k00}(z_k)$, голоморфные внутри L_{k0} , можно разложить в ряды по полиномам Фабера для внутренностей контуров L_{k0} , а после пересуммирования соответствующих рядов можно представить в виде степенных рядов вида [51, 53]

$$W'_{k00}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n, \quad (3.9)$$

в котором R_{k0} – постоянные, определяемые из конформных отображений (3.8) для контуров L_{k0} .

Функции $W'_{kl0}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные вне отверстий L_{kl} , после конформных отображений (3.8) в областях переменных ζ_{kl} будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана вида [51, 61, 62]

$$W'_{kl0}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}, \quad (3.10)$$

в котором a_{kln} – неизвестные постоянные.

Окончательно для производных комплексных потенциалов получаем

$$W'_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (3.11)$$

$$W''_k(z_k) = g\Gamma_k \delta_k + N'_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \quad (3.12)$$

где

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} (A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0) \ln(z_k - z_{kr}^0),$$

$$\varphi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n, \quad \varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} N'_k(z_k) = & \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{(A_{kl}z_k + B_{kl})}{z_k - z_{kl}} \right] + \\ & + \sum_{r=1}^R \left[A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0) + \frac{A_{kr}^0 z_k + B_{kr}^0}{z_k - z_{kr}^0} \right], \\ \varphi'_{k0n}(z_k) = & \frac{n(z_k - z_{k0})^{n-1}}{R_{k0}^n}, \\ \varphi'_{kln}(z_k) = & -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Выберем на внешнем контуре и на контурах отверстий систему точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (3.12) в граничные условия (3.3) в точках $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$, для определения неизвестных a_{kln} получаем систему, состоящую из уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_{ki\alpha} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} + \bar{g}_{ki\alpha} \bar{\delta}_{k,s} \overline{\varphi'_{kln}(t_{klm})} \bar{a}_{kln} \right) = \\ = - \sum_{k=1}^2 \left[g_{ki\alpha} \delta_{k,s} (g \Gamma_k + N'_k(t_{klm})) + \bar{g}_{ki\alpha} \bar{\delta}_{k,s} (g \bar{\Gamma}_k + \right. \\ \left. + \overline{N'_k(t_{klm})}) \right] + \frac{df_{i\alpha}(t_{im})}{ds} \quad (i = \overline{g, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_l}; \alpha = 1, 2), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}$, $t_{im}(x_{im}, y_{im})$.

Кроме приведенных уравнений, для каждого отверстия должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^2 i (a_{kil} R_{ki} - \bar{a}_{kil} \bar{R}_{ki}) = 0 \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (3.16)$$

следующее из условия однозначности прогиба (2.23) при полном обходе по контуру, охватывающему L_l .

Система (3.15), дополненная уравнениями (3.16), служит для определения

комплексных переменных a_{kln} и вещественных переменных c_l . Эту систему будем решать с использованием метода сингулярных разложений [15, 151]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $W'_k(z_k)$ будут известными и по ним можно вычислять моменты (2.2) и перерезывающие силы (2.3) в любой точке плиты. Если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то для его концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) k_{1M}^\pm (КИМ соответствующий моменту M_y) и k_{2M}^\pm (КИМ соответствующий моменту H_{xy}), используя формулы [55]

$$\begin{aligned} k_{1M}^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_k, \\ k_{2M}^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left[(q_k - p_k) \cos \varphi_l \sin \varphi_l + r_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_k, \end{aligned} \quad (3.17)$$

в которых

$$M_k = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left(A_{kl}(z_{kl} \pm 2R_{kl}) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right),$$

знаки $+$ и $-$ у КИМ относятся к правому и левому концам разреза соответственно.

Конформные отображения можно построить и по координатам концов осей эллипсов L_l (x_{A_l}, y_{A_l}) , (x_{B_l}, y_{B_l}) , (x_{C_l}, y_{C_l}) , (x_{D_l}, y_{D_l}) (рис. 3.2). В этом случае во всех предыдущих формулах нужно принять

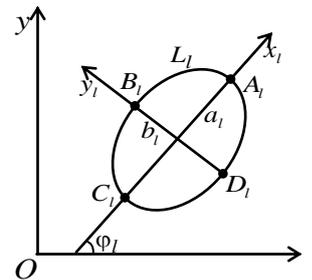


Рис. 3.2

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_{A_l} - x_{C_l})^2 + (y_{A_l} - y_{C_l})^2}, \\ b_l &= \frac{1}{2} \sqrt{(x_{B_l} - x_{D_l})^2 + (y_{B_l} - y_{D_l})^2}, \\ x_{0l} &= (x_{A_l} + x_{C_l})/2, \quad y_{0l} = (y_{A_l} + y_{C_l})/2, \end{aligned}$$

$$\varphi_l = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_{A_l} - y_{C_l}}{x_{A_l} - x_{C_l}} \right). \quad (3.18)$$

Приведенное решение может использоваться и для случая отверстий с криволинейными контурами. В этом случае криволинейные контуры нужно аппроксимировать совокупностью дуг эллипсов. Но в случае наличия у криволинейных контуров угловых точек возникает необходимость аппроксимации окрестностей угловых точек дугами эллипсов (кругов). Например, можно в малой окрестности вершины угла $A_l (x_{A_l}, y_{A_l})$ (рис. 3.3)

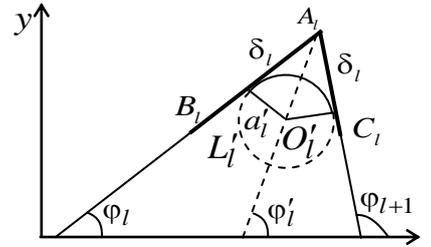


Рис. 3.3

стороны угла можно аппроксимировать дугой вписанной в этот угол окружности L'_l . Для сохранения гладкого перехода от сторон угла к аппроксимирующей дуге центр окружности L'_l нужно выбирать на биссектрисе угла. Обозначим углы между положительным направлением оси Ox и сторонами угла A_l через φ_l и φ_{l+1} . Тогда угол A_l будет равен $\varphi_{l+1} - \varphi_l$. Поэтому угол наклона указанной биссектрисы к оси Ox будет $\varphi'_l = (\varphi_l + \varphi_{l+1})/2$. Выбрав на сторонах угла отрезки длины δ_l от вершины угла, для радиуса вписанной окружности и координат ее центра будем иметь

$$\begin{aligned} a'_l &= \delta_l \operatorname{tg} \left((\varphi_{l+1} - \varphi_l) / 2 \right), \quad |O'_l A_l| = \sqrt{\delta_l^2 + a_l'^2}, \\ x'_{0l} &= x_{A_l} - |O'_l A_l| \cos \left((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2 \right), \\ y'_{0l} &= y_{A_l} - |O'_l A_l| \sin \left((\varphi_l + \varphi_{l+1}) / 2 \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Зная координаты x'_{0l} , y'_{0l} центра O'_l вписанной окружности L'_l , его радиус a'_l и угол φ'_l между осью Ox и биссектрисой угла A_l и принимая, что $b'_l = a'_l$, по формулам (3.8) найдем функции, отображающие внешность единичного круга на внешности эллипсов, соответствующих окружности L'_l , вписанной в угол A_l .

Отметим, что если внешний контур L_0 области S отличен от эллипса (круга), то для уменьшения вычислительных погрешностей при реализации

алгоритмов в конформных отображениях следует считать, что $a_0 = b_0 = r_0$, где r_0 – половина диаметра контура L_0 (наибольшего расстояния между точками контура). Можно, конечно, для всех контуров, в том числе для контура L_0 , в общих выражениях (3.13) постоянные R_{kl} опускать, включая их в коэффициенты a_{kln} . Но, как показывают числовые расчеты, вычислительная погрешность при таком выборе функций может увеличиваться.

Для различных конечных и бесконечных плит с отверстиями были проведены численные исследования концентрации моментов и их изменения в зависимости от геометрических параметров отверстий, способов их загрузки и подкрепления, материалов плит. При проведении расчетов количество членов в рядах по Лорана (3.9) и по полиномам Фабра (3.10) и «коллокационных» точек M_l на контурах L_l , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (3.15) увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности, пока относительная погрешность не становилась менее сотых долей процента. Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, в решаемых задачах, в зависимости от геометрических и упругих характеристик необходимо было в указанных рядах оставлять от 5 до 90 членов, на каждом из контуров брать от 200 до 500 «коллокационных точек». Ниже описаны некоторые из полученных результатов для плит из изотропного материала алюминий (материал М1) [143], стеклопластик косоугольной намотки (М2) [96], сосна (М3)

[104]. Коэффициенты a_{ij} деформаций для этих материалов приведены в табл. 3.1. При этом для того, чтобы использовать

Таблица 3.1

Материал	Постоянные материала				$\frac{a_{11}}{a_{22}}$
	$a_{11} \cdot 10^4, \text{ МПа}^{-1}$	$a_{22} \cdot 10^4, \text{ МПа}^{-1}$	$a_{12} \cdot 10^4, \text{ МПа}^{-1}$	$a_{66} \cdot 10^4, \text{ МПа}^{-1}$	
М1	0,1408	0,1408	-0,035	0,352	1,000
М2	10,000	2,800	-0,770	27,000	3,571
М3	2,381	0,100	-0,024	1,333	23,810

приведенное выше решение для изотропной пластинки постоянная a_{22} заменялась на $0,1458 \cdot 10^{-4}$, т. е. на значение незначительно отличающееся от табличного, в противном случае при решении задачи возникнет деление на ноль, т. к. корни характеристического уравнения (2.8) для изотропного материала будут двукратными и равными i и $-i$. Приводимые ниже значения основных характеристик изгиба даны с точностью до значения постоянной D_0 , как множителя. При этом значения моментов всюду приведены в $МПа \cdot м^2$ (или $МН \cdot м$), КИМ в $МПа \cdot м^2 \sqrt{м}$ (или $МН \cdot м \sqrt{м}$).

3.3. Исследования напряженного состояния эллиптической плиты с эллиптическим отверстием

Пусть в эллиптической плите с внешним контуром L_0 и полуосями a_0, b_0 имеется произвольно расположенное эллиптическое отверстие L_1 с полуосями a_1, b_1 (рис. 3.4). В данном случае в приведенном в предыдущем п. 3.2 решении, нужно принять $g = 0, \mathcal{L} = 1$.

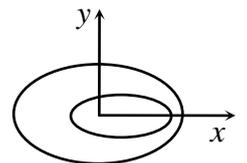


Рис. 3.4

Численные исследования в задаче проводились с целью выявления влияния размеров, расположения и формы контуров L_0, L_1 , параметров анизотропии материала, способов загрузки и подкрепления контуров на значения моментов, а в случае, когда L_1 является прямолинейным разрезом, и на значения КИМ. Ниже описаны некоторые из полученных результатов.

Действие распределенных изгибающих моментов по внешнему контуру. Пусть внешний контур рассматриваемого кольца загружен равномерно распределенными моментами m_0 , внутренний свободен от загрузок. В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$\varphi_1 = 0; \quad g_{ki1} = \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{ki2} = q_k,$$

$$f_{01} = -\int_0^y m_0 dy + c_{10} = -m_0 y + c_{10}, \quad f_{02} = -\int_0^x m_0 dx + c_{20} = -m_0 x + c_{10},$$

$$f_{11} = -c_1 x + c_{11}, \quad f_{12} = c_1 y + c_{21}; \quad (3.20)$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = -m_0 \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = -m_0 \frac{dx}{ds},$$

$$\frac{df_{11}}{ds} = -c_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = c_1 \frac{dy}{ds}. \quad (3.21)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор и компоненты главного момента усилий, приложенных к контуру L_1 равны нулю, т. е. $P_1 = M_{y1} = M_{x1} = 0$.

Рассмотрим частные случаи.

а) *Круговое кольцо.* Для кругового кольца ($\varphi_1 = 0$) с внешним контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и внутренним контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$)

(рис. 3.5) при действии моментов m_0 на внешнем контуре и незагруженном внутреннем контуре с точностью до m_0 в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от

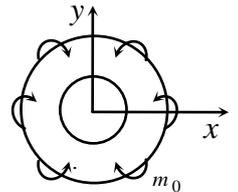


Рис. 3.5

положительного направления оси Ox и значения отношения a_1/a_0 в табл. А.3.1 приведены значения моментов M_s (возникающих от нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контурам) в точках контуров, где они достигают максимальных значений. Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла θ , поэтому они приведены только для $\theta = 0$. Эти значения для изотропного кольца оказались совпадающими с их значениями, вычисленными по точному решению задачи, приведенному в п. 2.2.1 раздела 2. На рис. Б.3.1 изображены графики распределения этих моментов. Сплошные линии здесь и далее относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1.

Из данных табл. А.3.1, рис. Б.3.1 следует, что с увеличением отношения a_1/a_0 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов на контурах плиты возрастают, причем значения моментов и их рост на контуре

отверстия выше, чем на внешнем контуре. При $a_1/a_0 < 0,1$ влияние одного из контуров кольца на напряженное состояние около второго незначительно: около внешнего контура моменты получаются такими, как в круглой плите без отверстия (равными m_0), около внутреннего – как в бесконечной плите с круговым отверстием (равными $2m_0$), находящейся под действием всестороннего изгиба моментами m_0 . Последние данные можно получить по приведенным в п. 2.1, п. 2.2.2 и п. 2.3.1 раздела 2 точным решениям соответственно. Чем выше «степень анизотропии», т. е. степень отличия a_{11}/a_{22} от 1, тем больше уровень концентрации изгибающих моментов M_s (их максимальные по модулю значения). Наибольшая концентрация моментов наблюдается в кольце из материала М3, наименьшая в кольце из изотропного материала М1. В случае кольца из материала М2 концентрация моментов получается несколько меньше, чем в кольце из М3, но материал М2 является более реальным в конструкциях, поэтому в дальнейшем для сокращения объемов числовых данных в качестве анизотропного будут приводиться данные только для плиты из материала М2.

Заметим, что для анизотропного кольца решение приведенной задачи ранее было получено методом рядов в [35]. Но при численной реализации автор сумел рассмотреть только случай достаточно далеких расстояний между контурами ($a_1/a_0 = 0,2$), когда они практически не влияют на напряженное состояние друг друга. Поэтому полученные в [35] результаты достаточно хорошо согласуются с нашими.

б) *Круговой диск с эллиптическим отверстием.* Для кругового диска с центральным эллиптическим отверстием (рис. 3.6) в табл. А.3.2 приведены значения моментов M_s в некоторых точках контуров плиты в зависимости от отношений a_1/a_0 и b_1/a_1 . Из данных табл. А.3.2 видно, что с уменьшением размеров эллиптического отверстия (что приводит к увеличению расстояния между контурами) значения моментов в диске уменьшаются. Уменьшение отношения b_1/a_1 полуосей отверстия приводит к уменьшению моментов M_s в точках

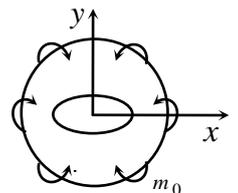


Рис. 3.6

контуров кольца. При этом значения моментов M_s около контура отверстия вблизи конца малой полуоси эллипса уменьшаясь, стремясь к некоторому постоянному значению, а вблизи концов большой полуоси отверстия резко увеличиваются, стремясь к бесконечности. При $b_1/a_1 < 10^{-3}$, отверстие можно считать трещиной и считать для ее концов k_{1M}^\pm ($k_{2M}^\pm = 0$).

На рис. Б.3.2 для кругового диска с центральной диаметральной трещиной длины $2a_1$ с внешним контуром L_0 радиуса a_0 при действии равномерно распределенных по внешнему контуру изгибающих моментов интенсивности m_0 в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и значения отношения a_1/a_0 приведены графики распределения изгибающих моментов M_s/m_0 (возникающих от нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру) вблизи контура L_0 , а на рис. Б.3.3 графики изменения КИМ k_{1M}^\pm для вершин трещины. Из рис. Б.3.2, Б.3.3 видно, что с увеличением длины трещины значения моментов около внешнего контура и КИМ для концов трещины растут. При малых значениях a_1/a_0 ($a_1/a_0 < 0,1$) влияние трещины на НДС около внешнего контура и внешнего контура на КИМ незначительны: моменты около внешнего контура получаются такими, как в круглой плите без отверстия (равными m_0), а КИМ – как в бесконечной плите с трещиной, находящейся под действием всестороннего изгиба плиты моментами m_0 .

Действие равномерно распределенных поперечных усилий на одном контуре при жестком защемлении второго контура. Пусть один из контуров кольца жестко защемлен, а на втором действуют равномерно распределенные поперечные усилия.

а) *Круговое кольцо с жестко защемленным внешним контуром.* В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$\varphi_1 = 0; \quad g_{k01} = 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \quad f_{01} = 0, \quad f_{02} = 0,$$

$$g_{k11} = \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{k12} = q_k,$$

$$f_{11} = -\int_0^x f_1(s) dx + c_{10} = -p_1 a_1^2 \int_0^{\vartheta} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + c_{10} =$$

$$-p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) - \vartheta \cos(\vartheta)] + c_{10},$$

$$f_{12} = \int_0^y f_1(s) dy + c_{20} = -p_1 a_1^2 \int_0^{\vartheta} \vartheta \cos \vartheta d\vartheta + c_{20} =$$

$$-p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) \vartheta + \cos(\vartheta) - 1] + c_{20}; \quad (3.22)$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{02}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{11}}{ds} = -f_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = f_1 \frac{dy}{ds}. \quad (3.23)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен $P_1 = 2\pi R_1 p_1$, а компоненты их главного момента равны нулю, т. е. $M_{x1} = M_{y1} = 0$.

Для кругового кольца с жестко заземленным внешним контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и внутренним загруженным равномерно распределенными поперечными усилиями p_1 контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 3.7) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox и значения отношения a_1 / a_0 в табл. А.3.3 приведены значения моментов M_s и M_n с точностью до p_1 , в точках контуров L_0 , L_1 . Значения моментов M_n на контуре L_1 равны нулю, поэтому они в табл. А.3.3 не приведены.

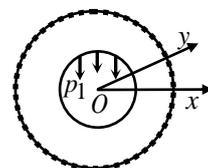


Рис. 3.7

Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла θ , поэтому они приведены только для $\theta = 0$. Эти значения для изотропного кольца оказались совпадающими с их значениями, вычисленными по приведенному в п. 2.2.3.а точному решению задачи. На рис. Б.3.4 и рис. Б.3.5 изображены графики распределения моментов M_s и M_n соответственно. Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1.

Из данных табл. А.3.3, рис. Б.3.4 и рис. Б.3.5 видно, что, чем выше «степень

анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С ростом отношения a_1/a_0 на контуре L_0 значения моментов по модулю вначале возрастают, а затем убывают, на L_1 постоянно убывают, что говорит о том, что моменты на L_0 уменьшаются с удалением приложенной нагрузки от контура и с приближением нагруженного контура с жестко заземленным контуром. Уменьшение же моментов на контуре L_1 связано с приближением L_1 к жестко заземленному контуру. При $a_1/a_0 \rightarrow 0$ и $a_1/a_0 \rightarrow 1$ значения моментов стремятся к нулю, что можно легко проверить, найдя предел в формулах (2.87), (2.88).

б) *Плита с жестко заземленным внутренним контуром.* В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$\varphi_1 = 0; \quad g_{k01} = \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{k02} = q_k,$$

$$f_{01} = -\int_0^x f_1(s) dx + c_{10} = p_1 a_1^2 \int_0^{\vartheta} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + c_{10} = \\ = p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) - \vartheta \cos(\vartheta)] + c_{10},$$

$$f_{02} = \int_0^y f_1(s) dy + c_{20} = p_1 a_1^2 \int_0^{\vartheta} \vartheta \cos \vartheta d\vartheta + c_{20} = \\ = p_1 a_1^2 [\sin(\vartheta) \vartheta + \cos(\vartheta) - 1] + c_{20},$$

$$g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \quad f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0; \quad (3.24)$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = -f_0 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = f_0 \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{11}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{12}}{ds} = 0. \quad (3.25)$$

Заметим, что сила реакции опоры равна $P_0 = 2\pi R_0 p_0$, поэтому главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 равен $P_1 = -P_0$, т.е. $P_1 = -P_0 = -2\pi R_0 p_0$, а компоненты их главного момента равны нулю, т.е. $M_{x1} = M_{y1} = 0$.

Для кругового кольца при действии поперечных усилий p_0 на внешнем контуре и жестко заземленном внутреннем контуре (рис. 3.8) в зависимости от центрального угла θ и значения отношения a_1/a_0 в табл. А.3.4 с точностью до p_0 приведены

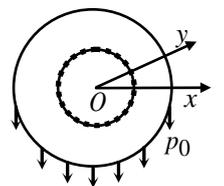


Рис. 3.8

значения моментов M_s , M_n , в точках контуров L_0 , L_1 , где они достигают максимальных значений. Значения моментов M_n на контуре L_0 равны нулю, поэтому они в табл. А.3.4 не приведены.

Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла θ , поэтому они приведены только для $\theta = 0$. Эти значения для изотропного кольца оказались совпадающими с их значениями, вычисленными по приведенному в п. 2.2.3.б точному решению задачи. На рис. Б.3.6 и рис. Б.3.7 изображены графики распределения моментов M_s и M_n соответственно. Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1.

Из данных табл. А.3.4, рис. Б.3.6 и рис. Б.3.7 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С ростом отношения a_1 / a_0 значения моментов по модулю убывают, что связано с приближением L_0 к жестко заземленному контуру L_1 . При $a_1 / a_0 \rightarrow 1$ значения моментов стремятся к нулю, что можно легко проверить, найдя соответствующие пределы в формулах (2.95), (2.96).

Действие равномерно распределенного давления по основанию кольца. Пусть круговое кольцо находится под действием равномерно распределенного давления интенсивности q_0 по верхнему основанию плиты. Один из контуров кольца жестко заземлен, второй незагружен.

а) Плита с жестко заземленным внешним контуром. В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0; \quad g_{k01} = 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \\ f_{01} &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{10} = -4q_*(x^2 + y^2)x + c_{10}, \\ f_{02} &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{20} = -4q_*(x^2 + y^2)y + c_{20}, \\ g_{k11} &= \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{k12} = q_k, \quad f_{11} = J_{01} - c_1x + c_{11}, \quad f_{12} = -J_{02} + c_1y + c_{21}; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
J_{01} &= \frac{4R_1^3 q_*}{3} \left[4\cos^3(\vartheta)(3D_{16} + D_{26}) - \right. \\
&\quad \left. -\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)(5D_{11} - 2D_{12} - 3D_{22} - 4D_{66}) - \right. \\
&\quad \left. -3\vartheta\cos(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) + 3\cos(\vartheta)(D_{16} + 3D_{26}) + \right. \\
&\quad \left. +\sin(\vartheta)(5D_{11} + D_{12} + 6D_{22} + 8D_{66}) \right], \\
J_{02} &= \frac{4R_1^3 q_*}{3} \left[\cos^3(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} - 5D_{22} + 4D_{66}) + \right. \\
&\quad \left. +4\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)(D_{16} + 3D_{26}) - \right. \\
&\quad \left. -3\vartheta\sin(\vartheta)(3D_{11} + 2D_{12} + 3D_{22} + 4D_{66}) - \right. \\
&\quad \left. -3\cos(\vartheta)(3D_{11} + D_{12} + 4D_{66}) + \sin(\vartheta)(5D_{16} + 3D_{26}) \right]; \quad (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{df_{01}}{ds} &= -4q_* \left[(3x^2 + y^2) \frac{dx}{ds} + 2xy \frac{dy}{ds} \right], \\
\frac{df_{02}}{ds} &= -4q_* \left[2xy \frac{dx}{ds} + (x^2 + 3y^2) \frac{dy}{ds} \right], \\
\frac{df_{11}}{ds} &= \frac{dJ_{01}}{ds} - c_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = -\frac{dJ_{02}}{ds} + c_1 \frac{dy}{ds}; \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_{01}}{ds} &= 4q_* \left\{ \left[R_1^2 (6\cos^2(\vartheta)(D_{16} + D_{26}) - \vartheta(2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. +3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)(D_{22} - D_{11})) + D_{16}(3x^2 + y^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. +D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy \right] \frac{dx}{ds} - \right. \\
&\quad \left. - \left[D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}, \\
\frac{dJ_{02}}{ds} &= -4q_* \left\{ \left[D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\
&\quad \left. + \left[R_1^2 (6\cos^2(\vartheta)(D_{16} + D_{26}) - \vartheta(2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. +3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)(D_{22} - D_{11})) - D_{16}(3x^2 + y^2) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. -D_{26}(3y^2 + x^2) - 4D_{66}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к

контуре L_1 , равен $P_1 = 0$, $P_{01} = -\int_0^{2\pi} (N_{0y} dx - N_{0x} dy) = -\pi q_0 R_1^2$, а компоненты их

главного момента равны нулю, т. е. $M_{x1} = M_{y1} = 0$.

Для кругового кольца с внешним жестко заземленным контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и внутренним незагруженным контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 3.9) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox и значения отношения a_1/a_0 в табл. А.3.5 приведены значения моментов M_s и M_n с точностью до q_0 , в точках контуров L_0 , L_1 . Значения моментов M_n на контуре L_1 равны нулю, поэтому они в табл. А.3.5 не приведены. Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла θ , поэтому они приведены только для $\theta = 0$. Эти значения для изотропного кольца оказались совпадающими с их значениями, вычисленными по приведенному в п. 2.2.4.а точному решению задачи. На рис. Б.3.8 и рис. Б.3.9 изображены графики распределения моментов M_s и M_n соответственно. Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1.

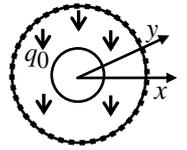


Рис. 3.9

Из данных табл. А.3.5, рис. Б.3.8 и рис. Б.3.9 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С ростом отношения a_1/a_0 значения изгибающих моментов на контурах по модулю уменьшаются, что связано с уменьшением суммарной нагрузки. При $a_1/a_0 \rightarrow 1$ значения моментов стремятся к нулю, что можно легко проверить, найдя соответствующие пределы в формулах (2.108), (2.109).

б) *Плита с жестко заземленным внутренним контуром.* В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$\begin{aligned}
 g_{k01} &= \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{k02} = q_k, \quad f_{01} = J_{01} - c_0 x + c_{10}, \quad f_{02} = -J_{02} + c_0 y + c_{20}, \\
 g_{k11} &= 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \\
 f_{11} &= -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{11} = -4q_*(x^2 + y^2)x + c_{11}, \\
 f_{12} &= -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{21} = -4q_*(x^2 + y^2)y + c_{21};
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
J_{01} &= \frac{4R_0^3 q^*}{3} \left[4\cos^3(\vartheta)(3D_{16}+D_{26}) - \right. \\
&\quad \left. -\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)(5D_{11}-2D_{12}-3D_{22}-4D_{66}) - \right. \\
&\quad \left. -3\vartheta\cos(\vartheta)(3D_{11}+2D_{12}+3D_{22}+4D_{66}) + 3\cos(\vartheta)(D_{16}+3D_{26}) + \right. \\
&\quad \left. +\sin(\vartheta)(5D_{11}+D_{12}+6D_{22}+8D_{66}) \right], \\
J_{02} &= \frac{4R_0^3 q^*}{3} \left[\cos^3(\vartheta)(3D_{11}+2D_{12}-5D_{22}+4D_{66}) + \right. \\
&\quad \left. +4\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)(D_{16}+3D_{26}) - \right. \\
&\quad \left. -3\vartheta\sin(\vartheta)(3D_{11}+2D_{12}+3D_{22}+4D_{66}) - \right. \\
&\quad \left. -3\cos(\vartheta)(3D_{11}+D_{12}+4D_{66}) + \sin(\vartheta)(5D_{16}+3D_{26}) \right]; \tag{3.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{df_{01}}{ds} &= \frac{dJ_{01}}{ds} - c_0 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = -\frac{dJ_{02}}{ds} + c_0 \frac{dy}{ds}, \\
\frac{df_{11}}{ds} &= -4q^* \left[\left(3x^2 + y^2 \right) \frac{dx}{ds} + 2xy \frac{dy}{ds} \right], \\
\frac{df_{12}}{ds} &= -4q^* \left[2xy \frac{dx}{ds} + \left(x^2 + 3y^2 \right) \frac{dy}{ds} \right]; \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dJ_{01}}{ds} &= 4q^* \left\{ \left[R_0^2 \left(6\cos^2(\vartheta)(D_{16} + D_{26}) - \vartheta(2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)(D_{22} - D_{11}) \right) + D_{16}(3x^2 + y^2) + \right. \\
&\quad \left. + D_{26}(3y^2 + x^2) + 4D_{66}xy \right] \frac{dx}{ds} - \\
&\quad \left. - \left[D_{11}(3x^2 + y^2) + D_{12}(3y^2 + x^2) + 4D_{16}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}, \\
\frac{dJ_{02}}{ds} &= -4q^* \left\{ \left[D_{12}(3x^2 + y^2) + D_{22}(3y^2 + x^2) + 4D_{26}xy \right] \frac{dx}{ds} + \right. \\
&\quad \left. + \left[R_0^2 \left(6\cos^2(\vartheta)(D_{16} + D_{26}) - \vartheta(2D_{12} + 3D_{22} + 3D_{11} + 4D_{66}) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)(D_{22} - D_{11}) \right) - D_{16}(3x^2 + y^2) - \right. \\
&\quad \left. - D_{26}(3y^2 + x^2) - 4D_{66}xy \right] \frac{dy}{ds} \right\}. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 , равен

$$P_1 + P_{01} = -P_0 - \int_0^{2\pi} (N_{0y}dx - N_{0x}dy) = -\pi q_0 (R_0^2 - R_1^2) - \pi q_0 R_1^2 = -\pi q_0 R_0^2,$$

а компоненты их главного момента равны нулю, т. е. $M_{x1} = M_{y1} = 0$.

Для кругового кольца с внешним незагруженным контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и внутренним жестко заземленным контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 3.10) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox и значения отношения a_1 / a_0 в табл. А.3.6 приведены значения моментов M_s и

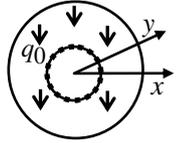


Рис. 3.10

M_n с точностью до q_0 , в точках контуров L_0, L_1 . Значения моментов M_n на контуре L_0 равны нулю, поэтому они в табл. А.3.6 не приведены.

Значения моментов для изотропного кольца в силу геометрической и упругой симметрии не зависят от угла θ , поэтому они приведены только для $\theta = 0$. Эти значения для изотропного кольца оказались совпадающими с их значениями, вычисленными по приведенному в п. 2.2.4.б точному решению задачи. На рис. Б.3.10 и рис. Б.3.11 изображены графики распределения моментов M_s и M_n соответственно. Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1.

Из данных табл. А.3.6, рис. Б.3.10 и рис. Б.3.11 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С ростом отношения a_1 / a_0 значения изгибающих моментов на контурах по модулю уменьшаются. При $a_1 / a_0 \rightarrow 1$ значения моментов стремятся к нулю, что можно легко проверить, найдя соответствующие пределы в формулах (2.115), (2.116).

3.4. Исследования напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптическими отверстиями или разрезами

Плита с двумя отверстиями. Пусть бесконечная плита имеет два

эллиптических отверстия с контурами L_1 и L_2 с полуосями вдоль оси Ox . Контур отверстия свободны от усилий или жестко подкреплены. На бесконечности действуют моменты $M_y^\infty = m_y$, $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$. Решение задачи получится из приведенного в п. 3.2, если в последнем принять $\mathcal{L} = 2$, $g = 1$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. При этом в случае плиты со свободными отверстиями нужно принять

$$g_{k11} = g_{k21} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{k12} = g_{k22} = q_k, \quad (3.34)$$

$$f_{11} = c_1 x + c_{11}, \quad f_{12} = c_1 y + c_{21}, \quad f_{21} = c_2 x + c_{12}, \quad f_{22} = c_2 y + c_{22}; \quad (3.34)$$

$$\frac{df_{11}}{ds} = c_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = c_1 \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{21}}{ds} = c_2 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{22}}{ds} = c_2 \frac{dy}{ds}; \quad (3.35)$$

если же контуры отверстий подкреплены жесткими кольцами или ядрами, то необходимо принять

$$g_{k11} = g_{k21} = 1, \quad g_{k12} = g_{k22} = \mu_k, \quad f_{11} = c_{1l}, \quad f_{12} = c_{2l}; \quad (3.36)$$

$$\frac{df_{11}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{12}}{ds} = 0; \quad (3.37)$$

где c_l – вещественная, c_{1l} , c_{2l} – комплексные постоянные.

Заметим, что в данном случае главный вектор и компоненты главного момента усилий, приложенных к контурам L_1 и L_2 равны нулю, т. е.

$$P_1 = M_{y1} = M_{x1} = 0 \quad \text{и} \quad P_2 = M_{y2} = M_{x2} = 0.$$

В табл. А.3.7 для плиты с двумя одинаковыми круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = a$) (рис. 3.11) приведены

значения моментов M_s около контура левого отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру, в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox и от отношения c/a , где c – расстояние между контурами отверстий. На рис. Б.3.12 при различных значениях отношения c/a изображены графики распределения этих моментов.

Сплошные линии относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1.

Значения моментов для $c/a = \infty$ относятся к случаю плиты с одним круговым

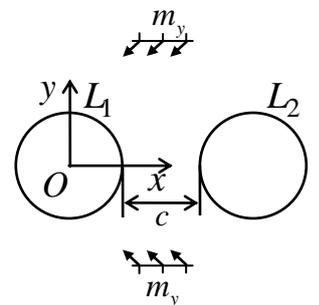


Рис. 3.11

отверстием. Для этого случая вычисленные значения моментов для изотропной и анизотропной плит оказались совпадающими с их значениями, получаемыми по приведенному в п. 2.2.2 и 2.3.1 точном решениям задачи.

Из табл. А.3.7 и рис. Б.3.12 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов видно. С уменьшением расстояния между кольцами значения моментов значительно растут. Вдали от перемычки между отверстиями значения моментов изменяются незначительно. Наибольшие изменения моментов наблюдаются в зоне перемычки, а максимальные изменения при $\theta = 0$.

В табл. А.3.8 и на рис. Б.3.13, рис. Б.3.14 приведены результаты, аналогичные данным табл. А.3.7 и рис. Б.3.12, когда контуры круговых отверстий подкреплены абсолютно жесткими кольцами (ядрами). Из табл. А.3.8, рис. Б.3.13, рис. Б.3.14 видно, что, чем ниже «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С уменьшением расстояния между кольцами значения моментов значительно растут. Вдали от перемычки между кольцами значения моментов изменяются незначительно. Наибольшие изменения моментов наблюдаются в зоне перемычки, а максимальные изменения при $\theta = 0$. Сравнивая данные табл. А.3.7 и табл. А.3.8, можно заметить, что закрепление контуров привело к уменьшению значений изгибающих моментов.

Были проведены исследования для плиты с двумя одинаковыми эллиптическими жестко подкрепленными отверстиями с полуосями a и b ($a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$). Как показали численные исследования, при уменьшении отношения b/a значения моментов вблизи конца большой полуоси растут, стремясь к бесконечности, значения моментов вблизи малой полуоси изменяются незначительно. При $b/a < 10^{-3}$ эллиптические отверстия можно считать трещинами (в случае жестких ядер линейными включениями) и для них вычислять КИМ.

В табл. А.3.9 для изгиба плиты с двумя трещинами или жесткими линейными включениями (рис. 3.12) длины $2l$ ($a = l$) в зависимости от отношения c/l , где c –

расстояние между включениями, приведены значения КИМ для вершин левого включения k_{1M}^- (левой вершины), k_{1M}^+ (правой вершины). Значения для $c/a = \infty$ соответствуют случаю плиты с одной трещиной или включением.

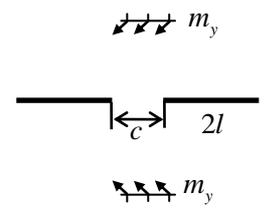


Рис. 3.12

Из табл. А.3.9 видно, что, чем ниже «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов. С уменьшением расстояния между кольцами значения моментов и КИМ k_{1M}^+ значительно растут. Вдали от перемычки между кольцами значения моментов изменяются незначительно. Наибольшие изменения моментов наблюдаются в зоне перемычки, а максимальные изменения при $\theta = 0$.

3.5. Исследования напряженного состояния плиты с криволинейными отверстиями

Приведенное в п. 3.2 решение задачи можно использовать и в случае криволинейных отверстий. И в этом случае указанное решение при численных исследованиях приводит к результатам с высокой степенью точности. Такая высокая точность особенно наглядно видна из сравнения получаемых результатов с известными из литературы для плоской задачи теории упругости, так как для этого случая задача решалась многими авторами с применением различных методов и есть возможность глубже изучить проблему точности получаемых результатов. Поэтому приведенным в п. 3.2 методом дадим решение задачи для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием. По этой же программе для ЭВМ можно исследовать случай изотропной пластинки с криволинейным отверстием, который наиболее часто встречается в исследованиях.

Комплексные потенциалы плоской задачи $\Phi_k(z_k)$, аналогичные комплексным потенциалам $W_k(z_k)$, для рассмотренной в п. 3.2 (для случая, когда главный вектор и главный моменты усилий приложенных на контурах равны

нулю) пластинки в случае плоской задачи они имеют вид [106]

$$\Phi_k(z_k) = g\Gamma_k z_k + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{kln}, \quad (3.38)$$

в котором $g = 0$ для случая конечной пластинки, $g = 1$, если пластинка бесконечна, Γ_k – постоянные, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Gamma_k &= \sigma_y^{\infty}, & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \Gamma_k &= -\tau_{xy}^{\infty}, & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 \Gamma_k &= \sigma_x^{\infty}, \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu_k} \Gamma_k &= \frac{a_{16} \sigma_x^{\infty} + (2a_{12} + a_{66}) \tau_{xy}^{\infty} + 3a_{26} \sigma_y^{\infty}}{2a_{22}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Определение напряженного состояния рассматриваемой плиты сводится к нахождению комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ из соответствующих граничных условий, аналогичным условиям (3.3), которые для плоской задачи имеют вид

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ki\alpha} \Phi_k(z_k) = f_{i\alpha}(t) \quad (\alpha = 1, 2). \quad (3.40)$$

При этом для нагруженного усилиями X_{ni}, Y_{ni} контура L_i

$$g_{ki1} = 1, \quad g_{ki2} = \mu_k, \quad f_{i1} = \int_0^s X_{ni} ds + c_{1i}, \quad f_{i2} = \int_0^s Y_{ni} ds + c_{2i}, \quad (3.41)$$

$c_{\alpha i}$ – постоянные; для контура, на котором заданы перемещения u_i^*, v_i^*

$$\begin{aligned} g_{ki1} &= p_k, \quad g_{ki2} = q_k, \quad f_{i1} = u_i^* + \omega_3 y - u_0, \quad f_{i2} = v_i^* - \omega_3 x - v_0; \\ p_k &= a_{11} \mu_k^2 + a_{12} - a_{16} \mu_k, \quad q_k = a_{12} \mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26}; \end{aligned} \quad (3.42)$$

ω_3 – угол жесткого поворота пластинки, u_0, v_0 – жесткое перемещение пластинки.

Условиям (3.40) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [15, 151]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек $M_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$) и удовлетворив в них условиям (3.40), получим

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ki\alpha} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{kln} = \\
= \frac{df_{i\alpha}(t_{im})}{ds} - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{ki\alpha} \delta_k g \Gamma_k \left(i = \overline{g, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_l}; \alpha = 1, 2 \right). \quad (3.43)
\end{aligned}$$

После нахождения псевдорешений системы уравнений (3.43) с использованием сингулярных разложений постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $\Phi'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять напряжения в любой точке плиты

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k). \quad (3.44)$$

Для различных конечных и бесконечных пластинок были проведены численные исследования распределения напряжений. Материалы из которых изготовлены пластинки выбраны такими же как в работах [91, 143] для сравнения полученных результатов с известными.

Рассмотрим частные задачи. Пусть бесконечная пластинка имеет квадратное отверстие со сторонами $2a$ (рис. 3.13) и растягивается усилиями интенсивности p вдоль оси Ox . Начало системы координат Oxy находится в центре квадрата, его стороны параллельны осям координат.

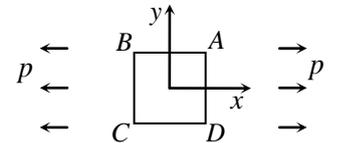


Рис.3.13

В этом случае в приведенном решении нужно принять

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = 4, \quad g = 1, \quad A(a, a), \quad B(-a, a), \quad C(-a, -a), \quad D(a, -a), \\
a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a, \quad a'_l = \delta_l, \quad |O'_l A_l| = \sqrt{2} \delta_l, \\
x'_{01} = a - \delta_1, \quad y'_{01} = a - \delta_1, \quad x'_{02} = -a + \delta_2, \quad y'_{02} = a - \delta_2, \\
x'_{03} = -a + \delta_3, \quad y'_{03} = -a + \delta_3, \quad x'_{04} = a - \delta_4, \quad y'_{04} = -a + \delta_4.
\end{aligned}$$

При проведении расчетов вместо равных нулю b_l считалось, что $b_l/a_l = 10^{-3}$.

В табл. А. 3.10 для изотропной пластинки с квадратным отверстием приведены значения нормальных напряжений σ_θ по контуру на площадках, перпендикулярных ему (σ_y для вертикальных сторон квадрата, σ_x для горизонтальных сторон) в точках с указанными координатами с точностью до

приложенных усилий p . Рассматривались случаи квадрата с прямыми углами (столбцы с пометкой «без закруглений в угловых точках»), а также квадрата с закругленными углами в вершинах с малыми радиусами закруглений δ . Координаты точек и значения δ отнесены к значению длины полу-стороны квадрата a . Для дальнейшего сравнения результатов с известными в литературе в табл. А. 3.10 приведены и значения угла θ , используемого в работах Г.Н. Савина [143] при конформном отображении

$$z = \omega(\zeta) = \frac{3}{5}a \left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} + \frac{1}{56\zeta^7} - \frac{1}{176\zeta^{11}} \right), \quad (3.45)$$

используемого и приводимого в этих работах в градусах. В силу имеющейся симметрии значения напряжений приведены для углов от 0^0 до 90^0 , от точки Е до точки F. На рис. Б. 3.15 (штриховой линией) изображены графики распределения этих напряжений, причем точки Е, А и F соответствуют значениям θ , равным 0^0 , 45^0 и 90^0 .

В табл. А. 3.11 для сравнения приведены значения указанных напряжений, полученные Г. Н. Савиным, А. С. Космодамианским и дискретным методом наименьших квадратов (ДМНК). Столбцы 4.2, 4.3, 4.4 – это данные Г. Н. Савина [143], когда в конформном отображении (3.45) оставляется соответственно два, три и четыре слагаемых, столбец Кос – данные А. С. Космодамианского, также приведенные в работе [143]. Координаты точек вычислялись по формуле (3.45) с учетом того, что $\zeta = e^{i\theta}$. Заметим, что А. С. Космодамианский использовал конформное отображение

$$z = \omega(\zeta) = a \left(\zeta - \frac{1}{9\zeta^3} \right).$$

Из данных табл. А. 3.10 и рис. Б. 3.15 видно, что при приближении к вершинам квадрата значения напряжений σ_θ бесконечно растут, стремясь к $+\infty$. Значения напряжений и их рост вдоль горизонтальных сторон выше, чем вдоль вертикальных сторон. Сравнивая данные табл. А. 3.11 с соответствующими результатами из табл. А. 3.10 (для сходных углов θ), видим, что с результатами

ОМНК (данные табл. А. 3.10) сравнительно хорошо согласуются данные, полученные Г. Н. Савиным методами конформных отображений и интегралов типа Коши, причем последние тем ближе к результатам ОМНК, чем больше оставляется слагаемых в отображающей функции (3.45), т. е. чем точнее функция отображает внешность единичного круга на внешность заданного отверстия (квадрата). К данным Г. Н. Савина более близкими оказываются наши результаты в случае использования закруглений в угловых точках, хотя понятно, что эти закругления искажают заданные контуры. При использовании метода рядов [143] получаемые результаты довольно далеки от истинных. Применение ДМНК приводит к результатам, достаточно близким к данным ОМНК.

В табл. А. 3.12 и на рис. Б. 3.15 (сплошные линии) приведены значения напряжений, аналогичные данным табл. А. 3.10 и рис. Б. 3.15 (штриховые линии), для анизотропной пластинки из авиационной фанеры. Здесь же приведены значения напряжений, полученные ДМНК и методом рядов [91], когда отображающая функция принималась в виде

$$z = 1,2 \left(\zeta - \frac{1}{6\zeta^3} + \frac{0,00846}{\zeta^7} \right).$$

Из данных табл. А. 3.12 и рис. Б. 3.15 (сплошные линии) видно, что закономерности распределения напряжений около квадратного отверстия в анизотропной пластинке такие же, как в изотропной пластинке. Отличие значений напряжений, полученных методом рядов [91], от истинных и в этом случае достаточно далеки, ДМНК приводит к достаточно верным результатам, но его труднее реализовать, чем ОМНК.

Заметим, что численные исследования были проведены и для материалов, указанных в работе [163], где при построении функций использовались отображения внешности единичного круга на внешности прямоугольников, а при удовлетворении граничным условиям – метод граничной коллокации. Результаты работы [163] оказались значительно отличными от полученных нами.

Бесконечная плита с квадратным отверстием. Пусть плита ослаблена квадратным отверстием со сторонами длины $2a$, параллельными осям координат

(рис. 3.14). Контур отверстия свободен от усилий. На бесконечности $M_x^\infty = M_y^\infty = m$, $H_{xy}^\infty = 0$.

Стороны квадрата будем представлять внешними берегами разрезов L_1, L_2, L_3, L_4 вдоль сторон, с концами в точках A, B, C, D . В этом случае в приведенном решении нужно принять

$$\mathcal{L} = 4, \quad A(a, a), \quad B(-a, a), \quad C(-a, -a), \quad D(a, -a), \\ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a.$$

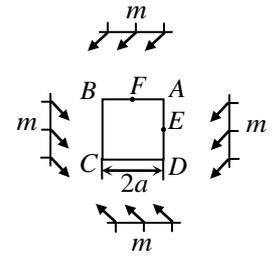


Рис. 3.14

Расчеты проводились без аппроксимации сторон вблизи вершины углов и с их аппроксимацией. При проведении расчетов вместо равных нулю полуосей b_l считалось, что $b_l/a_l = 10^{-4}$. Это уменьшает вычислительные погрешности. В рассматриваемом случае, если обозначать через δ отрезки на сторонах от вершин углов до точек их закругления, будем иметь

$$a'_l = \delta, \quad |O'_l A_l| = \sqrt{2} \delta, \\ x'_{01} = a - \delta, \quad y'_{01} = a - \delta, \quad x'_{02} = -a + \delta, \quad y'_{02} = a - \delta, \\ x'_{03} = -a + \delta, \quad y'_{03} = -a + \delta, \quad x'_{04} = a - \delta, \quad y'_{04} = -a + \delta.$$

На рис. Б.3.16 для всестороннего изгиба плиты с квадратным отверстием с длиной стороны $2a$ моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = m$ изображены графики распределения изгибающих моментов в точках отрезков сторон квадрата EA (M_y/m) и AF (M_x/m). Для остальных частей сторон квадрата значения моментов легко восстанавливаются по имеющейся симметрии. Как и следовало ожидать, для изотропной плиты имеет место симметрия распределения моментов вдоль сторон квадрата, для анизотропного материала симметрия не наблюдается. При приближении к вершинам квадрата моменты стремятся к $+\infty$. Результаты, полученные в работах других авторов методом рядов, несколько согласуются с нашими лишь в точках вблизи середин сторон квадрата, существенно отличаясь от них в окрестностях вершин.

В табл. А.3.13 для случая одностороннего изгиба плиты с квадратным

отверстием моментами $M_y^\infty = m_y$ приведены значения изгибающих моментов M_θ по контуру отверстия на площадках, перпендикулярных ему (M_y для вертикальных сторон, M_x для горизонтальных сторон) в точках с указанными координатами с точностью до интенсивности приложенных моментов m_y как множителя. Рассматривались случаи квадрата с прямыми углами (без закруглений), а также квадрат с закругленными углами вблизи вершин с малыми значениями радиусов (равных в данном случае отрезкам от вершин углов) закруглений δ . В табл. А.3.13 координаты точек и значения δ отнесены к полудлине a стороны квадрата. На рис. Б.3.17 изображены графики распределения этих моментов для точек отрезков EA и AF на сторонах. Для остальных частей сторон квадрата значения моментов легко восстанавливаются по имеющейся симметрии. Как видно, в отличие от предыдущего, всестороннего изгиба плиты, в случае одностороннего изгиба при приближении к вершинам квадрата значения моментов стремятся к бесконечностям разных знаков и, естественно, они не могут аппроксимироваться одной кривой в окрестностях вершин, что предполагают исследователи при использовании метода рядов. При подходе к вершинам вдоль горизонтальных сторон моменты стремятся к $-\infty$, при подходе вдоль вертикальных сторон – к $+\infty$, причем, чем выше «степень анизотропии» (отличие a_{11}/a_{22} от 1), тем больше значения моментов вдоль вертикальных сторон и меньше вдоль горизонтальных сторон. Эти закономерности не изменяются при аппроксимации окрестностей вершин углов дугами вписанных окружностей даже весьма малых радиусов. Заметим, что такая закономерность стремления моментов к бесконечности разных знаков при подходе к вершинам углов для некоторых сильно анизотропных материалов наблюдается и при рассмотренном выше всестороннем изгибе плиты. В частности, для плиты из березовой фанеры моменты стремятся к $+\infty$, если приближение к вершине происходит вдоль горизонтальных сторон, перпендикулярных направлению с наибольшей жесткостью волокон ($a_{11} \ll a_{22}$ или $E_1 \gg E_2$); если же это приближение

происходить вдоль сторон, перпендикулярных к мягким волокнам, то моменты стремятся к $-\infty$. Аппроксимация сторон углов вблизи вершин снимает особенность моментов в этих точках, причем, чем меньше радиус закругления, тем больше значения моментов в вершинах (закругленных). Чем выше «степень анизотропии» (отличие a_{11}/a_{22} от 1), тем больше значения моментов вдоль вертикальной стороны и меньше вдоль горизонтальной стороны.

Для сравнения результатов с известными из литературы для плиты из березовой фанеры с квадратным отверстием при всестороннем изгибе в табл. А.3.14 приведены значения моментов M_θ вблизи контура отверстия. Здесь же приведены данные полученные для этого случая в работе [88], где отображающая функция бралась в виде $\omega(z) = \zeta - \frac{1}{9\zeta^3}$. Как видно из табл. А.3.14, значения изгибающих моментов, полученные в работе [88], оказались значительно отличными от наших вблизи вершин. Они достаточно близки к полученным нами лишь в точках, близких к серединам сторон квадрата.

Плита с двумя квадратными отверстиями. Пусть бесконечная плита имеет два квадратных отверстия со сторонами длины $2a$, параллельными осям координат (рис. 3.15). Стороны квадрата будем представлять внешними берегами разрезов $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8$ вдоль сторон, т. е. с концами A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 . Расстояние между отверстиями обозначим через c . В этом случае

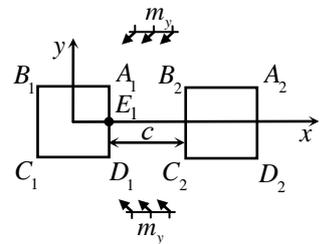


Рис. 3.15

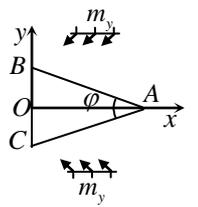
$$\begin{aligned} \mathcal{L} = 8, \quad & A_1(a, a), \quad B_1(-a, a), \quad C_1(-a, -a), \quad D_1(a, -a), \\ & A_2(3a+c, a), \quad B_2(a+c, a), \quad C_2(a+c, -a), \quad D_2(3a+c, -a), \\ & a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = a. \end{aligned}$$

Расчеты проводились без аппроксимации сторон вблизи вершин углов и с их аппроксимацией. При проведении расчетов вместо равных нулю полуосей b_l считалось, что $b_l/a_l = 10^{-4}$. В рассматриваемом случае, если обозначать через δ отрезки на сторонах от вершин углов до точек их закругления, будем иметь

$$\begin{aligned}
a'_i &= \delta, \quad |O'_i A_i| = \sqrt{2} \delta, \\
x'_{01} &= a - \delta, \quad y'_{01} = a - \delta, \quad x'_{02} = -a + \delta, \quad y'_{02} = a - \delta, \\
x'_{03} &= -a + \delta, \quad y'_{03} = -a + \delta, \quad x'_{04} = a - \delta, \quad y'_{04} = -a + \delta, \\
x'_{05} &= 3a + c - \delta, \quad y'_{05} = a - \delta, \quad x'_{06} = a + c + \delta, \quad y'_{06} = a - \delta, \\
x'_{07} &= a + c + \delta, \quad y'_{07} = -a + \delta, \quad x'_{08} = 3a + c - \delta, \quad y'_{08} = -a + \delta.
\end{aligned}$$

Численные исследования для плиты с двумя квадратными отверстиями были проведены для различных значений c/a , отношения расстояния между отверстиями c к полудлине их сторон a . Как показали расчеты, с уменьшением расстояния между отверстиями (отношения c/a) значения изгибающих моментов вблизи контуров и точках перемены растут. Если расстояние между отверстиями более трех длин сторон ($c/a > 6$), то влиянием одного отверстия на значения моментов около другого незначительно и им можно пренебречь. Для близких расстояний между контурами особенно большие значения моментов возникают в точках перемены вблизи контуров отверстий. На рис. Б.3.18 изображены графики изменения изгибающих моментов M_y/m_y вблизи точки перемены $E_1(a, 0)$ на контуре левого отверстия в зависимости от c/a . Видно, что с уменьшением c/a значения моментов резко растут, особенно в плите из материала с сильной «степенью анизотропии» М2.

Плита с треугольным отверстием. Пусть теперь плита с треугольным отверстием в виде равнобедренного треугольника с высотой $2a$ по оси абсцисс и углом при вершине φ (рис. 3.16) изгибается моментами $M_y^\infty = m_y$. В этом случае вершины треугольника располагаются в точках $A(2a, 0)$, $B(0, 2a \operatorname{tg}(\varphi/2))$, $C(0, -2a \operatorname{tg}(\varphi/2))$.



Стороны треугольника будем представлять внешними берегами разрезов L_1 , L_2 , L_3 вдоль сторон, т. е. с концами A , B , C . В этом случае

$$\mathcal{L} = 3, \quad a_1 = a_3 = 2a / \cos(\varphi/2), \quad a_2 = 4a \operatorname{tg}(\varphi/2).$$

Численные исследования были проведены для различных значений угла φ

при вершине треугольника. Как показали расчеты, с уменьшением угла φ значения изгибающих моментов вблизи боковых сторон треугольника уменьшаются, вблизи основания растут. Если угол φ равен нулю, то моменты в окрестности точки A получаются такими же, как в плите с одним эллиптическим отверстием-трещиной. Это видно и из данных рис. Б.3.19, где приведены графики изменения M_y/m_y в точке оси Ox вблизи вершины A зависимости от угла φ . Видно, что с уменьшением угла φ значения моментов растут и при $\varphi=0$ они получаются такими же, как в плите с одним эллиптическим отверстием-трещиной, причем это значение не зависит от анизотропии материала. Последнее согласуется с известным фактом для пластинки с трещиной в плоской задаче, когда σ_y вблизи вершины на продолжении трещины (и коэффициент интенсивности напряжений k_1), чему при изгибе плиты соответствует M_y , не зависит от анизотропии материала [55]. Как показали расчеты, в точках плиты на продолжении высоты, удаленных от вершины A на расстояния более высоты $2a$, значения моментов такие же, как в плите без отверстия, т. е. влияние отверстия на напряженное состояние можно пренебречь.

3.6. Исследование напряженного состояния при действии сосредоточенных сил

Сосредоточенная сила как предельный случай распределенных поперечных сил по контуру отверстия. Рассмотрим, как и в разделе 2 п. 2.2.3а, круговое кольцо с внешним жестко защемленным контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и внутренним L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$), загруженным равномерно распределенными поперечными усилиями p_1 (рис. 2.8 раздела 2), и будем стягивать внутренний контур в точку, сохраняя главный вектор приложенных к нему усилий.

В табл. А.3.15 с точностью до главного вектора $P_1 = 2\pi a_1 p_1$ приложенных к контуру L_1 усилий p_1 приведены значения моментов M_y/P_1 , вдоль оси Ox в точках с координатами x/a_0 для различных значений отношения a_1/a_0 . Моменты для $a_1/a_0 = 0$ относятся к случаю плиты при действии сосредоточенной силы $P_1^0 = P_1$ в центре плиты (рис. 2.9 раздела 2). Графики распределения этих моментов даны на рис. Б.3.20 (для материала М1 – рис. Б.3.20 а, для материала М2 – рис. Б.3.20 б). Штриховые линии рисунков относятся к случаю действия сосредоточенной силы P_1^0 . Видно, что при $a_1/a_0 \rightarrow 0$ значения моментов в плите стремятся к тем значениям, которые они получают при действии сосредоточенной силы. При $a_1/a_0 = 0,1$ на они получаются такими же как и в случае действия сосредоточенной силы. Так, в случае $a_1/a_0 \leq 0,01$ значения моментов в точках при $x/a_0 \geq 0,03$ для обеих задач практически совпадают (в пределе при $a_1/a_0 \rightarrow 0$, они полностью совпадают). В общем же случае в точках $x \geq 3a_1$, т. е. находящихся от контура отверстия на расстояниях больше диаметра отверстия, значения моментов не зависят от вида нагружения (сосредоточенная сила или поперечная нагрузка по контуру), а зависят от главного вектора приложенных усилий, что подтверждает принцип Сен-Венана. Заметим, что значения моментов для материала М1 совпадают с полученными по точному решению в п. 2.2.3а, для анизотропного кольца результаты согласуются с данными работы [84]. Таким образом, сосредоточенную силу P_r^0 действующую в точке z_r^0 можно рассматривать как предельный случай для плиты с круговым отверстием, к контуру которого приложены равномерно распределенные поперечные усилия, при стремлении радиуса круга к нулю с сохранением значения равнодействующей P_r^0 .

Действие сосредоточенной силы в . Пусть теперь сосредоточенная сила действует в произвольной точке $z_{k1}^0(x_1^0, y_1^0)$ кругового диска. В этом случае комплексные потенциалы (3.11) примут вид

$$W'_k(z_k) = (A_{k1}^0 z_k + B_{k1}^0) \ln(z_k - z_{k1}^0) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} \varphi_{k0n}(z_k), \quad (3.46)$$

где A_{k1}^0 , B_{k1}^0 вычисляются из решения систем (2.21), (2.22), в которых необходимо положить $M_{x1}^0 = y_1^0 P_1^0$, $M_{y1}^0 = -x_1^0 P_1^0$; $\varphi_{k0n}(z_k)$ имеют вид (3.13).

В табл. А.3.16 для кругового кольца с внешним жестко заземленным контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$), находящегося под действием сосредоточенной силы P_1^0 в точке с координатами $(x_{01}^0; 0)$ (рис. 3.17), в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox и от отношения c/a_0 , где c

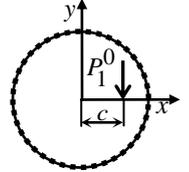


Рис. 3.17

– расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы приведены значения моментов M_s и M_n с точностью до P_1^0 , в точках контура L_0 . Сплошные линии здесь и далее относятся к материалу М2, штриховые – к материалу М1. Из данных табл. А.3.16 следует, что с ростом отношения c/a_0 (с приближением сосредоточенной силы к контуру диска) значения моментов по модулю вначале возрастают, а затем убывают, что говорит о том, что моменты уменьшаются с удалением приложенной нагрузки от контура и с приближением нагрузки с жестко заземленным контуром. При $c/a_0 > 0,8$ значения моментов равны нулю при $\theta \rightarrow \pi$. Чем выше «степень анизотропии», т. е. степень отличия a_{11}/a_{22} от 1, тем больше уровень концентрации изгибающих моментов (максимальное по модулю их значение), за исключением случаев, когда сосредоточенная сила близка к контуру.

Действие сосредоточенной силы в кольца. Пусть эллиптическая плита с внешним контуром L_0 с полуосями a_0 , b_0 и внутренним контуром L_1 с полуосями a_1 , b_1 изгибается под действием сосредоточенной силы P_1^0 приложенной в точке плиты с координатами $(x_{01}^0; y_{01}^0)$. Один из контуров кольца жестко заземлен, а второй свободен.

а) Плита с жестко заземленным внешним контуром. В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0; \quad g_{k01} = 1, \quad g_{k02} = \mu_k, \quad f_{01} = c_{10}, \quad f_{02} = c_{20},$$

$$g_{k11} = \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{k12} = q_k, \quad f_{11} = -c_1 x + c_{11}, \quad f_{12} = c_1 y + c_{21}; \quad (3.47)$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{02}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{11}}{ds} = -c_1 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{12}}{ds} = c_1 \frac{dy}{ds}. \quad (3.48)$$

Заметим, что в данном случае главный вектор и компоненты главного момента усилий, приложенных к контуру L_1 равны нулю, т. е. $P_1 = M_{y1} = M_{x1} = 0$, значение сосредоточенной силы, приложенной в точке $z_1^0(x_1^0, y_1^0)$ равно P_1^0 , а значения ее моментов относительно осей координат равны $M_{x1}^0 = y_1^0 P_1^0$, $M_{y1}^0 = -x_1^0 P_1^0$.

Для кругового кольца с внешним жестко заземленным контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и внутренним незагруженным контуром L_1 радиуса $a_1 = 0,2a_0$ ($b_1 = a_1$) (рис. 3.18) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и от отношения c/a_0 , где c – расстояние от начала координат до точки приложения

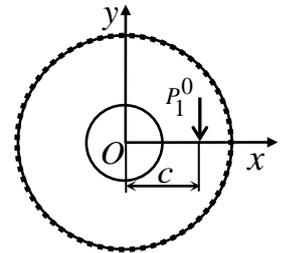


Рис. 3.18

сосредоточенной силы в табл. А.3.17 приведены значения моментов M_s и M_n с точностью до P_1^0 , в точках контуров L_0 , L_1 . Значения моментов M_n на контуре L_1 равны нулю, поэтому они в табл. А.3.17 не приведены. На рис. Б.3.21 изображены графики распределения моментов M_s в точках контура L_1 .

Из данных табл. А.3.17, рис. Б.3.21 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов на контуре L_1 . С ростом отношения c/a_0 значения изгибающих моментов на контуре L_1 уменьшаются, стремясь при этом к нулю, что связано с отдалением сосредоточенной силы, а на контуре L_0 при $\theta \rightarrow 0$ по модулю увеличиваются, а при $\theta \rightarrow \pi$ стремятся к нулю, что связано с приближением или с отдалением

сосредоточенной силы от одного из краев плиты.

б) Плита с жестко заземленным внутренним контуром. В этом случае в приведенном в п. 3.2 решении необходимо принять

$$g_{k01} = \frac{P_k}{\mu_k}, \quad g_{k02} = q_k, \quad f_{01} = -c_0 x + c_{10}, \quad f_{02} = c_0 y + c_{20},$$

$$g_{k11} = 1, \quad g_{k12} = \mu_k, \quad f_{11} = c_{11}, \quad f_{12} = c_{21}; \quad (3.49)$$

$$\frac{df_{01}}{ds} = -c_0 \frac{dx}{ds}, \quad \frac{df_{02}}{ds} = c_0 \frac{dy}{ds}, \quad \frac{df_{11}}{ds} = 0, \quad \frac{df_{12}}{ds} = 0. \quad (3.50)$$

Заметим, что для данной задачи значение сосредоточенной силы, приложенной в точке $z_1^0(x_1^0, y_1^0)$ равно P_1^0 , а значения ее моментов относительно осей координат равны $M_{x1}^0 = y_1^0 P_1^0$, $M_{y1}^0 = -x_1^0 P_1^0$. Т. к. сила реакции опоры равна P_1^0 , а компоненты ее главного момента равны $M_{x1}^0 = y_1^0 P_1^0$, $M_{y1}^0 = -x_1^0 P_1^0$, то главный вектор усилий, приложенных к контуру L_1 равен $P_1 = -P_1^0$, а компоненты их главного момента равны $M_{y1} = -M_{y1}^0 = x_{01} P_1^0$ и $M_{x1} = -M_{x1}^0 = -y_1^0 P_1^0$.

Для кругового кольца с внутренним жестко заземленным контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и внешним незагруженным контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 3.19) в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox , и от отношения c/a_0 , где c – расстояние от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы в

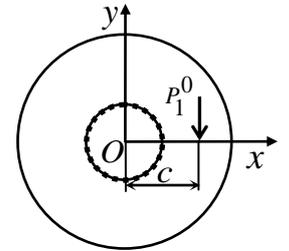


Рис. 3.19

табл. А.3.18 приведены значения моментов M_s и M_n с точностью до P_1^0 , в точках контуров L_0 , L_1 . Значения моментов M_n на контуре L_0 равны нулю, поэтому они в табл. А.3.18 не приведены.

Из данных табл. А.3.18 видно, что, чем выше «степень анизотропии», тем больше уровень концентрации изгибающих моментов на контурах. С ростом отношения c/a_0 значения изгибающих моментов на контурах увеличиваются, что связано с увеличением главного вектора. При $c/a_0 < 0,3$ значения моментов

на контуре L_0 стремятся к нулю, что связано с отдалением сосредоточенной силы от этого контура.

3.7. Выводы по разделу 3

В данном разделе диссертации решены задачи изгиба для многосвязных плит с отверстиями, трещинами и тонкими жесткими кольцами. Описана методика определения комплексных потенциалов, использующая конформные отображения, разложения голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, сведение определения неизвестных коэффициентов разложений в рядах к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений с получением их псевдорешений с помощью сингулярного разложения. Даны решения задач для конечных и бесконечных многосвязных плит с конечным числом эллиптических отверстий при произвольном их расположении и сочетании. Описаны результаты численных исследований НДС, а в случае трещин и линейных жестких колец также КИМ.

Приведены результаты подробных численных исследований изменений основных характеристик напряженного состояния и КИМ для кругового кольца, для кругового диска с трещиной переменной длины, для бесконечной пластинки с двумя круговыми отверстиями или трещинами, с криволинейными отверстиями в виде квадратов или треугольников.

Установлено, что с приближением отверстий друг к другу вблизи зоны перемычки происходит резкое увеличение концентрации моментов. Численными исследованиями выявлено влияние анизотропии материала плиты на значения моментов. Для частных случаев рассмотренных задач установлено полное согласование или совпадение полученных результатов с известными, найденными другими методами. Сужение эллиптических отверстий к узким щелям (без контакта берегов) приводит к резкому увеличению неравномерности распределения моментов не только около данного отверстия, но и около соседних

контуров. Пересечение контуров плиты друг с другом приводит к резкому снижению моментов в зонах пересечений.

По результатам, представленным в разделе 3, опубликованы работы [46, 47, 56, 57, 61, 62, 66].

РАЗДЕЛ 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

4.1. Принцип Вольтерра и операторы Работнова

Начальное напряженно-деформированное состояние тел из вязкоупругих материалов не является стационарным. С течением времени, как правило, изменяются значения упругих постоянных материала, входящих в уравнения закона Гука, а следовательно изменяются связи между напряжениями и деформациями, а также сами эти величины. Порой напряженное состояние тел не может рассматриваться стационарным даже за сравнительно короткий промежуток времени, соизмеримый со сроком эксплуатации конструкций. Поэтому при проектировании конструкций, особенно в случаях ожидаемого возникновения в их элементах высоких концентраций напряжений, нужно учитывать изменение напряженно-деформированного состояния элементов таких конструкций во времени. Это можно сделать, решая задачу вязкоупругости, что позволяет определять значения напряжений в любой момент времени.

При решении задач вязкоупругости в основной системе уравнений над неизвестными функциями нужно выполнять операции дифференцирования по координатам и интегрирования по времени. Решение же граничной задачи теории упругости связано только с интегрированием по координатам. Вольтерра [189] показал, что, если разбиение границы рассматриваемого тела на части S_σ и S_u , где заданы соответственно усилия и перемещения, с течением времени не меняется, то операции по координатам и времени переставимы, так как входящие в выражения ядра релаксации для рассматриваемых однородных тел не зависят от координат. Тогда можно произвольно выбирать порядок выполнения операций интегрирования по времени и по координатам.

Поэтому задачу вязкоупругости можно решать так: вначале решить

соответствующую граничную задачу для упругого тела, затем в полученном решении заменить упругие постоянные соответствующими упругими временными операторами и определить воздействия получившихся операторных функций на функции координат. Такой подход к решению граничных задач вязкоупругости называется принципом Вольтерра [133], заключающийся в том, что любую статическую задачу теории наследственной упругости следует решать так же, как и соответствующую задачу теории упругости, и лишь в окончательном результате заменить упругие постоянные на упругие операторы.

Этот принцип легко использовать, если решение задачи теории упругости представляется произведением рациональной функции упругих постоянных на функции координат. Тогда, заменив в решении упругие постоянные упругими операторами, можно найти значения соответствующих величин во времени. Так, если коэффициенты деформаций со временем изменяются в соответствии с формулами [132, 143]

$$a_{ij} \cdot f_1 = a_{ij}^0 (1 + P_{ij}^*) f_1, \quad (4.1)$$

где a_{ij}^0 – мгновенные значения величин, P_{ij}^* – интегральные операторы с ядрами релаксации $P_{ij}(t - \tau)$, действующие на функции f_1 координат точек x, y, z и времени t так, что

$$P_{ij}^* \cdot f_1 = \int_0^t P_{ij}(t - \tau) f_1(x, y, z, \tau) d\tau, \quad (4.2)$$

то, после решения задачи теории упругости, подставив в найденные выражения вместо мгновенно-упругих значений коэффициентов деформаций их операторные выражения и вычислив действие каждого оператора типа (4.2), можно найти значения напряжений и деформаций для любого момента времени. В связи с этим одной из основных задач наследственной теории вязкоупругости является выбор ядер. Достаточно хорошие результаты обеспечивает ядро типа Абеля

$$I_\alpha(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (4.3)$$

где $\Gamma(1+\alpha)$ ($-1 < \alpha < 0$) – гамма-функция, резольвентой которого является функция Работнова Ю. Н. [133]

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t-\tau) = (t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \quad (4.4)$$

причем ряд (4.4) при любом β сходится для всех значений $t-\tau$, если $-1 < \alpha < \infty$. Очевидно, $\mathcal{E}_\alpha(0, t-\tau) = I_\alpha(t-\tau)$.

Функцию $\mathcal{E}_\alpha(\beta, t-\tau)$ Работнов Ю. Н. назвал дробно-экспоненциальным ядром. Это ядро получило широкое распространение в литературе благодаря большим возможностям описания реологических свойств материалов и наличию достаточно разработанной алгебры интегральных операторов [101, 132, 134, 137].

Если зависимость напряжений и перемещений от упругих постоянных несложная, то расшифровка воздействия операторных функций на функции координат сводится к некоторым алгебраическим операциям с интегральными операторами: обращению, перемножению и т. п. При этом используется так называемая алгебра резольвентных операторов, построенных на основе дробно-экспоненциальных ядер Работнова Ю. Н. $\mathcal{E}_\alpha^*(-\tau)$, действие которых на единицу имеет вид [132, 143]

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\tau) \cdot 1 = t^{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n t^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)+1]} \quad (4.5)$$

или

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\tau) \cdot 1 = \frac{1}{\tau} \left[1 - e^{-\tau[(1-\alpha)t]^{1-\alpha}} \right]; \quad (4.6)$$

где α, τ – реологические постоянные материала.

Если действующие на тело нагрузки постоянны, то при решении задач результат представляется обычно в виде произведения \mathcal{E}_α^* – оператора на постоянную. В этом случае достаточно вычислить выражение

$$\mathcal{E}_\alpha^*(\beta) 1 = \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(\beta, t-\tau) d\tau, \quad (4.7)$$

которое приводится к виду

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta)1 = \frac{1}{\beta} \left[1 - E_{1+\alpha}(-\beta t^{1+\alpha}) \right]. \quad (4.8)$$

Здесь $\beta > 0$, $E_\mu(x)$ – функция Миттаг-Леффлера, определяемая рядом

$$E_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\Gamma(\mu n + 1)}. \quad (4.9)$$

Исходя из свойств [190] функции Миттаг-Леффлера, Розовский М. И. для функции $E_{1+\alpha}(x)$ предложил аппроксимация [139, 140]

$$E_{1+\alpha}(-x) \approx e^{-\gamma x}, \quad \gamma = (1 + \alpha)^{1+\alpha}, \quad (4.10)$$

на основании которой (4.8) можно заменить приближенной формулой

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta)1 \approx \frac{1}{\beta} \left(1 - e^{-\gamma \beta t^{1+\alpha}} \right). \quad (4.11)$$

При $t \rightarrow \infty$ второй член в скобке стремится к нулю, и выражение (4.11) стремится к предельному значению $1/\beta$.

Таким образом, \mathcal{E}_α^* – операторы описывают ползучесть, ограниченную при постоянной нагрузке. Неограниченная ползучесть получается лишь в случае $\beta = 0$, когда \mathcal{E}_α^* – оператор превращается в I_α – оператор. В этом смысле ядра, сконструированные из \mathcal{E}_α – функций, ведут себя так же, как ядра Бронского-Слонимского [10, 144]. На основе изучения асимптотических свойств [25, 26, 168] Аниным Б. Д [7] было выполнено дальнейшее исследование \mathcal{E}_α^* – операторов.

4.2. Выражения упругих постоянных через упругие операторы

Для ортотропных материалов коэффициенты деформаций выражаются через технические постоянные – модули Юнга E_i , модули сдвига G_{ij} и коэффициенты Пуассона ν_{ij} для главных направлений анизотропии:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{E_1}, & a_{22} &= \frac{1}{E_2}, & a_{33} &= \frac{1}{E_3}, & a_{44} &= \frac{1}{G_{12}}, & a_{55} &= \frac{1}{G_{23}}, & a_{66} &= \frac{1}{G_{31}}, \\
a_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & a_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, & a_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Если изменения технических постоянных со временем представить операторами типа (4.2), то для них можно записать операторные воздействия

$$E_i \cdot f_2 = E_i^0 (1 - Q_i^*) f_2, \quad G_{ij} \cdot f_3 = G_{ij}^0 (1 - R_{ij}^*) f_3, \quad \nu_{ij} \cdot f_4 = \nu_{ij}^0 (1 + S_{ij}^*) f_4, \tag{4.13}$$

в которых E_i^0 , G_{ij}^0 , ν_{ij}^0 – мгновенные значения соответствующих постоянных; Q_i^* , R_{ij}^* , S_{ij}^* – интегральные операторы с ядрами релаксации типа (4.5). Тогда через временные операторы Работнова Ю. Н. технические постоянные материала можно записать в виде [133]

$$\begin{aligned}
E_i^* &= E_i^0 \left[1 - \delta_i^* \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_i^* - \delta_i^*) \right], & \nu_{ij}^* &= \nu_{ij}^0 \left[1 + \delta^* \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta^*) \right], \\
G_{ij}^* &= G_{ij}^0 \left[1 - \delta_{ij}^* \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_{ij}^* - \delta_{ij}^*) \right],
\end{aligned} \tag{4.14}$$

где δ_i^* , β_i^* – реологические постоянные материала, связанные с изменением E_i во времени; α , δ^* , β^* – реологические постоянные материала, связанные с изменением ν_{ij} во времени; δ_{ij}^* , β_{ij}^* – реологические постоянные материала, связанные с изменением G_{ij} во времени.

Если получены выражения для напряжений и перемещений, содержащие постоянные материала, то, подставив в эти выражения значения постоянных во времени, например по формулам (4.14), можно вычислить напряжения и перемещения в любой момент времени.

Но описанным подходом можно воспользоваться, если известны все реологические постоянные материала, характеризующие их изменения во времени. В связи с тем, что экспериментальное определение реологических параметров операторов связано с большими трудностями, известные литературные источники, как правило, не содержат полного набора реологических постоянных. Поэтому возникает необходимость нахождения

неизвестных реологических постоянных через известные. Кроме того, при решении конкретных задач применяют различные упрощения для уменьшения числа операторов, входящих в решение [11, 67, 132, 143]. Это можно сделать, учитывая постоянство во времени некоторых величин.

Исходя из общепринятой гипотезы об упругом сжимаемом материале, будем считать, что неизменяемым во времени является модуль объемной деформации тела K [11, 101, 132, 143], определяемый равенством

$$\frac{1}{K} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23}, \quad (4.15)$$

или

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{2\nu_{23}}{E_2} - \frac{2\nu_{13}}{E_1}. \quad (4.16)$$

В связи с тем, что в литературе отсутствуют значения модуля Юнга E_3 , коэффициентов Пуассона ν_{13} , ν_{23} и их реологических постоянных, примем, что

$$a_{33} = (a_{11} + a_{22})/2, \quad a_{13} = a_{23} = a_{12}, \quad (4.17)$$

т. е.

$$\frac{1}{E_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right), \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}. \quad (4.18)$$

Тогда из (4.16) получим

$$\frac{1}{K} = \frac{3}{2E_1} + \frac{3}{2E_2} - \frac{6\nu_{12}}{E_1}. \quad (4.19)$$

Учитывая (4.19) и (4.12), найдем выражения ν_{12} и a_{12} через E_i :

$$\begin{aligned} \nu_{12} &= \frac{E_1}{6} \left(\frac{3}{2E_1} + \frac{3}{2E_2} - \frac{1}{K} \right), \\ a_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{2}{3K} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Заменяя в последних формулах модули Юнга временными операторами (4.14) с учетом постоянства во времени K , для ν_{12} и a_{12} получим упругие операторы

$$\nu_{12}^* = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{E_1^*}{E_2^*} - \frac{2E_1^*}{3K^0} \right), \quad (4.21)$$

$$a_{12}^* = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{E_1^*} + \frac{1}{E_2^*} - \frac{2}{3K^0} \right), \quad (4.22)$$

где K^0 – постоянное значение модуля объемной деформации тела K , т. е.

$$\frac{1}{K^0} = \frac{1}{K} = \frac{3}{2E_1^0} + \frac{3}{2E_2^0} - \frac{6\nu_{12}^0}{E_1^0}. \quad (4.23)$$

Случай изотропной пластинки. В случае изотропной пластинки

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu, \quad \frac{1}{K_1} = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{K_3} = \frac{1-2\nu}{E},$$

$$\frac{1}{K} = \frac{3(1-2\nu)}{E}; \quad (4.24)$$

E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала тела.

Из равенства (4.24) следует, что

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{E}{6K}, \quad (4.25)$$

$$E = 3K(1-2\nu), \quad (4.26)$$

т. е., исходя из постоянства K , изменения напряженно-деформированного состояния можно исследовать, используя одну из формул (4.25) или (4.26). Формулой (4.25) нужно пользоваться, если известны реологические постоянные связанные с изменением E , а формулой (4.26) – если известны реологические постоянные, связанные с ν .

Если известны реологические постоянные, связанные с изменением ν , то временной оператор для ν имеет вид [134, 143]

$$\nu^* = \nu^0 \left(1 + \delta_\nu \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_\nu) \right), \quad (4.27)$$

где ν_0 – мгновенно-упругое значение коэффициента Пуассона; α , β_ν , δ_ν – известные реологические постоянные материала, связанные с изменением коэффициента Пуассона ν ; $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_\nu)$ – оператор вида (4.6). В этом случае на основании (4.26) и (4.27) для временного оператора E получаем

$$E^* = 3K^0 \left[1 - 2\nu^0 \left(1 + \delta_\nu \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_\nu) \right) \right], \quad (4.28)$$

в котором учтена неизменность со временем модуля объемной деформации K .

По теореме об обращении резольвентного оператора из (4.28) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^*} &= \frac{1}{3K^0(1-2\nu^0)} \left[1 + \frac{2\nu^0 \delta_\nu}{1-2\nu^0} \mathcal{E}_\alpha^* \left(-\beta_\nu + \frac{2\nu^0 \delta_\nu}{1-2\nu^0} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{3K^0(1-2\nu^0)} \left[1 + \delta_E \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_E) \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

из которого следует, что реологические постоянные β_E и δ_E , связанные с изменением модуля Юнга E , вычисляются по формулам

$$\beta_E = \beta_\nu - \frac{2\nu^0 \delta_\nu}{1-2\nu^0}, \quad \delta_E = \frac{2\nu^0 \delta_\nu}{1-2\nu^0}, \quad (4.30)$$

если известны реологические постоянные, связанные с изменением коэффициента Пуассона ν .

4.3 Решение задач вязкоупругости с использованием принципа Вольтерра

Как отмечалось, принципом Вольтерра можно воспользоваться в простейших случаях, когда в выражения для напряжений и перемещений входят упругие постоянные в виде дробно-рациональных функций. Из приведенных в предыдущих разделах решений задач такими являются лишь решение задачи в п. 2.2.2 раздела 2 для бесконечной плиты с одним круговым отверстием.

По этому решению для бесконечной плиты с круговым отверстием радиуса R_1 (рис. 4.1), находящейся на бесконечности под действием моментов $M_x^\infty = m_x$,

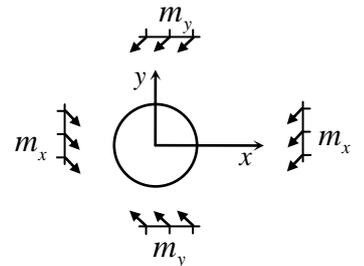


Рис. 4.1

$M_y^\infty = m_y$, $H_{xy}^\infty = 0$, для вычисления моментов получены выражения (2.80). В

точках контура, где $z = R_1(\cos \theta + i \sin \theta)$, для моментов получаются выражения

$$M_x + M_y = 4D(1+\nu) \left(\frac{a_1 \cos 2\theta}{R_1^2} - \Gamma_1 \right),$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = -2D(\nu-1) \left\{ \Gamma_2 + \frac{[-b_1(i \sin 2\theta + \cos 2\theta) + a_1] R_1^2 - 3b_3}{R_1^4 [2i \sin \theta (\cos 3\theta + \sin \theta) + \cos 4\theta]} \right\}. \quad (4.31)$$

Для точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ получаем

$$M_x + M_y = \frac{\alpha(\nu-1)(m_x + m_y) + 2(\nu+1)(\pm m_x \mp m_y)}{\alpha(\nu-1)},$$

$$M_y - M_x = \frac{(\alpha-1) [\alpha(\nu-1)(m_x + m_y) + 2(\nu+1)(\pm m_x \mp m_y)]}{2\alpha(\nu+1)},$$

$$H_{xy} = 0, \quad (4.32)$$

откуда следует, что

$$M_x = \pm \frac{[\alpha(\nu-1) - 3\nu - 1] [\alpha(\nu-1)(m_x + m_y) + 2(\nu+1)(\pm m_x \mp m_y)]}{4\alpha(\nu+1)(\nu-1)},$$

$$M_y = \mp \frac{[\alpha(\nu-1) + \nu + 3] [\alpha(\nu-1)(m_x + m_y) + 2(\nu+1)(\pm m_x \mp m_y)]}{4\alpha(\nu+1)(\nu-1)}, \quad (4.33)$$

где верхние знаки относятся к случаю $\theta = 0$, нижние – $\theta = \pi/2$.

Если контур отверстия не подкреплен, то $\alpha = (3-\nu)/(1+\nu)$ и для моментов получим

$$M_x = 0, \quad M_y = -\frac{(\nu-1)m_x - (3\nu+5)m_y}{(3+\nu)} \text{ при } \theta = 0,$$

$$M_x = \frac{(3\nu+5)m_x + (1-\nu)m_y}{(3+\nu)}, \quad M_y = 0 \text{ при } \theta = \pi/2.$$

Заменив в этих формулах коэффициент Пуассона ν временным оператором (4.27) и расшифровав операторные функции, получим выражения моментов для любого момента времени в точке

$$M_y = -\frac{\nu^0 \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)(m_x - 3m_y) + (\nu^0 - 1)m_x - (3\nu^0 + 5)m_y}{\left[3 + \nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))\right]} \text{ при } \theta = 0, \quad (4.34)$$

$$M_x = \frac{\delta_\nu \nu^0 \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)(3m_x - m_y) + (3\nu^0 + 5)m_x + (1 - \nu^0)m_y}{\left[3 + \nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))\right]} \text{ при } \theta = \pi/2. \quad (4.35)$$

В случае жесткого подкрепления контура отверстия $\alpha = -1$ и для точки моменты окончательно примут вид

$$M_x = -\frac{(\nu + 3)m_x - (3\nu + 1)m_y}{\nu^2 - 1},$$

$$M_y = -\frac{\nu \left[(\nu + 3)m_x - (3\nu + 1)m_y \right]}{\nu^2 - 1} \text{ при } \theta = 0, \quad (4.36)$$

$$M_x = \frac{\nu \left[(3\nu + 1)m_x - (\nu + 3)m_y \right]}{\nu^2 - 1},$$

$$M_y = \frac{(3\nu + 1)m_x - (\nu + 3)m_y}{\nu^2 - 1} \text{ при } \theta = \pi/2. \quad (4.37)$$

Заменяя в этих формулах коэффициент Пуассона ν временным оператором (4.27) и расшифровав операторные функции, получим выражения моментов для любого момента времени

$$M_x = -\frac{\delta_\nu \nu^0 \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)(m_x - 3m_y) + (\nu^0 + 3)m_x - (3\nu^0 + 1)m_y}{(\nu^0)^2 \left(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)\right)^2 - 1},$$

$$M_y = -\frac{\nu^0 \left[1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)\right]}{(\nu^0)^2 \left(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)\right)^2 - 1} \times$$

$$\times \left[\delta_\nu \nu^0 \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)(m_x - 3m_y) + (\nu^0 + 3)m_x - (3\nu^0 + 1)m_y \right] \text{ } \theta = 0, \quad (4.38)$$

$$M_x = \frac{\nu^0 \left(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)\right)}{(\nu^0)^2 \left(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)\right)^2 - 1} \times$$

$$\times \left[\delta_\nu \nu^0 \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)(3m_x - m_y) + (3\nu^0 + 1)m_x - (\nu^0 + 3)m_y \right],$$

$$M_y = \frac{\delta_\nu \nu^0 \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)(3m_x - m_y) + (3\nu^0 + 1)m_x - (\nu^0 + 3)m_y}{(\nu^0)^2 (1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))^2 - 1} \quad \theta = \pi/2. \quad (4.39)$$

Если $m_x = m_y = m$, то моменты M_n и M_s не зависят от упругих постоянных, и по принципу Вольтерра они во времени не изменяются.

В случае одностороннего изгиба плиты с отверстием моментами $M_y^\infty = m_y$ формулы (4.34), (4.35) примут следующий вид

$$M_y = \frac{[3\nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)) + 5]m_y}{[3 + \nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))]} \quad \theta = 0, \quad (4.40)$$

$$M_x = \frac{[1 - \nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))]m_y}{[3 + \nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))]} \quad \theta = \pi/2. \quad (4.41)$$

В случае одностороннего изгиба плиты с жестко подкрепленным контуром отверстия моментами $M_y^\infty = m_y$ формулы (4.38), (4.39) примут следующий вид

$$M_x = \frac{(3\nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)) + 1)m_y}{(\nu^0)^2 (1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))^2 - 1},$$

$$M_y = \frac{\nu^0 [1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)]}{(\nu^0)^2 (1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))^2 - 1} \times$$

$$\times \left[(3\nu^0(1 + \delta_\nu \nu^0 \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)) + 1)m_y \right] \quad \theta = 0; \quad (4.42)$$

$$M_x = -\frac{\nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))}{(\nu^0)^2 (1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))^2 - 1} \left[(\nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)) + 3)m_y \right],$$

$$M_y = -\frac{(\nu^0(1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu)) + 3)m_y}{(\nu^0)^2 (1 + \delta_\nu \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_\nu))^2 - 1} \quad \theta = \pi/2. \quad (4.43)$$

Для плиты с круговым неподкрепленным и жестко подкрепленным отверстием при одностороннем изгибе моментами $M_y^\infty = m_y$ были проведены численные исследования изменения изгибающих моментов в зависимости от времени. Плита считалась изготовленной из алюминия или меди [143], упругие и реологические постоянные которых приведены в табл. 4.1. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для изгиба плиты моментами $M_y^\infty = m_y$. В них все значения даны с точностью до множителя m_y .

Таблица 4.1

Постоянные материала	Материал	
	Алюминий	Медь
E , МПа	71000	123000
K , МПа	47333	128125
ν	0,25	0,34
$\alpha_T \cdot 10^5$, K^{-1}	2,38	1,65
k , $Bm / m \cdot K$	0,2095	0,384
α_*	0,5	0,5
$\beta_V \cdot 10^3$, $c^{\alpha-1}$	6,65	9,2
$\delta_V \cdot 10^3$, $c^{\alpha-1}$	6,15	6,65

В табл. А.4.1 для плиты с неподкрепленным отверстием приведены значения моментов M_s в точках $A(R_1, 0)$ и $B(0, R_1)$ (рис. 4.2) в зависимости от времени, а на рис. Б.4.1 изображены графики их изменения в точке А, где они достигают максимальных значений. Сплошные линии относятся к плите из алюминия, штриховые – из меди. Аналогичные результаты для плиты с жестко подкрепленным отверстием приведены в табл. А.4.2 и на рис. Б.4.2, рис. Б.4.3. Значения моментов M_n для случая плиты с неподкрепленным отверстием равны нулю и поэтому они в табл. А.4.1 не приводятся. Из табл. А.4.1, табл. А.4.2 и рис. Б.4.1, рис. Б.4.2, рис. Б.4.3 видно, что с течением времени значения моментов в плите изменяются. При этом большие изменения моментов происходят лишь в первые 50 час. после приложения нагрузки, а через 200 час. они практически не изменяются, т.е. в плите устанавливается стационарное состояние. Как показывают расчеты, и в других задачах стационарное состояние устанавливается примерно в такое же время. Поэтому в дальнейшем результаты расчетов будем приводить для двух случаев: когда $t = 0$ (начальный момент времени) и $t = 400$ (через 400 час. от начала процесса деформирования), когда, наверняка, уже установилось стационарное

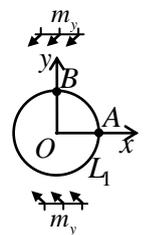


Рис. 4.2

состояние. Как следует из указанных результатов, при переходе в стационарное состояние значения моментов претерпевают большие изменения. Так, в случае плиты из алюминия с неподкрепленным отверстием значения M_s в точке A увеличиваются на 5%, а в точке B уменьшаются на 35%; в случае плиты с жестко подкрепленным отверстием значения M_s в точке A – более 2 раз (около 227%), а в точке B увеличиваются в 1,5 раза (на 150%); значения M_n в точке A – на 70%, а в точке B увеличиваются на 30%.

4.4. Метод малого параметра для решения задач вязкоупругости

Как отмечалось, принципом Вольтерра можно воспользоваться в простейших случаях, когда в выражения для напряжений и перемещений входят упругие постоянные в виде дробно-рациональных функций. Для многосвязных областей такие решения задач теории изгиба плит и получать невозможно. Поэтому непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно-деформированного состояния многосвязных плит невозможно. В связи с этим возникает необходимость и для многосвязных плит получать такие решения, которые явным образом содержали бы упругие постоянные. Это можно сделать, выделив из упругих постоянных такую, которая по модулю меньше единицы, и разложив все решение задачи в ряд по ней, как по малому параметру.

Для ортотропного материала коэффициенты деформаций (4.12) через технические постоянные выражаются так:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_3}.$$

Для многих анизотропных материалов из технических постоянных меньшими единицы являются только коэффициенты Пуассона ν_{ij} . Поэтому в качестве малого параметра, по которому следует разлагать решение задачи, можно взять любой из коэффициентов, например, ν_{12} . Однако сходимость

получаемых решений ускорится, если в качестве малого параметра брать не коэффициент ν_{12} , а его изменение λ с течением времени, т. е. представить ν_{12} в виде

$$\nu_{12} = \nu_{12}^0 + \lambda, \quad (4.44)$$

в котором ν_{12}^0 – мгновенно-упругое значение коэффициента ν_{12} .

Учитывая равенство (4.44), найдем

$$a_{12} = a_{12}^0 - \lambda a_{11}, \quad (4.45)$$

где $a_{12}^0 = -\nu_{12}^0 a_{11}$. Подставив (4.45) в формулу для Δ из (2.9), получим

$$\begin{aligned} \Delta &= -a_{66} a_{11}^2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2), \\ \lambda_{1,2} &= \frac{a_{12}^0 \mp \sqrt{a_{11} a_{22}}}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Рассматривая обратную к Δ величину и разлагая полученную дробь на простейшие дроби, найдем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{-a_{66} a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right).$$

Подставляя эти значения в формулы (2.9), будем иметь

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{a_{22}}{a_{11}^2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}, \quad b_{22} = -\frac{a_{11}}{a_{11}^2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}, \\ b_{12} &= -\frac{a_{11} \lambda - a_{12}^0}{a_{11}^2 (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}, \quad b_{66} = \frac{1}{a_{66}}, \quad b_{16} = b_{26} = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Разлагая правые части этих выражений на простейшие дроби, находим

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{a_{22}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right), \\ b_{22} &= -\frac{a_{11}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right), \\ b_{12} &= -\frac{a_{11} \lambda - a_{12}^0}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda} - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Для реальных материалов $\left| \frac{\lambda}{\lambda_1} \right| < 1$, $\left| \frac{\lambda}{\lambda_2} \right| < 1$. Тогда приведенные выше дроби,

как суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий, можно представить рядами. В результате найдем выражения

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_{11}^0 \sum_{j=0}^{\infty} d_{j1} \lambda^j, & b_{22} &= b_{22}^0 \sum_{j=0}^{\infty} d_{j1} \lambda^j, \\ b_{12} &= b_{12}^0 \sum_{j=0}^{\infty} d_{j2} \lambda^j, & b_{66} &= \frac{1}{a_{66}}, & b_{16} &= b_{26} = 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

в которых

$$\begin{aligned} b_{11}^0 &= \frac{a_{22}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, & b_{22}^0 &= \frac{1}{a_{11} (\lambda_2 - \lambda_1)}, & b_{12}^0 &= \frac{\sqrt{a_{11} a_{22}}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ d_{j1} &= (\lambda_2^{-j-1} - \lambda_1^{-j-1}), & d_{j2} &= (\lambda_1^{-j-1} + \lambda_2^{-j-1}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

При выводе формулы для B_{12}^0 учтено, что

$$b_{12} = \frac{\sqrt{a_{11} a_{22}}}{a_{11}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_1^{-j-1} + \lambda_2^{-j-1}) \lambda^j.$$

Учитывая выражения (4.49), формулы (2.7) перепишем в виде

$$p_k = \sum_{j=0}^{\infty} p_{jk} \lambda^j, \quad q_k = \sum_{j=0}^{\infty} q_{jk} \lambda^j, \quad s_k = \sum_{j=0}^{\infty} s_{jk} \lambda^j, \quad r_k = 2D_0 b_{66} \mu_k; \quad (4.51)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_{jk} &= D_0 (b_{11}^0 d_{j1} + b_{12}^0 \mu_k^2 d_{j2}), \\ q_{jk} &= D_0 (b_{12}^0 d_{j2} + b_{22}^0 \mu_k^2 d_{j1}), \\ s_{jk} &= -D_0 \left[(b_{12}^0 d_{j2} + b_{22}^0 \mu_k^3 d_{j1}) + 2b_{66} \mu_k \delta_j^0 \right]; \end{aligned} \quad (4.52)$$

Рассмотрим тонкую вязкоупругую анизотропную плиту, срединная плоскость которой занимает многосвязную область S , ограниченную контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$). Не нарушая общности, будем считать, что контуры L_l загружены распределенными изгибающими моментами так, что их главные моменты для каждого контура равны нулю или они жестко защемлены. Будем считать, что на бесконечности заданы моменты M_x^∞ , M_y^∞ , H_{xy}^∞ .

В данном случае комплексные потенциалы на основании (2.14) будут иметь

вид

$$W'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + W'_{k0}(z_k). \quad (4.53)$$

В ряды по малому параметру λ разложим также входящие в выражения комплексных потенциалов (4.53) постоянные Γ_k :

$$\Gamma_k = \sum_{j=0} \lambda^j \Gamma_{jk}. \quad (4.54)$$

Постоянные Γ_{jk} найдем на основе равенств (2.16), (2.17) подстановкой в их правых частях выражений (4.54). Выполнив эту подстановку и сравнив в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра λ , получим следующие последовательности систем 4-х уравнений с 4-мя неизвестными:

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{0k} = \left(-\frac{a_{11} M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{12}^0 M_y^\infty}{D_0}, \right. \\ \left. -\frac{a_{66} H_{xy}^\infty}{2D_0}, -\frac{a_{12}^0 M_x^\infty}{D_0} - \frac{a_{22} M_y^\infty}{D_0}, 0 \right), \\ 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_{1k} = \left(\frac{a_{11} M_y^\infty}{D_0}, 0, \frac{a_{11} M_x^\infty}{D_0}, 0 \right), \quad \Gamma_{jk} = 0 (j \geq 2). \quad (4.55)$$

Учитывая приведенные разложения, комплексные потенциалы представим в виде

$$W'_k(z_k) = \sum_{j=0} \lambda^j W'_{jk}(z_k), \quad (4.56)$$

где

$$W'_{jk}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + W'_{jk0}(z_k), \quad (4.57)$$

$W'_{jk0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , соответствующими контурам L_l при аффинных преобразованиях (2.13).

Комплексные потенциалы приближений $W'_{jk}(z_k)$ ($k = 1, 2$) должны

удовлетворять соответствующим граничным условиям. Подставив (4.56) в граничные условия (2.10) и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , получим следующую рекуррентную последовательность граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений:

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0ki\alpha} W'_{jk}(z_k) = f_{ji\alpha}(t) \quad (\alpha = 1, 2), \quad (4.58)$$

где для неподкрепленного контура L_l

$$\begin{aligned} g_{0ki1} &= \frac{p_{0k}}{\mu_k}, \quad g_{0ki2} = \frac{q_{0k}}{\mu_k}, \\ f_{ji1} &= -\delta_j^0 \left(\int_0^s m_i dy + c_i x \right) - (1 - \delta_j^0) 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{j-1} \frac{p_{j-nk}}{\mu_k} W'_{nk}(z_k), \\ f_{ji2} &= -\delta_j^0 \left(\int_0^s m_i dx - c_i y \right) - (1 - \delta_j^0) 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{j-1} q_{j-nk} W'_{nk}(z_k). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Если контур жестко подкреплен, то

$$g_{0ki1} = 1, \quad g_{0ki2} = \mu_k, \quad f_{ji\alpha} = \delta_j^0 f_{ji\alpha}. \quad (4.60)$$

После удовлетворения граничным условиям функции приближений $W'_{jk}(z_k)$ становятся известными и, заменив степени малого параметра λ^j временными операторами, можно найти комплексные потенциалы для плиты и их производные в любой момент времени, а по ним и основные характеристики изгиба

$$\begin{aligned} M_x &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J \lambda^j \sum_{n=0}^j p_{j-nk} W''_{nk}, \\ M_y &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J \lambda^j \sum_{n=0}^j q_{j-in} W''_{in}, \\ H_{xy} &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J r_k W''_{jk} \lambda^j, \end{aligned}$$

$$N_x = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \sum_{j=0}^J \lambda^j \sum_{n=0}^j s_{j-nk} W_{nk}'''(z_k),$$

$$N_y = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^J \lambda^j \sum_{n=0}^j s_{j-nk} W_{nk}'''(z_k),$$

где J – количество оставляемых приближений. При этом, чтобы для плиты найти степени малого параметра λ , нужно учитывать, что на основании (4.44)

$$\lambda = v_{12}^* - v_{12}^0,$$

т.е.

$$v_{12}^* = v_{12}^0 + \lambda. \quad (4.61)$$

Заменяв в (4.61) v_{12}^* его временным оператором, получим

$$\lambda = D_1 \cdot \mathcal{E}_\alpha^* \left(-\beta_1^* - \delta_1^* \right) + D_2 \cdot \mathcal{E}_\alpha^* \left(-\beta_2^* \right), \quad (4.62)$$

где

$$D_1 = \frac{\delta_1^*}{4} \left[\frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\delta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*} + 1 - 4v_{12}^0 \right],$$

$$D_2 = \frac{\delta_2^*}{4} \frac{E_1^0}{E_2^0} \frac{\beta_1^* - \beta_2^*}{\beta_1^* - \beta_2^* + \delta_1^*}; \quad (4.63)$$

E_i^0 – мгновенно упругие значения модулей Юнга E_i ; δ_i^* , β_i^* – реологические постоянные материала плиты, связанные с изменением E_i во времени. Возведя λ по формуле (4.62) в степень j , найдем

$$\begin{aligned} \lambda^j &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \mathcal{E}_\alpha^{*j-k} \left(-\beta_1^* - \delta_1^* \right) \cdot \mathcal{E}_\alpha^{*k} \left(-\beta_2^* \right) = \\ &= \sum_{k=0}^j C_j^k D_1^{j-k} D_2^k \frac{\mathcal{E}_\alpha^{*k} \left(-\beta_2^* \right) - \mathcal{E}_\alpha^{*j-k} \left(-\beta_1^* - \delta_1^* \right)}{-\beta_2^* + \beta_1^* + \delta_1^*}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Вычислив λ^j по формуле (4.64) и подставив его, в выражения (4.56), найдем функции $W_k'(z_k)$ и их производные, следовательно, и исследуемые величины в любой момент времени.

4.5. Решение задач вязкоупругости методом малого параметра

Рассмотрим бесконечную вязкоупругую плиту с эллиптическими отверстиями (рис. 4.3) L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l . Эллипсы могут располагаться произвольно относительно друг друга, в том числе касаться, пересекаться, образуя контуры сложной конфигурации. Используя методы конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана, для функций (4.57) получим выражения

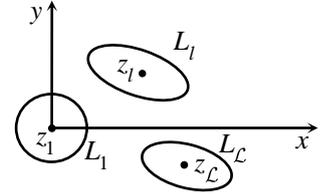


Рис. 4.3

$$W'_{j0k}(z_k) = \Gamma_{jk} z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kln} a_{jkl n}, \quad (4.65)$$

где

$$\varphi_{kln} = \zeta_{kl}^{-n}; \quad (4.66)$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из конформных отображений (3.8)

Для определения неизвестных постоянных $a_{jkl n}$ функций (4.65) удовлетворим граничным условиям (4.58). Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме. Продифференцировав их по дуге контура, получим

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0k i \alpha} \frac{dW'_{jk}(z_k)}{ds} = \frac{df_{ji \alpha}(t)}{ds} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (4.67)$$

Граничным условиям (4.67) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [15, 151]. Для этого на контурах плиты выберем набор точек $t_{lm}(x_{lm}, y_{lm})$ ($m = \overline{1, M_l}$) и, удовлетворив в них условиям (4.67), получим уравнения

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{0k i \alpha} \delta_k \varphi'_{kln}(t_{klm}) a_{jkl n} = \\ = \frac{df_{ji \alpha}(t_{lm})}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{0k i \alpha} \delta_k \Gamma_{jk} \quad (i = \overline{g, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_l}; \alpha = 1, 2), \end{aligned} \quad (4.68)$$

в которых

$$\delta_k = dz_k / ds, \quad \phi'_{kln} = -\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \quad t_{klm} = x_{lm} + \mu_k y_{lm}.$$

Систему (4.68) дополним уравнениями однозначности прогиба [51, 61, 62] для каждого отверстия

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 i a_{jkil} R_{ki} = 0 \quad (i = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (4.69)$$

Были проведены численные исследования значений величин для плиты из материалов алюминий (материал М1) [143] и эпоксид (М4) [68]. Коэффициенты деформаций и реологические постоянные для этих материалов приведены в табл. 4.2. Для изотропной плиты (материал М1), которая также рассматривалась как анизотропная, коэффициент деформации a_{22} вместо истинного $0,1408 \cdot 10^{-4}$ был принят равным $0,1458 \cdot 10^{-4}$, т. е. незначительно отличным от истинного. В противном случае из-за равенства

$a_{11} = a_{22}$ при решении задачи возникнет ситуация деления на ноль, т. к. корни характеристического уравнения (2.8) для изотропного материала будут двухкратными и равными i и $-i$. Аналогичные допущения по изотропному материалу сделаны относительно реологических постоянных β_1^* , β_2^* , δ_1^* и δ_2^* .

При проведении численных исследований количество членов N в рядах (4.65) и количество «коллокационных точек» M_l на

Таблица 4.2

Постоянные материала	Материал	
	М1	М4
$a_{11} \cdot 10^4, \text{МПа}^{-1}$	0,1408	0,4347
$a_{22} \cdot 10^4, \text{МПа}^{-1}$	0,1458	0,6250
$a_{12} \cdot 10^4, \text{МПа}^{-1}$	-0,0352	-0,0478
$a_{66} \cdot 10^4, \text{МПа}^{-1}$	0,3521	3,2467
α^*	0,5000	0,8460
$\beta_1^*, c^{\alpha-1}$	0,00050	0,1570
$\beta_2^*, c^{\alpha-1}$	0,00049	0,2745
$\delta_1^*, c^{\alpha-1}$	0,00615	0,0323
$\delta_2^*, c^{\alpha-1}$	0,00614	0,1295

контурах отверстий L_l увеличивались до тех пор, пока граничные условия на

контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. В описываемых ниже расчетах для такого удовлетворения граничным условиям в зависимости от расстояний между отверстиями и их количества в рядах для каждого из отверстий оставлялось от 5 до 20 членов и на каждом контуре выбиралось от 100 до 200 «коллокационных точек» t_{lm} . Количество приближений j по степеням малого параметра λ увеличивалось до тех пор, пока последующее приближение изменяло значения изгибающих моментов в предыдущем приближении более чем на 0,01%. Для удовлетворения этому условию в рассмотренных случаях необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 6 до 9. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для плиты с отверстиями, когда на бесконечности $M_y^\infty = m_y$, $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = 0$. Все результаты приведены с точностью до m_y / D_0 как множителя.

4.6. Исследование вязкоупругого состояния плит с отверстиями

Плита с одним отверстием. В табл. А.4.3 для плиты с одним круговым отверстием (рис. 4.2) радиуса a ($a_1 = b_1 = a$), контур которого не подкреплен, в зависимости от времени t приложения нагрузки приведены значения изгибающих моментов M_s от нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру отверстия, в точках $A(a; 0)$ и $B(0; a)$, а на рис. Б.4.4 изображены графики их изменения в точке A , где они достигают максимальных значений. Сплошные линии здесь и далее относятся к плите из материала М4, штриховые – к плите из материала М1.

Как видно из табл. А.4.3, рис. Б.4.4, с течением времени значения моментов в плите изменяются. При этом их большие изменения происходят лишь в первые 50 час. после приложения нагрузки, а через 200 час. они практически не изменяются, т.е. в плите устанавливается стационарное состояние. Как показывают расчеты, и в других случаях стационарное состояние устанавливается

примерно в такое же время. Поэтому в дальнейшем результаты расчетов будем приводить для двух случаев: когда $t = 0$ (начальный момент времени) и $t = 400$ (через 500 час. от начала процесса деформирования), когда, наверняка, уже установилось стационарное состояние.

На рис. Б.4.5 в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox изображены графики распределения моментов M_s около контура отверстия в начальном и стационарном состояниях. Сплошные и пунктирные линии рисунка здесь и далее соответствуют начальному и стационарному состояниям. Проведенные расчеты показывают, что получаемые при этом значения моментов практически совпадают с найденными при использовании принципа Вольтерра. В частности, для $t = 400$ час. результаты, полученные при использовании (4.40), (4.41) совпадают с приведенными в табл. А.4.1 до 4 и более цифр после запятой.

Как следует из данных рис. Б.4.5, при переходе в стационарное состояние значения изгибающих моментов вблизи отверстия претерпевают значительные изменения, причем наибольшие изменения претерпевают значения моментов в точках A и B , соответствующих углам $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$. Так, если плита изготовлена из материала М1 значения M_s в точке A увеличиваются на 4,6%, в точке B уменьшаются на 35%, в случае плиты из материала М4 значения M_s в точке A увеличиваются на 8,2%, а в точке B на 14,7%.

Заметим, что для изотропного материала полученные результаты совпадают с найденными ранее в работе [39].

Плита с двумя отверстиями. В табл. А.4.4 для плиты с двумя одинаковыми неподкрепленными круговыми отверстиями радиуса a ($a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = a$) (рис 4.4) даны значения изгибающих моментов M_s вблизи левого отверстия в зависимости от центрального угла θ для различных значений c/a , где c – расстояние между отверстиями. На рис. Б.4.6 изображены графики распределения этих моментов для некоторых

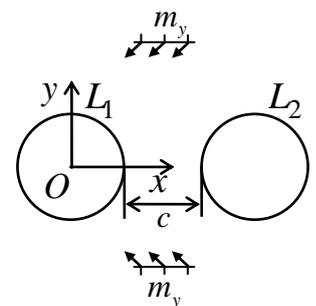


Рис. 4.4

значений c/a .

Из табл. А.4.4, рис. Б.4.6 и других полученных результатов видно, что с уменьшением расстояния между отверстиями значения изгибающих моментов в зоне между отверстиями значительно растут уже в упругой постановке, а при переходе в стационарное состояние они претерпевают большие изменения. Так, если плита изготовлена из материала М1, то при переходе в стационарное состояние значения моментов M_s в точке, соответствующей $\theta = \pi$, при $c/a = 0,5$ изменяется на 4,8%, а при $c/a = 0,1$ на 5,0%; эти же изменения при $\theta = 0$ составляют 3,9%, и 4,4% соответственно. Еще больше эти изменения получаются для плиты из материала М4: для $\theta = \pi$ при $c/a = 0,5$ увеличиваются на 8,2%, при $c/a = 0,1$ на 8,7%; для $\theta = 0$ при $c/a = 0,5$ увеличиваются на 5,0%, при $c/a = 0,1$ на 6,8%. Как следует из табл. А.4.4, если расстояние между отверстиями больше диаметра ($c/a > 2$), то влияние одного отверстия на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь.

4.7. Выводы по разделу 4

В данном разделе работы представлена основанная на методе малого параметра методика сведения задачи вязкоупругости к последовательности соответствующих задач изгиба плит, использующих комплексные потенциалы; приведены основные соотношения для комплексных потенциалов приближений, граничные условия для их определения, общие представления комплексных потенциалов приближений для многосвязных однородных плит. С учетом постоянства модуля объемной деформации получены представления упругих постоянных операторными выражениями, что позволяет применять непосредственно к решениям принцип Вольтерра.

Получено точное аналитическое решение задачи об изгибе бесконечной изотропной плиты с круговым отверстием, с использованием принципа Вольтерра

получены аналитические формулы для функций приближений, исследовано изменение напряженного состояния рассматриваемых сред во времени, получен ряд закономерностей.

Показано приложение метода малого параметра к решению задачи для бесконечной плиты с эллиптическими отверстиями. Описана методика определения комплексных потенциалов, использующая конформные отображения, разложения голоморфных функций в ряды Лорана, сведение определения неизвестных коэффициентов разложений в рядах к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений с получением их псевдорешений с помощью сингулярного разложения. Исследованиями установлено совпадение получаемых результатов с аналогичными результатами, полученными при использовании принципа Вольтерра, а также согласование результатов с аналогичными данными других авторов. Кроме того, проведены исследования по выявлению влияния физико-механических характеристик рассматриваемых сред на значения моментов, изменения их значений во времени.

Описаны результаты численных исследований по установлению сходимости получаемых решений (рядов по малому параметру), длительности времени перехода в стационарное состояние, относительного изменения НДС при переходе в стационарное состояние. Установлено, что для сходимости получаемых решений необходимо было оставлять степени малого параметра λ от 4 до 10. Напряженное состояние рассмотренных вязкоупругих плит со временем изменяется, порой значительно и этими изменениями нельзя пренебрегать. Через определенное время (в рассмотренных задачах около 200 час.) в плитах устанавливается стационарное состояние, но значительные изменения значений напряжений происходят в первые 50 час. При переходе в стационарное состояние значения моментов изменяются значительно, порой до 150–200%. При этом чем меньше реологические параметры материала, тем значительнее изменения значений моментов во времени. Установлено, что с приближением отверстий друг к другу вблизи зоны перемычки происходит резкое увеличение концентрации моментов как в начальном так и в стационарном состояниях. В случае жесткого

защемления контуров отверстий значения моментов при переходе в стационарное состояние значительно увеличиваются. Численными исследованиями выявлено влияние анизотропии материала плиты на значения напряжений и их изменение во времени.

Результаты проведенных в данном разделе исследований могут быть использованы различными исследователями для оценки получаемых тем или другим подходом результатов о вязкоупругом состоянии плит на достоверность.

По результатам, представленным в разделе 4, опубликованы работы [29, 58, 59].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных в работе исследований разработан метод решения задач классической теории изгиба плит, а также изгиба вязкоупругих плит, дано его приложение к решению различных классов задач для многосвязных однородных плит с отверстиями и трещинами, при различных механических воздействиях.

Основные научные результаты и выводы, полученные в работе, следующие.

1. Исследован и установлен общий вид комплексных потенциалов теории изгиба тонких многосвязных плит.

2. На задачи изгиба распространен численно-аналитический метод исследования НДС плит с отверстиями и трещинами в упругой постановке, основанный на использовании конформных отображений, разложении функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, применении обобщенного метода наименьших квадратов для удовлетворения граничным условиям на контурах для определения коэффициентов членов рядов.

3. Разработан метод определения НДС плит в любой момент времени по комплексным потенциалам приближений с использованием принципа Вольтерра и метода малого параметра.

4. Решен ряд новых задач изгиба плит с отверстиями и трещинами.

5. Составлены комплексы программ для численной реализации приведенных решений.

6. Численными исследованиями установлена сходимость решений задач (рядов по малому параметру) и устойчивость получаемых результатов, совпадение результатов решений для частных случаев известными в литературе, а также полученных в работе для множества задач, когда к точным решениям непосредственно применялся принцип Вольтерра.

7. Для всех решенных задач проведены подробные численные исследования НДС, с помощью которых установлены механические закономерности влияния на значения основных характеристик НДС времени, вида внешнего воздействия, физико-механических параметров материалов плит, отверстий и трещин, их

количества и взаимного расположения относительно друг друга. На изменения значений моментов существенно влияют расстояние между отверстиями, их количество, способ их подкрепления. Сближений отверстий друг с другом и увеличение их количества приводит к увеличению значений моментов. Установлено, что с течением времени НДС вязкоупругих тел существенно изменяется, в некоторых случаях даже до 200%, причем существенные изменения НДС происходят в первые десятки часов после загрузки. Поэтому при исследовании НДС таких тел нельзя ограничиться решением задачи классической теории изгиба с пренебрежением реологических свойств материалов, а нужно решать задачу вязкоупругости.

Результаты, представленных в диссертационной работе исследований, имеют как теоретический, так и практический интерес. Предложенные методики могут использоваться для решения разнообразных инженерных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамов А. А. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов, В.П. Матвеевко, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. – 411 с.
2. Аксентян О. К. Напряженное состояние плиты малой толщины / О. К. Аксентян, И. И. Ворович // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, вып. 6. – С. 1057–1074.
3. Аксентян О. К. Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории Кирхгофа / О. К. Аксентян, И. И. Ворович // Прикладная математика и механика – 1964. – № 3. - С. 589-596.
4. Аксентян О. К. Построение уточненных прикладных теорий для плиты на основе уравнений теории упругости / О. К. Аксентян, Ю. А. Устинов // Прикладная математика и механика – 1972. – Т. 36, № 2. - С. 272-281.
5. Алтухов Е. В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин: Монография / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
6. Аникина Т.А. Идентификация неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях / Т. А. Аникина, И. В. Богачев, А. О. Ватульян // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17, № 1. – С. 107-115.
7. Анин Б. Д. Асимптотическое разложение экспоненциальной функции дробного порядка / Б.Д. Анин // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, вып. 4. – С. 796–798.
8. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н.Х. Арутюнян. – М.: Гостехиздат, 1952. – 323 с.
9. Богачев И. В. Идентификация вязкоупругих характеристик неоднородного по толщине слоя / И. В. Богачев, А. О. Ватульян // Математический форум (Итоги науки. Юг России). – 2011. – Т. 5. – С. 185-189.
10. Бронский А. П. Явление последействия в твердом теле / А.П. Бронский //

Прикладная математика и механика. – 1941. – Т. 5, вып. 1. – С. 31–56.

11. Ван Фо Фы Г. А. О концентрации напряжений в стеклопластиках / Г.А. Ван Фо Фы // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1965. – Вып. 1. – С. 17–23.

12. Ватульян А. О. Об определении размеров дефекта в составном упругом теле / А. О. Ватульян // Дефектоскопия. – 2004. – № 5. – С. 15-23.

13. Ватульян А. О. О реконструкции плоских трещин в анизотропном упругом теле / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. № 3. – С. 533-542.

14. Власов В. З. Избранные труды. Том I / В. З. Власов. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1962. – 428 с.

15. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

16. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – М.: Гостехиздат, 1956. – 421 с.

17. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем/ А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

18. Ворович И. И. Качественное исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойной плиты / И. И. Ворович, И. Г. Кадомцев // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 870–876.

19. Ворович И. И. К теории неоднородных по толщине плит / И. И. Ворович, И. Г. Кадомцев, Ю. А. Устинов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – Вып. 3. – С. 119–130.

20. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / И. И. Ворович // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикладной механике. Механика твердого тела. – М.: Наука, 1966. – С. 116–136.

21. Ворович И. И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек / И. И. Ворович // Материалы I Всесоюз. шк. по теории и численным расчетам оболочек и пластин. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та,

1975. – С. 51–149.

22. Ворович И. И. О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты / И. И. Ворович, О. С. Малкина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – Вып. 5. – С. 92–102.

23. Гузь А. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред (Обзор) / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, №9. – С. 3–29.

24. Гузь А. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – К.: Вища школа, 1982. – 352 с.

25. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – М.: Наука, 1977. – 261 с.

26. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций / М.М. Джрбашян // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1955. – Т. 19, № 2. – С. 719-722.

27. Ержанов Ж. С. Теория ползучести горных пород и ее приложения / Ж.С. Ержанов. – Алмата: Наука, 1964. – 175 с.

28. Ермолаев Б. И. Приближенный метод определения напряжений при изгибе анизотропной пластинки с отверстием / Б. П. Ермолаев // Изв. Высш. Учебн. Заведений. Стр-во и архитект. – 1960. – №1. – С. 143-147.

29. Занько А. И. Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит / А.И. Занько, С.А. Калоеров, А.А. Кошкин // Современные проблемы механики сплошной среды: Тез. док. XVIII междунар. конф., Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 79.

30. Иванов Г. М. Действие сосредоточенных сил при изгибе анизотропной двусвязной плиты / Г. М. Иванов // Теоретическая и прикладная механика (Харьков). – 1970. – Вып.1. – С.17-21

31. Иванов Г. М. К решению первой основной задачи плоской теории вязкоупругости изотропного многосвязного тела / Г.М. Иванов, Л.П. Борозенец // Теорет. и прикладная механика.– 1974. – Вып. 5. – С. 31–38.

32. Иванов Г. М. Напряженное состояние вязкоупругой плиты с двумя

круговыми отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами / Г.М. Иванов, Л.Н. Шкодина // *Механика твердого тела.* – 1975. – Вып. 7. – С. 161–165.

33. Иванов Г. М. Напряженное состояние изотропной эллиптической плиты с эллиптическим упругим ядром / Г. М. Иванов, Т. В. Смоляга // *Механика твердого тела.* – 1973. – Вып. 5. – С. 54–68.

34. Иванов Г. М. Одна задача изгиба изотропной эллиптической плиты с эллиптическим отверстием / Г. М. Иванов // *Механика твердого тела.* – 1970. – Вып. 2. – С. 21–40.

35. Иванов Г. М. Чистый изгиб анизотропной эллиптической плиты с отверстием / Г. М. Иванов, В. В. Меглинский // *Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ).* – 1969. – Вып. 4. – С. 111–115.

36. Ильюшин А. А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин // *Механика полимеров.* – 1968. – № 2. – С. 210–221.

37. Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.

38. Калоеров С. А. Вязкоупругий изгиб изотропной плиты с упругими включениями / С.А. Калоеров, Ю.С. Сенченко // *Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. VII всерос. науч. конф. с междунар. участием, 3–6 июня 2010г. Самара.* – Ч.1. – С.165–166.

39. Калоеров С. А. Вязкоупругий изгиб многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // *Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ. науки.* – 2007. – Вип.2. – С.58–65.

40. Калоеров С. А. Вязкоупругий изгиб многосвязных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // *Зб. прац. Міжнар. наук. конф. Обчисл. мат. і мат. проблеми механіки. Львів, 31.08.09–4.09.09.* – Львів. – 2009. – С.126–127.

41. Калоеров С. А. Вязкоупругое состояние пластинки с конечным числом упругих включений / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // *Актуальные проблемы*

механики дефор. твердого тела: Материалы IV Междунар. науч. конф., Донецк-Мелекино, 12–14 июня.– 2006.– Донецк.– 2006.– С.67–69.

42. Калоеров С. А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела / С. А. Калоеров, Горянская Е. С. // Концентрация напряжений.– К.: А. С. К., 1998.– С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., т. 7).

43. Калоеров С. А. Задача вязкоупругости для многосвязных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Сенченко // Вісн. Дніпр. нац. ун-та.– 2011.– Вип.15.– Т.2, №5.– С.91–102.

44. Калоеров С. А. Задача о вязкоупругом изгибе изотропной плиты с упругими включениями / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // Теорет. и прикл. механика.– 2009.– Вып.45.– С.169–177.

45. Калоеров С. А. Задача электромагнитовязкоупругости для многосвязных пластинок / С.А. Калоеров, Самодуров А. А. // Прикладная механика.– 2015.– Т. 51. № 6.– С. 23–41.

46. Калоеров С. А. Изгиб многосвязной анизотропной плиты сложной конфигурации / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Матер. VI Междунар. науч. конф., Донецк-Мелекино, 11–14 июня 2013 г. – Донецк: Юго-Восток. – 2013. – Т. 1. – С. 158–162.

47. Калоеров С. А. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 456–464.

48. Калоеров С. А. Исследование вязкоупругого состояния кольцевой плиты при изгибе / С.А. Калоеров, А.И. Баева, Ю.С. Шипоша // Матер. наук. конф. проф.-виклад. складу, наук. співроб. і асп. ДонНУ за підсумками наук. дослід. роб. за період 2007–2008рр. Т.1. Природн. науки.– Донецьк, 2009.– С.29–30.

49. Калоеров С. А. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки.– 2005.– Вип. 1,

ч. 1.– С.71–78.

50. Калоеров С. А. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Прикладная механика.– 2007.– Т.43, №2.– С.88–98.

51. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С. А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика.– 2012. – Вып. 4 (50).– С. 113–132.

52. Калоеров С. А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит / С. А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика.– 2013.– № 7 (53).– С. 83–100.

53. Калоеров С. А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013.–440 с.

54. Калоеров С. А. Определение вязкоупругого состояния многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша, А.И. Баева // Теорет. и прикл. механика.– 2008.– Вып.44.– С.80–95.

55. Калоеров С. А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих анизотропных сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика.– 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

56. Калоеров С. А. Приближенный метод решения задач об изгибе анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Донецкие чтения 2016: Матер. I Междунар. науч. конф., Донецк, 16-18 мая 2016 г. – Т. 1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета.– 2016.– С.30–31.

57. Калоеров С. А. Результаты новых исследований по изгибу многосвязной анизотропной плиты / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природ. науки.– 2014.– Вып. 1.– С. 48–56.

58. Калоеров С. А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Прикладная

механика и техническая физика. – 2017.– Т. , № 3.– С. 103–116.

59. Калоеров С. А. Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XVIII междунар. конф., Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 1. – С. 349–353.

60. Калоеров С. А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, Паршикова О.А.// Теорет. и прикладная механика.– 2011.– №2(48).– С.51–70.

61. Калоеров С. А. Решение задач об изгибе многосвязных плит под действием распределенных по основанию усилий / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки.– 2015.– Вып. 2.– С. 94–104.

62. Калоеров С. А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С. А. Калоеров, А. И. Занько, А. А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 55. – С. 99–138.

63. Калоеров С. А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, Добряк Д.А. // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ. науки.– 2006.– Вип.2.– С.77-88.

64. Калоеров С. А. Циклическая задача о вязкоупругом изгибе кусочно-однородной плиты / С.А. Калоеров, Ю.С. Сенченко // Теорет. и прикладная механика.– 2010.– №1(47).– С.35–44.

65. Калоеров С. А. Циклическая задача о вязкоупругом изгибе плиты с отверстиями / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ.науки.– 2009.– Вип.1.– С.100–110.

66. Калоеров С. А. Эффективный метод определения напряженного состояния пластинки с криволинейными отверстиями / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Прикладная механика. – 2017.– Т. 53, № 1.– С. 108–120.

67. Каминский А. А. Исследование деформирования анизотропных вязкоупругих тел / А.А. Каминский // Прикладная механика. – 2000. – Т 36,

№ 11. – С. 39–63.

68. Каминский А. А. Механика разрушения вязкоупругих тел.– К.: Наук. думка, 1980.– 159 с.

69. Каминский А. А. Об одном методе решения задач линейной теории вязкоупругости / А.А. Каминский, Д.А. Гаврилов, С.А. Кекух // Прикладная механика. – 1987. – № 8. – С. 55-65.

70. Кильчевский Н. А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач оболочек / Н. А.Кильчевский // Теория пластин и оболочек: Тр. II Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – Киев, 1962. – С. 58–69.

71. Колтунов М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации / М.А. Колтунов // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 483–497.

72. Колтунов М. А. Метод аппроксимаций Ильюшина в применении к средам с нестабильными свойствами / М.А. Колтунов, И.Е. Трояновский // Механика полимеров. – 1970. – № 3. – С. 411–419.

73. Колтунов М. А. О расчете тонких пологих ортотропных оболочек с линейной наследственностью / М.А. Колтунов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика. – 1964. – № 5. – С. 112–118.

74. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация / М.А. Колтунов. – М.: Высш. шк., 1976. – 277 с.

75. Копнина В. И. Изгиб анизотропной эллиптической плиты / В. И. Копнина, Е. С.Губина // Сб. науч. тр. Механика. Математика. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2009. – С. 114-117.

76. Копнина В. И. Изгиб анизотропной эллиптической плиты нормальной нагрузкой, приложенной к ее краю / В. И. Копнина, Т.Н.Володина// Сб. науч. тр. Механика. Математика. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2004. – С. 195-198.

77. Копнина В. И. Изгиб изотропной плиты, ослабленной квадратным отверстием / В. И. Копнина, М.В.Овчинникова // Сб. науч. тр. Механика.

Математика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – С. 155-158.

78. Копнина В. И. Изгиб круглой кусочно-однородной составной плиты под действием нагрузки, равномерно распределенной по внутренней круговой плите / В. И. Копнина, Демина М.В. // Сб. науч. тр. Механика. Математика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. – С. 190-192.

79. Копнина В. И. Изгиб круглой плиты под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по кругу меньшего радиуса / В. И. Копнина, Демина М.В. // Сб. науч. тр. Механика. Математика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – С. 176-179.

80. Копнина В. И. Изгиб кусочно-однородной эллиптической плиты / В. И. Копнина // Сб. науч. тр. Механика. Математика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. – С. 168-170.

81. Копнина В. И. Изгиб составной анизотропной плиты нормальной нагрузкой / В. И. Копнина, Крылова Е.Ю. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. № 1. – С. 54-57.

82. Копнина В. И. Изгиб составной анизотропной плиты поперечной нагрузкой / В. И. Копнина, В. В Меглинский // Механика деформируемых сред. – 1976. – Вып. 4. – С. 54–63.

83. Копнина В. И. Изгиб эллиптической плиты с отверстием / В. И. Копнина, Щербаков А.С. // Сб. науч. тр. Механика. Математика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – С. 179-182.

84. Копнина В. И. Исследование напряженно-деформированного состояния эллиптической анизотропной плиты с отверстием / В. И. Копнина, В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1971. – Вып.6. – С. 67–73.

85. Копнина В. И. Поперечный изгиб составной анизотропной плиты с отверстием / В. И. Копнина // Механика деформируемых сред. – 1974. – Вып.2. – С. 74–83.

86. Копнина В. И. Упругое равновесие тонкой анизотропной плиты с двумя отверстиями, подкрепленными анизотропными кольцами / В. И. Копнина, В. В. Меглинский // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, вып. 5. – С. 24–33.

87. Копнина В. И. Чистый изгиб эллиптической анизотропной плиты с анизотропным эллиптическим кольцом / В. И. Копнина // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1971. – Вып.6. – С. 74–83.

88. Космодамианский А. С. Изгиб конечной анизотропной пластинки с криволинейным отверстием / А. С. Космодамианский, В. А. Митраков // Прикладная механика.– 1976. – Т. 12, № 12. – С. 96 – 99.

89. Космодамианский А. С. Изгиб круглой плиты с двумя круговыми отверстиями / А. С. Космодамианский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1965. – Вып. 2. – С. 54-59.

90. Космодамианский А. С. Изгиб тонких многосвязных плит / А. С. Космодамианский, Г. М. Иванов.– Донецк, 1973. – 264 с.

91. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропной пластинки, ослабленной двумя криволинейными отверстиями / А. С. Космодамианский, Н. М. Нескороев // Изв АН АрмССР Механика.–1970.– Т. 23, № 5. – С. 59 – 66.

92. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями.– К., Донецк: Вища шк., 1976.– 200 с.

93. Космодамианский А. С. Напряженное состояние пластинок с отверстиями в трехмерной постановке / А. С. Космодамианский, В. Н. Ложкин, Ю. В. Мысовский, В. А. Шалдырван. – Донецк.: Изд-во Донецк. гос. ун-та, 1970. – 255 с.

94. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами.– К.: Вища шк., 1975.– 227 с.

95. Космодамианский А. С. Пространственные задачи теории упругости для многосвязных пластин: Обзор / А. С. Космодамианский // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, №12. – С. 3–21.

96. Космодамианский А. С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А. С. Космодамианский, С. А. Калоеров.– К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

97. Космодамианский А. С. Толстые многосвязные пластины / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.

98. Кравченко С. Н. Изгиб круглой изотропной плиты с двумя круговыми отверстиями / С. Н. Кравченко, В.В.Меглинский, В.П. Фирюлина // Механика деформируемых сред. – 1977. – № 3. – С. 70-76.

99. Краснощёков А. А. Идентификация трещиноподобных дефектов в упругих элементах конструкций на основе эволюционных алгоритмов. / А. А. Краснощёков, Б. В. Соболев, А. Н. Соловьёв, А. В. Черпаков // Дефектоскопия. – 2011. – № 6. – С.67-78.

100. Краусс Т. Ф. Изгиб круговой пластинки с кольцом отверстий / Т. Ф. Краусс // Труды американского общества инженеров-механиков. Прикладная механика. – 1962. – Т. 29, №3 – С. 47–53.

101. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен.– М.: Мир, 1974.– 338 с.

102. Левин В. М. Напряженное состояние армированной упруговязкопластической пластины при сложном нагружении / В.М. Левин, В.С. Гудрамович, В.А. Митраков, И.Г. Гевлич, Ю.В. Грицук // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 126-132.

103. Левин В. М. Полудискретная математическая модель деформирования неупругой складчатой системы / В.М. Левин // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2004. – Вип. 1, ч. 1. – С. 171-178.

104. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.

105. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит/ С. Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. Нов. сер. – 1938. – Т. 2, Вып. 2. – С. 181–210.

106.Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977.– 416 с.

107.Лихачев В. А. Изгиб упругой пластинки в виде эллиптического кольца / В. А. Лихачев // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т. XIX, вып.2. – С. 255–256.

108.Ложкин В. Н. Изгиб плиты с двумя неравными круговыми отверстиями в трехмерной постановке / В. Н. Ложкин, Г. Ю. Рудакова // Изв. АН СССР Механика твердого тела. – 1975. – №1. – С. 147–150.

109.Лурье А. И. К задаче о равновесии пластины с опертыми краями / А. И. Лурье // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. – 1928. – Т. 31. – С. 305–320.

110.Меглинский В. В. Действие сосредоточенной силы, приложенной в центре анизотропной эллиптической плиты с двумя отверстиями / В. В. Меглинский // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, Вып. 1. – С. 82–87.

111.Меглинский В. В. Изгиб анизотропной эллиптической плиты, ослабленной эллиптическими отверстиями / В. В. Меглинский // Прикладная механика. – 1965. – т. I, в. 4. – С. 143-147.

112. Меглинский В. В. Изгиб анизотропной эллиптической плиты с эллиптическим отверстием, подкрепленным жестким кольцом / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1964. – Вып. 1 – С. 98–101.

113.Меглинский В. В. Изгиб круглой плиты с двумя круговыми шайбами / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1970. – Вып.5. – С. 95–101.

114.Меглинский В. В. Изгиб эллиптической анизотропной плиты с двумя эллиптическими отверстиями / В. В. Меглинский // Прикладная механика. – 1966. – т. II, в. 6. – С. 19–27.

115.Меглинский В. В. Изгиб эллиптической анизотропной плиты с эллиптическим отверстием / В. В. Меглинский // Изв. АН Арм. СССР. – 1966. – Т. XIX, № 3. – С. 14–25.

116. Меглинский В. В. Концентрация напряжений около жестких включений в анизотропной плите / В. В. Меглинский // Механика деформируемых сред. – 1971. – Вып. 1. – С. 35–42.

117. Меглинский В. В. Концентрация напряжений около эллиптических упругих включений в тонкой анизотропной плите / В. В. Меглинский // Изв. АН Арм. ССРСР. МТТ. – 1970. – № 6. – С. 97–103.

118. Меглинский В. В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.

119. Меглинский В. В. О напряженном состоянии тонкой анизотропной эллиптической плиты с двумя эллиптическими отверстиями / В. В. Меглинский // Прикладная механика. – 1967. – т. III, в. 8. – С. 19–27.

120. Меглинский В. В. Упругое равновесие круглой плиты с круговыми отверстиями / В. В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1969. – Вып. 4. – С. 77–84.

121. Моисеенко А. А. Изгиб изотропной круглой плиты с упругим ядром / А. А. Моисеенко // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1970. – Вып. 12. – С. 119–133.

122. Моисеенко А. А. Изгиб плиты с эксцентричным ядром под действием нагрузки, распределенной по ее поверхности / А. А. Моисеенко, Л. Н. Шкодина // Механика твердого тела. – К.: Наук. думка, 1973. – Вып. 5. – С. 113–117.

123. Моисеенко А. А. Напряженно-деформированное состояние изотропной круглой плиты с криволинейным упругим ядром / А. А. Моисеенко // Теорет. и прикладная механика. – 1971. – Вып. 2. – С. 29–39.

124. Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе / В. В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 328 с.

125. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – 5-е изд. перераб. и доп. / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

126. Недорезов П. Ф. Об изгибе ортотропной пластинки с отверстием, близким к квадратному / П. Ф. Недорезов // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1967. – Вып. 3. – С. 87–96.

127. Немиш Ю. Н. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Трехмерная теория (Обзор) / Ю. Н. Немиш, И. Ю. Хома // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, №11. – С. 3–27.

128. Немиш Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (Обзор) / Ю. Н. Немиш // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, №2. – С. 3–38.

129. Победря Б. Е. О зависимости решения задачи теории упругости от упругих постоянных / Б.Е. Победря // Проблемы прочности. – 1972. – Вып. 3. – С. 103-115.

130. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести / Ю.Н. Работнов // Вестник, МГУ. – 1948. – № 10. – С. 81–91.

131. Работнов Ю. Н. О разрушении вследствие ползучести / Ю.Н. Работнов // ПМТФ. – 1963. – № 2. – С. 113–123.

132. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

133. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю.Н. Работнов // Прикладная математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53–62.

134. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.

135. Ракивненко В. Н. Изгиб круглой пластины с двумя квадратными отверстиями / В. Н. Ракивненко // Динамика и прочность машин (Харьков). –

1966. – Вып. 3. – С. 129–142.

136.Рвачев В. Л. Метод R-функций в задачах упругости и пластичности / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекон. – К.: Наук. думка, 1990. – 216 с.

137.Ржаницын А. Р. Теория ползучести / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.

138.Розовский М. И. Некоторые свойства специальных операторов, применяемых в теории ползучести / М.И. Розовский // Прикладная механика и ММ. – 1959. – Вып. 5.– С. 978–980.

139.Розовский М. И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки / М.И. Розовский // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1959. – № 5. – С. 672–675.

140.Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-наследственных сред / М.И. Розовский // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – Вып. 2. – С. 30–36.

141.Розовский М. И. Полусимволический способ решения некоторых задач теории ползучести / М.И. Розовский // Изв. АН Арм. СССР. – 1956. – Т. 9, № 5. – С. 654–657.

142.Савин Г. Н. О применимости принципа Вольтерра / Г.Н. Савин, Я.Я. Руцицкий. В кн. Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение, 1957. – С. 431–435.

143.Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

144.Слонимский Г. Л. О законах деформации реальных материалов / Г.Л. Слонимский // Журн. техн. физики. – 1939. – Т 9, № 20. – С. 1791–1807.

145.Соловьев А. Н. Идентификация повреждений в упругих структурах: подходы, методы, анализ / А. Н. Соловьев, В. А. Акопян, Е. В. Рожков, С. Н. Шевцов, А.В. Черпаков. – Ростов-на-Дону. Издательство ЮФУ, 2015. – 74 с.

146.Соловьев А. Н. Определение упругих свойств армированных

композиционных материалов на основе конечно-элементного моделирования / А. Н. Соловьев, Е.Н.Зиборов, С.Н.Шевцов // Наука Юга России. – 2016. – Т. 12. № 2. – С. 3-10.

147. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов / С. П. Тимошенко. Под ред. А. Н. Митинского; пер. с англ. В. И. Контовта. – М.: Гостехиздат, 1957. – 536 с.

148. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко; пер. с англ. Н. А. Шошина. – М.: ОНТИ, 1937. – 451 с.

149. Устинов Ю. А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода в теории плит и оболочек / Ю. А. Устинов, М. А. Шленев // Расчет оболочек и пластин. – Ростов н/Д, 1976. – С. 3–27.

150. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров / Дж. Ферри. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 536 с.

151. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1969. – 280 с.

152. Фридман М. М. Изгиб тонкой изотропной прямоугольной плиты с впаянной круглой изотропной шайбой из другого материала / М. М. Фридман // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14, Вып. 4. – С. 429–432.

153. Хрестенко В. И. Изгиб вязкоупругой кольцевой плиты на упругом основании / В.И. Хрестенко // Теорет. и прикладная механика. – 1983. – Вып. 14. – С. 42–52.

154. Шкодина Л. Н. Растяжение вязкоупругой изотропной пластины с жестко подкрепленными отверстиями / Л.Н. Шкодина // Теорет. и прикладная механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 45–49.

155. Шкодина Л. Н. Растяжение вязкоупругой пластины с эллиптическими отверстиями / Л.Н. Шкодина, Н.В. Кухта // Теорет. и прикладная механика. – 1980. – Вып. 13. – С. 65–68.

156. Шкодина Л. Н. Растяжение вязкоупругой пластины с эллиптическими отверстиями, подкрепленными упругими ядрами / Л.Н. Шкодина // Теорет. и

прикладная механика. – 1986. – Вып. 17. – С. 63–67.

157. Шленев М. А. Асимптотический метод решения задачи об изгибе толстой трансверсально-изотропной плиты / М. А. Шленев // Толстые плиты и оболочки. – 1974. – С. 119-138.

158. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума, или, Решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле / Л. Эйлер. Пер. с лат. Я. М. Боровского. – М., Л.: Гостехиздат, 1934. – 600 с. **Тоже:** Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti / L. Euler. – Paris: Lausannæ et Genevæ. Apud Marcum-Michaellem Bousquet & Socios, 1744. – 322 p.

159. Allam M. N. M. Stress concentrations in a viscoelastic composite plate weakened by a triangular hole / M.N.M. Allam, A.M. Zenkour, H.F. El-Mekawy // Composite Structures. – 2007. – Vol. 79, № 1. – P. 1–11.

160. Bernoulli J. Jr. Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies etlibers / J. Jr. Bernoulli // Nova Acta Acad Petropolit. – 1789. – Vol. 5. – P. 197–219.

161. Boltzmann L. Zur theorie der elastischen nachwirkung / L. Boltzmann // Annalen der Physik and Chemie. – 1876. – Bd. 7. – P. 624–654.

162. Boussinesque M. J. Compliments a une etude sur la theorie de lequilibre et du mouvement des solides elastiques // J. Math, pures et appl., ser. 3, vol. 5, 1879. – P. 163-194 and 329-344.

163. Chauhan M. M. Stresses in finite anisotropic plate weakened by rectangular hole / M. M. Chauhan , D. S. Sharma // Int. J. Mech. Sci. – 2015. – Vol. 101–102. – P. 272–279.

164. Clebsch A. Theorie der Elasticitaet der fester Koerper / A. Clebsch. – Leipzig, 1862. – 424 p.

165. Euler L. De motu vibratorio tympanorum / L. Euler // Novi Commentari Acad. Petropolit. – 1766. – Vol. 10. – P. 243–260.

166. Euler L. Tentamen de sono campanarum / L. Euler // Novi Commentari Acad. Petropolit. – 1766. – Vol. 10. – P. 261–281.

167. Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie / A. Föppl. – Leipzig: B. G. Teubner, 1907. – 391 p.

168. Fry C. G. Asymptotic developments of certain integral functions / C.G. Fry, H.K. Huches // Duke Mathem. Journ.. – 1942. – Vol. 9. – P. 791–802.

169. Gehring F. D. De acquationibus differentialibus quibuacquilibrium et modus laminae crystallinae definiuntur. Ph.D. dissertation / F. D. Gehring. – Berlin, 1860. – 150 p.

170. Germain S. Recherches sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques ets / S. Germain. – Paris, 1826. – 21 p.

171. Germain S. Recherches sur la theorie des suifaces elastiques / S. Germain. – Paris, 1821. – 96 p.

172. Huber M. T. Einige Anwendungen der Biegung Theorie orthotroper Platten // Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech. – 1926. – Bd. 6. – P. 24–54.

173. Huber M. T. Probleme der statik technisch wichtiger orthotroper platten: gastvorlesungen in der eidgenössischen technischen hochschule zürich / M. T. Huber. – Warschau, 1929. – 165 p.

174. Huber M. T. Teoria plyt prostokatnie-róznokierunkowych. – Lwow, 1921. – 235 p.

175. Karman Th. Fesigkeitsprobleme in Maschinenbau / Th. Karman // Encycl der Math Wiss. – 1910. – Vol. 4. – P. 348–351.

176. Kirchhoff G. R. Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique / G. R. Kirchhoff // Comptes Rendus Mathématique (Paris). – 1848. – Vol. XXVII. – P. 394–397.

177. Kirchhoff G. R. Über das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem schein / G. R. Kirchhoff // J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51–88.

178. Kirchhoff G. R. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik /

G. Kirchhoff. – Leipzig: B. G. Teubner, 1876. – 489 p.

179. Maxwell J. Cl. On the dynamical theory of gases / J. Cl. Maxwell // Phil. Trans. – 1867. – Vol. 157. – P. 52–55.

180. Navier L. Extrait des recherches sur la flexion des plans élastiques / L. Navier // Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomatique de Paris. – 1823. – P. 92–102.

181. Navier L. Remarques sur l'article de M. Poisson / L. Navier // Annales de Chimie et de Physique. – 1828. – Vol. 39. – P. 145–151.

182. Ohasi Y. Bending of a thin elliptic plate of an orthotropic material supported at its periphery and submitted to a uniform lateral load / Y Ohasi // Mem. Fac. Engng. Nagoa Univ. – № 1. – 1957. – P. 23–34.

183. Okubo H. Bending of a thin circular plate of an aeolotropic material under uniform lateral load (supported edge) / H. Okubo // Journal Appl. Phys. – Vol. 20, № 12. – 1949. – P. 45–53.

184. Poisson S. D. Mémoire sur les surface élastiques / S. D. Poisson // Memoire de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institute (Paris). – 1814. – P. 167–226.

185. Suchar M. General form of the surface of deflection of a thin anisotropic plate in a multi-connected region / M. Suchar // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn. – Vol. 8, № 2. – 1960. – P. 33–40.

186. Suchar M. General form of the surface of deflection of a thin anisotropic plate in a multi-connected region / M. Suchar // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn. Vol. 8, № 69. – 1960. – P. 51–58.

187. Tamate O. Transverse flexure of a semi-infinite thin plate containing an infinite row of circular holes / O. Tamate // Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs. – Vol. 8, № 2. – 1959. – P. 98–101.

188. Voigt V. Bestimmung der constanten der elasticitat und untersuchung der reibung fur einige metalle / V. Voigt // Abhandlungen der gesellschaft der wissenschaften zu Gottingen. – Bd. 38. – P. 1–87.

189. Volterra V. Sulle equazioni integrodifferenziali della theoria dell'elasticita / V. Volterra // Atti della reale accademia dei Lincei. – 1909. – Vol. 18, № 2. – P. 151–167.

190. Wiman A. Uber den fundamentalsatz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$ / A. Wiman // Acta Math. – 1905. – Vol. 29. – P. 191–201.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.3.1.

Значения моментов M_s в точках контуров кругового кольца при его изгибе равномерно распределенными по внешнему контуру моментами m_0 (рис 3.5)

Материал	θ , рад.	a_1/a_0					
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		Контур L_0			Контур L_1		
М1	0	1,020	1,666	9,526	2,021	2,667	10,527
М2	0	1,000	1,102	7,417	3,333	4,361	12,365
	$\pi/12$	1,002	1,206	6,797	2,815	3,755	11,769
	$\pi/6$	1,009	1,508	5,508	1,777	2,526	10,511
	$\pi/4$	1,024	1,819	5,008	1,385	2,046	10,015
	$\pi/3$	1,033	1,850	5,272	1,623	2,311	10,261
	$5\pi/12$	1,017	1,622	5,562	1,899	2,620	10,545
	$\pi/2$	1,006	1,465	5,664	2,001	2,732	10,648
М3	0	1,006	1,263	7,512	4,578	5,649	13,620
	$\pi/12$	1,007	1,285	8,342	3,144	3,952	11,718
	$\pi/6$	1,008	1,374	9,599	1,728	2,324	10,142
	$\pi/4$	1,011	1,599	9,973	1,414	2,025	9,972
	$\pi/3$	1,021	1,841	9,944	1,406	2,074	10,049
	$5\pi/12$	1,033	1,874	9,887	1,434	2,139	10,114
	$\pi/2$	1,030	1,858	9,866	1,446	2,162	10,137

Значения моментов M_s в точках контуров кругового диска с центральным эллиптическим отверстием при его изгибе равномерно распределенными по внешнему контуру моментами m_0 в зависимости от отношений b_1/a_1 и a_1/a_0 (рис. 3.6)

Ма те риал	$\frac{a_1}{a_0}$	θ , рад.	b_1/a_1										k_{IM}^{\pm}
			0,9	0,1	0,01	0,001	0,9	0,5	0,1	0,01	0,001		
			Контур L_0					Контур L_1					
М1	0,1	0	1,019	1,012	1,011	1,010	2,105	2,790	8,971	78,54	774,20	0,317	
		$\pi/2$	1,017	0,999	0,998	0,997	1,940	1,622	1,309	1,24	1,23		
	0,5	0	1,652	1,407	1,364	1,360	2,742	3,428	10,361	89,52	881,29	0,808	
		$\pi/2$	1,520	0,981	0,956	0,953	2,441	1,781	1,329	1,24	1,24		
	0,9	0	9,498	7,195	6,156	6,044	10,577	11,167	22,405	170,91	1661,90	2,043	
		$\pi/2$	4,838	0,987	0,924	0,919	5,769	2,216	1,370	1,25	1,24		
М2	0,1	0	1,000	1,004	1,004	1,004	3,482	4,684	15,554	137,90	1361,42	0,319	
		$\pi/2$	1,004	0,994	0,993	0,993	1,926	1,628	1,336	1,27	1,27		
	0,5	0	1,117	1,193	1,192	1,191	4,515	5,852	18,840	166,34	1641,59	0,860	
		$\pi/2$	1,332	0,887	0,870	0,868	2,504	1,837	1,382	1,30	1,29		
	0,9	0	7,754	5,238	4,911	4,879	12,536	14,337	37,789	317,98	3123,60	2,195	
		$\pi/2$	4,678	0,838	0,781	0,777	5,882	2,308	1,448	1,33	1,32		
М3	0,1	0	1,006	1,005	1,004	1,004	4,766	6,279	19,953	173,86	1712,95	0,320	
		$\pi/2$	1,025	0,998	0,995	0,995	1,408	1,259	1,113	1,08	1,08		
	0,5	0	1,262	1,207	1,195	1,194	5,853	7,592	24,190	212,30	2093,69	0,874	
		$\pi/2$	1,685	0,993	0,954	0,950	1,972	1,452	1,135	1,08	1,07		
	0,9	0	7,429	5,581	5,204	5,165	13,870	16,385	46,194	395,34	3889,75	2,179	
		$\pi/2$	5,137	1,033	0,950	0,942	5,394	1,923	1,176	1,08	1,07		

Таблица А.3.3.

Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко защемленным внешним и нагруженным поперечными усилиями p_1 внутренним контурами (рис. 3.7)

Материал	θ , рад.	a_1/a_0								
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		M_s на L_0			M_n на L_0			M_s на L_1		
M1	0	-0,013	-0,059	-0,023	-0,052	-0,234	-0,091	0,222	0,140	0,005
M2	0	-0,004	-0,028	-0,025	-0,014	-0,100	-0,141	0,457	0,375	0,020
	$\pi/12$	-0,007	-0,046	-0,037	-0,015	-0,107	-0,136	0,395	0,296	0,015
	$\pi/6$	-0,014	-0,089	-0,054	-0,021	-0,136	-0,136	0,251	0,146	0,003
	$\pi/4$	-0,022	-0,115	-0,051	-0,038	-0,205	-0,159	0,159	0,075	0,001
	$\pi/3$	-0,022	-0,095	-0,030	-0,072	-0,305	-0,187	0,149	0,063	0,001
	$5\pi/12$	-0,014	-0,054	-0,013	-0,106	-0,405	-0,196	0,162	0,056	0,001
	$\pi/2$	-0,009	-0,035	-0,008	-0,119	-0,451	-0,194	0,168	0,053	0,001
M3	0	0,000	-0,002	-0,012	0,000	-0,007	-0,051	0,644	0,583	0,116
	$\pi/12$	0,000	-0,010	-0,060	0,000	-0,012	-0,066	0,525	0,407	0,019
	$\pi/6$	-0,001	-0,044	-0,099	-0,001	-0,044	-0,100	0,297	0,149	-0,023
	$\pi/4$	-0,005	-0,096	-0,061	-0,009	-0,171	-0,108	0,157	0,034	-0,007
	$\pi/3$	-0,012	-0,092	-0,024	-0,050	-0,395	-0,102	0,091	0,003	-0,001
	$5\pi/12$	-0,009	-0,032	-0,006	-0,150	-0,517	-0,099	0,062	-0,001	0,000
	$\pi/2$	-0,002	-0,005	-0,001	-0,217	-0,527	-0,099	0,054	0,001	0,000

Таблица А.3.4.

Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко защемленным внутренним и нагруженным поперечными усилиями p_0 внешним контурами (рис. 3.8)

Материал	θ , рад.	a_1/a_0								
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		M_s на L_0			M_s на L_1			M_n на L_1		
M1	0	-0,352	-0,132	-0,005	-0,646	-0,200	-0,027	-2,584	-0,798	-0,109
M2	0	-0,011	-0,121	-0,018	-0,880	-0,251	-0,030	-3,198	-0,913	-0,110
	$\pi/12$	-0,049	-0,130	-0,013	-1,337	-0,383	-0,048	-3,104	-0,888	-0,112
	$\pi/6$	-0,153	-0,128	-0,003	-1,857	-0,542	-0,074	-2,846	-0,831	-0,114
	$\pi/4$	-0,286	-0,095	-0,001	-1,395	-0,431	-0,062	-2,498	-0,771	-0,110
	$\pi/3$	-0,386	-0,083	-0,003	-0,666	-0,220	-0,033	-2,152	-0,710	-0,105
	$5\pi/12$	-0,432	-0,109	-0,002	-0,256	-0,088	-0,014	-1,901	-0,652	-0,103
	$\pi/2$	-0,443	-0,129	-0,002	-0,139	-0,048	-0,008	-1,810	-0,626	-0,103
M3	0	0,072	-0,047	-0,051	-1,062	-0,269	-0,030	-4,462	-1,128	-0,128
	$\pi/12$	0,035	-0,085	-0,020	-3,755	-0,937	-0,108	-4,152	-1,036	-0,120
	$\pi/6$	-0,074	-0,175	0,012	-3,293	-0,820	-0,109	-3,304	-0,823	-0,109
	$\pi/4$	-0,252	-0,203	0,006	-1,200	-0,354	-0,057	-2,142	-0,632	-0,102
	$\pi/3$	-0,458	-0,095	0,001	-0,227	-0,130	-0,023	-0,975	-0,557	-0,101
	$5\pi/12$	-0,579	-0,038	0,000	-0,007	-0,035	-0,006	-0,118	-0,565	-0,102
	$\pi/2$	-0,613	-0,025	0,000	0,002	-0,006	-0,001	0,196	-0,578	-0,102

Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко защемленным внешним и свободным внутренним контурами при действии равномерного давления q_0 по основанию (рис. 3.9)

Материал	θ , рад.	a_1 / a_0								
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		M_s на L_0			M_n на L_0			M_s на L_1		
М1	0	-0,031	-0,020	-0,001	-0,124	-0,079	-0,005	0,140	0,027	0,000
М2	0	-0,017	-0,013	-0,001	-0,063	-0,048	-0,005	0,292	0,077	0,001
	$\pi / 12$	-0,028	-0,021	-0,002	-0,064	-0,049	-0,005	0,253	0,060	0,001
	$\pi / 6$	-0,048	-0,036	-0,003	-0,074	-0,055	-0,004	0,161	0,028	0,000
	$\pi / 4$	-0,059	-0,041	-0,003	-0,105	-0,073	-0,005	0,095	0,013	0,000
	$\pi / 3$	-0,048	-0,030	-0,002	-0,156	-0,098	-0,005	0,082	0,010	0,000
	$5\pi / 12$	-0,028	-0,016	-0,001	-0,205	-0,118	-0,005	0,085	0,008	0,000
	$\pi / 2$	-0,017	-0,010	0,000	-0,225	-0,126	-0,005	0,088	0,007	0,000
М3	0	-0,003	-0,003	-0,001	-0,012	-0,012	-0,003	0,364	0,119	0,004
	$\pi / 12$	-0,016	-0,015	-0,003	-0,018	-0,017	-0,004	0,303	0,081	0,001
	$\pi / 6$	-0,042	-0,039	-0,005	-0,042	-0,039	-0,005	0,171	0,026	-0,001
	$\pi / 4$	-0,055	-0,047	-0,003	-0,099	-0,084	-0,005	0,084	0,003	0,000
	$\pi / 3$	-0,042	-0,029	-0,001	-0,182	-0,125	-0,005	0,041	-0,002	0,000
	$5\pi / 12$	-0,016	-0,008	0,000	-0,258	-0,134	-0,005	0,022	-0,001	0,000
	$\pi / 2$	-0,003	-0,001	0,000	-0,284	-0,132	-0,005	0,017	0,000	0,000

Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко заземленным внутренним и свободным внешним контурами при действии равномерного давления q_0 по основанию (рис. 3.10)

Материал	θ , рад.	a_1/a_0								
		0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
		M_s на L_0			M_s на L_1			M_n на L_1		
M1	0	-0,085	-0,020	0,000	-0,243	-0,044	-0,001	-0,971	-0,175	-0,005
M2	0	0,016	-0,012	-0,001	-0,310	-0,053	-0,001	-1,126	-0,194	-0,005
	$\pi/6$	0,004	-0,016	0,000	-0,475	-0,081	-0,002	-1,102	-0,189	-0,005
	$\pi/3$	-0,030	-0,020	0,000	-0,678	-0,117	-0,004	-1,039	-0,180	-0,005
	$\pi/2$	-0,073	-0,016	0,000	-0,532	-0,095	-0,003	-0,953	-0,170	-0,005
	$2\pi/3$	-0,102	-0,013	0,000	-0,269	-0,050	-0,002	-0,868	-0,162	-0,005
	$5\pi/6$	-0,107	-0,017	0,000	-0,109	-0,021	-0,001	-0,807	-0,154	-0,005
	π	-0,104	-0,021	0,000	-0,060	-0,012	0,000	-0,784	-0,150	-0,005
M3	0	0,023	-0,003	-0,001	-0,349	-0,054	-0,001	-1,466	-0,349	0,023
	$\pi/6$	0,016	-0,009	-0,001	-1,252	-0,192	-0,005	-1,463	-0,411	0,022
	$\pi/3$	-0,006	-0,026	0,000	-1,158	-0,179	-0,005	-1,453	-0,579	0,022
	$\pi/2$	-0,050	-0,035	0,000	-0,479	-0,084	-0,003	-1,436	-0,812	0,021
	$2\pi/3$	-0,113	-0,017	0,000	-0,127	-0,032	-0,001	-1,414	-1,054	0,019
	$5\pi/6$	-0,158	-0,007	0,000	-0,020	-0,009	0,000	-1,385	-1,252	0,016
	π	-0,172	-0,005	0,000	-0,002	-0,001	0,000	-1,350	-1,376	0,014

Таблица А.3.7

Значения моментов M_s в точках контура L_1 бесконечной плиты с двумя круговыми отверстиями (рис. 3.11) в зависимости от отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу при действии $M_y^\infty = m_y$

Материал	θ , рад.	c/a					
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01
M1	0	1,769	2,002	2,340	2,946	5,820	17,333
	$\pi/2$	0,231	0,219	0,219	0,223	0,234	0,241
	π	1,769	1,846	1,896	1,947	2,040	2,103
M2	0	2,348	2,523	2,813	3,455	7,328	23,484
	$\pi/2$	0,263	0,249	0,246	0,250	0,261	0,271
	π	2,348	2,429	2,495	2,574	2,745	2,882

Таблица А.3.8

Значения моментов в точках левого контура L_1 бесконечной плиты с двумя круговыми жестко подкрепленными отверстиями (рис. 3.11) в зависимости от отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу при действии $M_y^\infty = m_y$

Материал	Моменты	θ , рад.	c/a					
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	M_s	0	-0,467	-0,364	-0,318	-0,370	-0,838	-2,868
		$\pi/2$	0,866	0,779	0,758	0,751	0,750	0,754
		π	-0,467	-0,447	-0,449	-0,458	-0,482	-0,505
	M_n	0	-1,866	-1,455	-1,272	-1,479	-3,352	-11,471
		$\pi/2$	3,466	3,118	3,034	3,002	2,999	3,017
		π	-1,866	-1,787	-1,796	-1,831	-1,929	-2,018
М2	M_s	0	-0,222	-0,189	-0,157	-0,146	-0,328	-1,177
		$\pi/2$	0,190	0,178	0,173	0,170	0,169	0,170
		π	-0,222	-0,214	-0,213	-0,215	-0,225	-0,235
	M_n	0	-0,808	-0,687	-0,572	-0,531	-1,194	-4,280
		$\pi/2$	2,470	2,309	2,243	2,212	2,200	2,208
		π	-0,808	-0,778	-0,775	-0,782	-0,818	-0,855

Таблица А.3.9

Значения моментов в точках левого контура L_1 и КИМ бесконечной плиты с двумя жестко подкрепленными линейными включениями (рис. 3.12) в зависимости от отношения c/a расстояния между контурами к их радиусу при действии $M_y^\infty = m_y$

Материал	Моменты	θ , рад.	c/a					
			∞	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	k_{1M}^-		-0,333	-0,343	-0,351	-0,361	-0,384	-0,408
		k_{1M}^+	-0,333	-0,349	-0,371	-0,410	-0,598	-1,280
	M_s	0	-1333,74	-1397,62	-1483,63	-1638,92	-2393,66	-5122,89
		$\pi/2$	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,334
		π	-1333,73	-1370,94	-1402,58	-1441,76	-1535,04	-1632,49
	M_n	0	-5334,94	-5590,46	-5934,51	-6555,66	-9574,65	-20491,53
		$\pi/2$	1,334	1,334	1,334	1,334	1,334	1,334
		π	-5334,93	-5483,75	-5610,30	-5767,03	-6140,14	-6529,97
	М2	k_{1M}^-		-0,170	-0,175	-0,179	-0,184	-0,196
k_{1M}^+			-0,170	-0,179	-0,190	-0,209	-0,306	-0,654
M_s		0	-520,28	-545,20	-578,75	-639,32	-933,72	-1998,29
		$\pi/2$	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090
		π	-520,28	-534,79	-547,13	-562,42	-598,80	-636,81
M_n		0	-1891,93	-1982,53	-2104,54	-2324,80	-3395,34	-7266,50
		$\pi/2$	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170	1,170
		π	-1891,93	-1944,70	-1989,57	-2045,15	-2177,45	-2315,69

Таблица 3.10

Значения напряжений σ_θ в точках с указанными координатами для бесконечной изотропной пластинки с квадратным отверстием (рис. 3.13) при действии $\sigma_x^\infty = p$

θ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением в углах при		
			$\delta = 0.05$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.005$
0	1,0001; 0,0000	-0,9015	-0,8914	-0,8983	-0,8994
15	1,0001; 0,5000	-0,8664	-0,8506	-0,8628	-0,8645
30	1,0001; 0,8660	-0,6535	-0,5474	-0,6335	-0,6438
35	1,0000; 0,9397	-0,3949	0,0649	-0,3313	-0,3658
38	1,0000; 0,9703	-0,0458	–	0,1546	0,0458
38.5	1,0000; 0,9744	0,0417	–	0,3024	0,1615
40	1,0000; 0,9848	0,4385	–	1,0952	0,7052
41	1,0000; 0,9903	0,8540	–	3,1976	1,6792
42	1,0000; 0,9945	1,5822	–	–	3,8672
43	1,0000; 0,9976	2,9941	–	–	–
44	1,0000; 0,9994	7,3538	–	–	–
45	0,9854; 0,9854	–	4,6321	–	–
45	0,9971; 0,9971	–	–	9,6725	–
45	0,9985; 0,9985	–	–	–	13,2186
46	0,9994; 1,0000	12,2405	–	–	–
47	0,9976; 1,0000	7,1960	–	–	–
50	0,9848; 1,0000	3,9680	–	4,8002	4,2746
55	0,9397; 1,0000	2,7183	3,4831	2,7896	2,7507
60	0,8660; 1,0001	2,2497	2,3956	2,2717	2,2610
75	0,5000; 1,0001	1,7645	1,7835	1,7683	1,7669
90	0,0000; 1,0001	1,6650	1,6764	1,6680	1,6672

Таблица 3.11

Значения напряжений σ_θ в точках с указанными координатами для бесконечной изотропной пластинки с квадратным отверстием (рис. 3.13) при действии $\sigma_x^\infty = p$ посчитанные Г. Н. Савиным [143], А. С. Космодамианским [143] и дискретным методом наименьших квадратов (ДМНК).

θ°	4.2, точки	σ_θ	4.3, точки	σ_θ	4.4, точки	σ_θ	Кос, точки	σ_θ	ДМНК
0	1,000; 0,000	-0,808	1,000; 0,000	-0,936	1,000; 0,000	-0,871	1,000; 0,000	-0,85	-0,920
15	–	–	–	–	1,004; 0,427	-0,901	0,998; 0,380	-0,82	-0,904
30	–	–	–	–	1,000; 0,796	-0,702	0,974; 0,688	-0,40	-0,708
35	1,035; 0,882	-0,268	1,004; 0,882	-0,544	–	–	–	–	-0,385
40	1,019; 0,945	0,980	1,002; 0,945	0,605	1,007; 0,958	0,265	0,924; 0,831	0,97	0,459
45	0,990; 0,990	3,000	0,984; 0,984	4,368	0,995; 0,995	5,763	0,884; 0,884	2,00	–
50	0,945; 1,019	3,860	0,945; 1,002	4,460	0,958; 1,007	4,230	0,831; 0,924	2,69	3,911
55	0,882; 1,035	3,366	0,882; 1,004	2,888	–	–	–	–	2,754
60	–	–	–	–	0,796; 1,000	1,932	0,688; 0,974	2,69	2,238
75	–	–	–	–	0,427; 1,004	1,802	0,380; 0,998	2,05	1,731
90	0,000; 1,000	1,472	0,000; 1,000	1,760	0,000; 1,000	1,616	0,000; 1,000	1,85	1,620

Значения напряжений σ_θ в точках с указанными координатами для бесконечной плиты из авиационной фанеры с квадратным отверстием (рис. 3.13) при действии $\sigma_x^\infty = p$, посчитанные ОМНК, ДМНК и методом рядов [92]

θ°	Координаты точек	Без закругления в углах	С закруглением при		ДМНК	Координаты точек	По [92]
			$\delta = 0.01$	$\delta = 0.005$			
0	1,0001; 0,0000	-0,6232	-0,6231	-0,6249	-0,6243	1,010; 0,000	-0,58
15	1,0001; 0,5000	-0,5952	-0,5924	-0,5951	-0,5916	–	–
30	1,0001; 0,8660	-0,4055	-0,3867	-0,4005	-0,4004	–	–
35	1,0000; 0,9397	-0,1670	-0,1077	-0,1505	-0,1690	1,030; 0,891	-0,20
36,5	1,0000; 0,9563	-0,0341	0,0651	-0,0045	-0,0311	–	–
37	1,0000; 0,9613	0,0246	0,1428	0,0588	0,0251	–	–
40	1,0000; 0,9848	0,6181	1,2545	0,7780	0,6048	1,021; 0,955	0,80
41	1,0000; 0,9903	1,0150	3,5097	1,2190	1,0260	–	–
42	1,0000; 0,9945	1,7123	–	4,0092	1,7470	–	–
43	1,0000; 0,9976	3,0886	–	–	3,2140	–	–
44	1,0000; 0,9994	7,5492	–	–	8,8790	–	–
44,5	1,0000; 0,9998	18,4858	–	–	34,1100	–	–
45	–	–	–	–	–	0,997; 0,997	1,38
45	0,9971; 0,9971	–	4,1769	–	–	–	–
45	0,9985; 0,9985	–	–	5,7143	–	–	–
45,5	0,9998; 1,0000	42,4061	–	–	86,1500	–	–
46	0,9994; 1,0000	19,9967	–	–	25,1900	–	–
47	0,9976; 1,0000	11,1722	–	–	11,9000	–	–
48	0,9945; 1,0000	8,3251	–	13,2809	8,6180	–	–
49	0,9903; 1,0000	6,8217	14,4623	7,8513	6,9800	–	–
50	0,9848; 1,0000	5,9074	7,3985	6,3517	5,9670	0,955; 1,021	3,44
53	0,9613; 1,0000	4,4291	4,6751	4,5043	4,4620	–	–
53,5	0,9563; 1,0000	4,2722	4,4751	4,3344	4,3120	–	–
55	0,9397; 1,0000	3,8951	4,0129	3,9275	3,9270	0,891; 1,030	5,43
60	0,8660; 1,0001	3,1398	3,1734	3,1461	3,1540	0,805; 1,030;	3,56
75	0,5000; 1,0001	2,3541	2,3581	2,3524	2,3550	–	–
90	0,0000; 1,0001	2,1951	2,1951	2,1912	2,1920	0,000; 1,010	2,00

Таблица 3.13

Значения моментов M_θ бесконечной плиты в точках с указанными координатами для плиты с квадратным отверстием (рис. 3.14) при действии $M_y^\infty = m_y$ ($M_x^\infty = 0$)

θ°	Координаты точек	Без за- кругле- ния в углах	С закруглением при δ		Без за- кругле- ния в углах	С закруглением при δ	
			0.01	0.005		0.01	0.005
		Материал М1			Материал М2		
0	1,0001; 0,0000	1,3173	1,3159	1,3169	1,5115	1,5052	1,5159
15	1,0001; 0,2588	1,3301	1,3421	1,3394	1,5250	1,5598	1,5429
30	1,0001; 0,5736	1,4058	1,4117	1,4141	1,6238	1,6423	1,6459
44,9956	0,9998; 1,0000	13,4327	–	–	16,8064	–	–
45	0,9971; 0,9971	–	3,5483	–	–	2,2968	–
45	0,9985; 0,9985	–	–	4,3247	–	–	2,7517
45,0044	1,0000; 0,9998	-2,6345	–	–	-2,5382	–	–
60	0,5736; 1,0001	0,2633	0,2535	0,2531	0,2357	0,2286	0,2316
75	0,2588; 1,0001	0,2687	0,2639	0,2598	0,2452	0,2335	0,2331
90	0,0000; 1,0001	0,2681	0,2622	0,2673	0,2479	0,2488	0,2524

Таблица 3.14

Значения моментов M_θ бесконечной плиты в точках с указанными координатами для всестороннего изгиба плиты с квадратным отверстием (рис. 3.14) моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = m$, посчитанные ОМНК и методом рядов [88]

θ°	Точки	ОМНК	Точки	По [88]
0	0,8890; 0,0000	1,422	0,8889; 0,0000	1,47
15	0,8890; 0,4444	1,466	0,8874; 0,3374	1,52
30	0,8889; 0,7698	1,714	0,8660; 0,6111	1,72
45	0,9854; 0,9854	–	0,7857; 0,7857	1,25
60	0,7698; 0,8889	3,839	0,6111; 0,8660	3,13
75	0,4444; 0,8890	3,636	0,3374; 0,8874	3,85
90	0,0000; 0,8890	3,599	0,0000; 0,8889	3,67

Значения моментов M_y/P_1 в точках оси Ox для кругового кольца с жестко защемленным внешним и загруженным усилиями p_1 внутренним контурами (рис. 3.7) и для кругового диска с жестко защемленным контуром, находящегося под действием сосредоточенной силы P_1^0 в центре (рис. 2.9)

Координаты точки x	a_1/a_0									
	0,2	0,1	0,05	0,01	0,00	0,2	0,1	0,05	0,01	0,00
	Материал М1					Материал М3				
0,0001					0,896					1,273
0,005					0,507					0,713
0,010				0,817	0,438				1,678	0,613
0,050			0,495	0,293	0,278			1,018	0,399	0,383
0,100		0,354	0,263	0,213	0,209		0,728	0,361	0,288	0,284
0,200	0,211	0,175	0,153	0,141	0,140	0,437	0,238	0,200	0,187	0,186
0,300	0,128	0,114	0,105	0,100	0,100	0,195	0,148	0,135	0,130	0,130
0,500	0,056	0,052	0,050	0,049	0,049	0,076	0,067	0,065	0,064	0,063
0,600	0,034	0,033	0,032	0,031	0,031	0,048	0,044	0,042	0,042	0,042
0,700	0,017	0,016	0,016	0,016	0,016	0,028	0,026	0,025	0,025	0,025
0,800	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,013	0,012	0,012	0,012	0,012
0,900	-0,011	-0,010	-0,010	-0,009	-0,009	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002
0,990	-0,021	-0,020	-0,019	-0,019	-0,019	-0,006	-0,005	-0,005	-0,005	-0,005
0,995	-0,021	-0,020	-0,020	-0,019	-0,019	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006
1,000	-0,022	-0,021	-0,020	-0,020	-0,020	-0,007	-0,006	-0,006	-0,006	-0,006

Значения моментов в точках жестко защемленного контура L_0 кругового диска при действии сосредоточенной силы P_1^0 (рис. 3.17) в зависимости от отношения c/a_0 расстояния от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы к радиусу

Материал	θ , рад.	c/a_0							
		0	0,1	0,5	0,9	0	0,1	0,5	0,9
		M_s				M_n			
М1	0	-0,020	-0,024	-0,045	-0,071	-0,080	-0,096	-0,179	-0,286
	$\pi/12$		-0,023	-0,029	-0,003		-0,093	-0,117	-0,012
	$\pi/6$		-0,021	-0,015	-0,001		-0,086	-0,060	-0,003
	$\pi/4$		-0,019	-0,009	0,000		-0,077	-0,036	-0,002
	$\pi/3$		-0,018	-0,006	0,000		-0,070	-0,026	-0,001
	$5\pi/12$		-0,016	-0,005	0,000		-0,066	-0,021	-0,001
	$\pi/2$		-0,016	-0,005	0,000		-0,064	-0,020	-0,001
М2	0	-0,006	-0,008	-0,025	-0,056	-0,022	-0,031	-0,092	-0,205
	$\pi/12$	-0,021	-0,028	-0,066	-0,010	-0,032	-0,043	-0,101	-0,015
	$\pi/6$	-0,033	-0,039	-0,036	-0,002	-0,106	-0,126	-0,116	-0,007
	$\pi/4$	-0,014	-0,014	-0,006	0,000	-0,181	-0,175	-0,074	-0,003
	$\pi/3$	-0,033	-0,026	-0,005	0,000	-0,106	-0,083	-0,018	0,000
	$5\pi/12$	-0,021	-0,014	-0,002	0,000	-0,032	-0,022	-0,003	0,000
	$\pi/2$	-0,006	-0,004	0,000	0,000	-0,022	-0,015	-0,002	0,000

Таблица А.3.17.

Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко заземленным внешним контуром при действии сосредоточенной силы P_1^0 (рис. 3.18) в зависимости от отношения c/a_0 расстояния от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы к радиусу внешнего контура

Материал	θ , рад.	c/a_0								
		0,3	0,6	0,9	0,3	0,6	0,9	0,3	0,6	0,9
		M_s на L_0			M_n на L_0			M_s на L_1		
М1	0	-0,037	-0,052	-0,071	-0,147	-0,208	-0,286	0,420	0,106	0,007
	$\pi/6$	-0,032	-0,026	-0,003	-0,126	-0,105	-0,012	0,233	0,067	0,004
	$\pi/3$	-0,023	-0,011	-0,001	-0,091	-0,044	-0,003	0,122	0,024	0,001
	$\pi/2$	-0,017	-0,006	0,000	-0,066	-0,025	-0,002	0,087	0,016	0,000
	$2\pi/3$	-0,013	-0,004	0,000	-0,053	-0,018	-0,001	0,077	0,019	0,001
	$5\pi/6$	-0,012	-0,004	0,000	-0,047	-0,015	-0,001	0,075	0,023	0,001
	π	-0,011	-0,004	0,000	-0,045	-0,015	-0,001	0,075	0,024	0,002
М2	0	-0,016	-0,032	-0,056	-0,058	-0,116	-0,205	0,681	0,143	0,007
	$\pi/6$	-0,051	-0,067	-0,010	-0,078	-0,103	-0,015	0,195	0,054	0,003
	$\pi/3$	-0,050	-0,028	-0,002	-0,161	-0,091	-0,007	0,070	0,004	-0,001
	$\pi/2$	-0,011	-0,004	0,000	-0,144	-0,048	-0,002	0,040	-0,002	-0,001
	$2\pi/3$	-0,017	-0,004	0,000	-0,054	-0,012	0,000	0,028	0,002	0,000
	$5\pi/6$	-0,008	-0,002	0,000	-0,012	-0,002	0,000	0,101	0,025	0,001
	π	-0,002	0,000	0,000	-0,007	-0,001	0,000	0,134	0,032	0,001

Таблица А.3.18

Значения моментов в точках контуров кругового кольца с жестко заземленным внутренним контуром при действии сосредоточенной силы P_1^0 (рис. 3.19) в зависимости от отношения c/a_0 расстояния от начала координат до точки приложения сосредоточенной силы к радиусу внешнего контура

Материал	θ , рад.	c/a_0								
		0,3	0,6	0,9	0,3	0,6	0,9	0,3	0,6	0,9
		M_s на L_0			M_s на L_1			M_n на L_1		
М1	0	0,005	0,061	0,313	-0,118	-0,232	-0,355	-0,473	-0,928	-1,418
	$\pi/6$	0,000	-0,019	-0,109	-0,040	-0,164	-0,260	-0,161	-0,655	-1,041
	$\pi/3$	-0,005	-0,057	-0,142	-0,008	-0,055	-0,087	-0,031	-0,219	-0,349
	$\pi/2$	-0,004	-0,039	-0,083	0,001	0,008	0,023	0,005	0,031	0,092
	$2\pi/3$	-0,001	-0,011	-0,020	0,003	0,023	0,049	0,012	0,093	0,196
	$5\pi/6$	0,001	0,008	0,017	0,002	0,018	0,035	0,008	0,072	0,142
	π	0,002	0,014	0,029	0,002	0,014	0,026	0,006	0,055	0,102
М2	0	0,005	0,075	0,471	-0,116	-0,249	-0,386	-0,422	-0,905	-1,404
	$\pi/6$	0,004	0,020	-0,043	-0,120	-0,430	-0,677	-0,184	-0,659	-1,037
	$\pi/3$	-0,006	-0,063	-0,147	-0,012	-0,071	-0,107	-0,040	-0,229	-0,345
	$\pi/2$	-0,005	-0,043	-0,094	0,000	0,003	0,008	0,005	0,035	0,108
	$2\pi/3$	-0,001	-0,008	-0,014	0,004	0,032	0,065	0,014	0,102	0,211
	$5\pi/6$	0,001	0,010	0,021	0,006	0,050	0,098	0,010	0,077	0,150
	π	0,001	0,010	0,021	0,002	0,016	0,030	0,007	0,058	0,108

Таблица А.4.1

Значения моментов M_s для плиты с круговым отверстием (рис. 4.2) в зависимости от времени приложения нагрузки

t , час.	Точка			
	А		В	
	Алюминий		Медь	
0	1,7692	0,2308	1,8024	0,1976
10	1,8188	0,1812	1,8618	0,1382
20	1,8289	0,1711	1,8710	0,1290
30	1,8345	0,1655	1,8754	0,1246
40	1,8380	0,1620	1,8780	0,1220
50	1,8405	0,1595	1,8796	0,1204
60	1,8423	0,1577	1,8807	0,1193
70	1,8437	0,1563	1,8816	0,1184
80	1,8448	0,1552	1,8821	0,1179
90	1,8457	0,1543	1,8826	0,1174
100	1,8464	0,1536	1,8829	0,1171
200	1,8496	0,1504	1,8842	0,1158
300	1,8504	0,1496	1,8844	0,1156
400	1,8507	0,1493	1,8844	0,1156
500	1,8508	0,1492	1,8845	0,1155

Таблица А.4.2

Значения моментов для плиты с круговым жестко подкрепленным отверстием (рис. 4.2) в зависимости от времени приложения нагрузки

t , час.	Точка							
	А		В		А		В	
	Алюминий				Медь			
	M_s	M_n	M_s	M_n	M_s	M_n	M_s	M_n
0	-0,4667	-1,8667	0,8667	3,4667	-0,7766	-2,2840	1,2840	3,7766
10	-0,9811	-2,5385	1,5385	3,9811	-1,7776	-3,4568	2,4568	4,7776
20	-1,1295	-2,7168	1,7168	4,1295	-2,0232	-3,7269	2,7269	5,0232
30	-1,2189	-2,8221	1,8221	4,2189	-2,1548	-3,8701	2,8701	5,1548
40	-1,2800	-2,8934	1,8934	4,2800	-2,2361	-3,9581	2,9581	5,2361
50	-1,3245	-2,9450	1,9450	4,3245	-2,2903	-4,0165	3,0165	5,2903
60	-1,3583	-2,9839	1,9839	4,3583	-2,3281	-4,0573	3,0573	5,3281
70	-1,3847	-3,0143	2,0143	4,3847	-2,3556	-4,0868	3,0868	5,3556
80	-1,4058	-3,0384	2,0384	4,4058	-2,3760	-4,1088	3,1088	5,3760
90	-1,4228	-3,0579	2,0579	4,4228	-2,3916	-4,1255	3,1255	5,3916
100	-1,4369	-3,0740	2,0740	4,4369	-2,4036	-4,1384	3,1384	5,4036
200	-1,5006	-3,1465	2,1465	4,5006	-2,4477	-4,1857	3,1857	5,4477
300	-1,5181	-3,1662	2,1662	4,5181	-2,4555	-4,1941	3,1941	5,4555
400	-1,5245	-3,1735	2,1735	4,5245	-2,4576	-4,1963	3,1963	5,4576
500	-1,5273	-3,1766	2,1766	4,5273	-2,4583	-4,1970	3,1970	5,4583

Значения моментов M_s для плиты из изотропного и анизотропного материалов с круговым отверстием (рис. 4.2) в зависимости от времени приложения нагрузки

Материал	Точка	t , час								
		0	50	100	150	200	300	400	500	600
М1	A	1,769	1,841	1,847	1,849	1,850	1,851	1,851	1,851	1,851
	B	0,231	0,159	0,153	0,151	0,150	0,149	0,149	0,149	0,149
М4	A	1,934	2,070	2,077	2,081	2,084	2,088	2,091	2,093	2,094
	B	0,687	0,769	0,775	0,778	0,781	0,784	0,786	0,788	0,790

Таблица А.4.4

Значения моментов M_s в точках левого контура L_1 бесконечной плиты с двумя круговыми отверстиями (рис. 4.4) в зависимости от отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу и времени приложения нагрузки при действии $M_y^\infty = m_y$

Материал	c/a	t , час.	θ , рад.							
			0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	
М1	3	0	1,896	1,447	0,606	0,221	0,635	1,428	1,822	
		500	1,981	1,493	0,570	0,142	0,596	1,471	1,906	
	2	0	2,002	1,484	0,594	0,219	0,648	1,450	1,846	
		500	2,089	1,534	0,560	0,141	0,610	1,495	1,932	
	1	0	2,340	1,560	0,554	0,219	0,680	1,496	1,896	
		500	2,436	1,620	0,524	0,141	0,643	1,543	1,984	
	0,5	0	2,946	1,605	0,493	0,223	0,717	1,544	1,947	
		500	3,060	1,679	0,460	0,144	0,682	1,595	2,040	
	0,1	0	5,820	1,305	0,327	0,234	0,786	1,632	2,040	
		500	6,077	1,384	0,279	0,151	0,756	1,692	2,143	
	М4	3	0	2,010	1,342	0,340	0,645	0,373	1,332	1,977
			500	2,154	1,317	0,222	0,734	0,262	1,306	2,135
2		0	2,083	1,373	0,315	0,635	0,371	1,352	2,002	
		500	2,216	1,351	0,193	0,721	0,256	1,325	2,160	
1		0	2,378	1,455	0,288	0,637	0,373	1,397	2,058	
		500	2,498	1,445	0,166	0,724	0,250	1,370	2,222	
0,5		0	3,039	1,512	0,297	0,656	0,378	1,449	2,121	
		500	3,190	1,517	0,189	0,747	0,245	1,424	2,294	
0,1		0	6,266	1,237	0,357	0,697	0,385	1,547	2,241	
		500	6,691	1,264	0,304	0,797	0,231	1,532	2,435	

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

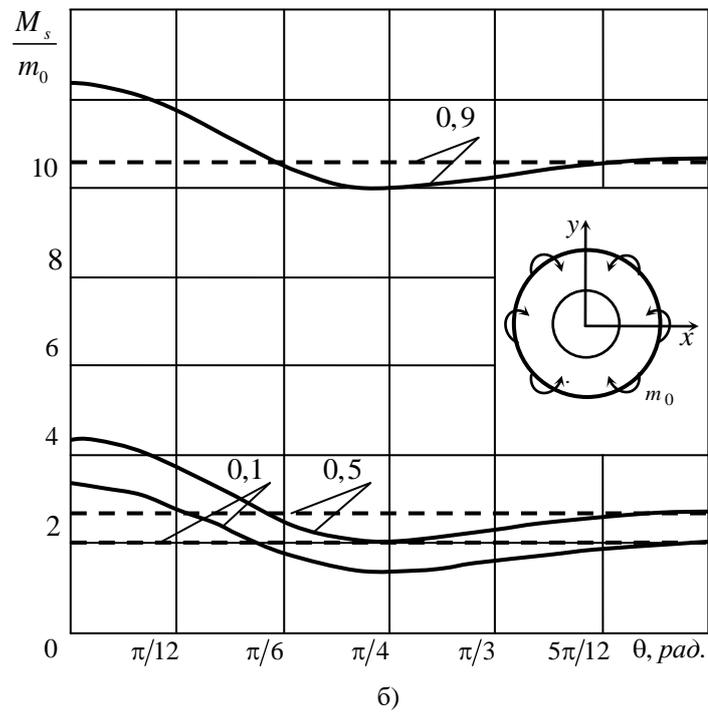
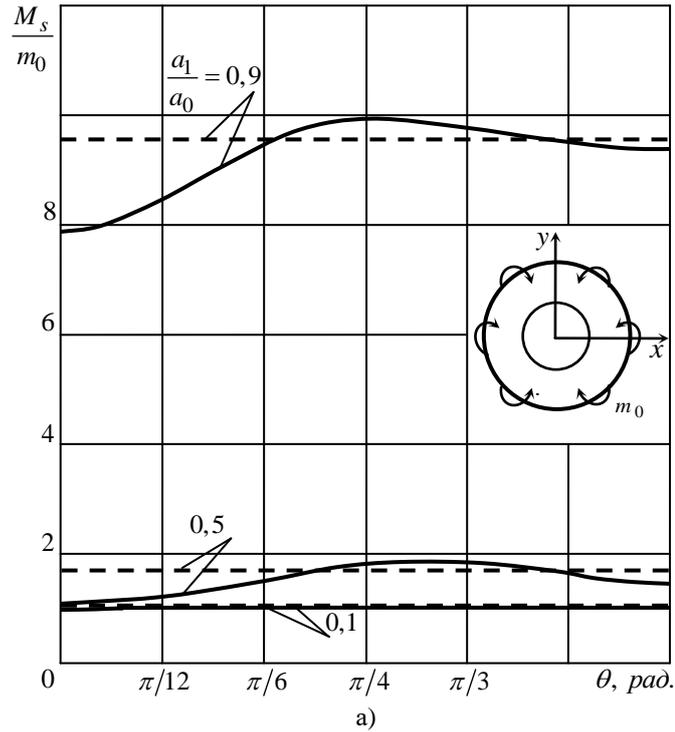


Рис. Б.3.1. Графики распределения моментов M_s около контуров L_0 (рис. Б.3.1а) и L_1 (рис. Б.3.1б) кругового кольца при его изгибе равномерно распределенными по внешнему контуру моментами m_0 (рис 3.5) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

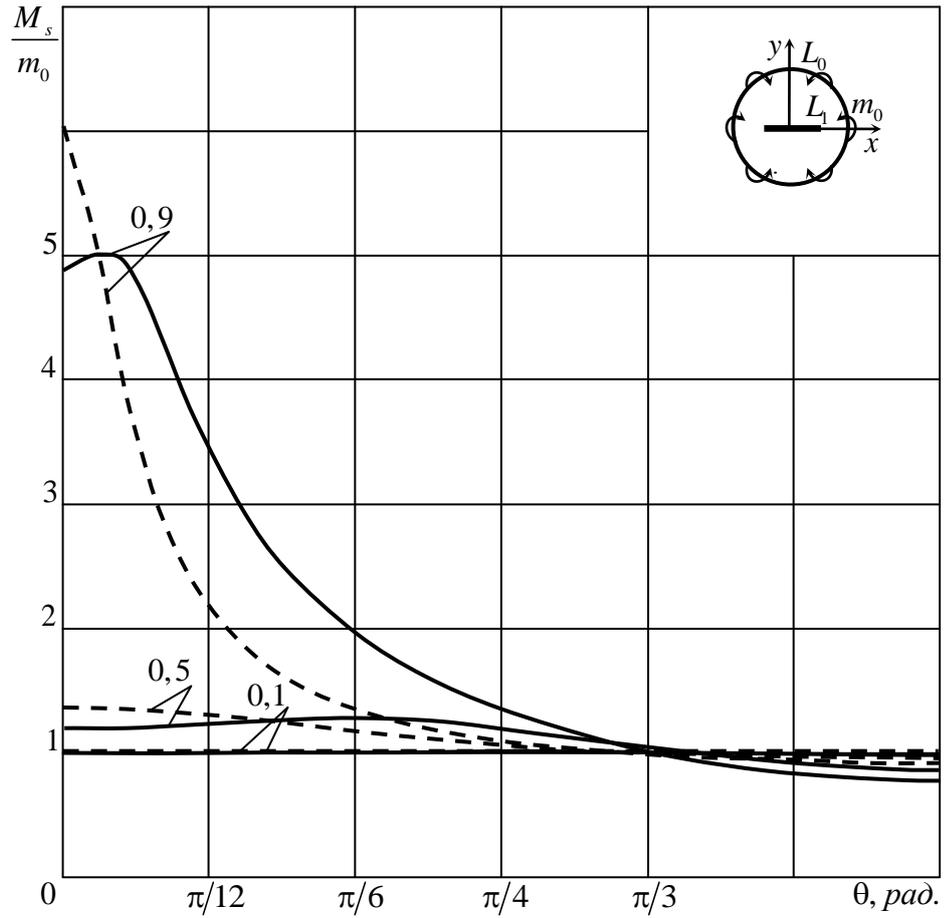


Рис. Б.3.2. Графики распределения моментов M_s около контура L_0 круговой плиты с центральной трещиной ($b_1/a_1 = 10^{-3}$) при его изгибе равномерно распределенными по внешнему контуру моментами m_0 (рис. 3.6) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

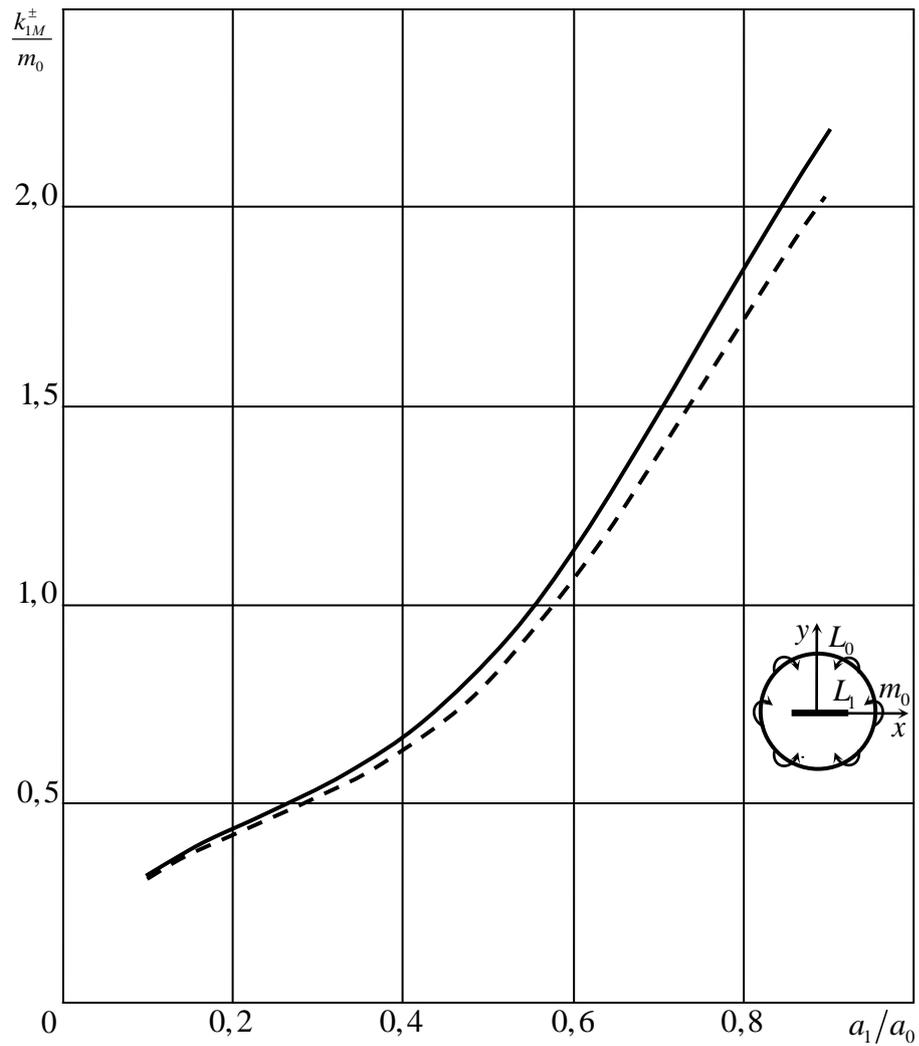


Рис. Б.3.3. Графики изменения КИМ k_{1M}^{\pm} в точке A круговой плиты с центральной трещиной ($b_1/a_1 = 10^{-3}$) при его изгибе равномерно распределенными по внешнему контуру моментами m_0 (рис 3.6) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

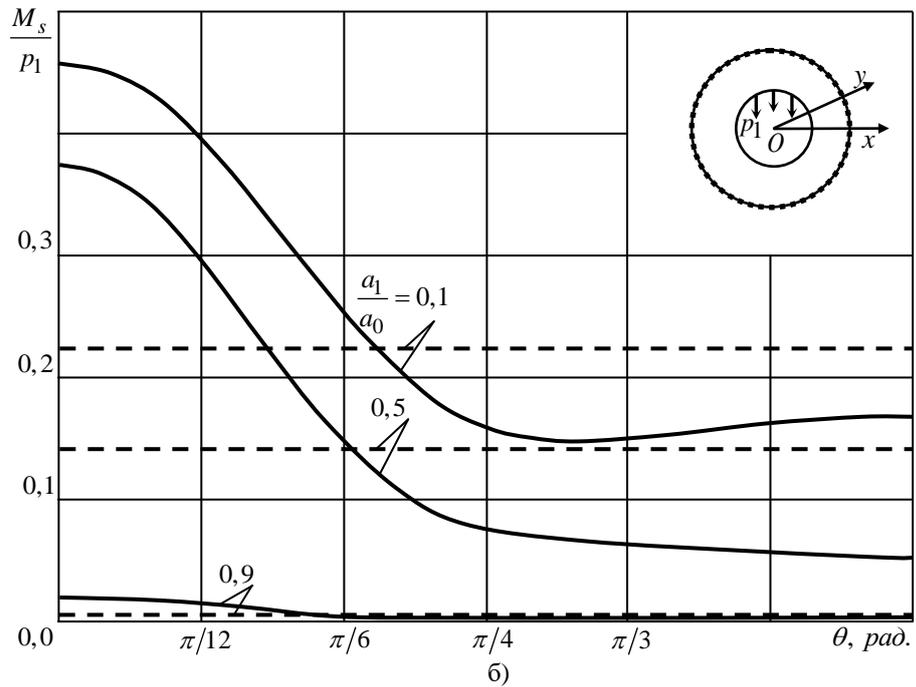
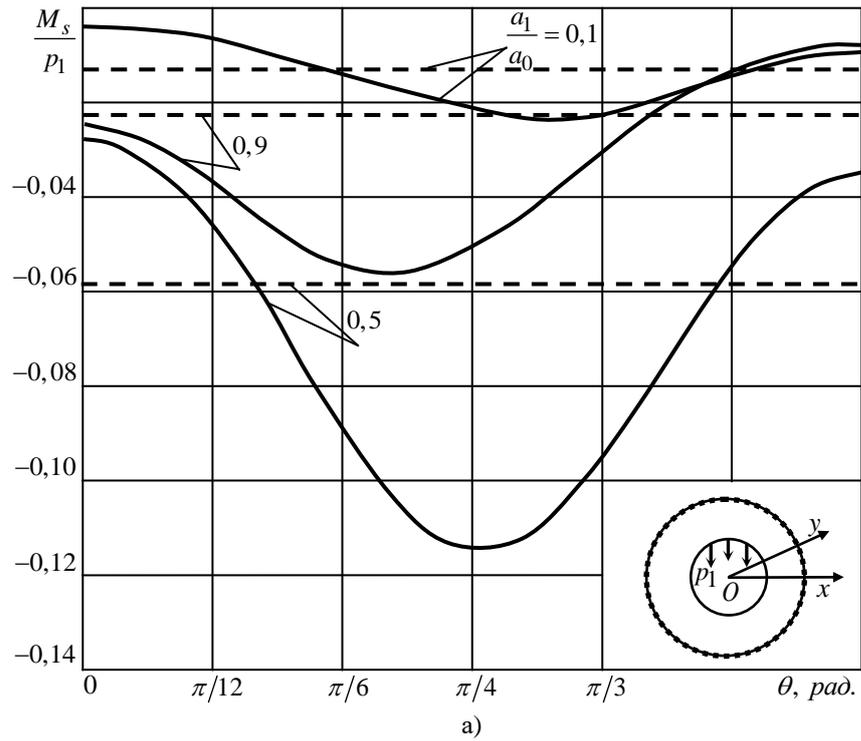


Рис. Б.3.4. Графики распределения моментов M_s около контуров L_0 (рис. Б.3.2 а) и L_1 (рис. Б.3.2 б) кругового кольца с жестко защемленным внешним и нагруженным усилиями p_1 внутренним контурами (рис. 3.7) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

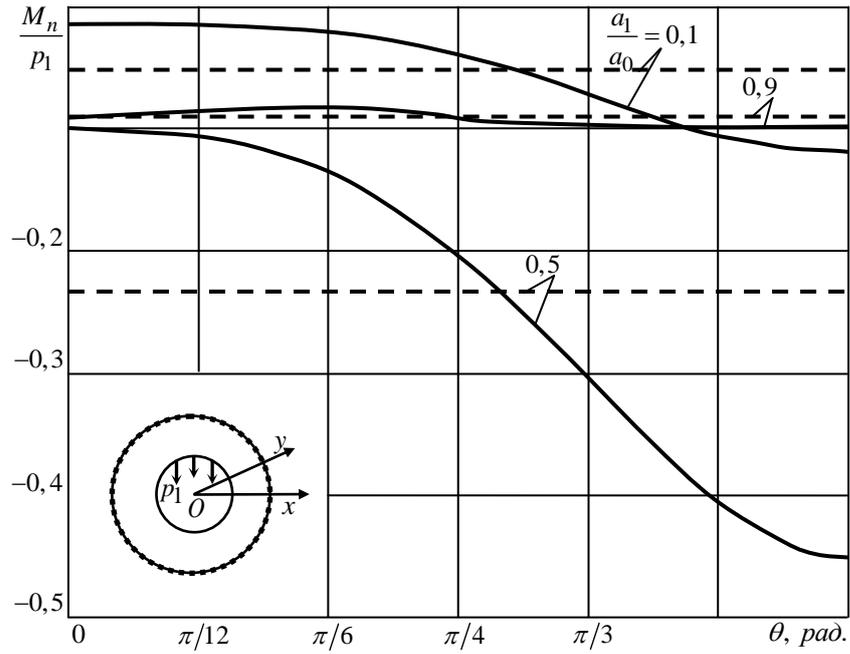


Рис. Б.3.5. Графики распределения моментов M_n около контура L_0 кругового кольца с жестко защемленным внешним и нагруженным усилиями p_1 внутренним контурами (рис. 3.7) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

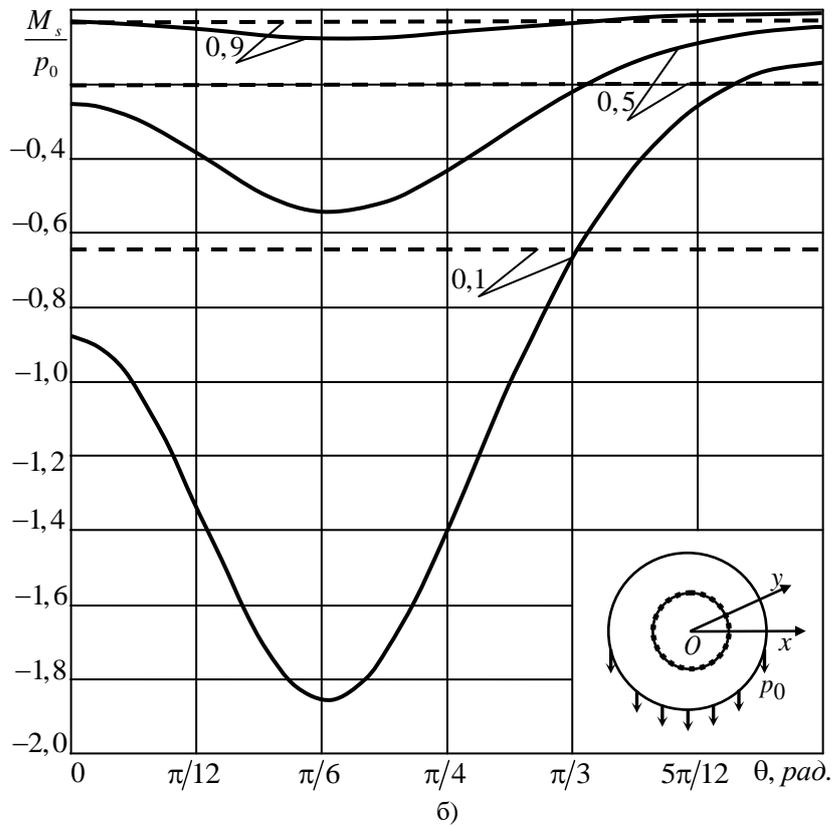
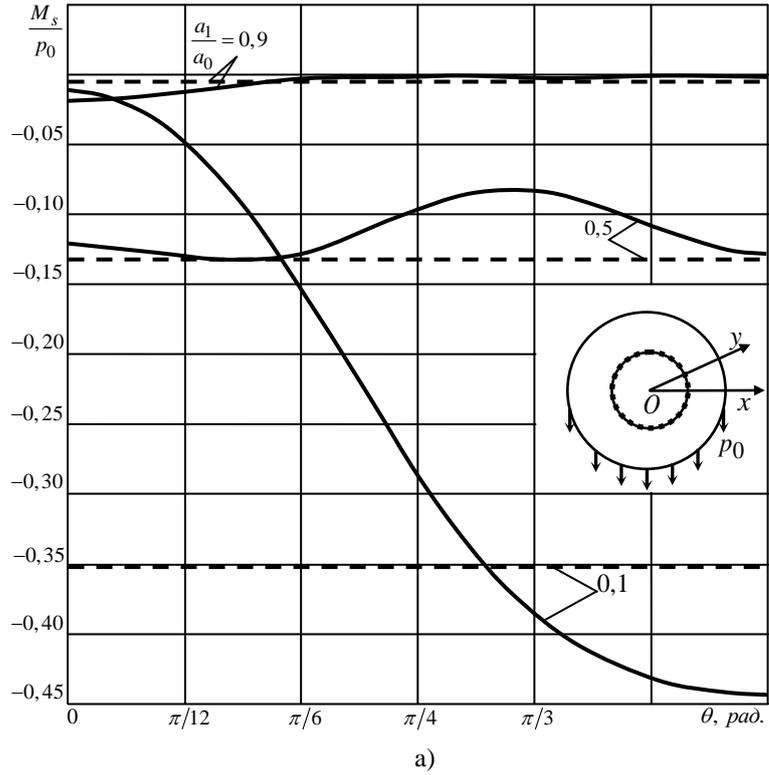


Рис. Б.3.6. Графики распределения моментов M_s около контуров L_0 (рис. Б.3.4 а) и L_1 (рис. Б.3.4 б) кругового кольца с жестко заземленным внутренним и нагруженным усилиями p_0 внешним контурами (рис. 3.8) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

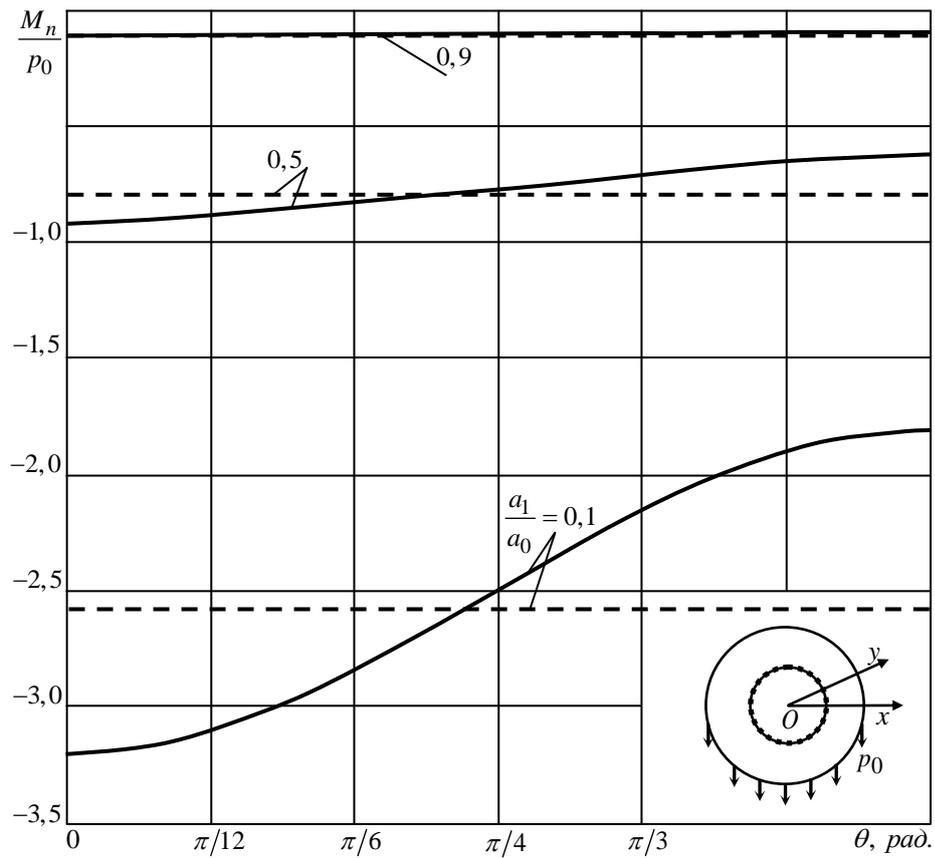
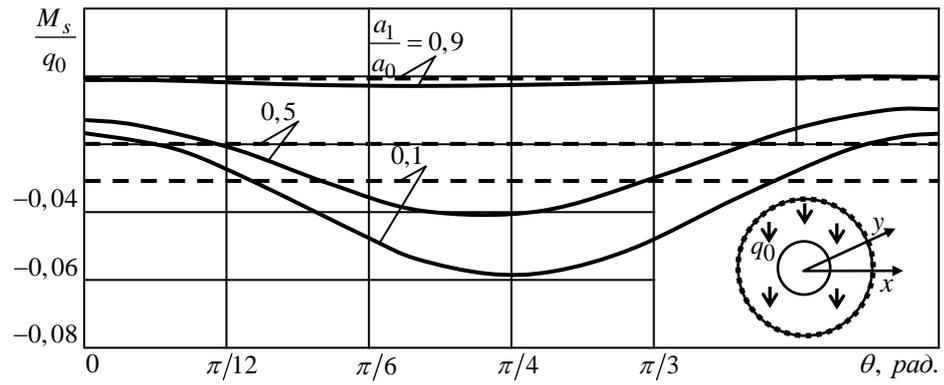
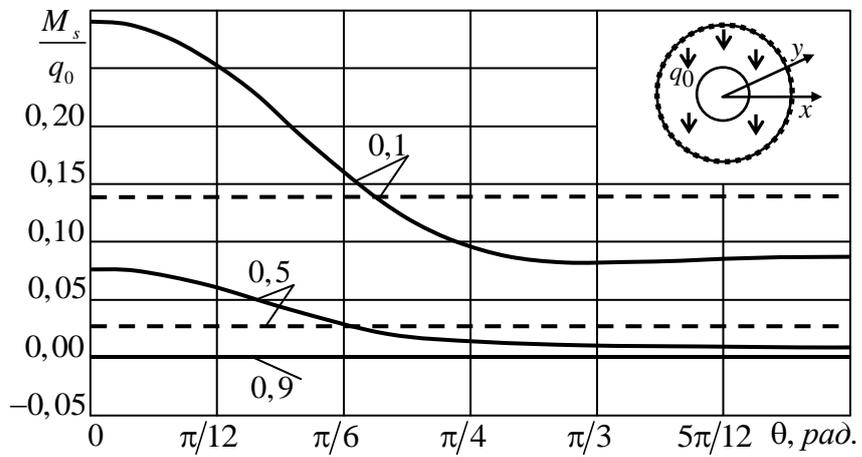


Рис. Б.3.7. Графики распределения моментов M_n около контура L_0 кругового кольца с жестко заземленным внутренним и загруженным усилиями p_0 внешним контурами (рис. 3.8) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)



а)



б)

Рис. Б.3.8. Графики распределения моментов M_s около контуров L_0 (рис. Б.3.6 а) и L_1 (рис. Б.3.6 б) кругового кольца с жестко защемленным внешним и свободным внутренним контурами при действии давления q_0 по основанию (рис. 3.9) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

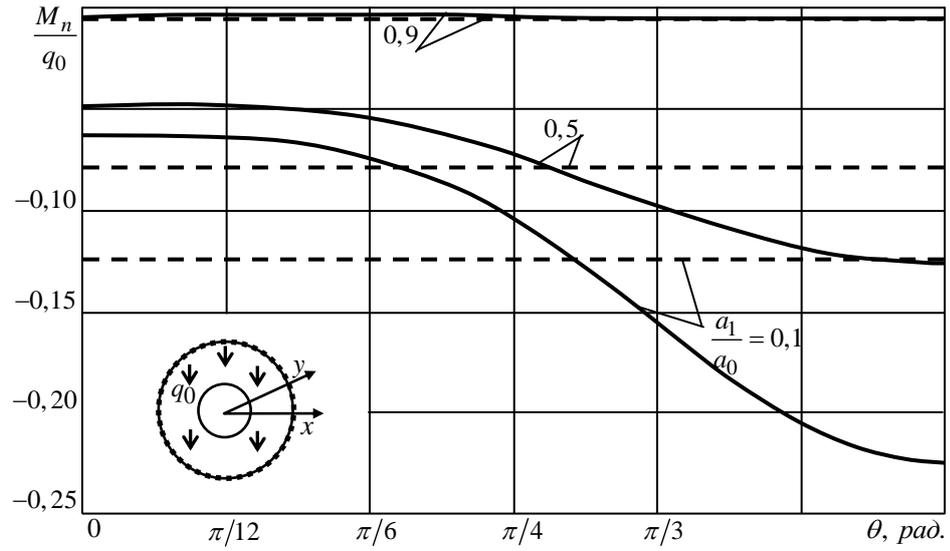


Рис. Б.3.9. Графики распределения моментов M_n около контура L_0 кругового кольца с жестко заземленным внешним и свободным внутренним контурами при действии давления q_0 по основанию (рис. 3.9) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

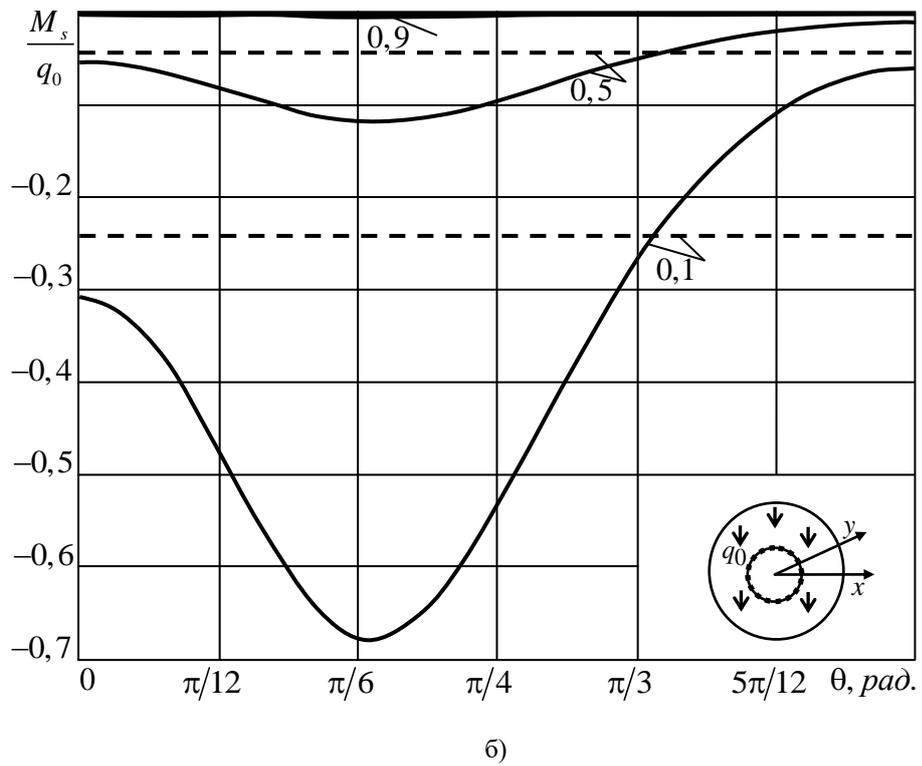
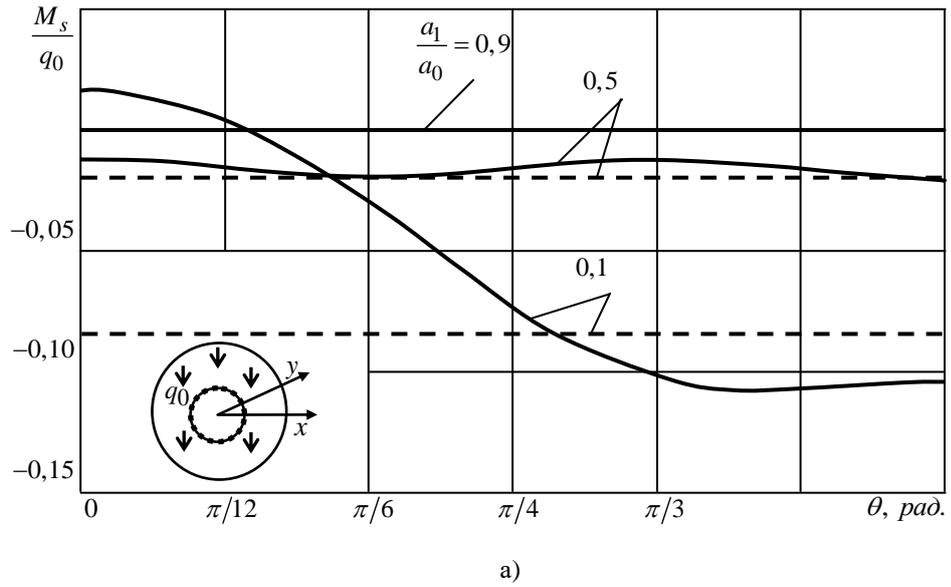


Рис. Б.3.10. Графики распределения моментов M_s около контуров L_0 (рис. Б.3.8 а) и L_1 (рис. Б.3.8 б) кругового кольца с жестко защемленным внутренним и свободным внешним контурами при действии давления q_0 по основанию (рис. 3.10) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

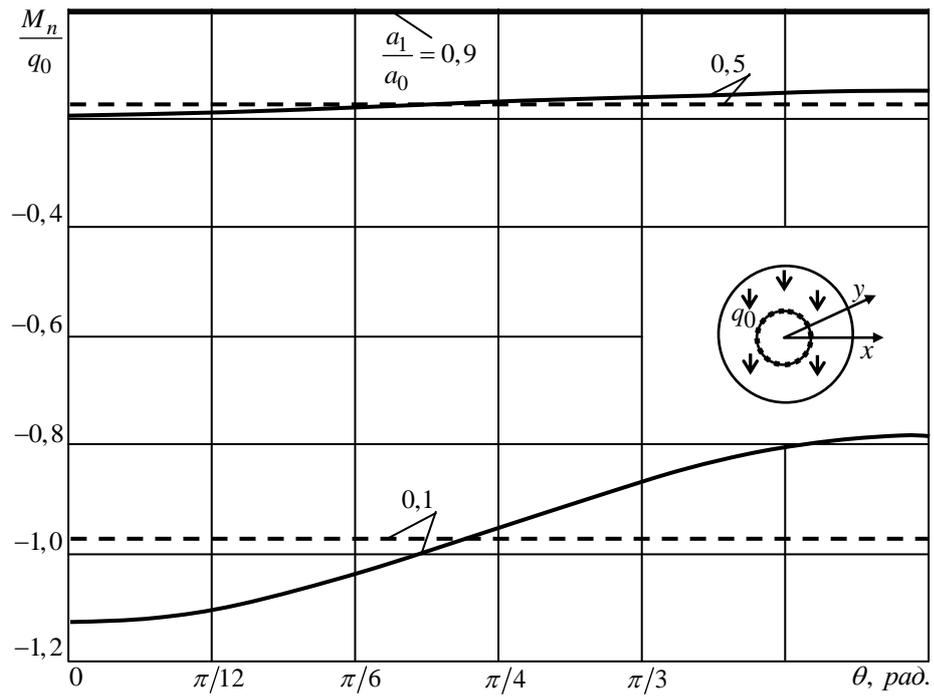


Рис. Б.3.11. Графики распределения моментов M_n около контура L_0 кругового кольца с жестко заземленным внутренним и свободным внешним контурами при действии давления q_0 по основанию (рис. 3.10) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

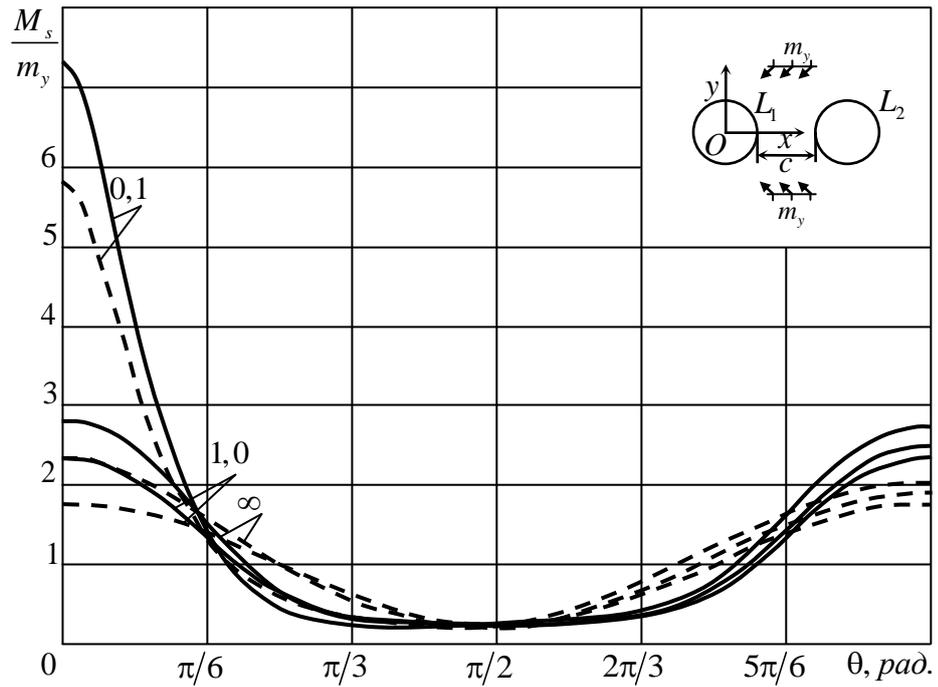


Рис. Б.3.12. Графики распределения моментов M_s около контура L_1 в плите с двумя круговыми незагруженными отверстиями (рис. 3.11) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

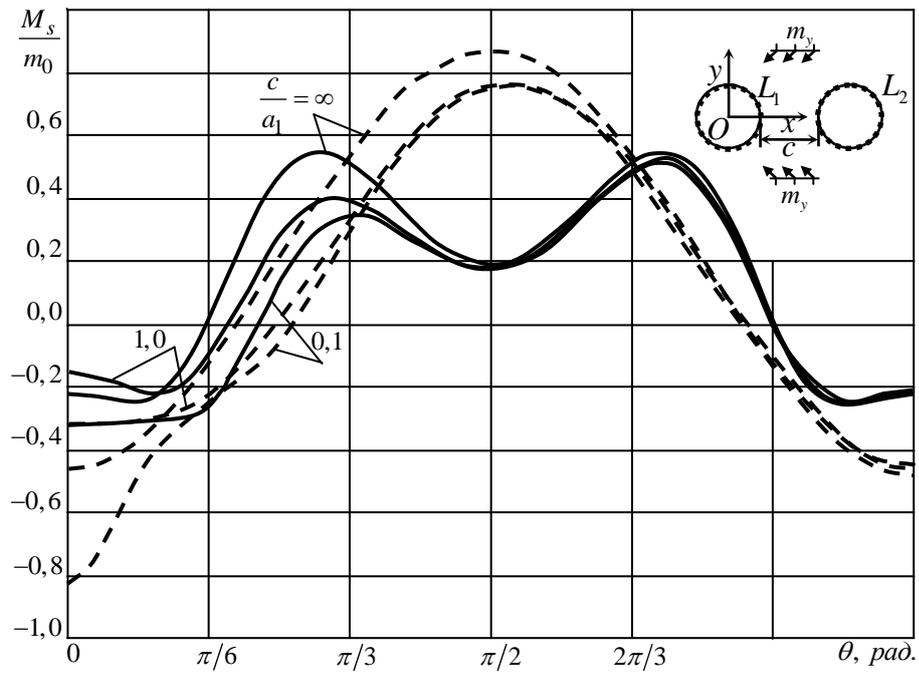


Рис. Б.3.13. Графики распределения моментов M_s около контура L_1 в плите с двумя круговыми жестко зацементированными отверстиями (рис. 3.11) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

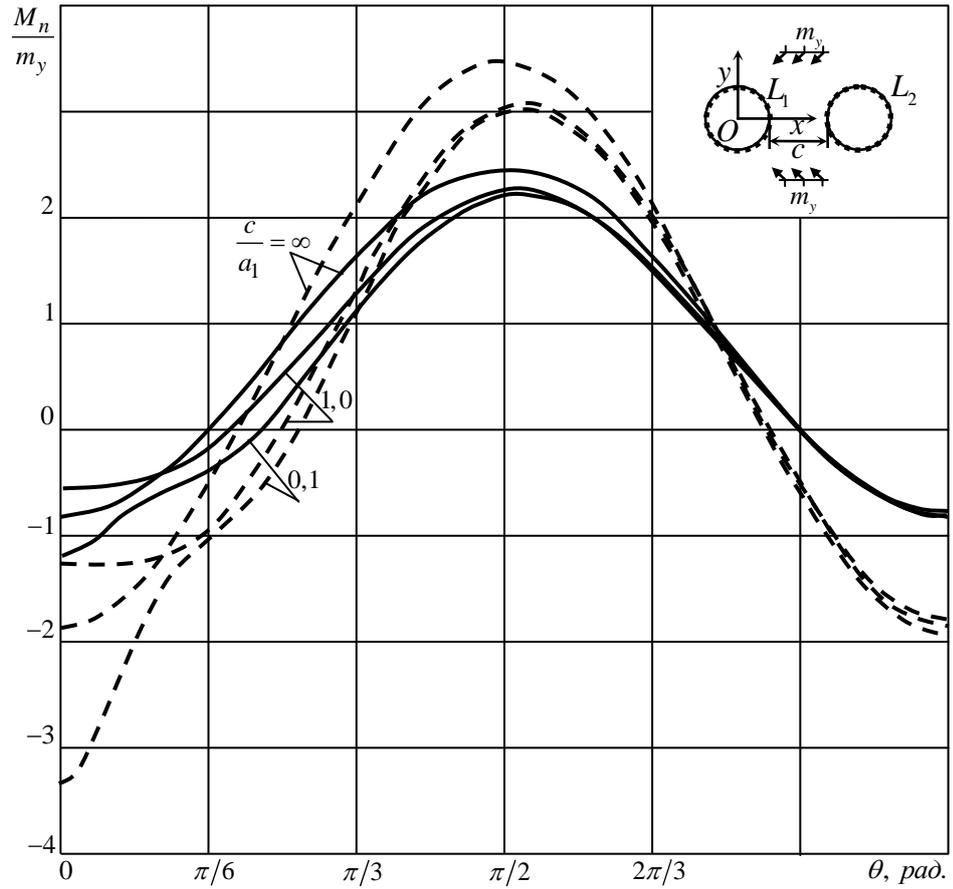


Рис. Б.3.14. Графики распределения моментов M_n около контура L_1 в плите с двумя круговыми жестко защемленными отверстиями (рис. 3.11) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

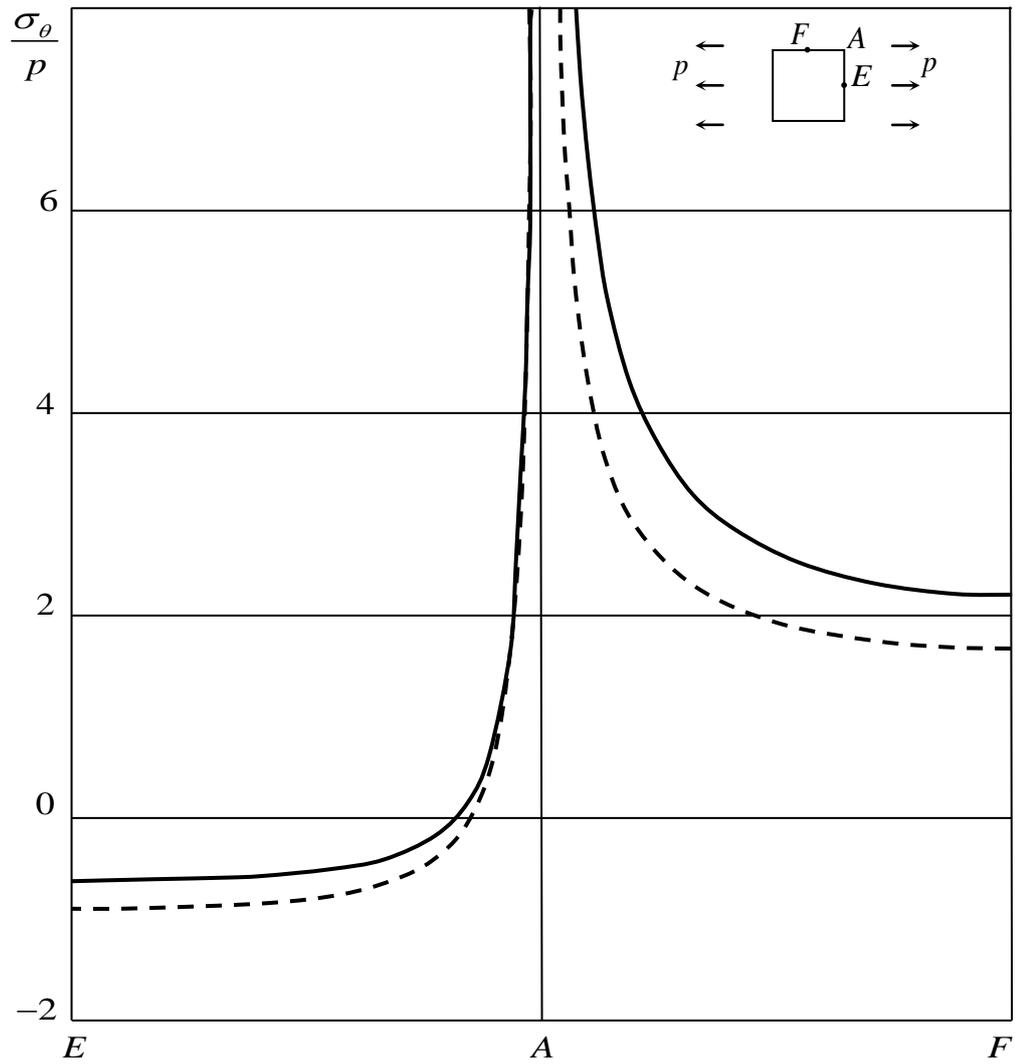


Рис. Б.3.15. Графики изменения напряжений σ_θ для бесконечной пластинки с квадратным отверстием (рис. 3.13) вдоль сторон отверстия для материалов авиационная фанера (сплошные линии) [143] и М1 (штриховые линии) (плоская задача)

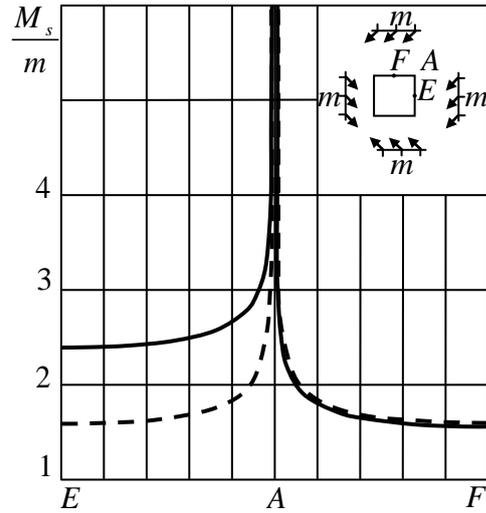


Рис. Б.3.16. Графики изменения моментов M_s для бесконечной плиты с квадратным отверстием (рис. 3.14) вдоль сторон отверстия при всестороннем изгибе для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

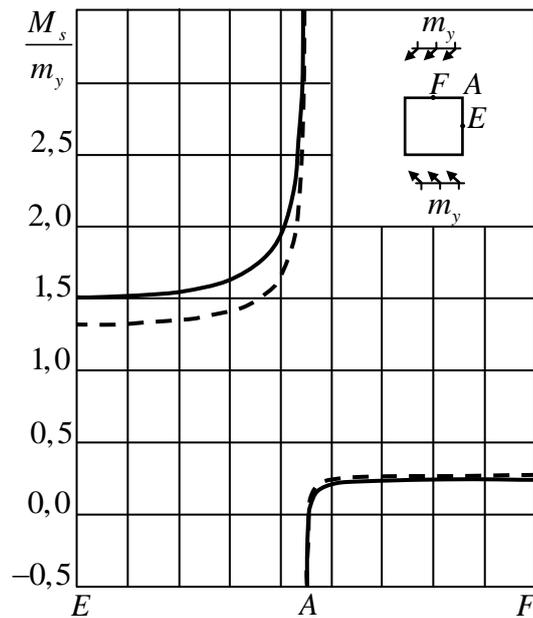


Рис. Б.3.17. Графики изменения моментов M_s для бесконечной плиты с квадратным отверстием (рис. 3.14) вдоль сторон отверстия при одностороннем изгибе для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

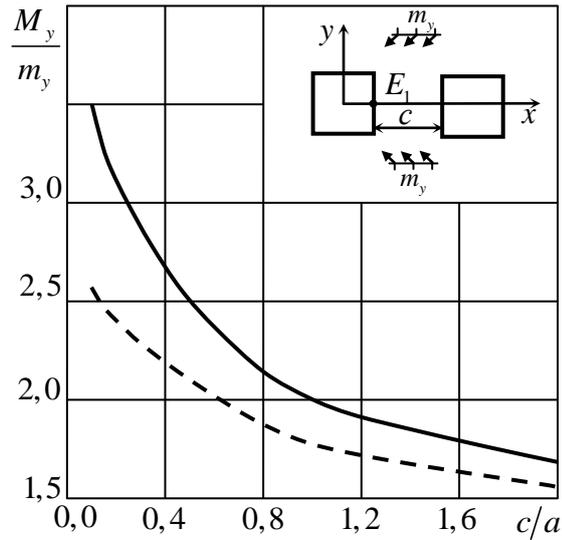


Рис. Б.3.18. Графики изменения моментов M_y для бесконечной плиты с двумя квадратными отверстиями (рис. 3.15) в точке перемычки E_1 при одностороннем изгибе для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

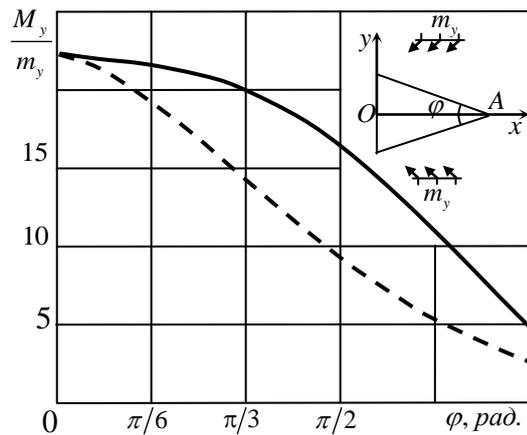


Рис. Б.3.19. Графики изменения моментов M_y для бесконечной плиты с треугольным отверстием (рис. 3.16) в точке A вблизи вершины отверстия при одностороннем изгибе для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

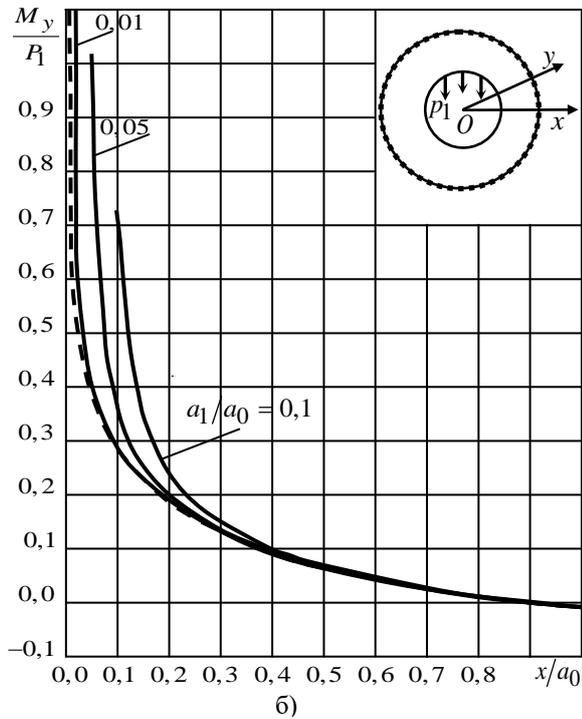
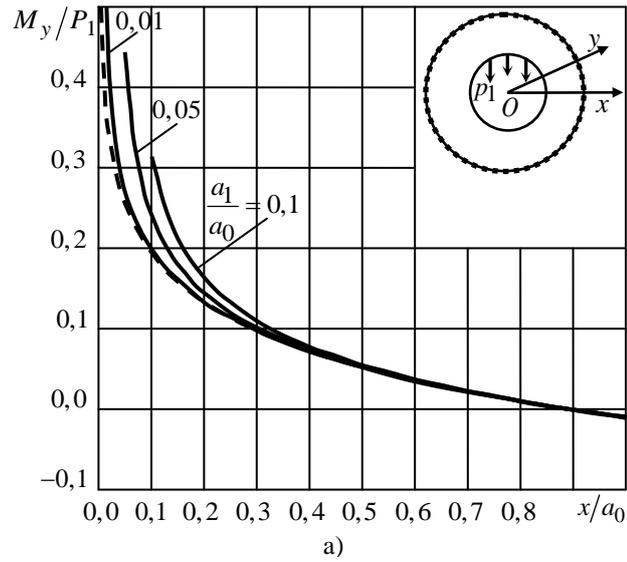


Рис. Б.3.20. Графики изменения моментов M_y/P_1 в точках оси Ox для кругового кольца с жестко заземленным внешним и нагруженным усилиями p_1 внутренним контурами (сплошные линии) (рис. 3.7) и для кругового диска с жестко заземленным контуром, находящегося под действием сосредоточенной силы P_1^0 в центре (штриховые линии) (рис. 2.9) для материалов М2 (рис. Б.3.20 б) и М1 (рис. Б.3.20 а)

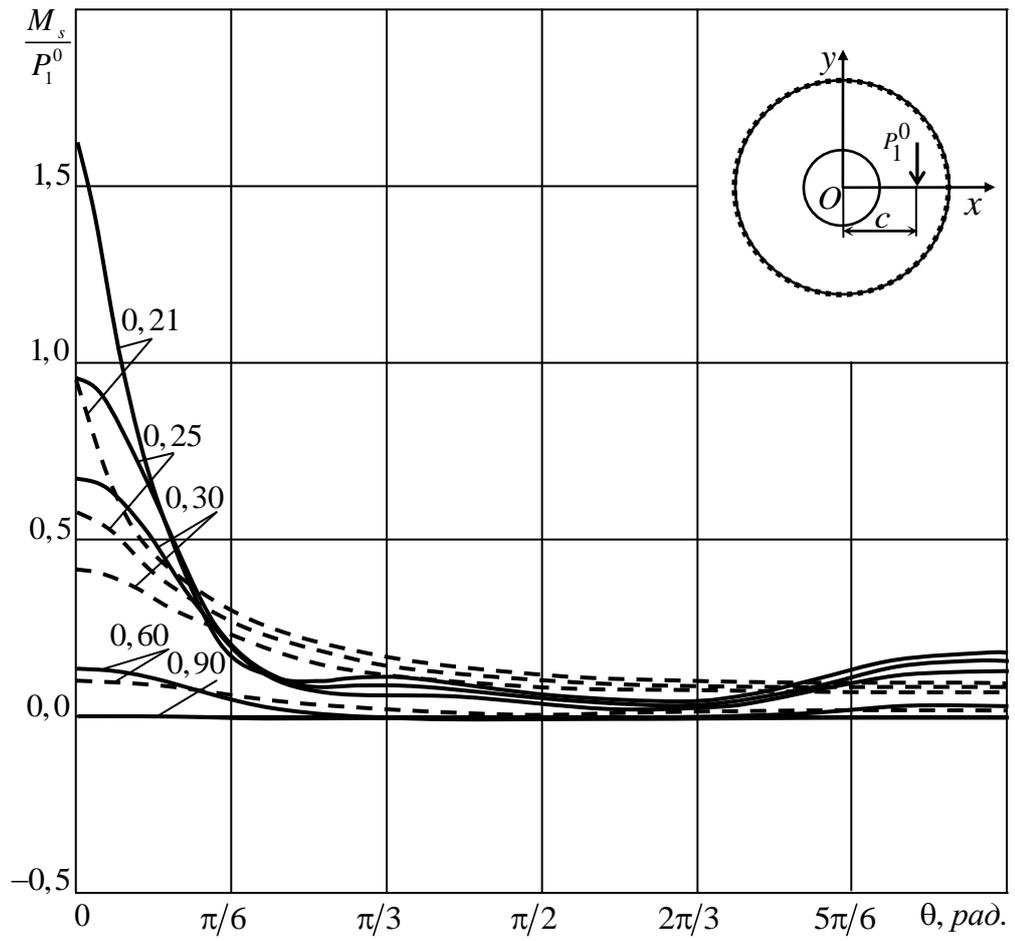


Рис. Б.3.21. Графики распределения моментов M_s в точках контура L_1 кругового кольца с жестко заземленным внешним контуром при действии сосредоточенной силы P_1^0 (рис. 3.18) для материалов М2 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

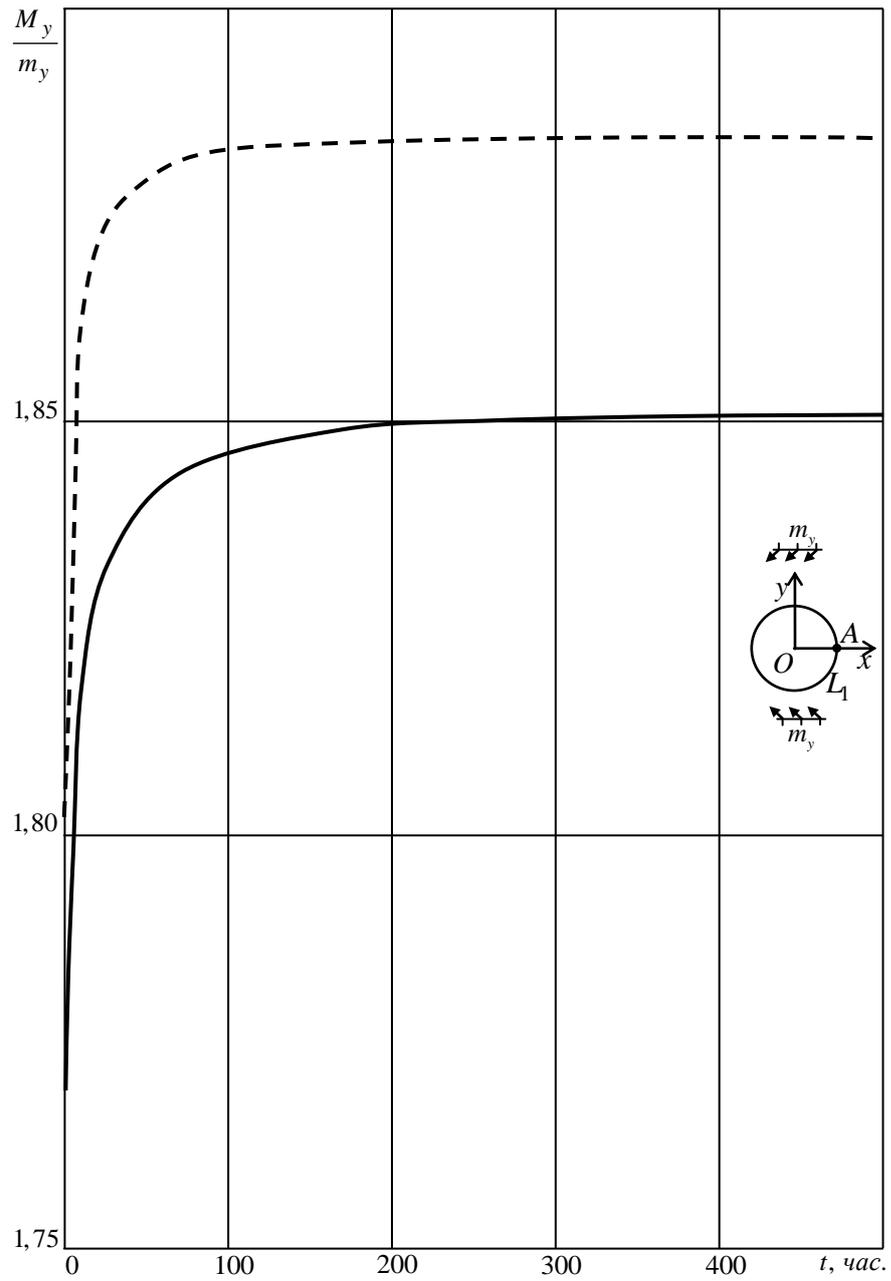


Рис. Б.4.1. Графики изменения моментов M_y в точке A плиты из алюминия (сплошные линии) и меди (штриховые линии) с круговым незагруженным отверстием (рис. 4.2) в зависимости от времени.

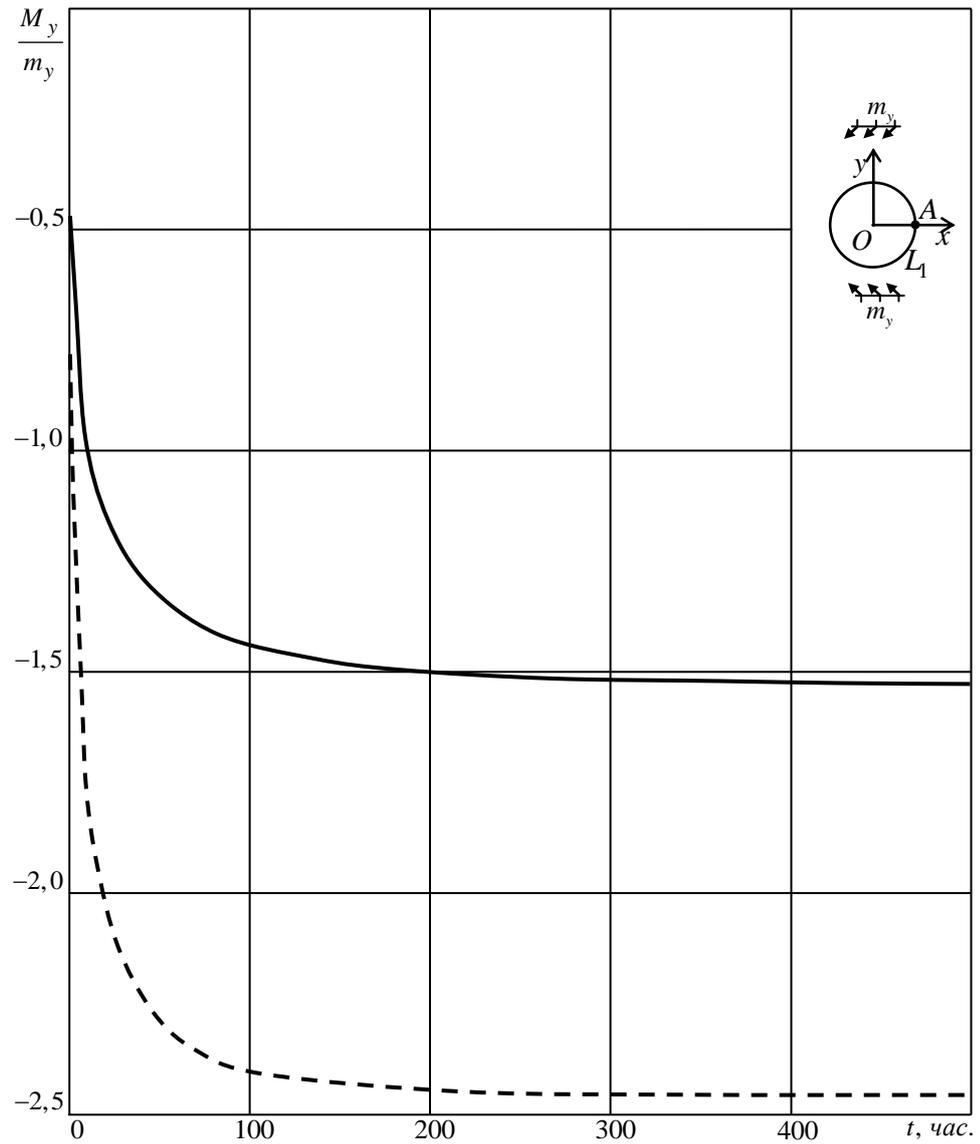


Рис. Б.4.2. Графики изменения моментов M_y в точке A плиты из алюминия (сплошные линии) и меди (штриховые линии) с круговым жестко подкрепленным отверстием (рис. 4.2) в зависимости от времени.

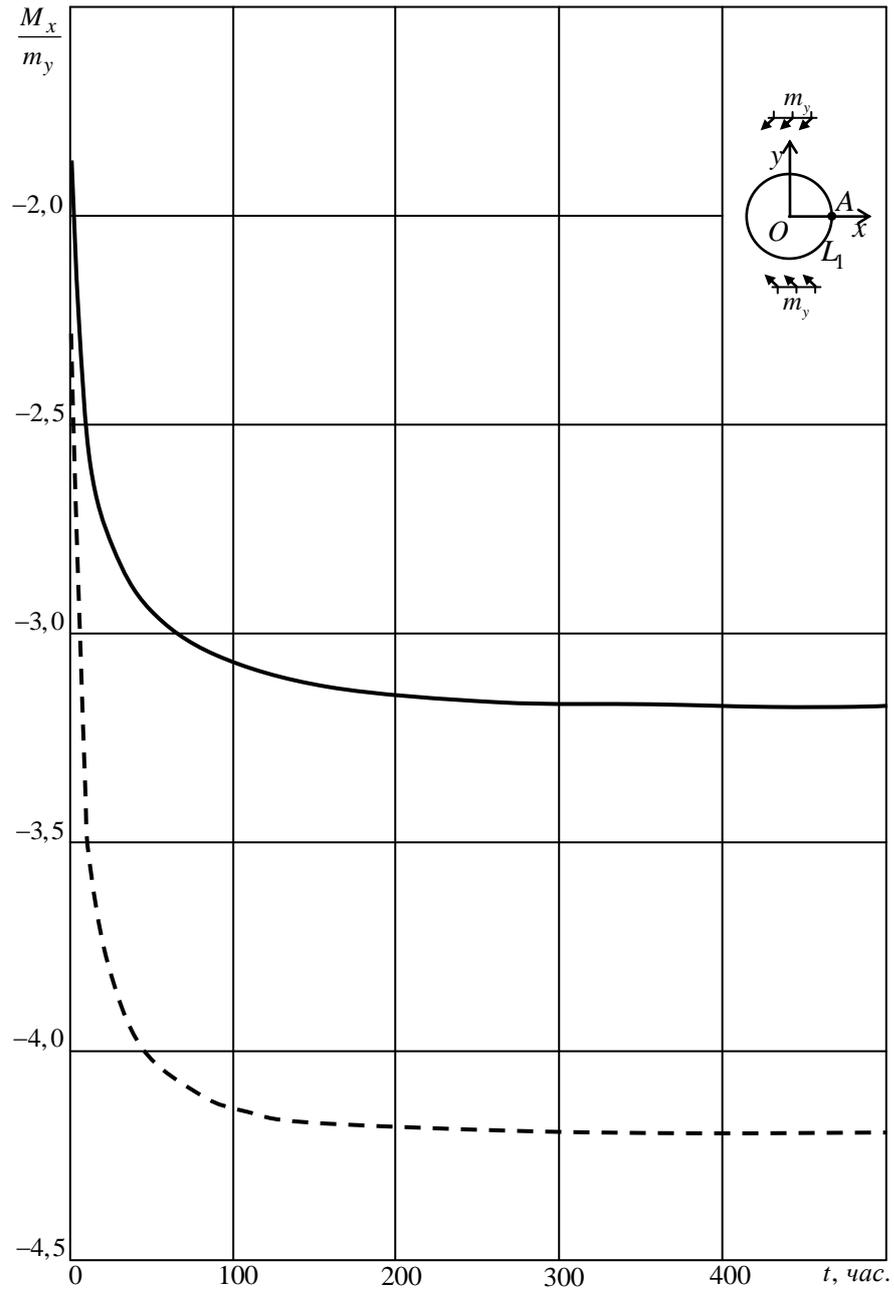


Рис. Б.4.3. Графики изменения моментов M_x в точке A плиты из алюминия (сплошные линии) и меди (штриховые линии) с круговым жестко подкрепленным отверстием(рис. 4.2) в зависимости от времени.

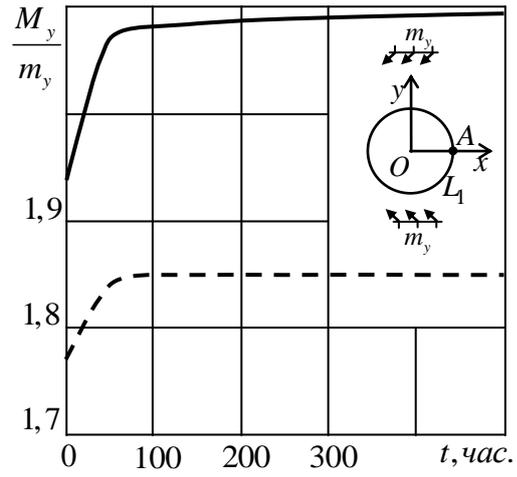


Рис. Б.4.4. Графики изменения моментов M_y для плиты с круговым отверстием (рис. 4.2) в зависимости от времени приложения нагрузки для материалов М4 (сплошные линии) и М1 (штриховые линии)

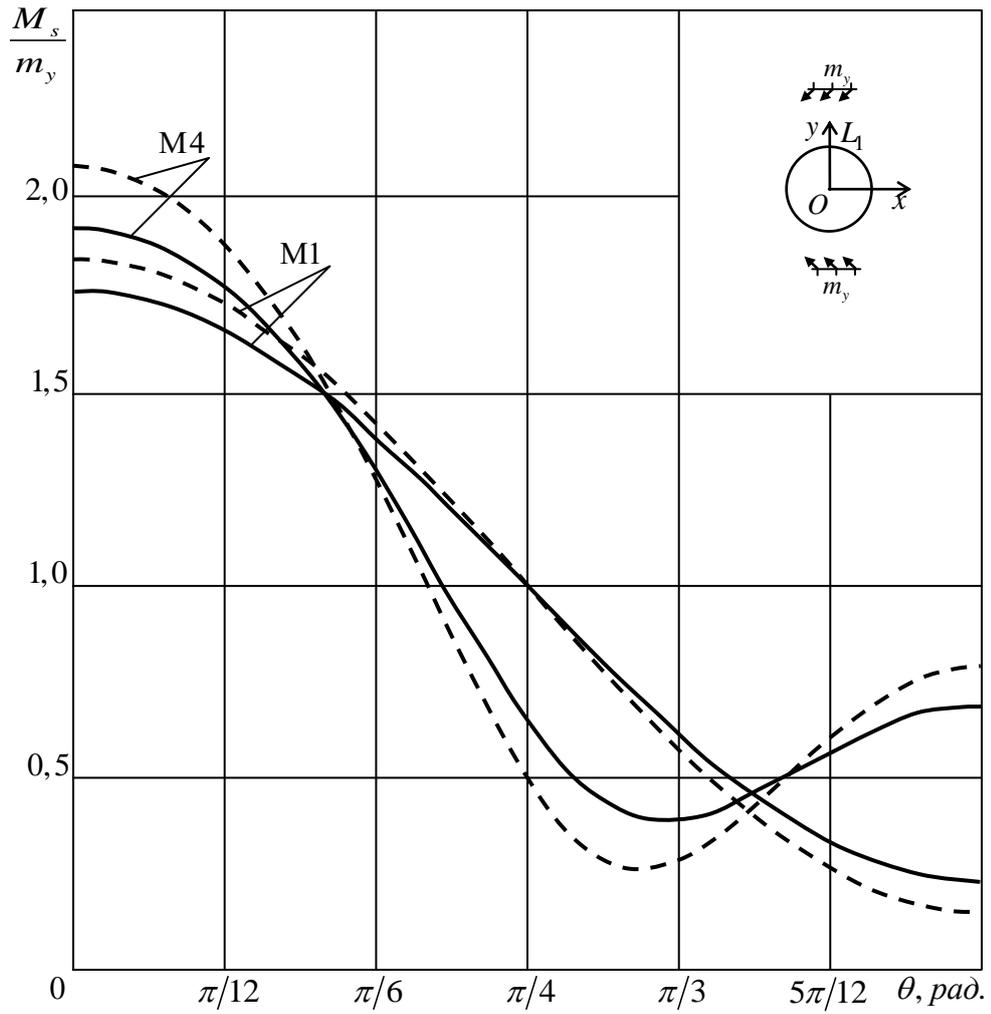


Рис. Б.4.5. Графики распределения моментов M_s в точках контура бесконечной плиты с круговым отверстием (рис. 4.2) при действии $M_y^\infty = m_y$ в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях.

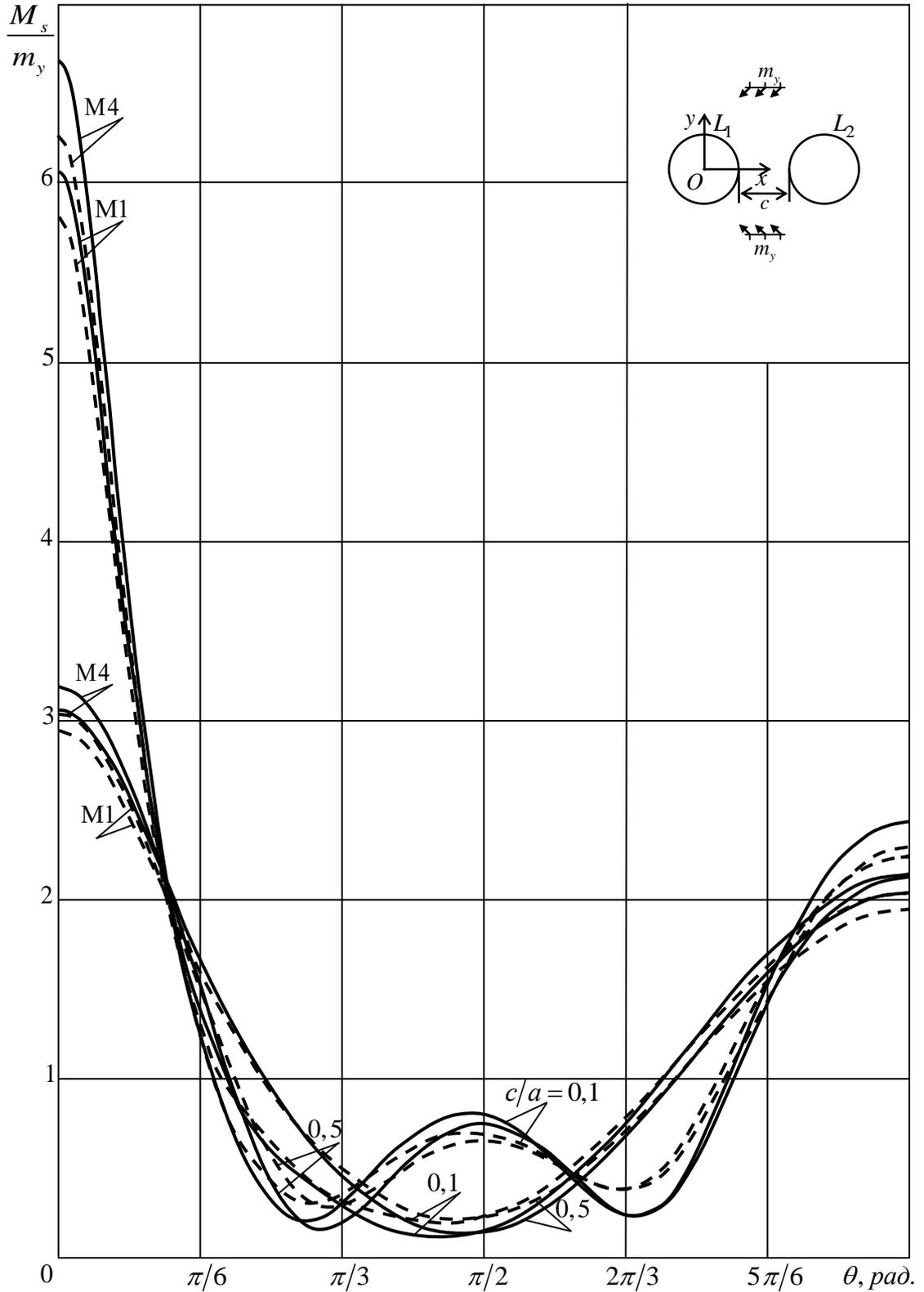


Рис. Б.4.6. Графики распределения моментов M_s в точках левого контура L_1 бесконечной плиты с двумя круговыми отверстиями (рис. 4.4) в зависимости от отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу и времени приложения нагрузки при действии $M_y^\infty = m_y$ в начальном (сплошные линии) и стационарном (штриховые линии) состояниях.