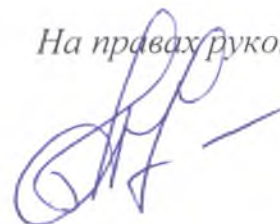


Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный университет»

На правах рукописи



Моисеенко Игорь Алексеевич

**ЗАДАЧИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ
С УСЛОЖНЕННЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ
И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

Специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк – 2018

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», г. Донецк

Научный консультант **Сторожев Валерий Иванович,**
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Чехов Валерий Николаевич,**
доктор физико-математических наук, профессор,
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» Таврическая академия, г. Симферополь, заведующий кафедрой прикладной математики

Провоторов Вячеслав Васильевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет», г. Воронеж, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей

Вовк Леонид Петрович,
доктор технических наук, профессор,
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Горловский автомобильно-дорожный институт Донецкого национального технического университета», г. Горловка, заведующий кафедрой математического моделирования

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт машиноведения им. А.А. Благонравова»
Российской академии наук, г. Москва

Защита состоится 18 декабря 2018 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 01.016.03 при ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 83001, г. Донецк, проспект Театральный, 13, ауд. 264.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 83001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, <http://science.donnu.ru>.

Автореферат разослан _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 01.016.03
доктор технических наук, профессор



В.К. Толстых

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Упругие тела цилиндрической геометрии представляют собой важнейший по фундаментальной и прикладной значимости класс объектов математического моделирования в волновой механике деформируемых сред. Это связано с самой широкой распространенностью деталей, конструкционных и структурных элементов цилиндрической формы в машинах, приборах и строительных сооружениях, в природных объектах и живых организмах. Однако, несмотря на длительную историю разносторонних содержательных научных исследований по данной проблематике, и на сегодняшний день можно констатировать существование целого ряда ее современных, крайне актуальных, но малоизученных аспектов, требующих разработки новых методов теоретического численно-аналитического анализа, углубленной систематизации и обобщения результатов численных экспериментов, синтеза рекомендаций по использованию полученных закономерностей и выводов в сферах практических приложений.

Наличие открытых неисследованных вопросов волновой динамики цилиндрических тел связано как со сложностями теоретического анализа многих типов ранее сформулированных задач данного класса, так и с появлением новых вариантов их постановки в контексте современных запросов инновационных научно-технических отраслей и достижений в технологиях изготовления и обработки новых конструкционных материалов, в том числе формируемых методами 3D печати. В этой связи, может быть выделен круг неклассических проблем волновой механики цилиндрических деформируемых тел, в которых, наряду с традиционными элементами формулировки моделей динамического деформирования полых и сплошных изотропных цилиндров однослойной и многослойной структуры, ставятся задачи последовательного комплексного учета специфических факторов усложнения физико-механических и геометрических свойств. В частности, это учет определенных типов анизотропии механических свойств для материалов однослойных и многослойных цилиндров; учет нескольких типов непрерывной неоднородности их физико-механических свойств (свойств инновационных функционально-градиентных материалов); учет пьезоэлектрических и пьезомагнитных свойств; учет эффектов диссипативного рассеяния энергии волновых колебаний; комплексный учет свойств геометрической и физической нелинейности в процессах динамического деформирования рассматриваемых объектов. Актуальным элементом неклассической постановки проблем волновой механики цилиндрических деформируемых тел является также учет неканонической геометрии сечений рассматриваемых объектов, в частности анализ волновой динамики полых и сплошных однослойных и многослойных цилиндров с криволинейными сечениями, с сечениями, имеющими вырезы и вставки секторной и сегментной формы. К рассматриваемой группе проблем могут быть отнесены и задачи волновой механики цилиндров со смешенными неклассическими вариантами задания краевых условий на различных участках граничных поверхностей, а также задачи волновой механики цилиндров

содержащих жидкость либо вмещенных в акустическую среду. Элементами неклассической постановки проблем волновой механики цилиндрических деформируемых тел выступают различные сочетания всего ряда перечисленных факторов.

Создание новых версий численно-аналитических методов решения задач волновой механики цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами помимо реализации целевого задания по дальнейшему развитию методологической базы фундаментальных и прикладных исследований, обеспечивает также дополнительную верификацию результатов применения к рассматриваемым проблемам прямых численных методов, создает возможности для более эффективного поиска и обобщения параметрических закономерностей в исследуемых процессах.

Таким образом, с учетом круга представленных соображений, тема данной диссертационной работы, посвященной теоретическому численно-аналитическому исследованию неклассических проблем волновой механики цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, может быть отнесена к актуальным темам научных исследований по современным проблемам важнейшего народно-хозяйственного значения.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Представленные в работе исследования связаны с тематикой конкурсных исследовательских проектов: «Резонансные явления и эффекты локализации волновых полей в геометрически сложных существенно анизотропных телах и элементах конструкций» (МОНУ, №0199U001502, 1999-2000гг.); «Возбуждение, распространение и рассеяние нелинейных упругих волн в трехмерных кристаллических пластинах и цилиндрических телах» (МОНУ, №0101U005370, 2001-2003гг.); «Волновые процессы в низкосимметричных пьезокристаллических и пьезомагнитных телах пространственной геометрии» (МОНУ, №0104U002148, 2004-2006гг.); «Нормальные и поверхностные волны деформаций в трехмерных анизотропных волноводах усложненного геометрического строения» (МОНУ, №0107U001464, 2007-2009гг.); «Пространственные поля линейных и нелинейных нормальных волн деформаций в составных анизотропных телах призматического, цилиндрического и слоистого строения» (МОНУ, №0107U003466, 2010-2012гг.); «Волны деформаций в анизотропных телах с локализованными участками неоднородности геометрических и физико-механических свойств» (МОНУ, МОН ДНР, №0113U001529, 2013-2016гг.); «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (МОН ДНР, №0117D000071, 2017-2019гг.). Основные результаты диссертационной работы включены в отчеты по указанным НИР.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является разработка и обобщение систематизированных результатов реализации теоретических численно-аналитических методов решения неклассических пространственных задач волновой механики протяженных деформируемых цилиндрических тел с

усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

- построение базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрах из прямолинейно ортотропных материалов с гладкой границей поперечного сечения;
- построение базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью;
- построение базисных множеств аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводов с секторно-круговым и секторно-кольцевым сечением при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности;
- построение базисных множеств аналитических и численно-аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных волноводов с сечением в виде кругового сектора в случае свободных либо жестко закрепленных радиальных участков граничной поверхности;
- исследование асимптотических свойств решений рассматриваемых спектральных задач;
- получение и исследование дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах исследуемого геометрического строения со свободными и жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности с радиальной неоднородностью экспоненциально степенного типа на основе использования базисных множеств решений уравнений модели и вспомогательных спектральных задач;
- получение и исследование дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью;
- разработка методики исследования малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования;
- разработка и реализация методик анализа параметрических закономерностей в топологическом строении и составе дисперсионных спектров нормальных волн, в распределениях их фазовых и групповых скоростей, а также в кинематических характеристиках волновых движений

применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами;

- обобщение и систематизация полученных новых фундаментальных данных о закономерностях влияния особенностей усложненной геометрии сечений, типов граничных условий, радиальной неоднородности, анизотропии и нелинейности физико-механических свойств материалов волноводов на структуры дисперсионных спектров и особенности кинематических характеристик исследуемых нормальных волн, представляющие первоочередной интерес для сферы практических приложений.

Объектом исследования являются математические модели волновой механики деформируемых цилиндрических тел с неклассическими геометрическими и физико-механическими свойствами.

Предметом исследования являются численно-аналитические методы решения и систематизированные результаты параметрического исследования задач о спектрах и свойствах упругих волн в цилиндрах с сечениями усложненной геометрии из радиально-неоднородных анизотропных линейных и нелинейных материалов.

На защиту выносятся:

1. Методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования в форме кратных степенных рядов комплексных переменных для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрах из прямолинейно ортотропных материалов с гладкой границей поперечного сечения.

2. Методики построения базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования трансверсально-изотропных и ортотропных в окружном направлении цилиндров с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн, формулируемым в цилиндрических областях кругового и кольцевого поперечного сечения.

3. Методика построения базисных множеств аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводов с секторно-круговым и секторно-кольцевым сечением при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности.

4. Методики построения базисных множеств аналитических и численно-аналитических решений вспомогательных спектральных задач для случаев однородных условий свободных либо жестко закрепленных примыкающих к ребру конечных участков радиальных граней граничной поверхности трансверсально-изотропных клиновидных цилиндров с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн, формулируемым в цилиндрических областях секторно-кругового поперечного сечения.

5. Методики получения дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах

исследуемого геометрического строения со свободными и жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности с радиальной неоднородностью экспоненциально степенного типа на основе использования базисных множеств решений уравнений модели и вспомогательных спектральных задач.

6. Методики учета в решениях задач о распространении нормальных волн в свободных и жестко закрепленных трансверсально-изотропных волноводах секторно-кругового сечения с радиальной неоднородностью материала экспоненциально степенного типа всех членов, порождающих возможные типы особенностей в поле напряжений в окрестности сингулярных точек границы волновода.

7. Методика построения и анализа дисперсионных соотношений в задачах о спектрах нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью.

8. Методика исследования малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

9. Установленные и обобщенные параметрические закономерности в топологическом строении и составе дисперсионных спектров, в распределениях фазовых и групповых скоростей нормальных волн, а также в кинематических характеристиках линейных нормальных волн и с учетом малых нелинейных ангармонических эффектов волновых движений применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

Научная новизна полученных результатов.

1. Впервые разработаны методики построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндров кругового и кольцевого поперечного сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью для краевых задач о спектрах осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн.

2. Впервые в замкнутой форме с использованием функций Уиттекера построены базисные наборы частных решений системы уравнений волновой механики для задач о распространении нормальных крутильных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндрах кругового сечения для двух частных случаев экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала.

3. Впервые для задач о распространении нормальных крутильных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндрах кольцевого сечения для двух специальных случаев экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала в замкнутой форме построены базисные наборы частных решений уравнений волновой динамики, представленные через функции Уиттекера и интегралы биконфлюэнтного уравнения Гойна.

4. Впервые разработана методика построения и исследования

аналитических представлений базисных частных решений вспомогательных спектральных задач для анализа проблемы распространения нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах секторно-кругового и секторно-кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности.

5. Впервые поставлены и решены вспомогательные спектральные задачи для исследования проблемы распространения нормальных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах с радиальной неоднородностью материала экспоненциально-степенного типа, имеющих поперечные сечения в виде кругового сектора со свободными либо жестко закрепленными радиальными участками граничной поверхности. Исследованы основные свойства полученных решений и разработана методика построения дисперсионных соотношений для волн исследуемого типа с использованием полученных базисных множеств решений соответствующих вспомогательных спектральных задач.

6. Впервые решена задача учета в решениях дисперсионных задач о распространении нормальных волн в свободных и жестко закрепленных трансверсально-изотропных волноводах секторно-кругового сечения с радиальной неоднородностью материала экспоненциально степенного типа членов, порождающих все возможные типы особенностей в поле напряжений в окрестности сингулярных точек границы волновода.

7. Разработана модифицированная методика получения и исследования дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью.

8. Предложена модифицированная методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования в форме кратных степенных рядов комплексных переменных для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрах из прямолинейно ортотропных упругих материалов с гладкой границей поперечного сечения.

9. Впервые реализовано численно-аналитическое исследование малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении монохроматических осесимметричных волн кручения вдоль протяженных трансверсально-изотропных цилиндров с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

10. Впервые осуществлены разработка и реализация методик анализа параметрических закономерностей в топологическом строении и составе дисперсионных спектров нормальных волн, в распределениях их фазовых и групповых скоростей, а также в кинематических характеристиках волновых движений применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

11. Впервые даны обобщение и систематизация полученных новых фундаментальных данных о закономерностях влияния особенностей усложненной геометрии сечений, типов граничных условий, радиальной

неоднородности, анизотропии и нелинейности физико-механических свойств материалов волноводов на структуры дисперсионных спектров и особенности кинематических характеристик исследуемых нормальных волн, представляющие первоочередной интерес для сферы практических приложений.

Методы исследования. Исследование базируется на линейной модели динамического деформирования однородных и неоднородных анизотропных упругих сред, а также модели геометрически и физически нелинейного деформирования в рамках применения теории конечных деформаций и представления упругого потенциала с квадратичными и кубическими членами по деформациям. Используются аппарат теории систем дифференциальных уравнений в частных производных; методы матричной алгебры; теория разложений в степенные и обобщенно степенные ряды; методы теории матричных рекуррентных уравнений; теория диофантовых приближений; теория решения эллиптических спектральных задач; теория специальных функций; дискретный и интегральный метод наименьших квадратов.

Достоверность и обоснованность основных результатов и выводов работы обосновывается использованием апробированных математических моделей исследуемых деформационных процессов; строгостью и корректностью постановки рассматриваемых задач без привнесения упрощающих гипотез геометрической природы; использованием при исследованиях апробированных корректных математических методов; верификацией полученных решений по критериям удовлетворения уравнениям математической модели и граничным условиям рассматриваемых краевых задач; применением критериев сходимости к представлениям, получаемым в форме функциональных рядов; согласованностью результатов, полученных разрабатываемыми методами в предельных частных случаях, с опубликованными результатами других исследователей.

Теоретическая значимость результатов работы заключается в создании эффективных численно-аналитических методов решения новых классов задач волновой механики цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами в рамках логики внутринаучного развития фундаментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела.

Практическое значение результатов работы заключается в том, что разработанные методы и алгоритмы их реализации, закономерности и выводы относительно структуры полных дисперсионных спектров, кинематических и высокочастотных асимптотических свойств нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных функционально-градиентных цилиндрах, полученные на основе проведенных численных экспериментов, являются инструментами предпроектного моделирования и эффективных технических решений в ряде современных научно-промышленных отраслей. В частности, это проектирование и конструкторские расчеты новых поколений волноводных компонентов акустоэлектронных устройств; технологии неразрушающего ультразвукового контроля

промышленных изделий, в частности продукции трубного производства, упрочняемых осей и валов в ответственных конструкциях двигателестроения; ультразвуковая диагностика конструкций из новых поколений неоднородных нанокompозитных материалов; моделирование и расчеты нелинейных акустоэлектронных устройств для интегрирования и усиления информационных сигналов.

Личный вклад автора. Все основные аналитические и численные результаты представленных в диссертации исследований получены лично автором работы. В совместно проведенных исследованиях и опубликованных работах, соавторам А.С. Космодамианскому [17] и В.И. Сторожеву [7, 8, 22, 27, 36, 39, 41, 44-47, 50] принадлежат участие в постановке рассматриваемых задач и рекомендации по схемам анализа и обобщения полученных результатов; соавторам Вит.В. Волчкову [13], В.А. Шалдырвану [25] принадлежат участие в выработке рекомендаций по схемам анализа и обобщения полученных результатов; соавторам Ю.П. Бай [33], А.И. Дзундзе [24, 26], А.В. Елагину [5, 6, 8, 36, 38], Е.С. Кисель [15], В.А. Моисеенко [1, 12, 24, 26], М.С. Полуказаковой [33], С.А. Прийменко [25, 48], Н.В. Приходько [35, 37], В.В. Пузыреву [2], О.Ю. Сидаш [43-47, 49], О.Д. Смоктий [20], Р.Р. Троян [3, 4, 17, 19, 29, 31, 32], В.А. Цапову [27], М.Н. Чернову [7] принадлежат участие в разработке программных приложений для осуществления численных экспериментов на базе предложенных методов, а также участие в обработке и систематизации результатов численного анализа.

Апробация результатов работы. Основные положения исследования докладывались и обсуждались на ряде научных форумов различного уровня, в том числе на: Международной научной конференции «Современные проблемы концентрации напряжений» (Донецк, 21-25 июня 1998 г.); XII Международной научной школе им. академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». (Симферополь, 16-22 сентября 2002 г.); Акустическом симпозиуме Консонанс - 2005 (Киев, 27-29 сент. 2005 г.), IX Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твёрдого тела» (Донецк, 1-6 сентября 2005 г.); International Seminar «Days on Diffraction'2006» (Saint Petersburg, May 30 – June 2, 2006); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.); IV и VII Международных научных конференциях «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006 г., 11-14 июня 2013 г.); VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013 г.); XVII и XVIII Международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г., 7-10 ноября 2016 г.); IX – XIII Всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 26-30 мая 2014 г., 25-30 мая 2015 г., 23-27 мая 2016 г., 29 мая – 3 июня 2017 г., 31 мая – 3 июня 2018 г.); IX Международной научной конференции «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур»

(Львов, 15-19 сентября 2014 г.); Международной научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.И. Бородина (Донецк, 31 марта 2016 г.); I Международной научной конференции «Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности» (Донецк, 16-18 мая 2016 г.); 5-th International conference, Dedicated to the 90-th Anniversary of Academician V.L. Rvachev «Nonlinear Dynamics – 2016» (Kharkov, September 27–30, 2016); III международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития современной науки: от теории к практике» по итогам 2017 года» (Троицк, 20-24 ноября, 2017 г.); VII Международная научно-практической интернет-конференции «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты» (Донецк, 25 мая 2018 г.). По циклам опубликованных работ в рамках тематики диссертационного исследования результаты докладывались на заседаниях объединенного научного семинара по математическим проблемам механики сплошной среды кафедр теории упругости и вычислительной математики, прикладной механики и компьютерных технологий ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» и отдела аналитических методов механики горных пород ГУ «Институт прикладной математики и механики», в полном объеме работа докладывалась на научном семинаре по механике сплошных сред кафедры теории упругости и вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А. Калоерова (2002 – 2018 гг.).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 50 научных работах. В их числе 23 статьи в реферируемых изданиях, включенных в перечень ВАК ДНР, из которых 7 статей в изданиях, включенных в Международные наукометрические базы.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, восьми разделов, заключения с основными выводами и результатами, списка литературы из 399 источников. Работа содержит 86 рисунков и 6 таблиц, изложена на 297 страницах, из которых 254 страницы занимает основное содержание.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы и ее связь с научными программами; сформулированы цель, задачи исследования и выносимые на защиту положения работы; указаны научная новизна, фундаментальная и практическая значимость полученных результатов; охарактеризованы методы исследования, достоверность и обоснованность основных положений и выводов работы, а также приведены данные о публикациях и апробациях по результатам отраженных в диссертации исследований.

В первом разделе работы представлен анализ состояния исследований по проблемам волнового деформирования цилиндрических тел и дана постановка рассматриваемых в диссертации актуальных научно-практических задач в

рассматриваемой области. Охарактеризован и проанализирован вклад в решение относящихся к рассматриваемой проблематике научных задач, внесенный в различные периоды времени исследованиями ряда отечественных и зарубежных школ механиков. К их числу принадлежат работы А.В. Белокозя, И.А. Викторова, И.И. Воровича, И.П. Гетмана, А.Я. Григоренко, Ю.В. Гуляева, Г.Л. Комисаровой, А.С. Космодамианского, П.Е. Краснушкина, С. Ли, И.А. Лозы, Р. Митра, А.В. Наседкина, Ю.А. Устинова, Н.А. Шульги, А.М. Abd-Alla, J.D. Achenbach, B.A. Auld, J.L. Rose, M.J. Berliner, A. Bostrom, A.D. Burden, P. Chadwick, C. Chree, S.K. Datta, G.S. Field, K.F. Graff, F. Honarvar, J.R. Hutchinson, H.D. McNiven, A.H. Meitzler, J. Miklowitz, R.D. Mindlin, I. Mirsky, P.B. Nagy, A.H. Nayfeh, J. Oliver, L. Pochhammer, M. Redwood, N. Sugimoto, T.C.T. Ting, J. Zemanek в области получения и анализа фундаментальных свойств и спектров нормальных волн деформаций в упругих волноводах; работы Ю.И. Бобровницкого, А.О. Ватульяна, Е.В. Глушкова, В.В. Калининчука, В.Е. Лямова, А.И. Потапова, Я.Я. Рушицкого, С. Baron, T. Chen, X.-Q. Fang, G.A. Kardomateas, S.R. Mahmoud, P.A. Martin, I. Tsukrov в области исследования закономерностей волнового деформирования анизотропных и непрерывно-неоднородных тел, композитов и метаматериалов; работы О.К. Аксентян, В.М. Александрова, Р.К. Алексаняна, А.О. Ватульяна, Л.П. Вовка, И.И. Воровича, С.Х. Геворкяна, А.И. Каландия, В.А. Кондратьева, A.H. England, G.B. Sinclair, M.L Williams в области исследования особенностей в полях статических напряжений, а также динамических напряжений, генерируемых при колебаниях и распространении упругих волн в упругих телах и элементах конструкций; работы В.Т. Гринченко, В.Т. Маципуры, В.В. Мелешко, Н.С. Городецкой, О. Папкина, В.Н. Чехова в области анализа свойств бесконечных систем алгебраических уравнений и сходимости представлений в рядах в процессе исследования задач волновой механики, а также ряд научных работ других исследователей. На основе анализа и систематизации материалов опубликованных исследований сформирован вывод об актуальности темы диссертации и важности реализации ее основных заданий.

Далее в разделе в контексте общей постановки представлены рассматриваемые в работе модели волновой динамики – линейная модель динамического деформирования однородных и неоднородных идеально упругих трансверсально-изотропных, цилиндрически-ортотропных и прямолинейно ортотропных сред, а также модель геометрически и физически нелинейного деформирования трансверсально-изотропной среды, базирующейся на теории конечных деформаций и представлениях упругого потенциала с квадратичными и кубическими членами по деформациям. Соотношения используемых моделей формулируются в системах нормированных безразмерных цилиндрических координат $Or\theta z$ и нормированных безразмерных прямоугольных координат $Ox_1x_2x_3$ для нескольких типов протяженных цилиндрических тел, соответственно занимающих области V_j ($j = \overline{1,5}$) и имеющих граничные поверхности G_j , где

$$V_1 = \{r \in [0,1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in \mathbb{R}\}, \quad G_1 = \{r = 1, \theta \in [-\pi, \pi], z \in \mathbb{R}\}; \quad (1)$$

$$V_2 = \{r \in [0,1], \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in \mathbb{R}\}, \quad G_2 = G_2^{(1)} \cup G_2^{(-)} \cup G_2^{(+)},$$

$$G_2^{(1)} = \{r = 1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in \mathbb{R}\}, \quad G_2^{(\pm)} = \{r \in [0,1], \theta = \pm\alpha, z \in \mathbb{R}\}; \quad (2)$$

$$V_3 = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in \mathbb{R}\}, \quad G_3 = G_3^{(1)} \cup G_3^{(2)},$$

$$G_3^{(j)} = \{r = R_j/R_*, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (j = \overline{1,2}),$$

$$V_3 \subseteq \{r \in [1-h, 1+h]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\},$$

$$h = \max\{1 - R_1/R_*, R_2/R_* - 1\} \quad (0 < h < 1, R_1 \leq R_* \leq R_2, R_2/2 < R_*); \quad (3)$$

$$V_4 = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*]; \theta \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\},$$

$$G_4 = G_4^{(1)} \cup G_4^{(2)} \cup G_4^{(-)} \cup G_4^{(+)}, \quad G_4^{(\pm)} = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*], \theta = \pm\alpha, z \in \mathbb{R}\},$$

$$G_4^{(j)} = \{r = R_j/R_*, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in \mathbb{R}\} \quad (j = \overline{1,2}),$$

$$V_4 \subseteq \{r \in [1-h, 1+h]; \theta \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (4)$$

$$V_5 = \{r \in [0, \varphi(\theta)], \theta \in [-\pi, \pi], z \in \mathbb{R}\}, \quad G_5 = \{r = \varphi(\theta), \theta \in [-\pi, \pi], z \in \mathbb{R}\}. \quad (5)$$

В (5) полагается, что $\varphi(\theta)$ ($\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$) задает гладкую по Гельдеру границу конечной односвязной выпуклой, содержащей точку начала координат области поперечного сечения криволинейного цилиндра. Представляемые соотношения записываются относительно характеристик динамического напряженно-деформированного состояния, а именно, отнесенных к нормирующему параметру R_* безразмерных компонентов векторов волновых упругих перемещений (u_r, u_θ, u_z) и (u_1, u_2, u_3) , безразмерных отнесенных к нормирующему параметру c_* компонентов тензоров механических напряжений $\|\sigma_{js}\|$ ($j, s = r, \theta, z$) либо ($j, s = 1, 2, 3$). Указанные соотношения включают системы дифференциальных уравнений движения, а также различные комбинации однородных условий на гладких участках граничных поверхностей волноводов, в том числе: для волноводов с геометрией V_1

$$\sigma_{rs}|_{(r,\theta,z) \in G_1} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad \text{либо} \quad u_s|_{(r,\theta,z) \in G_1} = 0 \quad (s = r, \theta, z); \quad (6)$$

для волноводов с геометрией V_2

$$u_r|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = \sigma_{\theta\theta}|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = u_z|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{rs}|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(1)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad \text{либо} \quad u_s|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(1)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z); \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta s}|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = \sigma_{rs}|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(1)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad \text{либо} \quad u_s|_{(r,\theta,z) \in G_2} = 0 \quad (s = r, \theta, z); \quad (9)$$

для волноводов с геометрией V_3

$$\sigma_{rs}|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(j)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad \text{либо} \quad u_s|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(j)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z), \quad (j = \overline{1,2}); \quad (10)$$

для волноводов с геометрией V_4

$$u_r|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(\pm)}} = \sigma_{\theta\theta}|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(\pm)}} = u_z|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(\pm)}} = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{rs}|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(j)}} = 0 \quad (s=r,\theta,z) \text{ либо } u_s|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(j)}} = 0 \quad (s=r,\theta,z), \quad (j=1,2); \quad (12)$$

для волноводов с геометрией V_5

$$\sigma_{ns}|_{(x_1,x_2,x_3) \in G_5} = 0 \quad (s=1,2,3) \text{ либо } u_s|_{(x_1,x_2,x_3) \in G_5} = 0 \quad (s=1,2,3). \quad (13)$$

Полагается, что рассматриваемые в рамках линейных моделей цилиндрические тела изготовлены из однородных материалов орторомбической системы, а также из функционально-градиентных трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных материалов, параметры плотности ρ и отнесенные к параметру c_* нормированные модули упругости c_{jp} которых соответственно имеют представления $\rho = \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,q}(r))$, $c_{jp} = \tilde{c}_{jp} \exp(f_{\lambda,q}(r))$. Для волноводов геометрии V_1 , V_2 функции $f_{\lambda,q}(r)$ имеют выражения $f_{\lambda,q}(r) = \lambda r^q$, а для волноводов геометрии V_3 , V_4 – выражения $f_{\lambda,q}(r) = \lambda((r-1)/h)^q$. Описываемый данными представлениями характер изменения свойств материалов цилиндров вдоль радиальной координаты волноводов типа V_3 и V_4 с $R_1 = 3$, $R_2 = 5$ представлен на Рисунке 1 функцией $F(r) = \exp(f_{\lambda,q}(r))$ и дает информацию о том, как выбор параметров λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), q ($q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), R_* определяет специфику распределений и зоны локализации эффектов выраженной неоднородности материала в областях V_j ($j=3,4$): $R_* = R_1$ ($h=2/3$), $q=6$ (рис. 1 (а)); $R_* = (R_1 + R_2)/2$ ($h=1/4$) $q=6$ (рис. 1 (б)) и $q=7$ (рис. 1 (в)); $R_* = R_2$ ($h=2/5$), $q=6$ (рис. 1 (г)).

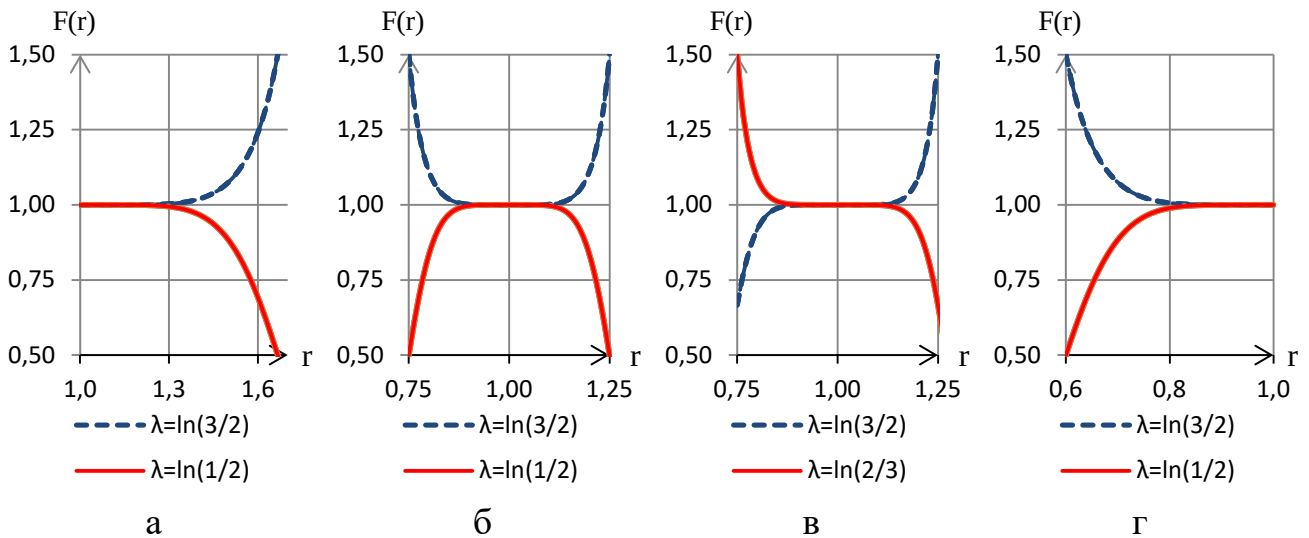


Рис. 1.

Также в первом разделе работы для линейных моделей динамического деформирования цилиндрических тел из трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных материалов дано описание вводимых общих

матричных представлений комплексных векторных функций $\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T$ волновых упругих перемещений для нормальных волн круговой частоты ω , распространяющихся вдоль оси Oz в неоднородных волноводах V_j ($j = \overline{1, 4}$) с продольным волновым числом $\tilde{k}$ ($\tilde{k} \in \mathbb{C}$) и окружным волновым числом τ ($\tau \in \mathbb{C}$)

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (14)$$

в которых $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r)]^T$; $\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)$ – диагональная матрица, отличные от нуля элементы которой равны $[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} = \cos(\tau\theta + \beta)$, $[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} = \sin(\tau\theta + \beta)$, $[\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} = i \cos(\tau\theta + \beta)$; δ ($\delta \in \mathbb{R}$) – произвольный параметр; β ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) – параметр, задающий независимый тип симметрии волновых движений относительно плоскости $(x_1 x_3)$, с выделением при $\beta = 0$ условно симметричных волн (волн S -типа) со свойствами $u_j(r, -\theta, z, t) = u_j(r, \theta, z, t)$ ($j = r, z$), $u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t)$, и при $\beta = \pi/2$ – условно антисимметричных волн (волн A -типа) со свойствами $u_j(r, -\theta, z, t) = -u_j(r, \theta, z, t)$ ($j = r, z$), $u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t)$.

Рассматриваемая в работе модель нелинейного деформирования однородных трансверсально-изотропных цилиндров с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности базируется на тензорной форме представления функции упругого потенциала

$$U = (1/2) c_{jqlm} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{lm} + (1/6) c_{jqlmnp} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{np} \quad (15)$$

с квадратичными членами по конечным деформациям

$$\varepsilon_{jq} = (1/2) (u_{j,q} + u_{q,j} + u_{p,j} u_{p,q}). \quad (16)$$

Тензорные коэффициенты c_{jqlm} и c_{jqlmnp} в представлении (15) для рассматриваемого случая выражаются через пять независимых матричных упругих констант c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} , c_{44} второго порядка и девять независимых матричных упругих постоянных c_{111} , c_{112} , c_{113} , c_{123} , c_{133} , c_{144} , c_{155} , c_{344} , c_{333} третьего порядка.

Второй раздел работы посвящен исследованию волн деформаций в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных функционально-градиентных цилиндрах кругового поперечного сечения в рамках линейных моделей с краевыми условиями (6). Для каждого $\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ в аналитическом виде построены полные системы базисных частных решений систем дифференциальных уравнений модели на основе соотношения (14) и введения для вектора $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$ представления

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} \quad (\|\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}\| \neq 0) \quad (17)$$

с ограничениями на параметр η

$$\begin{aligned} \eta \in \{-1; 0\} \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > 0, \text{ если } [\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}]_3 = 0, \\ \eta \in \{0; 1\} \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > 1, \text{ если } [\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}]_3 \neq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

следующими из критериев ограниченности и непрерывности всех характеристик волновых полей при $r=0$. В (17) и далее $\|\mathbf{X}\|$ – мультипликативная согласованная евклидова норма; $\mathbf{A}_1(r)$ – диагональная матрица с отличными от нуля элементами

$$[\mathbf{A}_1(r)]_{1,1} = [\mathbf{A}_1(r)]_{2,2} = r, \quad [\mathbf{A}_1(r)]_{3,3} = 1. \quad (19)$$

Применительно к случаю трансверсально-изотропных материалов для крутильных волн ($\tau = 0$, $\beta = \pi/2$) построены векторные базисные решения уравнений волнового деформирования, имеющие вид

$$\mathbf{U}^{(TW,B)}(r, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda,p}(r) - i\omega t + ikz) \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r); \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r) = [0, \tilde{u}_{\theta}^{(TW,B)}(r), 0]^T, \quad \tilde{u}_{\theta}^{(TW,B)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+1} x_m^{(TW)}; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x_m^{(TW)} = 0 \quad (m < 0), \quad x_0^{(TW)} = 1, \\ x_m^{(TW)} = w_m^{(TW,1)} x_{m-2}^{(TW)} + w_m^{(TW,2)} x_{m-q}^{(TW)} + w_m^{(TW,3)} x_{m-2q}^{(TW)} \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

Для двух частных случаев функциональной неоднородности ($q = 1, 2$) получены представления базисных решений через функции Уиттекера $M_{\nu,\mu}(\zeta)$ соответственно для $q = 1$ и $q = 2$ имеющие вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\theta}^{(TW,B)}(r) &= \left(\exp((\delta - 1/2)\lambda r) / \sqrt{r} \right) M_{\nu,\mu} \left(\sqrt{\lambda^2 - 4\kappa_3^2} r \right), \quad \nu = -3\lambda/(2\gamma), \quad \mu = 1; \\ \tilde{u}_{\theta}^{(TW,B)}(r) &= \left(\exp((\delta - 1/2)\lambda r^2) / r \right) M_{\nu,\mu} \left(\lambda r^2 \right), \quad \nu = \kappa_3^2/(4\lambda) - 1, \quad \mu = 1/2. \end{aligned} \quad (23)$$

Проведено исследование возможностей варьирования значений параметра δ для улучшения сходимости рядов в соотношениях (21), в результате которого найдено оптимальное по данному критерию значение $\delta = 1/2$, при котором представления (23) не содержат экспоненциальных составляющих. Это свойство применительно к

Таблица 1.

волноводам с параметрами $\tilde{c}_{js}$, равными значениям модулей упругости цинка, отражают данные, приведенные в Таблице 1 для случая оценочных расчетов порядков величин

δ	$m = 0$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$\delta = -1$	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-18}
$\delta = 0$	1	10^{-4}	10^{-9}	10^{-14}	10^{-18}	10^{-24}
$\delta = 1/2$	1	10^{-4}	10^{-9}	10^{-14}	10^{-20}	10^{-27}
$\delta = 1$	1	10^{-3}	10^{-7}	10^{-11}	10^{-16}	10^{-22}
$\delta = 2$	1	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-12}	10^{-17}

$|x_m^{(TW)}|$ при $q = 6$, $\tilde{k} = 2$, $\Omega = 1$.

Для случая продольно-сдвиговых нормальных волн ($\tau = 0$, $\beta = 0$) матричные базисные решения уравнений модели построены в виде

$$\mathbf{U}^{(LSW,B)}(r, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda,p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r); \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r) = \mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{X}_m^{(LSW)}, \quad \mathbf{T}_1^{(LSW)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(LSW)} &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \quad \mathbf{X}_0^{(LSW)} = \mathbf{I}, \\ \mathbf{X}_m^{(LSW)} &= \mathbf{W}_m^{(LSW,1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(LSW)} \\ &\quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь и далее $\mathbf{O}$, $\mathbf{I}$ – соответственно нулевая и единичная квадратные матрицы. На основе численных экспериментов подтвержден оптимальный выбор параметра $\delta = 1/2$ для ускорения сходимости ряда в представлениях (25).

Для случая неосесимметричных волн ($\tau \in \mathbb{N}$, $\beta = 0$) построены базисные решения уравнений модели в виде

$$\mathbf{U}^{(\tau,B)}(r, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda,p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(r); \quad (27)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(r) = \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[r^{\eta_1} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta_1)}, r^{\eta_2} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta_3)} \right]; \quad (28)$$

$$\eta_1 = \tau - 2, \quad \eta_2 = \tau, \quad \eta_3 = \tau; \quad (29)$$

$$\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau,\eta_2)} = \begin{bmatrix} (\tau+2)\tilde{c}_{66} - \tau\tilde{c}_{11} \\ (\tau+2)\tilde{c}_{11} - \tau\tilde{c}_{66} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau,\eta_3)} = \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ -\tilde{k} \\ 2(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})/(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_m^{(\tau,\eta_j)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0), \quad \mathbf{X}_1^{(\tau,\eta_j)} = \mathbf{W}_1^{(\tau,\eta_j,2)} \mathbf{X}_{1-q}^{(\tau,\eta_j)},$$

$$\mathbf{Q}_2^{(\tau,\eta_j,1)} \mathbf{X}_2^{(\tau,\eta_j)} = - \left(\mathbf{Q}_2^{(\tau,\eta_j,2)} \mathbf{X}_0^{(\tau,\eta_j)} + \mathbf{Q}_2^{(\tau,\eta_j,3)} \mathbf{X}_{2-q}^{(\tau,\eta_j)} + \mathbf{Q}_2^{(\tau,\eta_j,5)} \mathbf{X}_{2-2q}^{(\tau,\eta_j)} \right) \quad (j = \overline{1,3}); \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta_j)} &= \mathbf{W}_m^{(\tau,\eta_j,1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,\eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau,\eta_j,2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau,\eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau,\eta_j,3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau,\eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau,\eta_j,4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau,\eta_j)} \\ &\quad (m = 3, 4, \dots), \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь и далее $\hat{\mathbf{O}}$ – нулевой вектор; в случае трансверсально-изотропного материала полагается, что $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$. Условие разрешимости неоднородного уравнения в соотношениях (30) относительно $\mathbf{X}_2^{(\tau,\eta_1)}$ ($j = 1$) определяет ограничения на параметры построенных решений

$$(\tau, q) \in \{(1, 1)\} \cup \mathbb{N} \times (\{0\} \cup \mathbb{N} \setminus \{1\}). \quad (32)$$

При $m \rightarrow \infty$ получены асимптотические оценки для коэффициентов в

явных рекуррентных представлениях (22), (26), (31), позволяющие обосновать абсолютную и равномерную сходимость разложений в (21), (25), (28) на любом конечном отрезке $r \in [0, r_1]$ ($0 < r_1 < \infty$).

Применительно к случаю цилиндрически-ортотропного материала для крутильных нормальных волн ($\tau = 0$, $\beta = \pi/2$) базисные решения получены в виде (20) – (23), а для осесимметричных продольно-сдвиговых волн ($\tau = 0$, $\beta = 0$) имеют форму (24), где

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW, B)}(r) = \mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[r^{\eta_1} \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_1)}, r^{\eta_2} \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_2)} \right]. \quad (33)$$

Здесь $\eta_1 = \sqrt{\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{11}} - 1$ ($\tilde{c}_{11} \leq \tilde{c}_{22}$), $\eta_2 = 0$. В случае неосесимметричных волн ($\tau \in \mathbb{N}$, $\beta = 0$) базисные решения уравнений модели цилиндрически-ортотропного волновода для $q \in \{0\} \cup \mathbb{N} \setminus \{1\}$ построены в виде (27), (28), где

$$\eta_1 = \sqrt{(b - \sqrt{d})/(2a)} - 1, \quad \eta_2 = \sqrt{(b + \sqrt{d})/(2a)} - 1, \quad \eta_3 = \tau \sqrt{\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}}. \quad (34)$$

В соотношениях (34) параметры a , b , d зависят от $\tilde{c}_{js}$ и τ . Для определения векторных коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_j)}$ ($m \geq 0$; $j = \overline{1, 2}$) и $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)}$ ($m \geq 0$; $j = \overline{1, 3}$) в описанных случаях также построены явные рекуррентные соотношения и получены асимптотические оценки при $m \rightarrow \infty$, обосновывающие абсолютную и равномерную сходимость соответствующих разложений на любом конечном отрезке $r \in [0, r_1]$ ($0 < r_1 < \infty$). Условия (18) для случая неосесимметричных волн в цилиндрически-ортотропных волноводах порождают систему ограничений для значений параметров $\tilde{c}_{js}$. При $\tau = 1$ они имеют вид

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12}, \quad \tilde{c}_{55} \leq \tilde{c}_{44}. \quad (35)$$

При $\tau \geq 2$ эти ограничения записываются в различной форме при

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}}, \quad \sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} < \tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12}, \quad \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12} < \tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}. \quad (36)$$

В частности, для первого случая из (36) указанные ограничения имеют вид

$$\max \left(\sqrt{\tilde{c}_{55}/\tilde{c}_{44}}, \sqrt{2 + (\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66})) / (\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66})} \right) \leq \tau. \quad (37)$$

Из условий (37) следует, что множество значений окружного волнового числа τ , при которых не может быть построено удовлетворяющее требованиям (18) базисное решение уравнений модели, всегда конечно.

Для применения разработанных методик в численных исследованиях создан комплекс специализированных программных приложений. С его использованием осуществлена верификация методик на основе сопоставления результатов их реализации в предельных частных случаях однородных трансверсально-изотропных и ортотропных цилиндров с представленными в литературе результатами других исследований. При этом для верификации расчетов в модели цилиндрически ортотропных волноводов предложена схема варьирования констант $\tilde{c}_{js}$

$\tilde{c}_{22} = (1 + \zeta) \tilde{c}_{11}$, $\tilde{c}_{23} = (1 - \zeta) \tilde{c}_{13}$, $\tilde{c}_{55} = (1 - \zeta) \tilde{c}_{44}$, $\tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2 \quad \forall \zeta > 0$, (38)

обеспечивающая контроль асимптотического соответствия получаемых результатов результатам расчета для трансверсально-изотропных цилиндров при уменьшении значения параметра ζ ($\zeta \rightarrow 0$).

Выполнен анализ ряда эффектов влияния параметров неоднородности на топологическую структуру и свойства действительных ветвей дисперсионных спектров для волноводов рассматриваемого типа. Так, в частности, дано сопоставление дисперсионных спектров бегущих нормальных изгибных ($\tau = 1$) волн в радиально неоднородном $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 1)$ (Рисунок 2) и однородном $(\lambda, q) = (0, 0)$ свободных цилиндрах с параметрами $\tilde{c}_{js}$, равными значениям модулей упругости цинка. На основе анализа количественных различий в поведении пяти низших мод сопоставляемых спектров (Рисунок 3) с использованием функции сравнения $\Delta\Omega(ka) = (\omega_{\lambda,q}(ka) - \omega_{0,0}(ka))a/c_t$, $a = R_*$,

$c_t = \sqrt{c_*/\rho}$ для мод с одинаковыми номерами, при общем качественном подобии спектров, позволило сделать ряд заключений. Во-первых, установлено, что характер предельного асимптотического стремления фазовых скоростей мод бегущих волн с одинаковыми номерами в высокочастотном коротковолновом диапазоне из спектров для однородных и неоднородных цилиндров совпадает. При этом влияние неоднородности имеет больший характер для высших мод, фазовые скорости которых в однородных цилиндрах стремятся к скоростям объемных волн в их материалах. Для низшей моды с асимптотическим стремлением скорости к скорости поверхностной волны релеевского типа эффект влияния фактора неоднородности заключается в переходе соответствующей дисперсионной кривой на параллельную траекторию. Во-вторых, выявлено существенное влияние зон локального сближения и расталкивания мод на их траектории в соответствующих спектрах для неоднородного и однородного цилиндров. Этот эффект наблюдается на Рисунке 3 при $ka \approx 5$ для первой и второй мод, а также при $ka \approx 3.5$ для третьей и четвертой мод.

Третий раздел работы посвящен задачам о волнах деформаций в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных функционально-

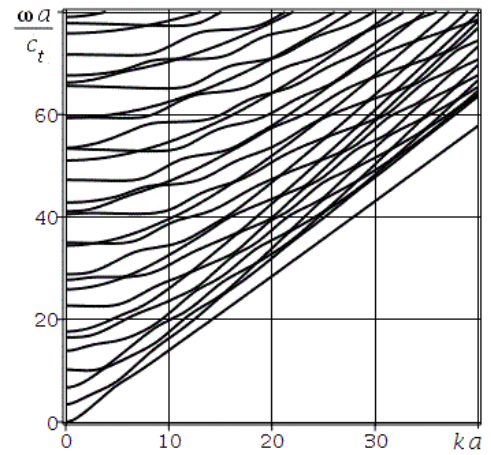


Рис. 2.

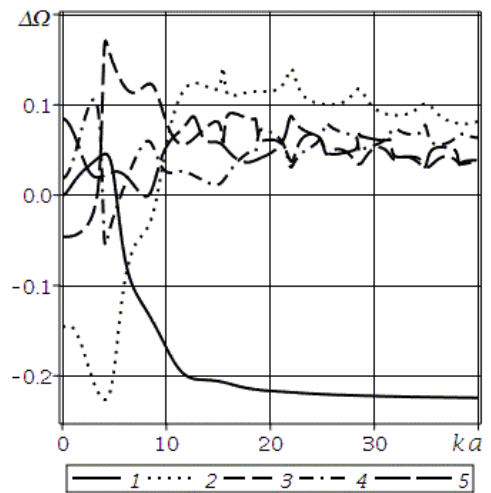


Рис. 3.

градиентных цилиндрах секторно-кругового поперечного сечения для случаев наличия гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности. Применительно к данной модели формулируются ограничения на параметр η в форме

$$\begin{aligned} \eta = -1 \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > -1, \text{ если } \left[\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta)} \right]_3 &= 0, \\ \eta = 0 \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > 0, \text{ если } \left[\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta)} \right]_3 &\neq 0 \end{aligned} \quad (39)$$

которые обеспечивают физическую корректность решений волновых уравнений, заключающуюся в ограниченности плотности описываемых решениями энергетических потоков в окрестности сингулярной точки $r = 0$ границы сечения волновода. С учетом однородных граничных условий на радиальных участках $G_2^{(\pm)}$, из соотношений (7) для каждого типа анизотропии материала следуют две ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) частные спектральные задачи, из которых определяются матричные базисные решения, составляющие основу для получения соответствующих дисперсионных уравнений.

Для цилиндров рассматриваемого типа из трансверсально изотропных материалов построенные базисные решения определяются соотношениями (27), (28), (30), (31), а также дополнительными представлениями

$$\begin{aligned} \tau &= (\beta - \pi/2)/\alpha + \pi n/\alpha \begin{cases} \alpha \in (0, \pi), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \{0, \pi/2\} & \text{если } q \neq 1 \\ \alpha = \pi/2, \quad n = 1, \quad \beta = 0 & \text{если } q = 1 \end{cases}; \quad (40) \\ \eta_1 &= -\tau, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} = \left[(2 - \tau)\tilde{c}_{66} + \tau\tilde{c}_{11}, -((2 - \tau)\tilde{c}_{11} + \tau\tilde{c}_{66}), 0 \right]^T \text{ если } 1/2 < \tau < 1, \\ \eta_1 &= \tau - 2, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} = [1, -1, 0] \text{ если } \tau \geq 1, \\ \eta_2 &= \tau, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_2)} = \left[(2 + \tau)\tilde{c}_{66} - \tau\tilde{c}_{11}, (2 + \tau)\tilde{c}_{11} - \tau\tilde{c}_{66}, 0 \right], \\ \eta_3 &= \tau, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_3)} = \left[\tilde{k}, -\tilde{k}, 2(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})/(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Установлено, что описываемые построенными решениями поля напряжений могут иметь особенности в окрестности внутреннего ребра $r = 0$ секторного выреза, и их характер для рассматриваемых волн представлен в Таблице 2.

Таблица 2.

Тип волны	n	τ	$\pi/4 < \alpha < \pi/2$	$\pi/2 < \alpha \leq 3\pi/4$	$3\pi/4 < \alpha < \pi$
S-тип	1	$\pi/(2\alpha)$	$r^{\tau-2}$	$r^{-\tau}, r^{\tau-1}$	$r^{-\tau}, r^{\tau-1}$
	2	$3\pi/(2\alpha)$	-	-	$r^{\tau-2}$
A-тип	1	π/α	-	$r^{\tau-2}$	$r^{\tau-2}$

В случае волноводов из цилиндрически-ортотропных материалов базисные решения построены для $q \in \{0\} \cup \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Они определяются соотношениями (27), (28), (34), (40). Показано, что для $\tau = 1$ ($\alpha = \pi/2, \beta = 0, n = 1$), а также для $\tau \neq 1$ при выполнении ограничения $\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}}$ построенные решения являются физически корректными.

Установлено, что описываемые базисными решениями поля напряжений в данном случае также могут иметь особенности в окрестности внутреннего ребра $r=0$ секторного выреза, получены зависящие от параметров $\tilde{c}_{js}$ и окружного волнового числа τ величины показателей указанных особенностей.

Для вычисления $X_m^{(\tau, \eta_j)}$ в обоих рассмотренных случаях анизотропии используются построенные в разделе 2 явные рекуррентные соотношения.

С целью осуществления численных исследований на основе описанной методики создан комплекс специализированных программных приложений. Для верификации полученных на базе его применения результатов, проводилось их сопоставление с представленными в публикациях частными случаями исследований для однородных трансверсально-изотропных однородных волноводов секторно-кругового сечения. Использовался также факт идентичности волновых полей в имеющих свободные либо закрепленные цилиндрические граничные поверхности эквивалентных по механическим свойствам волноводах рассматриваемого типа при $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$, $n = 1$, и в цилиндрических волноводах кругового сечения при $\tau = 1$.

В рамках реализованных численных исследований осуществлен анализ влияния факторов угловых размеров секторного выреза, параметров неоднородности и характера анизотропии на структуру и свойства действительных ветвей дисперсионных спектров, на формы волновых движений. Обобщены данные о траекториях дисперсионных кривых, данные об асимптотиках фазовых скоростей в высокочастотном коротковолновом диапазоне. В частности, представленные на Рисунке 4 и Рисунке 5 результаты сравнительного анализа спектров бегущих нормальных волн S -типа для окружного волнового числа τ ($n = 1$) в однородных и неоднородных $(\lambda, q) = (\ln(1/2), 6)$, $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ цилиндрах с секторным вырезом угловой мерой $\alpha = 10\pi/11$ и свободными участками цилиндрических поверхностей из цилиндрически ортотропных материалов со значениями $\tilde{c}_{js}$, отвечающими набору технических упругих постоянных $\tilde{E}_1 = 43/24$, $\tilde{E}_2 = 179/24$, $\tilde{E}_3 = 131/24$, $\tilde{G}_{23} = 28/24$, $\tilde{G}_{13} = 1$, $\tilde{G}_{12} = 1$, $\nu_{23} = 0.15$, $\nu_{12} = 0.08$, $\nu_{13} = 0.102$, иллюстрируют эффекты различия в предельных значениях, а также в знаках обусловленных неоднородностью отклонений для фазовых скоростей нормальных волн низших мод и нормальных волн всех остальных мод, начиная со второй. Отмечено влияние неоднородности на сопоставляемые характеристики в относительно

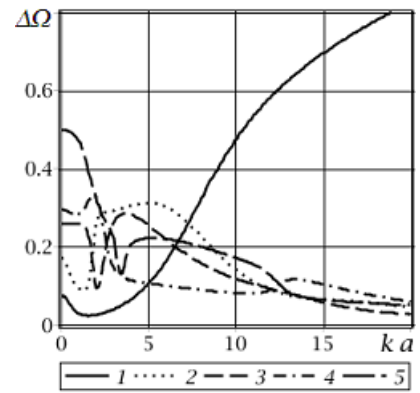


Рис. 4.

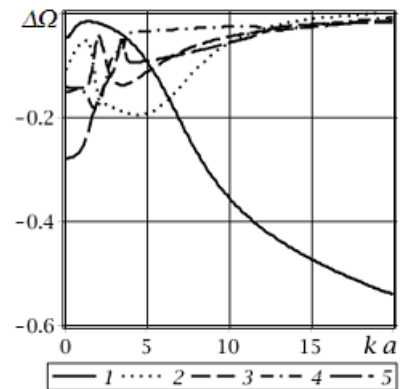


Рис. 5.

длинноволновом диапазоне.

Четвертый раздел диссертации посвящен исследованию волн деформаций в трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндрах секторно-кругового поперечного сечения, все участки граничной поверхности которых являются свободными либо жестко закрепленными. В процессе исследования строятся аналитические и численно-аналитические решения двух вспомогательных спектральных задач $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) для случая свободных и двух вспомогательных спектральных задач $\Upsilon^{(\beta, u)}$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) для случая закрепленных радиальных участков $G_2^{(\pm)}$ с формированием представлений для последующего получения дисперсионных соотношений в соответствующих вариантах исходной задачи. Базисные частные решения для уравнений рассматриваемых моделей записываются в виде

$$\mathbf{U}^{(\xi, B)}(r, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \tilde{\mathbf{U}}^{(\xi, B)}(r, \theta), \quad (42)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\xi, B)}(r, \theta) = \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\theta), \quad (43)$$

$$\mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\theta) = \left[\mathbf{T}_1^{(\tau_1(\xi))}(\theta) \mathbf{X}_m^{(\tau_1(\xi), \xi)}, \mathbf{T}_1^{(\tau_2(\xi))}(\theta) \mathbf{X}_m^{(\tau_2(\xi), \xi)}, \mathbf{T}_1^{(\tau_3(\xi))}(\theta) \mathbf{X}_m^{(\tau_3(\xi), \xi)} \right] \quad (44)$$

с использованием представленных в (27), (28), (30), (31) трех частных решений, а также записанных в параметрическом виде соотношений (29)

$$\eta_j(\xi) = \xi \quad (j = \overline{1, 3}), \quad \tau_1(\xi) = \xi + 2, \quad \tau_2(\xi) = \xi, \quad \tau_3(\xi) = \xi. \quad (45)$$

Для описания нормальных волн в рассматриваемых волноводах вводятся разложения по базисным решениям (42) – (44) с неизвестными векторными коэффициентами $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$

$$\mathbf{U}^{(\gamma, S)}(r, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \tilde{\mathbf{U}}^{(\gamma, S)}(r, \theta), \quad (46)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\gamma, S)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{U}}^{(\gamma+n, B)}(r, \theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)}, \quad (47)$$

а обеспечивающие физическую корректность представлений (46), (47) ограничения на значения параметра γ записываются в виде

$$\begin{aligned} \gamma = -1 \text{ или } \operatorname{Re}(\gamma) > -1, \text{ если } \left[\mathbf{B}_0^{(\gamma)} \right]_3 &= 0, \\ \gamma = 0 \text{ или } \operatorname{Re}(\gamma) > 0, \text{ если } \left[\mathbf{B}_0^{(\gamma)} \right]_3 &\neq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

При использовании соотношений (46), (47), соответствующее выражение для вектора напряжений с введением матричной функции $\tilde{\mathbf{S}}^{(\xi, B)}(r, \theta)$ размерности 6×3 представляется в форме

$$\mathbf{S}^{(\gamma, S)}(r, \theta, z, t) = \exp((1 - \delta) f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \tilde{\mathbf{S}}^{(\gamma, S)}(r, \theta); \quad (49)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\gamma, S)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{S}}^{(\gamma+n, B)}(r, \theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)}. \quad (50)$$

В рамках описываемого подхода из спектральных задач $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$ для определения векторных коэффициентов $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$ получено функциональное уравнение

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{n=0}^p \left(\mathbf{Z}_{p-n}^{(\gamma+n, 2, 0)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-2}^{(\gamma+n, 2, 1)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-q}^{(\gamma+n, 2, 2)}(\alpha) \right) \mathbf{B}_n^{(\gamma)} = \mathbf{O} \quad (r \in [0, 1]), \quad (51)$$

из которого в качестве следствия при $r = 0$ следует однородное уравнение

$$\mathbf{Z}_0^{(\gamma, 2, 0)}(\alpha) \mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \mathbf{O} \quad (52)$$

и соотношения для определения двух множеств $\Xi_1^{(\alpha, \beta)} \left(\left[\mathbf{B}_0^{(\gamma)} \right]_3 = 0 \right)$ и $\Xi_2^{(\alpha, \beta)} \left(\left[\mathbf{B}_0^{(\gamma)} \right]_3 \neq 0 \right)$ искомых собственных значений γ

$$(1 + \gamma) \sin(2\alpha) + \sin((1 + \gamma)2\alpha + 2\beta) = 0 \quad (\gamma = -1 \text{ или } \operatorname{Re}(\gamma) > -1); \quad (53)$$

$$\sin(\gamma\alpha + \beta) = 0 \quad (\gamma \geq 0) \quad (\gamma \geq 0). \quad (54)$$

Уравнение (53) совпадает с уравнением для определения собственных значений в задаче статики при плоской деформации свободного на радиальных полуплоскостях клина. Показано, что корень $\gamma = -1$ уравнения (53), в отличие от задач статики для аналогичной модели деформирования определяет нетривиальные собственные векторные функции, порождающие отличные от нуля значения компонент вектора перемещений u_r и u_θ на ребре. Для множества собственных значений $\Xi_2^{(\alpha, \pi/2)}$ и определяемого им множества собственных векторных функций при условно антисимметричном деформировании ($\beta = \pi/2$) соответствующий аналог в статическом случае не обнаруживается. При $\alpha \neq \pi/2$ в силу свойства $\Xi_1^{(\alpha, \beta)} \cap \Xi_2^{(\alpha, \beta)} = \emptyset$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) для спектральных задач $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$ множество собственных значений определяется как $\Xi^{(\alpha, \beta, \sigma)} = \Xi_1^{(\alpha, \beta)} \cup \Xi_2^{(\alpha, \beta)}$, а для $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$ получены представления

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \left[\gamma(\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{66}) \sin(\gamma\alpha + \beta), \sin((2 + \gamma)\alpha + \beta), 0 \right]^T \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\alpha, \beta)}); \quad (55)$$

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{k}(((2 + \gamma)\tilde{c}_{13} + (1 + \gamma)\tilde{c}_{44})\tilde{c}_{66} - \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44}) \\ (1 + \gamma)(2 + \gamma)\tilde{c}_{66}(\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{66})(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \end{bmatrix} \quad (\gamma \in \Xi_2^{(\alpha, \beta)}). \quad (56)$$

В реализуемом исследовании принципиальную роль играют ранее полученные результаты относительно свойств корней уравнения (53). Известно, что это уравнение в области $\operatorname{Re}(\gamma) > -1$ имеет конечное число вещественных и счетное множество пар комплексно сопряженных корней. Для рассматриваемого диапазона изменения угловой меры клина $\alpha \in (0, \pi)$ в области $-1 < \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1/2$ уравнение (53) не имеет корней, а в области

$-1/2 < \operatorname{Re}(\gamma) < 0$ может иметь не более одного вещественного корня при условиях $\pi/2 < \alpha < \pi$ если $\beta = 0$, $\alpha_* < \alpha < \pi$ если $\beta = \pi/2$. Здесь α_* – первый положительный корень уравнения $\tan(2\alpha) = 2\alpha$. Также ранее установлено, что при $\alpha = \alpha_*$, $\beta = \pi/2$ для кратного корня $\gamma = 0$ уравнения (53) для построения второго линейно независимого решения спектральной задачи необходимо привлекать интегрированную модель представления решений, как содержащих, так и не содержащих логарифмические множители.

С использованием трех частных решений, входящих в представление базисного решения (42) – (44), получена группа новых частных решений в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + ikz) \tilde{\mathbf{U}}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta), \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta) &= \partial_\xi \tilde{\mathbf{U}}^{(\xi, j)}(r, \theta) \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (57)$$

В работе предложена методика непосредственного построения векторных коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$ и $\partial_\xi \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$ ($\partial_\xi = \partial/\partial\xi$) в разложениях $\tilde{\mathbf{U}}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta)$, поскольку вычисление $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$ в аналитическом виде на основании полученных во втором и третьем разделах явных рекуррентных соотношений даже для небольших значений m является чрезвычайно трудоемким. Система дифференциальных уравнений движения с учетом соотношений (57), преобразуется в матричное функциональное уравнение, которое в свою очередь трансформируется в рекуррентную последовательность алгебраических уравнений с матричными коэффициентами $\mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p, \ln)}$ и векторными неизвестными $\mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)}$ шестого порядка, имеющую вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p, \ln)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)} & \partial_\xi \mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} = \begin{bmatrix} \partial_\xi \mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi)} \\ \mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi)} \end{bmatrix} \\ &\quad (p = \overline{1, 5}; \quad j = \overline{1, 3}; \quad n \geq 0). \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь $\mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)}$ – матрицы третьего порядка в рекуррентных уравнениях для определения векторных коэффициентов $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$ представлений частных решений уравнений модели без логарифмических множителей. Для матричных коэффициентов в явных рекуррентных представлениях для $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)}$ получены асимптотические оценки при $m \rightarrow \infty$, обосновывающие абсолютную и равномерную сходимость соответствующих разложений на любом конечном отрезке $r \in [r_0, r_1]$ ($0 < r_0 < r_1 < \infty$). Базисные решения спектральных задач для интегрированной модели определяются как линейные комбинации описанных выше трех частных решений с логарифмическим множителем и трех частных решений без логарифмического множителя с векторными коэффициентами в их представлениях такого вида

$$\mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi)} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (j = \overline{1, 3}; n \geq 0). \quad (59)$$

Начальный коэффициент в разложениях решений спектральных задач в рамках интегрированной модели имеет вид

$$\mathbf{B}_0^{(0, \ln)} = \begin{bmatrix} \left(\partial_\xi \mathbf{B}_0^{(\xi)} \right) \Big|_{\xi=0} \\ \mathbf{B}_0^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (60)$$

В случае $\alpha \neq \pi/2$ решения спектральных задач $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) для множества собственных значений $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$ построены в области $r \in (0, \infty)$. С учетом того, что $\det(\hat{\mathbf{Z}}_0^{(\gamma+n, 2, 0)}(\alpha)) \neq 0$ ($n = \overline{1, \infty}$) из функционального уравнения (51) и аналогичному ему уравнения для интегрированной модели получены явные рекуррентные представления для вычисления кортежей векторных коэффициентов $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$ и $\mathbf{B}_n^{(0, \ln)}$ ($n = \overline{1, \infty}$). Для множества собственных значений $\Xi_2^{(\alpha, \beta)}$ доказано отсутствие нетривиальных решений указанных уравнений в области $r \in [0, \infty)$. В этой связи искомые решения спектральных задач для множества $\Xi_2^{(\alpha, \beta)}$ строятся непосредственно с использованием соотношений (50) и аналогичных им соотношений для интегрированной модели на интервале $r \in (0, 1]$ интегральным методом наименьших квадратов.

Для построения решений спектральных задач $\Upsilon^{(\beta, u)}$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) применяются подходы, аналогичные описанным выше. Для определения множеств собственных значений $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$ ($[\mathbf{B}_0^{(\gamma)}]_3 = 0$) и $\Xi_2^{(\alpha, \beta)}$ ($[\mathbf{B}_0^{(\gamma)}]_3 \neq 0$) получены уравнения

$$\begin{aligned} \chi(1+\gamma)\sin(2\alpha) - \sin((1+\gamma)2\alpha + 2\beta) &= 0, \\ \chi &= (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{66})/(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}) \quad (\operatorname{Re}(\gamma) > -1); \end{aligned} \quad (61)$$

$$\cos(\gamma\alpha + \beta) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (62)$$

Уравнение (61) также совпадает с уравнением для определения собственных значений в задаче статики при плоской деформации жестко закрепленного на радиальных полуплоскостях клина, в области $\operatorname{Re}(\gamma) > -1$ имеет конечное число вещественных и счетное множество пар комплексно сопряженных корней. В рассматриваемом диапазоне угловой меры клина $\alpha \in (0, \pi)$ при $-1 < \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1/2$ уравнение (61) также корней не имеет, а при $-1/2 < \operatorname{Re}(\gamma) < 0$ может иметь не более одного вещественного корня в случаях выполнения условий $\pi/2 < \alpha < \pi$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$, $\chi \in (0, 1)$), $\alpha_* < \alpha < \pi$ ($\beta = 0$, $\chi = 1$). Как и в выше рассмотренном случае установлено, что для множества собственных значений $\Xi_2^{(\alpha, 0)}$ и соответствующего ему набора собственных векторных функций при

условно симметричном деформировании ($\beta = 0$) соответствующий статический аналог не обнаруживается. При $\alpha \neq \pi/2$ ($\Xi^{(\alpha,\beta,u)} = \Xi_1^{(\alpha,\beta)} \cup \Xi_2^{(\alpha,\beta)}$) с учетом $\Xi_1^{(\alpha,\beta)} \cap \Xi_2^{(\alpha,\beta)} = \emptyset$ решения спектральных задач $\Upsilon^{(\beta,u)}$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) построены отдельно на множестве собственных значений $\Xi_1^{(\alpha,\beta)}$ в области $r \in (0, \infty)$ и на множестве собственных значений $\Xi_2^{(\alpha,\beta)}$ в области $r \in (0, 1]$. В предельном случае $\chi = 1$ ($\beta = 0$) для кратного корня $\gamma = 0$ также построено дополнительное решение спектральной задачи на основе интегрированной модели учета логарифмического сомножителя. Случай $\alpha = \pi/2$ для спектральных задач $\Upsilon^{(\beta,\sigma)}$ и $\Upsilon^{(\beta,u)}$ ($\beta \in \{0, \pi/2\}$) рассматривался отдельно. Для него также построены полные наборы решений.

Возможность постановки четырех дисперсионных задач $D^{(\beta,\sigma)}$ и $D^{(\beta,u)}$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$), соответствующих вспомогательным спектральным задачам $\Upsilon^{(\beta,\sigma)}$ и $\Upsilon^{(\beta,u)}$ ($\beta \in \{0; \pi/2\}$), вытекает из фундаментального свойства трехкратной полноты построенных множеств частных решений указанных вспомогательных спектральных задач, поскольку это свойство обеспечивает удовлетворение любых трех граничных условий на цилиндрическом участке $G^{(1)}$ граничной поверхности волновода при использовании представления

$$\mathbf{U}^{(D)}(r, \theta, z, t) = \sum_{\gamma_j \in \Xi^{(\alpha,\beta,l)}} b_j \mathbf{U}^{(\gamma_j, S)}(r, \theta, z, t) \quad (\beta \in \{0, \pi/2\}, l \in \{\sigma, u\}) \quad (63)$$

с произвольными скалярными коэффициентами b_j . При этом отсутствие сингулярности в поле напряжений в окрестности ребер волновода ($r = 1, \theta = \pm\alpha$) обеспечивает достижение любой заданной точности удовлетворения граничных условий на цилиндрическом участке $G^{(1)}$ граничной поверхности с использованием конечного подмножества решений соответствующей спектральной задачи. При суммировании в представлении (63) по конечному числу младших γ_j из упорядочиваемых по возрастанию вещественных частей элементов множеств $\Xi_1^{(\alpha,\beta)}$ и $\Xi_2^{(\alpha,\beta)}$, в результате последующего применения интегрального метода наименьших квадратов формируется конечная система однородных линейных уравнений для определения скалярных коэффициентов b_j . Матрица Грамма этой системы определяет искомое дисперсионное представление

$$\min_{(\tilde{k}, \Omega) \in \Theta} \left(\chi^{(\min)}(\tilde{k}, \Omega) / \chi^{(\max)}(\tilde{k}, \Omega) \right), \quad (64)$$

где $\Omega^2 = \tilde{\rho} \omega^2 R_*^2 / c_*$; $\chi^{(\min)}$ и $\chi^{(\max)}$ — соответственно наименьшее и наибольшее сингулярные значения матрицы Грамма.

С использованием разработанного для осуществления расчетов по описанной методике программного приложения реализовано исследование ряда

вариантов данной задачи. В результате получено описание ряда эффектов, обусловленных варьированием параметров неоднородности, угловой меры секторного сечения и частоты на структуру и свойства анализируемых дисперсионных спектров. В частности, ниже представлены результаты сравнительного анализа дисперсионных спектров бегущих нормальных волн S -типа ($\beta = 0$) в неоднородных $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 2)$ и однородных $(\lambda, q) = (0, 0)$ цилиндрах с круговым сектором угловой меры $\alpha = 97\pi/113$ в поперечном сечении. Спектры для неоднородного (сплошная линия) и однородного (пунктирная линия) волноводов со свободной и жестко закрепленной граничной поверхностью представлены соответственно на Рисунке 6 и Рисунке 9, а на Рисунке 7 и Рисунке 8 приведены графики функции сравнения для пары "неоднородный – однородный свободный цилиндр".

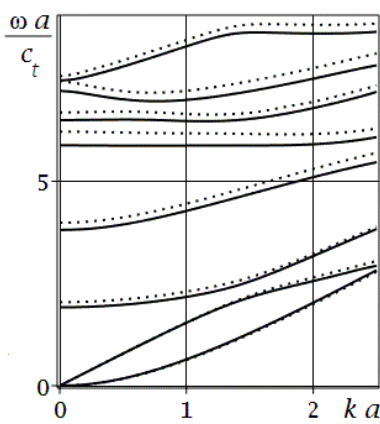


Рис. 6.

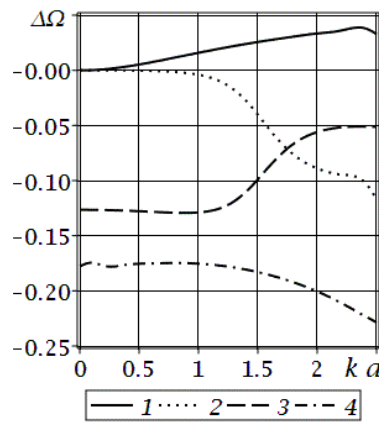


Рис. 7.

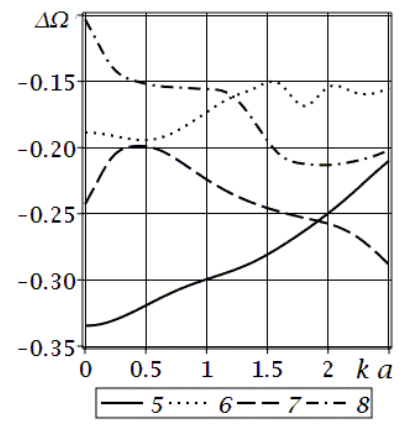


Рис. 8

Установлено, что для рассматриваемых волноводов со свободной границей в низкочастотном длинноволновом диапазоне волны низшей моды с нулевой частотой записания по форме являются квазиизгибными, а волны второй моды с нулевой частотой записания – квазипродольными. Дисперсионные спектры для однородного и неоднородного цилиндров имеют высокие степени подобия в обоих случаях задания краевых условий. При этом для неоднородного волновода со свободной границей высшие моды спектра, начиная со второй, сохраняя подобие траекторий, расположены выше дисперсионных кривых для однородного свободного цилиндра, и соответственно, нормальные волны одинаковой длины в неоднородном цилиндре имеют относительно большие скорости, а для цилиндров с закрепленной граничной поверхностью описанная тенденция для всех исследованных мод меняется на противоположную. Сохраняется также эффект различных типов влияния неоднородности на сопоставительные показатели отличия для мод однородных и неоднородных волноводов на участках сближения и расталкивания дисперсионных кривых. На Рисунках 10 – 12 представлен также пример анализа кинематических характеристик нормальных волн в неоднородных волноводах, осуществляемого

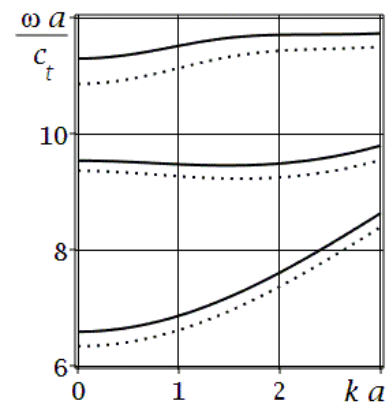


Рис. 9.

на базе расчетов форм амплитудных распределений компонентов вектора волновых перемещений по области сечения цилиндра с закрепленной граничной поверхностью для волны с параметрами $\tilde{k} = 0.2$, $\Omega \approx 6.59678366$ из низшей моды спектра при $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 2)$. Графики масштабированы по условию $[U^{(D)}(0.7, 1, 0, 0)]_1 = 1$.

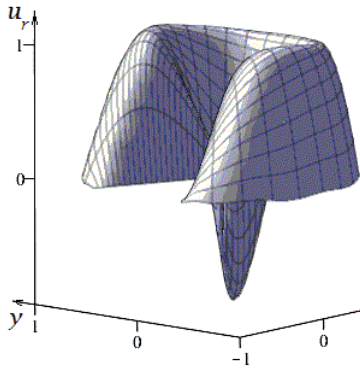


Рис. 10.

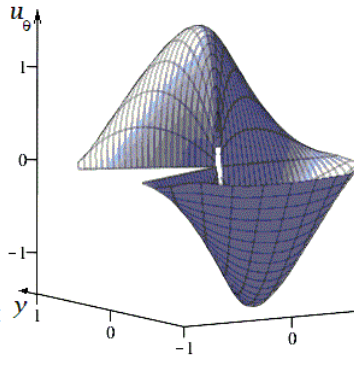


Рис. 11.

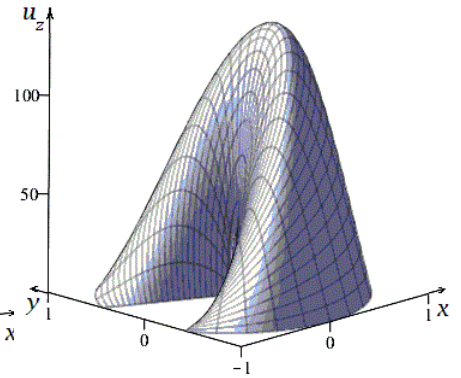


Рис. 12.

В пятом разделе приведены результаты разработки и реализации методов численно-аналитического исследования спектров и свойств волн деформаций в функционально-градиентных трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндрах кольцевого и секторно-кольцевого сечения.

В процессе построения методики интегрирования систем уравнений волнового деформирования для рассматриваемых моделей осуществлен переход от радиальной координаты r к обобщенной кольцевой координате x посредством соотношений $r = hx + 1$, $x \in (x_0, x_1)$. Здесь (x_0, x_1) – некоторая область такая, что $[-1, 1] \subset (x_0, x_1)$.

Для целевых граничных задач в случае кольцевого сечения волновода для обоих рассматриваемых случаев анизотропии с учетом соотношения (14) ($\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) построены два матричных базисных решения такого вида

$$U^{(\tau, B, s)}(x, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda, p}(x) - i\omega t + ikz) \tilde{U}^{(\tau, B, s)}(x, \theta), \quad (65)$$

$$\tilde{U}^{(\tau, B, s)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m X_m^{(\tau, s)} \quad (x \in (x_0, x_1); s = 1, 2). \quad (66)$$

Матричные коэффициенты $X_m^{(\tau, s)}$ в представлениях (66) определяются из полученных на основе уравнений движения явных рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} X_0^{(\tau, 1)} &= I, \quad X_1^{(\tau, 1)} = O, \quad X_0^{(\tau, 2)} = O, \quad X_1^{(\tau, 2)} = I, \\ \tilde{X}_m^{(\tau, s)} &= \sum_{j=1}^4 w_{m, j}^{(\tau)} \cdot \tilde{X}_{m-j}^{(\tau, s)} + \sum_{j=0}^3 w_{m, 5+j}^{(\tau)} \cdot \tilde{X}_{m-q-j}^{(\tau, s)} + \sum_{j=0}^2 w_{m, 9+j}^{(\tau)} \cdot \tilde{X}_{m-2q-j}^{(\tau, s)} \\ &\quad (m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1, 2}). \end{aligned} \quad (67)$$

Для матричных коэффициентов рекуррентных соотношениях (67) получены асимптотические оценки при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_{m,1}^{(\tau)} + 2h\mathbf{I}\| &\leq \kappa_1/m, \quad \|\mathbf{W}_{m,2}^{(\tau)} + h^2\mathbf{I}\| \leq \kappa_2/m, \\ \|\mathbf{W}_{m,j}^{(\tau)}\| &\leq \kappa_j/m \quad (j = 3, 5, 6, 7), \quad \|\mathbf{W}_{m,j}^{(\tau)}\| \leq \kappa_j/m^2 \quad (j = 4, 8, 9, 10, 11) \end{aligned} \quad (68)$$

позволяющие обосновать равномерную и абсолютную сходимости разложений в (66) на любом отрезке $x \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$ таком, что $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subset (x_0, x_1) = (-h^{-1}, h^{-1})$.

В осесимметричном случае ($\tau = 0$) при рассмотрении крутильных волн для частного случая функциональной неоднородности $q = 1$ построены базисные решения уравнений модели, записанные с использованием соотношений (20) и функций Уиттекера $M_{\nu,\mu}(\zeta)$ и $W_{\nu,\mu}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r) &= \left(\exp((\delta - 1/2)\lambda r/h) / \sqrt{r} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{\nu,\mu}(\chi r) & W_{\nu,\mu}(\chi r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \nu &= -3\lambda/(2\chi h), \quad \mu = 1, \quad \chi = \sqrt{4(\tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} - \Omega^2) / \tilde{c}_{66} + \lambda^2/h^2}, \end{aligned} \quad (69)$$

а в случае $q = 2$ – записанные через интегралы биконфлюэнтного уравнения Гойна ($H(\nu, \mu, \gamma, \eta, \zeta)$ – биконфлюэнтная функция Гойна)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r) &= r \exp((\delta - 1)\lambda r(r - 2)/h^2) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ H(2, 2\kappa, \gamma, 6\kappa, -\kappa r) & f(r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ f(r) &= H(2, 2\kappa, \gamma, 6\kappa, -\kappa r) \int \exp(\lambda r(r - 2)/h^2) r^{-3} H(2, 2\kappa, \gamma, 6\kappa, -\kappa r)^{-2} dr, \\ \gamma &= h^2(\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44}) / (\lambda \tilde{c}_{66}) - 4, \quad \kappa = \sqrt{\lambda}/h. \end{aligned} \quad (70)$$

С использованием разработанного для осуществления расчетов по описанной методике программного приложения реализовано исследование ряда вариантов данной задачи, позволяющее дать обобщенную трактовку обусловленных варьированием параметров неоднородности, частоты, окружного волнового числа и механической анизотропии эффектов в структуре и свойствах анализируемых дисперсионных спектров. Некоторые из этих эффектов иллюстрируют результаты сравнительного анализа спектров бегущих нормальных изгибных ($\tau = 1$) волн в радиально неоднородном $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ и однородном $(\lambda, q) = (0, 0)$ свободных цилиндрически-ортотропных цилиндрах с ранее приведенными в разделе 3 характеристиками для случая $R_* = R_2$ ($r \in [3/4, 1]$, $h = 1/4$, $x \in [-1, 0]$), когда зоной локализации неоднородности является внутренняя поверхность цилиндра. На Рисунке 13 представлен спектр для неоднородного волновода, а на Рисунке 14 – график функции сравнения в паре «неоднородный – однородный цилиндр». Отмечено, что фактор неоднородности в рассматриваемом случае оказывает достаточно малое влияние на траектории дисперсионных кривых трех низших мод спектра

в длинноволновом диапазоне $ka \in [0; 5]$. Однако существенные различия, в отличие от вышерассмотренных случаев, претерпевают траектории второй и последующих мод при дальнейшем росте показателя $ka \in [0; 20]$. Отраженные

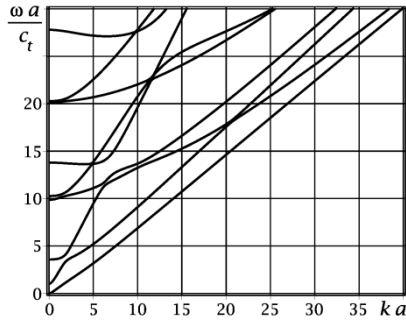


Рис. 13.

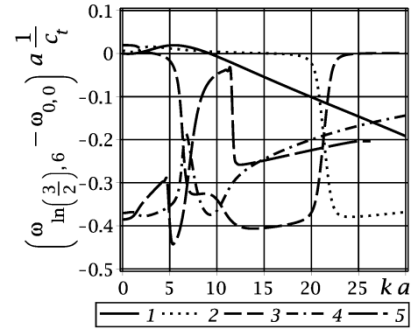


Рис. 14.

на Рисунке 14 тенденции в целом указывают на стремление асимптотических значений фазовых скоростей данных волн к соответствующим значениям для однородного цилиндра. При этом траектория второй дисперсионной кривой, как показывают результаты расчетов, в данном диапазоне относительных длин вначале совпадает с траекторией соответствующей кривой для однородного цилиндра, а затем в области локального сближения с третьей модой почти скачкообразно переходит на параллельную этой кривой траекторию.

Распределения нормализованных фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных волн из четырех низших мод спектра для неоднородных цилиндров рассматриваемого типа представлены на Рисунках 15 и 16.

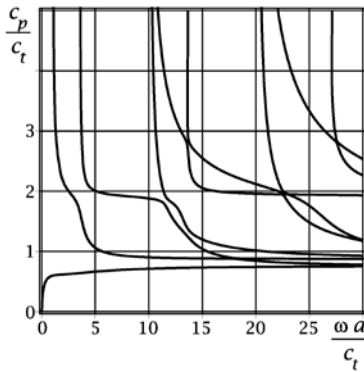


Рис. 15.

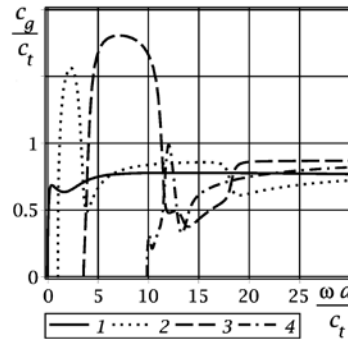


Рис. 16.

Для функционально-градиентных цилиндров секторно-кольцевого сечения из transversально-изотропных и цилиндрически ортотропных материалов формулируются две ($\beta \in \{0; \pi/2\}$) вспомогательные спектральные задачи, решения которых в форме (65) – (67) при $\tau = (\beta - \pi/2)/\alpha + \pi n/\alpha$ ($n \in \mathbb{N}$) образуют базис для целевых граничных задач.

Реализованы исследования ряда вариантов задачи рассматриваемого типа с использованием разработанного и верифицированного программного приложения, в результате которых описаны и обобщены некоторые эффекты влияния параметров неоднородности, частоты, окружного волнового числа и механической анизотропии на структуру и свойства анализируемых дисперсионных спектров. Одним из приемов верификации для исследуемых

случаев наличия гибких нерастяжимых покрытий на участках секторного выреза $G_4^{(\pm)}$ явилось свойство физической эквивалентности волнового поля в цилиндре с вырезом угловой меры $\alpha = \pi/2$ и поля волн в цилиндре замкнутого кругового сечения. Результаты сравнительного анализа дисперсионных спектров бегущих нормальных волн в частном случае радиально неоднородного $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ и однородного $(\lambda, q) = (0, 0)$ волноводов со свободными цилиндрическими участками граничных поверхностей в случае $\alpha = 9\pi/10$, $\beta = 0$, $\tau^{(1)} = 5/9$, $R_1 = 2$, $R_2 = 3$, $R_* = (R_1 + R_2)/2$ ($r \in [4/5, 6/5]$, $h = 1/5$, $x \in [-1, 1]$) и параметров $\tilde{c}_{js}$, равных значениям модулей упругости цинка, представлены на Рисунках 17 и 18.

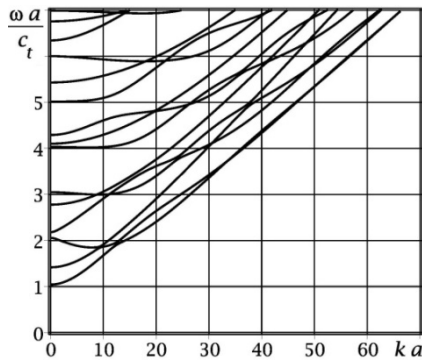


Рис. 17.

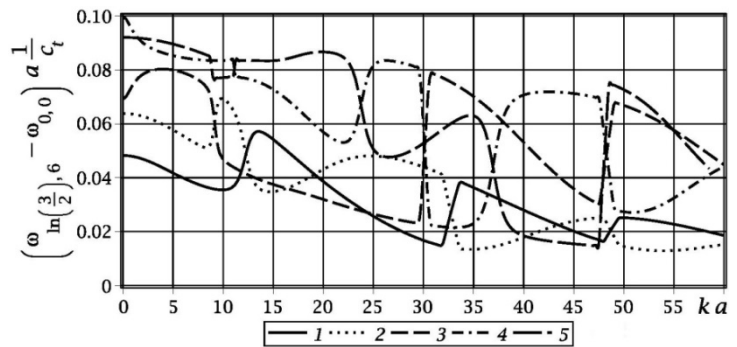


Рис. 18.

Представленные зависимости указывают на усложнение картины влияния фактора неоднородности в случае волноводов с данной геометрией сечений, для которых топологическая структура спектров характеризуется большим числом узких частотных диапазонов локального сближения и расталкивания смежных мод спектра с выраженной картиной «обмена» групповыми скоростями соответствующих этим модам нормальных бегущих волн. Общей тенденцией в распределениях дисперсионных кривых в этих областях является резкое сближение верхней из сходящихся кривых после прохождения точки расталкивания с траекторией соответствующей кривой для однородного цилиндра и противоположный эффект «отдаления» нижней из сходящихся кривых после расталкивания от траектории соответствующей моды однородного цилиндра. Данный эффект для областей «сближения-расталкивания» для мод с номерами в спектре 4 – 6, 10 – 12 и 13 – 15 соответственно проиллюстрирован на Рисунках 19 – 21.

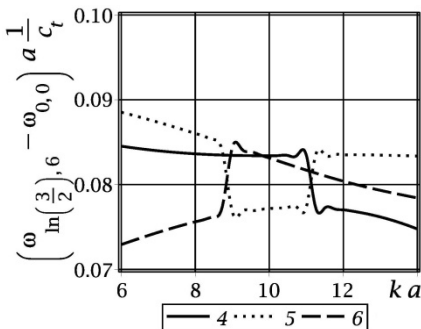


Рис. 19.

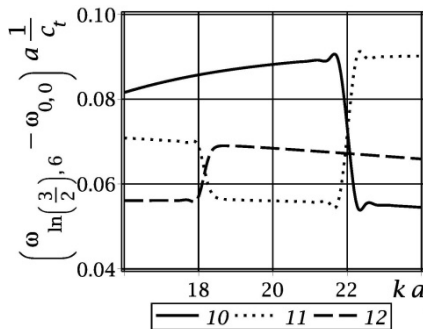


Рис. 20

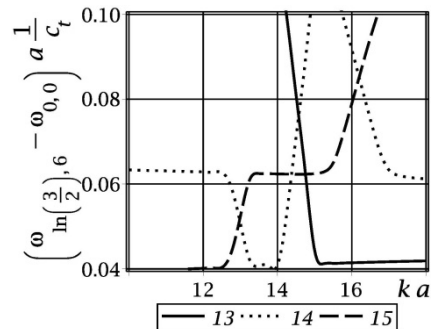


Рис. 21.

В шестом разделе представлена разработка численно-аналитической методики исследования процессов распространения осесимметричных продольно-сдвиговых нормальных волн в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого поперечного сечения с жидкостным заполнением. Рассматриваемая модель частично описана в пятом разделе работы и дополняется соотношениями линейных волновых процессов в идеальной слабосжимаемой жидкости в виде уравнения для потенциала скоростей

$$\left(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r + \partial_z^2 - R_*^2 C_0^{-2} \partial_t^2\right)\varphi = 0, \quad (71)$$

а также выражений для компонент безразмерного вектора скоростей $(v_r, v_\theta \equiv 0, v_z)$ и безразмерной характеристики давления p в жидкости с плотностью ρ_0

$$v_r = \partial_r \varphi, \quad v_z = \partial_z \varphi, \quad p = -(\rho_0 C_0 R_* / c_*) \partial_t \varphi. \quad (72)$$

Модель включает также условия сопряжения для цилиндра и заполнителя и однородные краевые условия на внешней границе

$$\sigma_{rz}|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(1)}} = (\sigma_{rr} + p)|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(1)}} = (R_* \partial_t u_r - C_0 v_r)|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(1)}} = 0, \quad (73)$$

$$\sigma_{rs}|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(2)}} = 0 \quad \text{либо} \quad u_s|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(2)}} = 0 \quad (s = r, z). \quad (74)$$

Построена и реализована методика получения и анализа дисперсионных соотношений для волноводов данного типа; разработано и верифицировано программное приложение, с применением которого на основе численных исследований описаны и обобщены отдельные эффекты влияния факторов неоднородности, частоты, физико-механических свойств компонентов волновода на структуру и свойства анализируемых дисперсионных спектров.

В качестве примера описания обнаруживаемых эффектов на Рисунках 22 – 24 представлены результаты сравнительного анализа дисперсионных спектров бегущих нормальных осесимметричных волн в радиально неоднородном $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ и однородном $(\lambda, q) = (0, 0)$ цилиндрах со свободной внешней граничной поверхностью и с параметрами $\tilde{c}_{js}$, равными значениям модулей

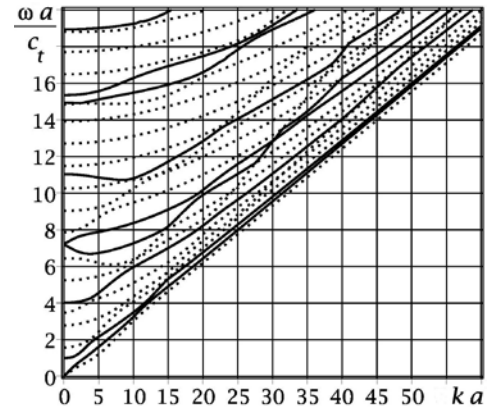


Рис. 22.

упругости цинка. Внутренним заполнителем является жидкость с характеристиками $\{\rho = 1000 \text{ кг/м}^3; C_0 = 1500 \text{ м/с}\}$ (вода). На Рисунке 22 сплошными линиями отмечены моды, которые сохраняются в спектре для пустого неоднородного цилиндра со свободными внутренней и внешней граничными поверхностями. Нормирующий параметр c_t с размерностью скорости в представляемых результатах имеет значение, определяемое из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты для соответствующей ветви спектра заполненного однородного

цилиндра. Оценки различий в траекториях соответствующих дисперсионных кривых дают Рисунках 23 – 24.

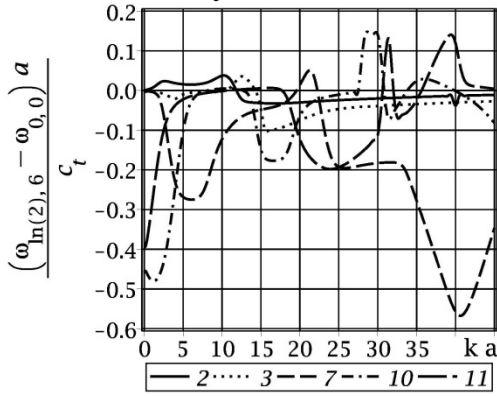


Рис. 23.

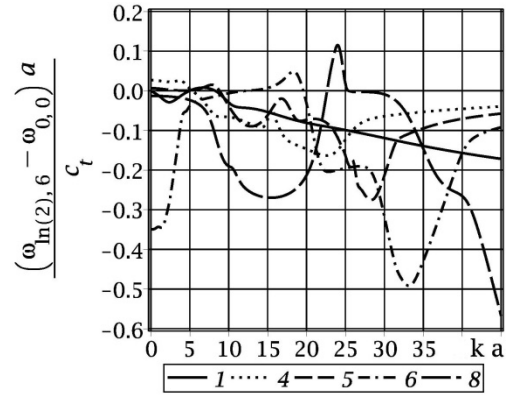


Рис. 24.

В качестве обнаруженной тенденции для данного волновода в исследованных диапазонах изменения нормализованных продольного волнового числа и частоты можно указать на то, что фактически доминирует тенденция размещения траектории дисперсионных кривых для неоднородного цилиндра ниже траекторий соответствующих ветвей спектра для однородного трансверсально-изотропного цилиндра, что соответствует факту относительного снижения фазовых скоростей нормальных волн одинаковой длины из соответствующих мод в случае неоднородного цилиндра.

В седьмом разделе работы представлены исследования по проблеме описания малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн в трансверсально-изотропных круговых цилиндрах радиуса R . Разработанный подход базируется на концепции введения малого параметра $\delta = u_*/R_*$ ($\delta \ll 1$) в виде отношения максимальных амплитуд волновых упругих смещений $u_* = \max_{\{r,\theta,z,t,j\}} |\tilde{u}_j(r,\theta,z,t)|$ к характерному линейному размеру сечения волновода R_* и на представлениях компонентов вектора волновых перемещений u_j ($j = r, \theta, z$) в виде комбинаций $u_j = u_j^{(l)} + \delta u_j^{(n)}$ линейных составляющих $u_j^{(l)}$ и нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник) $u_j^{(n)}$, которым, в свою очередь, соответствуют выражения для компонентов тензора динамических напряжений $\sigma_{js}(u_j)$ вида

$$\sigma_{js}(u_j) = \sigma_{js}^{(l)}(u_j^{(l)})\delta + \left(\sigma_{js}^{(l)}(u_j^{(n)}) + \sigma_{js}^{(n)}(u_j^{(l)})\right)\delta^2 \quad (j, s = r, \theta, z), \quad (75)$$

используемые для записи уравнений динамического деформирования с линейными и нелинейными квадратичными членами. Методика численно-аналитического исследования рассматриваемой модели базируется на построенном итерационном алгоритме для последовательного нахождения комплексных функций перемещений $u_j^{(l)}$ и $u_j^{(n)}$, являющемся следствием процедуры выделения и приравнивания членов одного порядка малости по δ в нелинейных уравнениях волнового деформирования и в краевых условиях на

внешней цилиндрической поверхности. Применительно к рассматриваемому случаю нахождения вторых гармоник для нормальных волн кручения для комплексных функций волновых перемещений вводятся представления

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(l)} &= u_{\theta}^{(0,l)}(r) \exp(-i(\omega t - kz)), \quad u_r^{(l)} = u_z^{(l)} = 0, \\ u_{\alpha}^{(n)} &= u_{\alpha}^{(0,n)}(r) \exp(-2i(\omega t - kz)) \quad (\alpha = r, \theta, z). \end{aligned} \quad (76)$$

Их структура отражает устанавливаемый факт, что вторые гармоники осесимметричных нормальных волн кручения априори являются осесимметричными волнами продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой. Амплитудные функции радиальной координаты в этих представлениях последовательно определяются из однородной и неоднородной граничных задач

$$r^2 \left(u_{\theta}^{(0,l)} \right)'' + r \left(u_{\theta}^{(0,l)} \right)' + \left((\beta r)^2 - 1 \right) u_{\theta}^{(0,l)} = 0, \quad u_{\theta}^{(0,l)}(1) = 0; \quad (77)$$

$$\begin{aligned} & \left(\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} r^{-2} \right) u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)} r^{-1} \left(u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{14}^{(1)} \left(u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{15}^{(1)} \left(u_r^{(0,n)} \right)'' = \\ &= \Delta_1^{n1} r^{-3} u_{\theta}^2 + \Delta_2^{n1} r^{-1} u_{\theta}^2 + \Delta_3^{n1} u_{\theta} \partial_r u_{\theta} + \Delta_4^{n1} r^{-2} u_{\theta} \partial_r u_{\theta} + \\ &+ \Delta_5^{n1} r^{-1} (\partial_r u_{\theta})^2 + \Delta_6^{n1} r^{-1} u_{\theta} \partial_r^2 u_{\theta} + \Delta_7^{n1} (\partial_r u_{\theta}) \partial_r^2 u_{\theta} \\ & \Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} r^{-1} u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)} \left(u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{24}^{(1)} r^{-1} \left(u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{25}^{(1)} \left(u_z^{(0,n)} \right)'' = \\ &= \Delta_1^{n2} u_{\theta}^2 + \Delta_2^{n2} r^{-2} u_{\theta}^2 + \Delta_3^{n2} r^{-1} u_{\theta} \partial_r u_{\theta} + \Delta_4^{n2} (\partial_r u_{\theta})^2 + \Delta_5^{n2} u_{\theta} \partial_r^2 u_{\theta}, \quad u_{\alpha}^{(0,n)}(1) = 0 \\ & \quad (\alpha = r, z), \end{aligned} \quad (78)$$

и получены в аналитическом виде

$$u_{\theta}^{(0,l)}(r) = u^{(0)} \beta_p^* J_1(\beta_p^* r); \quad (79)$$

$$u_r^{(n)} = \left(-D_1 \xi_1 J_1(\xi_1 r) - D_2 \xi_2 J_1(\xi_2 r) + \left(u^{(0)} \right)^2 F_1(r) \right) Q(t, z),$$

$$u_z^{(n)} = \left(D_1 \eta_1 J_0(\xi_1 r) + D_2 \eta_2 J_0(\xi_2 r) + \left(u^{(0)} \right)^2 F_2(r) \right) Q(t, z),$$

$$F_1(r) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p, \quad F_2(r) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p r^p; \quad (80)$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} a_i &= \left(\alpha_i - \Delta_{11}^{(1)} a_{i-2} - \Delta_{14}^{(1)} b_{i-1} (i-2) \right) / \left(\Delta_{12}^{(1)} + \Delta_{13}^{(1)} (i-1) + \Delta_{15}^{(1)} (i-1)(i-2) \right), \\ b_i &= \left(\beta_{i-1} - \Delta_{21}^{(1)} b_{i-2} - \left(\Delta_{22}^{(1)} + \Delta_{23}^{(1)} (i-2) \right) a_{i-1} \right) / \left(\Delta_{24}^{(1)} (i-1) + \Delta_{25}^{(1)} (i-1)(i-2) \right) \\ & \quad (i = \overline{3, \infty}). \end{aligned} \quad (81)$$

С использованием реализующего описанный алгоритм программного приложения выполнен цикл исследований кинематических характеристик нелинейных ангармонических возмущений для нормальных волн кручения в

цилиндрических волноводах из гадолиния с закрепленной либо имеющей гибкое нерастяжимое покрытие боковой поверхностью. Рассмотрен также частный случай учета в рассматриваемой модели только одного фактора геометрической нелинейности применительно к цилиндру с покрытием на границе. Так, распределения отнесенных к $(u^{(0)})^2$ амплитуд волновых перемещений в нелинейных вторых гармониках крутильных волн вдоль радиальной координаты сечения для цилиндров из гадолиния с покрытием на границе при $\tilde{\lambda} = 2\pi/(\tilde{k}R) = 5.0$, соответственно приведенные на Рисунках 25 – 26 и 27 – 28 для случаев учета одной геометрической нелинейности и совокупного учета физической и геометрической нелинейности, указывают, что в сопоставляемых формах имеются элементы подобия со снижением уровня максимальных значений на 20 – 25% для модели учета только геометрической нелинейности. Однако с уменьшением $\tilde{\lambda}$ формы u_r полностью утрачивают подобие; в частности, при $\tilde{\lambda} = 1.8$ количественные оценки максимумов u_r при учете одной геометрической нелинейности являются заниженными примерно в 10 раз.

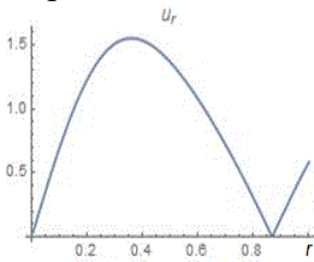


Рис. 25

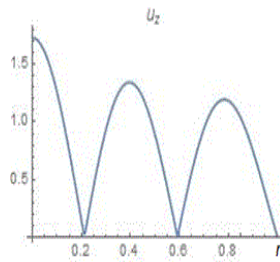


Рис. 26.

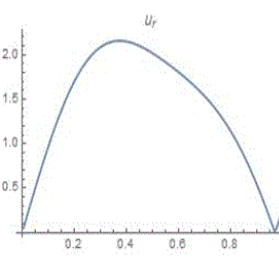


Рис. 27.

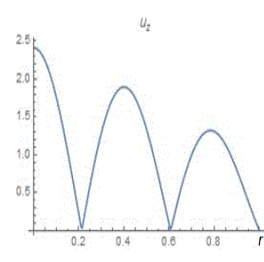


Рис. 28.

Восьмой раздел диссертации посвящен разработке методологии интегрирования уравнений стационарного динамического деформирования низкосимметричных анизотропных сред применительно к задачам волновой механики сплошных протяженных цилиндрических тел из прямолинейно анизотропных материалов орторомбической системы с криволинейной гладкой границей сечения. Задача сведена к построению базисного набора частных решений внутреннего типа для системы трех дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа

$$(\mathbf{I}\partial_{x_1}^2 + \mathbf{J}\partial_{x_2}^2 + \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{V}(x_1, x_2) = \mathbf{O}. \quad (82)$$

где $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{Q}$ – соответственно единичная, неособенная диагональная и произвольная квадратные матрицы третьего порядка со свойствами $[\mathbf{J}]_{j,j} \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ если $[\mathbf{J}]_{j,j} \in \mathbb{R}$ ($j = \overline{1,3}$); $\mathbf{V}(x_1, x_2)$ – матричная функция частного решения. Базисный набор частных решений уравнения (82) построен в комплексных переменных $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ для общего случая, когда входящие в это уравнение квадратные матрицы имеют размерность $m \times m$. В новых переменных уравнение (82) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \left(\Lambda \left(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2 \right) - \left(\mathbf{I} + \Lambda^2 \right) \partial_{z\bar{z}}^2 - \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{V}(z, \bar{z}) = \mathbf{O}, \\ & \mathbf{P} = 1/4 (\mathbf{I} - \Lambda)^2 \mathbf{Q}, \quad \Lambda = \left(\sqrt{\mathbf{J}} + \mathbf{I} \right)^{-1} \left(\sqrt{\mathbf{J}} - \mathbf{I} \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Базисный набор матричных частных решений данного уравнения построен в виде $\left\{ \mathbf{V}^{(0,1)}(z, \bar{z}) \right\} \cup \left\{ \mathbf{V}^{(j,1)}(z, \bar{z}) \right\}_{j=1}^{\infty} \cup \left\{ \mathbf{V}^{(j,2)}(z, \bar{z}) \right\}_{j=1}^{\infty}$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{(j,s)}(z, \bar{z}) &= \sum_{p=j}^{\infty} \Phi_p^{(j,s)}(z, \bar{z}), \quad \Phi_p^{(j,s)}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^p \varphi_{(p-k)k}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \mathbf{C}_{pk}^{(j,s)}, \\ \varphi_{nk}(z, \bar{z}) &= \begin{cases} 0 & \text{когда } n \leq -1 \text{ или } k \leq -1, \\ z^n \bar{z}^k / (\Gamma(n+1) \Gamma(k+1)) & \text{когда } n \geq 0 \text{ и } k \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (84)$$

Для определения матричных коэффициентов $\mathbf{C}_{pk}^{(j,s)}$ построена рекуррентная последовательность краевых задач для систем разностных уравнений второго порядка с постоянными матричными коэффициентами

$$\mathbf{C}_{jk}^{(j,1)} = \Lambda^k, \quad \mathbf{C}_{jk}^{(j,2)} = \Lambda^{j-k}; \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \Lambda \mathbf{C}_{(p+2)k}^{(j,s)} - \left(\mathbf{I} + \Lambda^2 \right) \mathbf{C}_{(p+2)(k+1)}^{(j,s)} + \Lambda \mathbf{C}_{(p+2)(k+2)}^{(j,s)} &= \mathbf{C}_{pk}^{(j,s)} \quad \left(k = \overline{0, p} \right), \quad (p = j, j+2, \dots), \\ \mathbf{C}_{(p+2)0}^{(j,s)} &= \mathbf{A}^{(j,s)}, \quad \mathbf{C}_{(p+2)(p+2)}^{(j)} = \mathbf{B}^{(j,s)}. \end{aligned} \quad (86)$$

Здесь $\mathbf{A}^{(j,s)}$ и $\mathbf{B}^{(j,s)}$ произвольные матрицы. Показано, что краевые задачи (86) являются хорошо обусловленными. В качестве метода решения граничных задач (86) применяется метод прогонки в матричной форме.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОодЫ

В диссертации решена актуальная научная проблема волновой механики протяженных цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами в виде анизотропии и неоднородности, геометрической и физической нелинейности, секторно-круговой и секторно-кольцевой формы сечений с ребрами сингулярности, наличия жидкостного заполнения во внутренних полостях, заключающаяся в разработке численно-аналитических методов анализа математических моделей распространения волн деформаций в волноводах рассматриваемых классов с несколькими типами граничных условий. На основе применения разработанных методов исследованы, систематизированы и обобщены ведущие закономерности в свойствах исследуемых волновых процессов.

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Осуществлено построение и исследование свойств базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью.

2. Осуществлено построение аналитических представлений базисных частных решений для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах секторно-кругового и секторно-кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью физико-механических свойств при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности.

3. Осуществлено построение и исследование свойств базисных множеств аналитических и численно-аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных волноводов с сечением в виде кругового сектора в случае свободных либо жестко закрепленных радиальных участков граничной поверхности.

4. Проведено исследование асимптотических свойств решений рассматриваемых основных и вспомогательных спектральных задач.

5. Получены и исследованы дисперсионные соотношения для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах исследуемого геометрического строения со свободными и жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности с радиальной неоднородностью экспоненциально степенного типа на основе использования базисных множеств решений уравнений модели и вспомогательных спектральных задач

6. Осуществлено получение и исследование дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью.

7. Разработана теоретическая численно-аналитическая методика исследования малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

8. Осуществлено построение и исследование свойств базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрических волноводах гладкого криволинейного сечения из прямолинейно ортотропных упругих материалов.

9. Осуществлена разработка и реализация методик анализа параметрических закономерностей в топологическом строении и составе дисперсионных спектров нормальных волн, в распределениях их фазовых и групповых скоростей, а также в кинематических характеристиках волновых движений применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

10. Осуществлены обобщение и систематизация полученных новых фундаментальных данных о закономерностях влияния особенностей усложненной геометрии сечений, типов граничных условий, радиальной

неоднородности, анизотропии и нелинейности физико-механических свойств материалов волноводов на структуры дисперсионных спектров и особенности кинематических характеристик исследуемых нормальных волн, представляющие первоочередной интерес для сферы практических приложений.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК ДНР

1. Моисеенко В.А. Исследование структуры спектров продольных и низших изгибных нормальных волн в трансверсально-изотропном волноводе с жидким заполнителем / В.А. Моисеенко, **И.А. Моисеенко**. // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 190–194.
2. **Моисеенко И.А.** Моды распространяющихся нормальных волн в трансверсально-изотропном цилиндре секторного сечения / И.А. Моисеенко, В.В. Пузырев. // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 182-187.
3. **Моисеенко И.А.** Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с секторным вырезом: случай свободных участков цилиндрических границ / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 52-59.
4. **Моисеенко И.А.** Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с секторным вырезом в сечении при жестком закреплении всех участков границы / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. – 2008. – Вып. 1. – С. 207-210.
5. Елагин А.В. Генерирование нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в протяженном цилиндре при разнотипных краевых условиях / А.В. Елагин, **И.А. Моисеенко**. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2013. – № 2. – С. 29-32.
6. Елагин А.В. Анализ вторых гармоник нормальных волн кручения в закрепленном трансверсально-изотропном цилиндре: модель учета геометрической нелинейности / А.В. Елагин, **И.А. Моисеенко**. // Вестн. Донецкого нац. Ун-та. Сер. А. Естеств. науки. – 2014. – № 1. – С. 35-42.
7. **Моисеенко И.А.** Подмножества критических частот нормальных волн в ортотропном призматическом волноводе равностороннего треугольного сечения / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев, М.Н. Чернов. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естеств. науки. – 2014. – № 2. – С. 49-53.
8. Елагин А.В. Исследование геометрически нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в свободном трансверсально-изотропном цилиндре / А.В. Елагин, **И.А. Моисеенко**, В.И. Сторожев. // Теорет. и прикл. механика. – 2014. – № 8 (54). – С. 86-97.
9. **Моисеенко И.А.** Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Теорет. и прикл. механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 139-145.
10. **Моисеенко И.А.** Продольные волны в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Вісник

Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет. – 2015. – № 3. – С. 179-189.

11. **Моисеенко И.А.** Спектры нормальных упругих волн в трансверсально изотропных волноводах секторного сечения с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко. // Труды ИПММ. – 2015. – Т. 29. – С. 100-113.
12. **Моисеенко И.А.** Спектры продольных волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных цилиндрах с жидкостным заполнением / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 2. – С. 17-28.
13. **Моисеенко И.А.** Распространение нормальных волн в трансверсально изотропном радиально-неоднородном полом цилиндре с секторным вырезом / И.А. Моисеенко, Вит.В. Волчков. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 35-49.
14. **Моисеенко И.А.** Нормальные волны вдоль ортотропных функционально-градиентных цилиндров секторного поперечного сечения / И.А. Моисеенко. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 4. – С. 41-53.
15. **Моисеенко И.А.** Распространение нормальных волн вдоль трансверсально изотропных функционально градиентных цилиндров / И.А. Моисеенко. // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 37-54.
16. **Моисеенко И.А.** Распространение волн в анизотропных неоднородных цилиндрах секторного сечения со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью / И.А. Моисеенко, Е.С. Кисель // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 2. – С. 36-53.

В рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК ДНР, включенных в Международные наукометрические базы.

17. Космодамианский А.С. Дисперсионный спектр анизотропного волновода секторного сечения с закреплённой границей / А.С. Космодамианский, **И.А. Моисеенко**, Р.Р. Троян. // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 46-51. (**Scopus**)
18. **Моисеенко И.А.** Матричные базисные решения внутреннего типа для приведённых к специальному виду систем дифференциальных уравнений эллиптического типа / И.А. Моисеенко. // Труды ИПММ. – 2005. – Т. 11. – С. 84-98. (**Zentralblatt, MathSciNet**)
19. **Моисеенко И.А.** Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с сечением в форме кольцевого сектора / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян. // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 127-133. (**MathSciNet**)
20. Смоктий О.Д. Эффект краевого резонанса при возбуждении осесимметричных волн в полубесконечном трансверсально-изотропном цилиндре / О.Д. Смоктий, **И.А. Моисеенко**. // Механика твердого тела. –

2009. – Вып. 39. – С. 215-223. (**MathSciNet**)

21. **Моисеенко И.А.** Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132-139. (**MathSciNet**)
22. **Моисеенко И.А.** Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112-124. (**MathSciNet**)
23. **Моисеенко И.А.** Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134-146. (**MathSciNet**)

Публикации в других изданиях

24. Моисеенко В.А. Исследование структуры частотного спектра цилиндрического волновода с жидкостью / В.А. Моисеенко, **И.А. Моисеенко**, А.И. Дзундза. // Вестник Донбасской государственной академии строительства и архитектуры. Проблемы фундаментальных та прикладних досліджень у будівельному комплексі. Збірник наукових праць. № 99-1(15), лютий 99. – 1999. – С. 169-174.
25. **Моисеенко И.А.** Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван. // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 27-41.
26. **Моисеенко И.А.** Компьютерное моделирование процессов распространения упругих волн в полом трансверсально-изотропном цилиндре с жидкостью / И.А. Моисеенко, А.И. Дзундза, В.А. Моисеенко. // Современные проблемы концентрации напряжений. Труды международной научной конференции (Донецк, 21-25 июня 1998 г.). – Донецк : ДонГУ, 1998. – С. 79-83.
27. **Моисеенко И.А.** Дисперсионное соотношение для упругого кристаллического волноводного канала секторного сечения в абсолютно жестком массиве / И.А. Моисеенко, В.А. Цапов, В.И. Сторожев // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць. Ін-т геотехнічної механіки НАН України. – Дніпропетровськ-Сімферополь, 2002. – Вип. 34. – 256 с. – С. 201–206.
28. **Моисеенко И.А.** Итерационно-матричный алгоритм интегрирования уравнений волновой динамики анизотропных сред / И.А. Моисеенко. // Устойчивость, управление и динамика твёрдого тела. IX Международная конференция (Донецк, 1-6 сентября 2005 г.). Тезисы докладов. – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики, 2005. – С.111-112.
29. **Moiseenko I.A.** The analysis of full spectra of normal elastic waves in homogeneous and inhomogeneous anisotropic cylindrical waveguides of complex cross-section / I.A. Moiseenko, R.R. Troyan // Days on Diffraction'2006, International Seminar, SPb., May 30 – June 2, 2006, Abstracts, – P. 55.
30. **Моисеенко И.А.** Базисные матричные решения для специального вида

систем дифференциальных уравнений в частных производных / И.А. Моисеенко. // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Том III (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2006. – 233 с. – С. 151-152.

31. **Моисеенко И.А.** Дисперсионные, кинематические и энергетические свойства нормальных волн в трансверсально изотропном цилиндрическом волноводе секторного сечения с варьируемой угловой мерой выреза / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян // Консонанс – 2005: Акустический симпозиум, 27-29 сент. 2005 г. – К.: ИГМ НАН Украины. – С. 231-236.
32. **Моисеенко И.А.** Нормальные волны в аксиально-анизотропных цилиндрических волноводах составного и кольцевого сечения с секторными вырезами / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: IV Междунар. научн. конф., посвященная памяти акад. НАНУ А.С. Космодамианского: Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006г.: материалы – Донецк: Юго-Восток, 2006. – 322 с. – С. 268-270.
33. Полуказакова М.С. Потоки мощности нормальных магнитоупругих волн в слое пьезомагнитного кристалла / М.С. Полуказакова, **И.А. Моисеенко**, Ю.П. Бай. // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: IV Междунар. научн. конф., посвященная памяти акад. НАНУ А.С. Космодамианского: Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006г.: материалы – Донецк: Юго-Восток, 2006. – 322 с. – С. 295-297.
34. **Моисеенко И.А.** Решение задач динамики для анизотропных сред с использованием матричной формы базисных решений волновых уравнений / И.А. Моисеенко. // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: IV Междунар. научн. конф., посвященная памяти акад. НАНУ А.С. Космодамианского: Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006г.: материалы – Донецк: Юго-Восток, 2006. – 322 с. – С. 265-267.
35. **Моісеєнко І.О.** Базисні розв'язки системи рівнянь хвильового деформування п'єзокристалічного середовища в комплексних вектор-функціях / І.О. Моісеєнко, Н.В. Приходько. // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. Труды VII Международной научной конференции (п. Мелекино, 11-14 июня 2013 г.). – Т. 2. – Донецк: ДонНУ, 2013. – 227 с. – С. 71-74.
36. Елагин А.В. Нелинейные вторые гармоники нормальных волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре / А.В. Елагин, **И.А. Моисеенко**, В.И. Сторожев. // Тезисы докладов VII Всероссийской (с Международным участием) конф. по механике деформируемого твердого тела, г. Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013 г. Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. 166 с. – С. 58.
37. **Моисеенко И.А.** Получение дисперсионных соотношений для пьезокристаллических цилиндров с гладким криволинейным сечением: метод рядов по экспоненциальным базисным решениям волновых уравнений / И.А. Моисеенко, Н.В. Приходько. // Труды XVII Международной конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г. в 2 т. – Ростов-наДону.

Издательство Южного федерального университета, 2014. – Т. 2. – 234 с. С. 113-117.

38. Елагин А.В. Вторые гармоники монохроматических нормальных волн кручения: учет фактора геометрической нелинейности для трансверсально-изотропного цилиндра с обобщенными смешанными граничными условиями на поверхности / А.В. Елагин, **И.А. Моисеенко**. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов IX Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 26-30 мая 2014 г., Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2014, 128 с. – С. 65.
39. **Моисеенко Ігор** Аналітико-числовий аналіз проблеми поширення пружних хвиль вздовж виготовлених з низько симетричних кристалів циліндрів гладких криволінійних перерізів / Ігор Моисеенко, Валерій Сторожев. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. IX Міжнар. наук. конференція, м. Львів, 15-19 вересня 2014 р., Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Подстригача, 2014, 412 с. – С. 71-73.
40. **Моисеенко И.А.** Дисперсия продольных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах из экспоненциально-неоднородных материалов / И.А. Моисеенко. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 25-30 мая 2015 г. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2015. – 146 с. – С. 73.
41. **Моисеенко И.А.** Продольные волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах с жидкостным заполнением / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // История и методология науки: Материалы Международной научно-методической конференции, посвященная 100-летию со дня рождения А.И. Бородин. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2016. – 216 с. – С. 79-81.
42. **Моисеенко И.А.** Спектры продольно-сдвиговых волн в трансверсально изотропных полых цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко. // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции, г. Донецк, 16-18 мая 2016 г. – Том 1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – 393 с. – С. 36-38.
43. **Моисеенко И.А.** Анализ нелинейных вторых гармоник для волн кручения вдоль трансверсально-изотропного цилиндра / И.А. Моисеенко, О.Ю. Сидаш. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов XI Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 23-27 мая 2016 г., Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2016. – 154 с. – С. 87.
44. **Moiseyenko Igor A.** Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonic for Guided Torsion Elastic Waves in Transversely Isotropic Cylinder / Igor A. Moiseyenko, Valeriy I. Storozhev, Oksana Yu. Sidash. // Nonlinear

Dynamics – 2016: Proceedings of 5-th International conference, Dedicated to the 90-th Anniversary of Academician V.L. Rvachev, (September 27–30, 2016) / National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute” at al. – Kharkov, 2016. – 538 p. – P. 457-464.

45. **Моисеенко И.А.** Кинематические характеристики нелинейных ангармонических возмущений для монохроматических нормальных волн кручения в анизотропных цилиндрах из Gd и Tb / И.А. Моисеенко, О.Ю. Сидаш, В.И. Сторожев. // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XVIII Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2016. – 168 с. – С. 124.
46. **Моисеенко И.А.** Кинематические характеристики нелинейных ангармонических возмущений для монохроматических нормальных волн кручения в анизотропных цилиндрах из Gd и Tb / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев, О.Ю. Сидаш. // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2016. Т. 2. – 266 с. – С. 102-106.
47. Сторожев В.И. Анализ модели нелинейного взаимодействия нормальных волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрах / В.И. Сторожев, **И.А. Моисеенко**, О.Ю. Сидаш. / Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XII Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017 г.) / Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. Южного федерального университета, 2017. – 178 с. – С. 139.
48. **Моисеенко И.А.** Базисные решения волновой динамики в задачах о распространении упругих волн в полых цилиндрах из функционально-градиентных материалов / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко. // Сб. материалов III Международной научно-практич. конф. «Приоритетные направления развития современной науки: от теории к практике» по итогам 2017 г. – Троицк: ТФ ЧелГУ, 2018. – 311 с. – С. 166-171.
49. **Моисеенко И.А.** Анализ модели нелинейных ангармонических возмущений для волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре с мембранным покрытием граничной поверхности / И.А. Моисеенко, О.Ю. Сидаш. // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2018: VII Международная научно-практическая интернет-конференция, 25 мая 2018 г. – Донецк: ГОУ ВПО «ДонНУЭТ», 2018. – 117 с. – С. 17-20.
50. Сторожев В.И. Кинематические характеристики нормальных упругих волн в протяженных функционально-градиентных ортотропных цилиндрах секторного поперечного сечения / В.И. Сторожев, **И.А. Моисеенко**. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XIII Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 31 мая – 3 июня 2018 г.) / Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. Южного федерального университета, 2018. – 108 с. – С. 83.

АННОТАЦИЯ

Моисеенко И.А. Задачи волновой механики цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», ДНР, Донецк, 2018.

Разработаны новые методики численно-аналитического исследования спектров и свойств нормальных упругих волн в цилиндрических телах с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами. Для анализа моделей рассматриваемого типа осуществлено построение базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования для краевых задач о спектрах нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью; краевых задач о спектрах нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах секторного и секторно-кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности, а также в случае свободных либо жестко закрепленных радиальных участков границы. Осуществлено исследование асимптотических свойств решений рассматриваемых вспомогательных спектральных задач. Получены базисные множества аналитических частных решений уравнений волнового деформирования для краевых задачах о спектрах нормальных волн в сплошных цилиндрах из прямолинейно ортотропных материалов с гладкой границей сечения.

Получены и исследованы дисперсионные соотношения для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах исследуемого геометрического строения со свободными и жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности с радиальной неоднородностью экспоненциально степенного типа на основе использования базисных множеств решений уравнений модели и вспомогательных спектральных задач. Получены и исследованы дисперсионные соотношения для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью. Разработана методика исследования малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

Обобщены и систематизированы закономерности влияния усложненной геометрии сечений, типов граничных условий, радиальной неоднородности, анизотропии и нелинейности физико-механических свойств материалов волноводов на структуры дисперсионных спектров и кинематические

характеристики исследуемых волн.

Ключевые слова: цилиндрический волновод; нормальные волны; анизотропный; функционально-градиентный материал; нелинейность; неканоническое поперечное сечение; спектральная задача.

ABSTRACT

Moiseyenko I.A. Problems of wave mechanics of cylindrical bodies with complicated geometric and physical and mechanical properties. – Manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.02.04 - mechanics of deformable solid. Donetsk National University, DPR, Donetsk, 2018.

New methods of numerical and analytical study of the spectra and properties of normal elastic waves in cylindrical bodies with complicated geometric and physical and mechanical properties have been developed.

For the analysis of models of the type under consideration, the construction of basic sets of analytic partial solutions of the wave deformation equations for boundary value problems on the spectra of normal waves in transversely isotropic and cylindrically orthotropic cylinders of circular and annular sections with exponential-power radial inhomogeneity is carried out; boundary-value problems on the spectra of normal waves in transversally isotropic and cylindrically-orthotropic waveguides of sector and sector-ring sections with exponential-power radial inhomogeneity in the presence of flexible inextensible coatings on radial sections of the boundary surface, as well as in the case of free or rigidly fixed radial sections of the boundary. The study of the asymptotic properties of solutions of the subsidiary spectral problems under consideration is made. Basic sets of analytic partial solutions of the wave deformation equations are obtained for boundary value problems on the spectra of normal waves in solid cylinders of straight orthotropic materials with a smooth boundary of the cross section.

Dispersion relations for normal waves in transversely isotropic and cylindrically orthotropic waveguides of the investigated geometric structure with free and rigidly fixed cylindrical sections of the boundary surface with radial inhomogeneity of exponentially power type are obtained and investigated on the basis of the use of basic sets of solutions of model equations and auxiliary spectral problems. Dispersion relations for normal waves in transversely isotropic and cylindrically orthotropic waveguides of annular cross-section with an internal cavity filled with an ideal weakly compressible liquid are obtained and investigated. The technique for investigating small nonlinear anharmonic effects in the propagation of elastic waves in transversely isotropic cylinders of circular cross section using the model of geometrically and physically nonlinear deformation is developed.

The regularities of the effect of the complicated geometry of the cross sections, types of boundary conditions, radial inhomogeneity, anisotropy and nonlinearity of the physical and mechanical properties of waveguide materials on the structures of dispersion spectra and kinematic characteristics of the investigated waves are generalized and systematized.

Keywords: cylindrical waveguide; normal waves; anisotropic; FGM; nonlinearity; noncanonical cross-section; spectral problem.