

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ
ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи



КИСЕЛЬ ЕКАТЕРИНА СЕРГЕЕВНА

УДК 539.3

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ
КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель
ВОВК ЛЕОНИД ПЕТРОВИЧ,
доктор технических наук,
профессор

Донецк – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
РАЗДЕЛ 1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ПРОБЛЕМАМ АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ	14
1.1. Становление и развитие методологии решения граничных задач теории упругости для тел конечных размеров	14
1.2. Учет тонких динамических эффектов при гармонических колебаниях тел с неоднородной границей.....	16
1.3. Состояние проблемы учета температурных воздействий на характеристики волнового поля.....	20
1.4. Выводы по разделу 1	24
РАЗДЕЛ 2 МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ КОНЕЧНЫХ ТЕЛ.....	27
2.1. Обобщение метода суперпозиции при решении задач установившихся колебаний термоупругих однородных областей. Постановка краевой задачи для изотропного термоупругого прямоугольника.....	27
2.2. Обобщение метода суперпозиции на случай однородных симметричных прямоугольных термоупругих областей	30
2.3. Вывод системы интегральных уравнений для определения волновых характеристик однородных термоупругих областей	35
2.4. Асимптотический анализ поведения характеристик термомеханического волнового поля в окрестности угловых точек области	43
2.5. Определение параметров особенностей волновых характеристик в сингулярных точках однородной области	51
2.6. Выводы по разделу 2	53
РАЗДЕЛ 3 РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ НА СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙСЯ СОПРЯЖЕНИЕМ ДВУХ СРЕД	55
3.1. Формулировка и решение краевой задачи для изотропного термоупругого неоднородного прямоугольника с плоскопараллельными	

границами	55
3.2. Обобщение метода суперпозиции на случай кусочно-неоднородных прямоугольных термоупругих областей	58
3.3. Решение вспомогательных краевых задач для случая гармонических колебаний составного прямоугольника	63
3.4. Асимптотический анализ поведения вспомогательных функций в окрестности сингулярных точек границы составного сечения	71
3.5. Характеристическое уравнение для показателей локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках области.....	75
3.6. Численная реализация решения СИУ методом Бубнова – Галеркина	77
3.7. Выводы по разделу 3	82
РАЗДЕЛ 4 ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОГО ПОЛЯ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА	84
4.1. Численный анализ зависимости ПЛО	84
от термоупругих параметров среды.....	84
4.2. Зависимость спектра резонансных частот от некоторых параметров сечения кусочно-неоднородной термоупругой области	89
4.3. Влияние коэффициента температурного расширения на собственные частоты исследуемой кусочно-неоднородной термоупругой области	97
4.4. Влияние упругих параметров области с учётом температурного фактора на собственные частоты исследуемой области	101
4.5. Распределение энергии деформации по площади термоупругого неоднородного сечения на резонансных частотах	107
4.6. Концентрация напряжений в характерных точках термоупругого неоднородного сечения на резонансных частотах	111
4.7. Выводы по разделу 4	114
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	116
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	120
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	137
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	139

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Обеспечение безопасности и надёжности сложных технических систем является одной из важнейших задач создания и эксплуатации различных инженерных объектов и конструкций. В результате активного развития машиностроения, тепловой и атомной энергетики, химической и аэрокосмической промышленности значительно увеличилось производство и применение разъемных и неразъемных соединений, выполненных из материалов, сочетающих в себе различные физико-механические свойства. Подобные конструкционные особенности, широкое применение различных видов сварки, технологические пластические деформации при соответствующих рабочих нагрузках, возникающая локальная концентрация напряжений (ЛКН) часто создает возможность возникновения как технологических, так и эксплуатационных повреждений в потенциально опасных зонах. Для обеспечения необходимых эксплуатационных качеств составных конструкций, метод исследования подобного рода зон обязательно должен учитывать возможность качественного и количественного определения степени концентрации напряжения, роль температурных полей и термоупругих волн в процессе ее возникновения, т.е. возможность возникновения краевых и граничных эффектов и их интенсивность. Необходимость одновременного учета большого количества факторов: связанности полей деформации и температуры, сложности формы исследуемых областей, их физической неоднородности, условий нагрузки, обуславливает значительные математические трудности расчета распределения напряжений в твёрдом термоупругом неоднородном теле. Однако именно перечисленные факторы являются причиной появления новых волновых эффектов. Поэтому в динамических задачах теории термоупругости особо актуальной представляется оценка роли физической и геометрической неоднородности в формировании спектра и форм колебаний исследуемой неоднородной области, что мотивирует к поиску новых и совершенствованию существующих методов решения граничных задач связанной термоупругости для неоднородных тел.

Целью работы является разработка численно-аналитического метода решения плоских динамических задач связанной термоупругости для неоднородных изотропных тел с негладкой границей, исследование влияния термоупругих и геометрических характеристик тел на характеристики волнового поля. Для достижения указанной цели были поставлены следующие основные **задачи:**

- распространить алгоритм метода суперпозиции для расчёта, в рамках теории плоской деформации конечных термоупругих кусочно-неоднородных тел, динамического НДС (напряженно-деформированного состояния) в окрестности сингулярных зон границы;
- получить решения конкретных граничных задач термоупругости для плоских однородных и кусочно-неоднородных тел;
- провести полное исследование зависимости краевых и граничных динамических эффектов от температурных, а также геометрических и упругих параметров и определить термомеханические характеристики волнового поля в окрестности угловых точек на примере неоднородной термоупругой прямоугольной области;
- определить условия проявления тонких динамических эффектов типа краевого и граничного резонансов и проанализировать величину их интенсивности;
- исследовать эффективность метода и достоверность получаемых результатов;
- подтвердить работоспособность полученных численно-аналитических схем, установить критерии возможности их применения.

Объектом исследования являются математические модели волновых деформационных процессов, возникающих в неоднородных твердых телах вблизи особых точек границы.

Предметом исследования являются методы расчета установившихся колебаний конечных изотропных термоупругих кусочно-неоднородных тел с негладкой границей.

Методы исследования. Для аналитического решения поставленных граничных задач был применён модифицированный метод суперпозиции, что

дало возможность свести задачу к системе сингулярных интегральных уравнений с известной асимптотикой неизвестных. Определение характера поведения НДС в окрестности нерегулярных точек внешних и внутренних границ кусочно-неоднородных тел позволило при численном анализе наилучшим образом аппроксимировать решение и построить эффективный алгоритм его нахождения. Таким образом, приведённое обобщение метода суперпозиции в совокупности с методом вспомогательных краевых задач, методами выделения особенностей и методом Бубнова – Галеркина позволило произвести численно-аналитическое решение поставленных задач, отвечающих рассмотренным в работе вопросам и целям, а также проверку его достоверности.

Связь работы с научными программами, планами, темами

Проведенные в работе исследования связаны с конкурсными научными проектами «Разработка методов исследования упругого состояния тел под действием механических, температурных и электромагнитных полей, их применение» (МОНУ, № госрегистрации 0108U001594, 2008–2010 гг.), «Исследование вязкоупругого и электромагнитоупругого состояния многосвязных сред» (МОНУ, № госрегистрации 0111U000406, 2011–2013 гг.), а также с разрабатываемой в настоящий момент по плану НИР АДИ ГОУ ВПО «ДонНТУ» научно-исследовательской работой Н-2018-03 «Численно-аналитические модели термодинамического деформирования и разрушения неоднородных областей с негладкой границей». Основные результаты работы использованы в отчетах по указанным НИР.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованной литературы, который содержит 172 источника, и двух приложений. Общий объем диссертации составляет 143 страницы, из которых основной текст диссертации занимает 119 страниц. Работа содержит 4 таблицы, 30 рисунков. Список литературы составляет 17 страниц, приложения – 7 страниц.

В первом разделе диссертации приведен анализ работ, посвященных исследованию существующих методов решения граничных задач теории

упругости для однородных и неоднородных структур, в частности тел конечных размеров. Анализом литературы охвачено 172 работы отечественных и зарубежных авторов. Рассмотрена специфика методов решения граничных задач термоупругости, проблемы связанной термоупругости неоднородных тел. Проведённый анализ научных публикаций, показал, что наиболее эффективным и часто используемым методом решения связанных задач термоупругости остаётся МКЭ (метод конечных элементов). Отмечается относительно небольшой (по сравнению с двумерными задачами упругости) объем исследований, посвященных аналитическим методам решения задач данного круга, в частности особенностям краевых и граничных эффектов в задачах термоупругости и анализу сингулярности напряжений в неоднородных термоупругих телах с негладкой границей. В рассматриваемых работах не введены параметры интенсивности ЛКН, аналогичные широко известным коэффициентам концентрации напряжений, нет анализа особенностей НДС с учётом сингулярности границы области и влияния температурных напряжений на ЛКН. Это позволило определить круг вопросов, требующих дальнейшего развития и решения, в частности, о распространении усовершенствованного алгоритма метода суперпозиции для расчета термоупругих неоднородных прямоугольных областей с целью определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых/внутренних точек областей.

Второй раздел посвящен математическому моделированию процесса постоянных симметричных колебаний конечных изотропных однородных термоупругих областей с нерегулярной границей и аналитическому решению сформулированных краевых задач для тел прямоугольного сечения путём модификации метода суперпозиции и асимптотического анализа поведения неизвестных функций в сингулярных точках границы. Общий алгоритм основного модифицированного метода суперпозиции изложен при решении задачи о свободных постоянных симметричных колебаниях однородного термоупругого тела, сечение которого представляет собой прямоугольную область. Внешняя поверхность детали имеет свободный теплообмен с внешней средой и находится

под нагрузкой. Для построения эффективного модифицированного алгоритма решения проводится асимптотический анализ НДС в угловых точках сечения. Определение ПЛО (параметров локальной особенности) в угловых точках области дает возможность прогнозировать интенсивность ЛКН в этих проблемных зонах и применить критерии прочности, учитывая максимальные напряжения и их зависимость от ПЛО.

Третий раздел посвящен реализации алгоритма метода суперпозиции для расчета термоупругих кусочно-неоднородных тел и определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых точек области, а также применению разработанной ранее в разделе 2 схемы для численно-аналитического расчета ПЛО по напряжениям и анализу влияния температурных эффектов на ПЛО.

Обобщение метода суперпозиции на случай кусочно-неоднородных термоупругих областей изложено при решении задачи о свободных постоянных симметричных колебаниях неоднородного термоупругого прямоугольника с плоскопараллельными границами. Составляющие область среды состыкованы друг с другом. Они являются изотропными и имеют разные упругие константы. На границах области, задано нормальное нагружение, которое гармонично изменяется во времени. Предполагается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой. Безразмерные амплитудные характеристики перемещений и прироста температуры определяются системой уравнений связанной термоупругости в безразмерных координатах для составляющих сред. На границах области формулируются в безразмерном виде соответствующие силовые и температурные граничные условия для подобластей сечения тела таким образом, чтобы были выполнены условия сопряжения сред с различными термоупругими свойствами.

Следуя методу Неймана – Шварца, общее решение (перемещения и температура для сред) конструируется в виде суммы двух частных решений. При выборе формы этих частных решений необходимо учитывать возможность удовлетворения не только граничных условий на внешней границе области, но и

условий сопряжения механических и температурных характеристик на границе раздела двух сред.

Аналогично алгоритму для однородного термоупругого прямоугольника, рассматривается вспомогательная краевая задача. При заданных граничных условиях вид этой вспомогательной задачи значительно усложняется, поскольку при её формулировке необходимо не только добиться аналитического решения, но и ввести граничные условия и условия сопряжения. Это позволяет максимально упростить вид последующей системы интегральных уравнений. Вспомогательная краевая задача предполагает аналитическое решение и даёт возможность удовлетворить часть начальных граничных условий и выразить все характеристики начальной задачи через коэффициенты Фурье неизвестных функций. Для определения введённых вспомогательных функций составляется система интегральных уравнений (СИУ), с использованием неучтённых граничных условий и условий сопряжения составляющих сред.

Для определения особенностей волнового поля в угловых точках сопряженных сред проводится исследование решения СИУ. В рассматриваемой задаче такими точками являются точка, образованная пересечением внутренней и внешней границ, сред и внешняя угловая точка прямоугольника. Это позволяет определить асимптотику коэффициентов Фурье неизвестных функций. Исследование решения СИУ приводит, в конечном итоге, к характеристическим уравнениям для определения ПЛЮ по напряжениям и температуре в исследуемых сингулярных точках. Решение данной центральной задачи можно считать концепт-продуктом, демонстрирующим основную идею исследования, а метод суперпозиции в данной интерпретации можно рассматривать как общий методологический подход, расширяющий возможности исследований НДС составных конструкций.

В четвёртом разделе предложены результаты численного анализа характеристик волнового поля для неоднородной термоупругой области. Были проанализированы особенности поведения волновых характеристик в различных средах, неоднородного прямоугольника с точки зрения проявления граничных и

краевых динамических эффектов. Для этого рассматривались различные значения упругих и геометрических параметров сечения, с целью определения тех, на которых эти эффекты выражены наиболее отчетливо.

В заключении сформулированы основные обобщенные научные результаты проведенных в работе теоретических и численно-аналитических исследований.

На защиту выносятся следующие, полученные в работе, научные результаты:

- разработка метода решения задач термоупругости для однородных и составных термоупругих тел с сингулярной границей, позволяющего дать достоверную оценку учёта влияния температурных параметров на природу краевого и граничного резонанса и интенсивность концентрации напряжений в опасных зонах тела;
- обобщение метода суперпозиции при решении краевых задач установившихся колебаний термоупругих прямоугольных областей, основанного на возможности сведения задачи к системе сингулярных интегральных уравнений с известной асимптотикой неизвестных, определение характера поведения НДС в окрестности сингулярных точек внешних и внутренних границ кусочно-однородных тел с целью аппроксимации решения и построения эффективного алгоритма его нахождения при численном анализе;
- разработка метода выделения особенностей, расчета и определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых точек области;
- алгоритм численно-аналитического расчета ПЛО по напряжениям и анализ влияния температурных эффектов на ПЛО в телах с переменными характеристиками;
- установление механической зависимости краевых и граничных динамических эффектов от температурных, а также геометрических и упругих параметров.

Научная новизна полученных результатов заключается в обосновании и решении вопроса установившихся симметричных колебаний конечных

изотропных однородных и кусочно-однородных термоупругих тел с нерегулярной границей, при этом получены такие новые результаты:

- впервые поставлена научная проблема о влиянии температурной составляющей волнового поля на суммарные характеристики динамической ЛКН в неоднородных термоупругих областях с негладкой границей;
- впервые был предложен, теоретически обоснован и аналитически реализован новый метод решения краевых задач колебаний конечных изотропных термоупругих областей с нерегулярной границей, путём усовершенствования, обобщения и дальнейшего распространения существующего модифицированного метода суперпозиции на термоупругие области; в отличие от ранее предложенных, данный метод учитывает температурную составляющую в асимптотическом анализе поведения неизвестных функций в сингулярных точках границы области;
- впервые введена новая научная категория – ПЛО и разработана новая схема для численно-аналитического их расчета с учётом влияния температурных эффектов, также дано математическое обоснование её применения;
- впервые раскрыты новые закономерности возникновения и развития динамических краевых эффектов и разработан новый математический метод их оценки в кусочно-однородных термоупругих структурах путём анализа асимптотического поведения НДС в нерегулярных точках составного сечения.

Достоверность полученных результатов основывается на строгости применяемого математического аппарата. Обеспечивается адекватной физической и математической постановками задач, корректным использованием математических методов, проверкой их сходимости, применением сертифицированных программ конечно-элементного анализа для проведения численного исследования, сравнением результатов аналитических и численных решений, непротиворечивости полученных результатов известным решениям, найденным другими авторами для неоднородных термоупругих тел.

Практическая значимость полученных результатов. Предложенные методы могут найти своё применение при проведении прочностных расчетов

динамического НДС элементов конструкций и деталей машиностроения со сложными физико-механическими свойствами. На основе проведенных исследований выработаны практические рекомендации по снижению уровня термоупругих напряжений в элементах машиностроительных конструкций. В анализе прочностных характеристик учёт ПЛО по напряжениям и влияния температурных эффектов, может оказать положительное влияние на рекомендации по подбору материалов, составляющих сечение детали, а также оптимизировать геометрические параметры составного сечения, что однозначно способствует значительному повышению прочности конструкций и оборудования.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных конференциях: Всеукраинская научно-практическая конференция «Вісник науковця – 2009» Николаев, НУК, 2009 г.; VI Международная научно-практическая конференция «Альянс наук: вчений - вченому» Днепропетровск, ПДАБА, 2009 г.; VII Международная студенческая конференция «Прикладні завдання математики в механіці, економіці та екології» Севастополь, СТМ, 2009 г., 2013 г.; X Международная научно-практическая конференция «Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» Новочеркасск ЮРГТУ (НПИ), 2010; IX Международная научно-техническая конференции Ростов-на-Дону, ИЦ ДГТУ, 2010 г.; XIII Міжнародна конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, НТУУ, 2010 р.; Международная научно-практическая конференция «Современные проблемваы и пути их решения в науке транспорте и образовании 2011» Одесса, Черноморье, 2011 г.; Международная научно-практическая конференция «Научные исследования и их практическое применение. Современное состояние и пути развития 2011» Одесса, Черноморье, 2011 г., 2013 г.; XIV міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, Київ, НТУУ, 2012 р.; VI всеукраїнська науково-практична заочна конференція «Наука України. Перспективи та потенціал» Запоріжжя, Всеукраїнське громадське партнерство «Нова освіта», 2013 р.; 7th International

Scientific Conference «European Applied Sciences: modern approaches in scientific researches»: Papers of the 7th International 4 Scientific Conference. – Stuttgart, Germany, Теоретические и практические проблемы развития науки, III международная науч.-практ. конф., (г. Махачкала, 30 ноября, 2013 г.) – Махачкала: ООО «Апробация»; II Международная научно-практическая конференция (Азов, 19 мая 2015 г.); «Молодёжный форум: технические и математические науки» 9 ноября – 12 ноября 2015 года, г. Воронеж (РФ); XVIII Международной конференции. Южный федеральный университет, 2016 и др.

В полном объеме диссертационная работа докладывалась на объединенном научном семинаре по механике сплошных сред кафедр теории упругости и вычислительной математики, прикладной механики и компьютерных технологий Донецкого национального университета

Публикации результатов исследований. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 38 научных работах, из которых 2 статьи в научных изданиях из перечня ВАК ДНР, а также 36 статей в других изданиях, включая тезисы и материалы научных конференций.

Личный вклад соискателя. Все основные научные результаты диссертационной работы получены автором лично. В совместно проведенных исследованиях и опубликованных работах, соавторам Л.П. Вовку [28-41, 43, 45-47, 49-54], И.А. Моисеенко [108], Б.В. Соболю [128] принадлежат участие в постановке рассматриваемых задач и рекомендации по методам анализа и обобщения полученных результатов. Соавторам И.В. Даниленко [90], Е.А. Новицкой [49, 84], А.С. Столяровой [85], О.Б. Калашниковой [32, 34, 51, 82, 83], М.А. Абазе [81], И.А. Матвееву [40] принадлежат участие в осуществлении численных экспериментов в программном комплексе ANSYS на базе Южного федерального университета, а также участие в обработке и систематизации результатов численного анализа. Сведения об используемом программном комплексе ANSYS: бессрочная лицензия №467447 от 22.03.2007, подписана в 2008 году содержит ANSYS Academic Research + AUTODYN + CFD, позволяющая выполнять диссертационные исследования (версия ANSYS 11.0).

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ПРОБЛЕМАМ АНАЛИЗА ПРОЧНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЛАСТЕЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

1.1. Становление и развитие методологии решения граничных задач теории упругости для тел конечных размеров

В настоящее время разработано два подхода к решению граничных задач теории упругости для тел конечных размеров: метод однородных решений и метод суперпозиции.

Метод однородных решений [4, 93, 96, 113, 121], нашел применение в плоской задаче теории упругости, в теории тонких и толстых плит, при исследовании деформации конечного цилиндра и в ряде других случаев.

Истоки данного метода восходят к исследованиям А. И. Лурье, который предложил искать решения для плит в виде рядов по однородным решениям, то есть решениям, удовлетворяющим уравнениям теории упругости и однородным граничным условиям на торцевых поверхностях плиты. Применению однородных решений для определения напряженного состояния многосвязных пластин посвящены работы А. С. Космодамианского [97, 96, 155]. Обобщение теории однородных решений отражается в работах Ю. А. Устинова и его учеников, В. И. Сторожева, И. И. Воровича, И. П. Гетмана, И. Г. Кадомцева и содержат: построение полуобратным методом И. И. Воровича однородных решений; исследование общих свойств собственных функций и значений спектральных задач; доказательство полноты системы однородных (элементарных) решений, математическое описание критических мод; методы алгебраизации задач – сведение краевых задач к бесконечным системам алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения по однородным решениям; анализ области применимости прикладных теорий [134, 135, 160].

Обобщение данного метода привело к исследованию закономерностей формирования волновых полей в слоистых средах [97, 116] и превратилось в одно

из серьезных научных направлений теории упругости и математической физики. Отметим, что реализация метода однородных решений требует детального анализа краевых задач для слоя. Эти задачи были исчерпывающе проанализированы в работах И. И. Воровича, В. А. Бабешко, О. Д. Пряхиной [10, 55, 56], А. С. Космодамианского [96-98], В. И. Сторожева и Ю. В. Мысовского [109, 129], Е. В. Алтухова и В. П. Шевченко [6, 7], Ю. А. Устинова [132-135], И. П. Гетмана [58-60], М. Д. Коваленко [94], С.П. Пельц [119], Р. М. Раппорт [123], Л. А. Фильштинского [137, 138].

Остановливаясь более детально на результатах некоторых исследований, отметим, что работы Ю. А. Устинова [132, 133] посвящены развитию математической теории пластин, упругие свойства которых описываются кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты. включает в себя разработанные автором методы построения однородных и неоднородных решений. Для анализа напряженно-деформированного состояния широко используются спектральная теория операторов, асимптотические методы, теория возмущений, вариационные принципы и т.д. особое внимание уделено проблеме предельного перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным.

В работе [5] Е. В. Алтуховым и М. В. Фоменко на основе однородных решений изложены аналитические и численно-аналитические методы решения краевых задач трехмерной теории упругости для однородных и поперечно-неоднородных изотропных пластин. Приведены решения ряда частных задач. В результате выполненных исследований описаны закономерности в напряженном состоянии пластин и распространении нормальных волн. Выяснено, что полученные результаты могут быть эталонными и использованы для оценки погрешности приближенных теорий пластин и оболочек.

Вторым методом в решении осесимметричных задач теории упругости является **метод суперпозиции**.

Основоположником второго подхода стал Габриэль Ламе. В 1851 г., он в своих лекциях по математической теории упругости твердых тел [170],

рассмотрел задачу о равновесии прямоугольной призмы (тело конечных размеров) и высказал идею о структуре общего решения данной задачи: если имеется три решения, каждое из которых позволяет удовлетворить граничным условиям на соответствующих противоположных гранях призмы, то их сумма будет являться общим решением задачи нагруженной прямоугольной призмы. В настоящее время этот подход известен как метод суперпозиции Ламе и применим и плоским задачам теории упругости.

Таким образом, во втором подходе, развитом в [15, 69-72, 104-106, 128, 172], решение задачи представляется в виде суперпозиции нескольких последовательных частных решений. При этом предполагается, что поверхность упругого тела образована частями координатных поверхностей разных семейств в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Метод суперпозиции рассматривается в работах таких ученых, как А. В. Белоконь, М. Г. Селезнев, А. А. Лямин, Б. Л. Абрамян, И. Г. Бубнов, О. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, Б. М. Коялович, В. В. Мелешко, С. П. Тимошенко, А. Ф. Улитко, G. Baker, H. Hencky, M.N. Pavlovi, K. S. Sivakumaran, K. Wang А. С. Овсянников, В. А. Стариков, В. В. Матросов, и другие.

Метод суперпозиции, подробно изложен в работе [17], где приведен достаточно подробный библиографический обзор литературы по данному вопросу. На его основе А. В. Белоконем [15, 16] и его учениками был развит метод неклассических граничных интегральных уравнений для задач равновесия и установившихся колебаний упругих и электроупругих тел конечных размеров, ограниченных соответствующими координатными поверхностями.

1.2. Учет тонких динамических эффектов при гармонических колебаниях тел с неоднородной границей

Значительное возбуждение неоднородных волн вблизи вертикальных границ в упругих волноводах со свободными боковыми поверхностями приводит к ряду

специфических волновых эффектов, проявляющихся в сильной локализации движения вблизи вертикальной границы, и особенно в зоне ее сингулярности. Одним из наиболее известных и хорошо изученных примеров такой локализации является краевой резонанс, который выражается в резком увеличении амплитуд смещений в окрестности торца волновода со значительным их убыванием при удалении от торца. Исторический обзор исследований, посвященных изучению явления краевого резонанса, изложен в [69-72].

Понять специфику возбуждения неоднородных волн позволил анализ краевого резонанса в полубесконечных телах. Многочисленные работы по краевому резонансу в полуограниченных телах [61, 62, 68, 72, 139] показали, что в полуполосе и полуцилиндре частота краевого резонанса, на которой происходит локализация движения вблизи торца, совпадает с резонансной частотой в конечных цилиндрах и пластинах.

Краевой резонанс на основе метода суперпозиции исследовался в работах [61, 71]. К настоящему времени накоплен огромный объем информации, полученной на основе экспериментальных, численных и численно-аналитических подходов, описывающий различные стороны проявления краевого резонанса. Значительная часть ранних публикаций по этой тематике обсуждалась в книге В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [72]. Следует заметить, что обсуждаемое явление справедливо связывают с резонансом на неоднородных волнах Лэмба в полосе.

Несмотря на большое количество работ, посвященных краевому резонансу, здесь все еще остается ряд невыясненных аспектов. Прежде всего, это относится к оценке интенсивности возбуждения неоднородных волн на резонансной частоте при различных способах возбуждения колебаний и разных параметрах среды (например, коэффициента Пуассона) и специфике проявления данного явления в неоднородных телах.

Е. В. Алтуховым и М. В. Фоменко в монографии [5] представлены обзорные статьи, посвященные теме аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач трехмерной теории упругости для однородных и поперечно-неоднородных изотропных пластин.

Наличие особых точек значительно усложняет построение решения, адекватного реальной картине распределения напряжений и деформаций. В работе А. И. Каландия [78] установлено, что даже при гладких краевых условиях в нерегулярных точках границы возможно появление неограниченных (сингулярных) напряжений. В [64, 65, 111, 118, 145, 146] излагаются результаты исследований по теории сингулярных и регулярных интегральных уравнений, используемых при решении плоских и пространственных статических задач теории упругости. Приводится вывод самих уравнений с построением вычислительных алгоритмов для их решения.

В работе В. Т. Гринченко [72] был сделан вывод, что для получения достоверных значений напряжений в нерегулярных точках границы помимо краевых условий необходима некоторая дополнительная информация, отражающая физическую сущность рассматриваемой задачи. В работах И. И. Воровича [55, 56] для выделения класса физически осмысленных решений, обладающих свойством единственности, используется принцип возможных перемещений и условие конечности энергии. На основе строгого анализа задачи установлено, что этого условия достаточно для вскрытия характера решений в особых точках границы.

Следует отметить обзорные работы G. Sinclair [165, 166], посвященные проблеме сингулярности напряжений для неоднородных пластин и клиновидных областей.

Большой вклад в исследование поведения решений общих краевых задач (и, следовательно, задач теории упругости) в окрестности нерегулярных точек границы внесли В. А. Кондратьев, В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, Г. И. Эскии [95, 103]. Они показали, что решение в окрестности этих точек представляется в виде асимптотического ряда.

Анализ публикаций и существующего инженерного опыта по данному вопросу позволяет говорить о том, что окрестности особых точек, как правило, являются зонами сильной концентрации напряжений.

Одной из самых распространенных областей, границы которых содержат

сингулярные точки, является прямоугольная область. В настоящее время известен широкий круг числовых и аналитических методов построения решений плоских задач теории упругости для прямоугольных областей.

Для решения плоских задач в прямоугольнике широко используют метод однородных решений, который для прямоугольной области исследовали В. В. Васильев, В. В. Власов, Г. А. Гринберг, С. Г. Гуревич, А. Ф. Захаревич, К. А. Китовер, А. И. Лурье, С. А. Лурье, П. Ф. Папкович, В. К. Прокопов, J. Fadle, L. N. G. Filon, J. Dougall W. Коепске, R. Mathys, L. S. D. Morley, W. Schleech, U. Wegner.

Достаточно эффективным для построения аналитических решений задач теории упругости для ограниченных областей с угловыми точками, и для прямоугольника частности, оказался метод суперпозиции. Для прямоугольника одним из первых его развил E. Mathieu. Этот метод относительно прямоугольной области развивали также Б. Л. Абрамян, И. Г. Бубнов, О. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, Б. М. Коялович, В. В. Мелешко, С. П. Тимошенко, А. Ф. Улитко, G. Baker, H. Hencky, M. N. Pavlovi, K. S. Sivakumaran, K. Wang и другие.

Для решения плоских задач теории упругости для прямоугольной области разработан ряд численных и приближенных методов. В частности используются метод Ритца, аппарат R-функций, метод Бубнова-Галеркина принцип минимальных работ и другие вариационные методы, метод конечных элементов. Для решения плоских задач механики в прямоугольнике применяют также методы комплексных потенциалов и другие. Перечисленные методы для указанных задач развивали, в частности, С. М. Белоносов, С. Г. Михлин, Н. И. Мусхелишвили, В. Л. Рвачев, F. A. Gaydon, J. N. Goodier, A. W. Leissa, A. F. Martin, J. T. Mottram, W. Ritz и другие работы.

В работе В. В. Мелешко и С. О. Папкина [106] на основе метода суперпозиции решена классическая задача о колебаниях прямоугольной пластины со свободными краями. Ее решение сведено к однородной квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. С помощью достаточного условия существования ограниченного решения для

квазирегулярной системы найдены собственные частоты колебаний пластины. Для них на основе анализа асимптотического поведения неизвестных построены нетривиальные решения системы, позволяющие получить аналитические представления собственных форм колебаний.

Рассмотрению плоской краевой задачи: теории упругости об установившихся колебаниях, прямоугольного клина при наличии гармонических источников на его гранях посвящены работы Н. L.Wong, J. K. Luce [171], D. V. Bogy, K. C. Wang [24, 141], М. Оное [164].

Для составного клина основные граничные задачи теории упругости рассматривались в исследованиях А. Г. Акопяна, О. К. Аксентяна, В. Г. Блиновой, Е. В. Глушкова, Н. В. Глушковой, А. М. Линькова, М. С. Быркэ, В. Д. Ламзюка, А. И. Феденко, Б. М. Прокофьева (метод функций податливости), Н. Б. Сафаряна, Chen Dai–Heng (метод разделения переменных), G. S. Mishuris, В. Н. Берковича, М. М. Шварцмана, D. V. Bogy, N. Noda. Основные исследования данного вопроса приведены в работах [1-3, 18, 23, 26, 48, 95, 100, 122, 125, 136, 161]. В частности, было показано, что в окрестности общей вершины двух сцепленных клиньев могут возникать интегрируемые особенности, причем их тип зависит от характеристик материалов и локальной геометрии соединения.

1.3. Состояние проблемы учета температурных воздействий на характеристики волнового поля

В настоящее время активно развиваются численные методы решения задач термоупругости. Тем не менее, слабые эффекты, например связанность термомеханических полей, могут быть изучены достоверно лишь на основе аналитических решений, получение которых в большинстве случаев представляет значительные математические трудности. Для их преодоления приходится вводить различные упрощающие предположения, например, рассматривать задачу для бесконечного или полубесконечного тела. При исследовании решений таких задач было установлено, что связанность полей деформации и температуры

практически не отражается на их распределении в рассматриваемом теле. В этих случаях учет связанности представляет лишь теоретический интерес, поскольку объясняет диссипацию механической энергии и затухание упругих волн. Так, В. Новацким отмечено [110, 111], что решения, полученные в рамках термоупругости, незначительно отличаются от решений теории температурных напряжений. Значимость связанной термоупругости заключается в качественном эффекте затухания упругих волн, в «познавательной основе и общности этой теории».

В решении проблем термоупругости ведущую роль играют работы Б. Г. Галеркина, Н. Н. Лебедева, В. Новацкого, А. Д. Коваленко, Я. С. Подстригача и Ю. М. Коляно, В. А. Ломакина, а также работы А. И. Уздалева, В. М. Рассудова, Ю. В. Чеботаревского, Г. Н. Белосточного, В. П. Красюкова, Н. Д. Панкратова, А. N. Norris, D. M. Pholiadis, A. Vahtui, M. R. Eslami, L. Stainier, M. Ortiz и др.

Результаты исследований термоупругого состояния, а также изучение и исследование термомеханических процессов в телах с учетом взаимодействия полей различной физической природы отражено в многочисленных работах: В. А. Бабешко, А. Т. Василенко, А. О. Ватульяна, А. С. Гольцева, Н. С. Городецкой, Е. И. Григолюка, Я. М. Григоренко, В. Т. Гринченко, В. Г. Карнаухова, Ю. Н. Кононова, А. С. Космодамианского, А. А. Лямина, И. А. Мотовиловца, Г. С. Писаренко, О. Д. Пряхиной, М. Г. Селезнева, В. И. Сторожева, А. Н. Соловьева, А. Ф. Улитко, Л. А. Фильштинского и других авторов.

В монографии В. В. Мелешко [105] приведен достаточно широкий обзор работ, посвященных термоупругости кусочно-однородных тел.

В качестве основных граничных связанных задач динамической термоупругости, следует отметить двумерные задачи о распространении плоских термоупругих волн вдоль поверхности полупространства и продольных термоупругих волн в длинном цилиндре [140, 148, 156].

Почти во всех случаях исходные краевые задачи термоупругости сводятся к

соответствующим интегральным или интегрально-дифференциальным уравнениям, из которых определяются неизвестные напряжения или перемещения на границе области. Так, в работах [73, 74, 79, 80] приводится численное решение задачи об изменении температурного поля и напряженно-деформированного состояния для полупространства и слоя с учетом тепловыделения. С. М. Белоцерковский и И. Н. Лифанов [17] сводят контактную задачу с учетом тепловыделения к сингулярным интегральным уравнением. В целом, построение решений таких задач для тел конечных размеров вызывает значительные математические трудности. Термоупругое состояние, как следствие уже распределенных температурных полей, представлено в виде общего решения в работе П. Ф. Папковича [116]. При этом решение однородного уравнения для вектора перемещения содержит вектор и скаляр, являющиеся произвольными, а частное решение соответствующего неоднородного уравнения, отвечающее уже определенному температурному полю, определяется через скалярную функцию, получившую название термоупругого потенциала перемещений. Первое систематическое изложение теории несвязанной термоупругости для изотропного тела было дано Н. Н. Лебедевым [100].

В рамках предположения о малости деформаций построены модели теории теплопроводности и термоупругости, учитывающие зависимость тепловых и упругих свойств материала от температуры [114, 120, 158, 162]. Обширный библиографический материал по расчету пластин и оболочек, работающих в условиях температурного поля можно найти в работах [10, 25, 66, 67, 99, 167].

Анализ распределения термоупругих напряжений в прямоугольных пластинах конечных размеров и в пологих оболочках прямоугольного плана, приведен в работе В. В. Болотина [25], А. Ю. Биркмана [22], В. А. Крысько и его учеников [99], Е. В. Доля [75], М. Forray [149-151]. В работе С. А. Калоерова [79] предложено исследование состояния термоупругой кусочно-однородной анизотропной пластинки. Из работ на иностранных языках здесь можно отметить следующие работы [148, 151, 153, 159, 169]. Во всех выше перечисленных работах решения получены либо с помощью вариационных методов, либо методом

конечных разностей, при этом рассматривались, как правило, задачи двойной симметрии, что позволяло вести расчет для четвертой части плана конструкции. Расчеты выполнялись либо в невысоких приближениях вариационных методов, либо методом конечных разностей при небольшом числе узлов сетки разбиения оболочки.

В работе В. В. Мелешко рассмотрен метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах [105].

Несмотря на большое количество разработанных методов решения связанных задач термоупругости, серьезные математические трудности, вызванные учетом взаимосвязи тепловых и механических полей, постоянно заставляют исследователей искать новые и совершенствовать существующие методы решения граничных задач связанной термоупругости.

Особенно широкое развитие получили теории теплопроводности и термоупругости в случае изотропных пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями и трещинами. Для решения таких задач использовались методы комплексных потенциалов, сингулярных интегральных уравнений, функций Грина, малого параметра, дисторсии, интегральных преобразований, особенно асимптотические методы и метод конечных элементов (МКЭ).

Вопросам разработки теории и применения метода конечных элементов посвящена обширная библиография. Из зарубежных работ по МКЭ и его применению отметим работу О. Зенкевича [77], К. Бате, Е. Вилсона [12], Р. Галлагера [57], Д. Норри и Ж. Де Фриза [112], Л. Сегерлинда [126], Г. Стренга и Дж. Фикса [130], Дж. Одена [163], А. К. Gautesen [154].

Среди отечественных публикаций по МКЭ можно выделить книги и статьи В. А. Постнова с сотрудниками [120], Л. А. Розина [124], Ф. П. Сеницына [127], А. С. Городецкого и др. [63], И. Ф. Образцова [113] и др.

Обзор развития МКЭ содержится в работе О. Зенкевича [77] и Вайнберга с соавторами [27].

Связь метода конечных элементов с другими численными методами, его преимущества, недостатки и современное состояние отражены в работах

Д. В. Вайнберга [27], А. С. Городецкого [63], Д. Норри [112], Л. А. Розина [124], О. Зенкевича [77].

Конечноэлементная постановка задачи стационарной термоупругости описана в монографиях Дж. Одена [163], Л. Сегерлинда [126], О.Зенкевича [77] и др. Постановка задач динамической термоупругости для МКЭ рассмотрена В. Ф. Грибановым и Н. Г. Паничкиным [66], А. V. Nasedkin [159], E. Stein [168],.

В публикациях [58, 80, 152, 157, 158] исследуется отражение термоупругих волн от свободной поверхности твердого полупространства, а так же на границе раздела двух полубесконечных сред. Работа [132] освещает вопросы связанных термоупругих полей в шаре при сосредоточенных возбуждениях на основании кососимметричного решения. В статьях [136, 147] рассматривается влияние связанности механических и температурных полей на амплитудно-частотные характеристики конечных и бесконечных цилиндров. Задача распространения термоупругих волн в бесконечной вытянутой тонкой пластине приводится в [138].

Современные исследования в области связанных задач термоупругости отражены в работах Л. А. Фильштинского, Ю. В. Сиренко, В. П. Шевченко, А. Б. Бабкина, В. В. Селиванова, Ю. С. Тлеукунова, Н. А. Испулова, А. К. Сейтханова, В. А. Фирсова, К. Р. Досумбекова, Л. В. Саталкиной, Ю. А. Кузнецовой, Л. Ю. Фриштер, Д. А. Игнатюкова, В. Ю. Кирюхина, И. И. Цагарелии, В. С. Зарубина, А. N. Norris и D. M. Pholiadis [151], A. Bahtui и M. R. Eslami [139] L. Stainier, M. Ortiz [164] и др.

В работах Л. А. Фильштинского [137, 138] получены фундаментальные результаты во многих направлениях механики деформируемого твердого тела, в частности приведены фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости.

1.4. Выводы по разделу 1

В данном разделе приведен обзор литературы по теме диссертационного исследования, упомянуты работы, относящиеся к смежным областям науки,

описаны некоторые аспекты формирования и развития физических представлений и математических моделей теории упругости и термоупругости.

Из анализа литературы следует, что вопросам решений задач теории упругости в окрестности угловых точек, принадлежащих линиям раздела двух разнородных сред посвящено достаточно много научных публикаций. В частности, значительное количество работ рассматривает характер локальной особенности по напряжениям в сингулярных точках сочетание трех и четырех сред различной конфигурации.

Однако объем результатов исследований, посвященных анализу сингулярности напряжений в неоднородных термоупругих телах сравнительно невелик. Данное явление вполне объяснимо, поскольку при исследовании краевых и граничных эффектов в связанных задачах термоупругости для неоднородных областей, влияние на природу динамических эффектов оказывают не только её геометрические и упругие параметры, но и температурный фактор, что влечёт существенное усложнение краевой задачи о вынужденных колебаниях неоднородной термоупругой области и численно-аналитического алгоритма её решения.

Следует отметить, что в приведенных работах при исследовании ЛКН в прямоугольных термоупругих областях, во-первых, не введены параметры интенсивности ЛКН, аналогичные широко известным коэффициентам концентрации напряжений и, во-вторых, нет анализа особенностей НДС с учетом сингулярности границы области и влияния температурных напряжений на ЛКН.

Таким образом, актуальность данной работы подтверждается проведенным обзором литературных источников, поскольку обзор литературы подтвердил неразработанность вопроса о возможности распространения алгоритма метода суперпозиции для расчета термоупругих неоднородных прямоугольных областей с целью определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых/внутренних точек прямоугольных областей.

Также возможно применение разработанной схемы для численно-аналитического расчета ПЛО по напряжениям и анализ влияния температурных

эффектов на ПЛО. При этом если учитывать локальный характер концентрации напряжений и ПЛО, возможно распространение полученные ниже результатов на отличные от рассматриваемых в данной работе конфигурации границ областей, что, безусловно, повышает уровень практического применения предложенной методики расчета. Перспективным следует считать и анализ распределения внутренней энергии по области сечения с учетом ЛКН в окрестности нерегулярных точек.

В целом, можно сказать, что к настоящему времени разработан значительный математический аппарат, предназначенный для решения связанных задач термоупругости. Однако не существует одного универсального метода, который обладал бы преимуществами во всех ситуациях. Каждый метод имеет свою область применения, в которой он является более эффективным. Это стимулирует как развитие новых методов и алгоритмов решения рассматриваемой проблемы, так и решение новых задач, представляющих как теоретический, так и практический интерес.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [43, 84, 85].

РАЗДЕЛ 2

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ КОНЕЧНЫХ ТЕЛ

2.1. Обобщение метода суперпозиции при решении задач установившихся колебаний термоупругих однородных областей. Постановка краевой задачи для изотропно-термоупругого прямоугольника

В работах [15, 16, 48] построена модификация метода суперпозиции для исследования краевых задач гармонических колебаний упругих изотропных областей с негладкой границей. Относительно распространения и обобщения этого метода на термоупругие области, на данное время информация отсутствует. Также при исследовании ЛКН в этих работах отсутствует анализ особенностей НДС в сингулярных точках сечения деталей с учетом влияния температурных напряжений на ЛКН.

Данная глава посвящена математическому моделированию процесса постоянных симметричных колебаний конечных изотропных однородных термоупругих областей с нерегулярной границей и аналитическому решению сформулированных краевых задач для тел прямоугольного сечения путем модификации метода суперпозиции и асимптотического анализа поведения неизвестных функций в сингулярных точках границы. Необходимо отметить, что наличие сингулярных точек границы является важной особенностью геометрии рассматриваемых областей. Поэтому большой практический интерес представляет исследование термомеханических характеристик волнового поля в конечной прямоугольной области, учитывающее особенности компонент тензора напряжения и температуры в окрестности нерегулярных точек границы, – угловых точек прямоугольника.

Решение исходной задачи строится с помощью модификации метода суперпозиции, состоящего в замене исходных граничных условий более

простыми, позволяющими аналитически построить общее решение полученной вспомогательной задачи. Эти граничные условия, так называемые «перекрестные» [71], в отличие от начальной краевой задачи задают значения нормальных перемещений, касательных напряжений и нормальных производных от температуры на границах прямоугольника. Возврат к исходной задаче, т. е. удовлетворение неиспользованных во вспомогательной задаче граничных условий, приводит к системе интегральных уравнений (СИУ) относительно введенных дополнительных функций.

Проведение асимптотического анализа позволит говорить, о возможной значимости температурной составляющей в угловых точках области. Следует также отметить, что нахождение показателей локальной особенности позволит исследовать напряженно-деформированное состояние во всей области, включая ее угловые точки. Это в свою очередь позволит дать эффективную оценку концентрации динамических напряжений в окрестности этих точек, что, в свою очередь, обуславливает прочностные характеристики всей области.

Рассматриваются постоянные симметричные колебания однородного термоупругого тела, сечение которого представляет собой прямоугольник, в системе координат x_1Ox_2 определенный следующим образом:

$$D = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq a; |x_2| \leq b\}, \text{ где } x_1, x_2 - \text{декартовы координаты.}$$

Внешняя граница области имеет свободный теплообмен с внешней средой и находится под нагрузкой, которая действует в плоскости D . В работе предлагается метод определения термомеханических характеристик волнового поля в конечной прямоугольной области, которая учитывает особенности компонент тензора напряжения и температуры в окрестности нерегулярных точек границы – угловых точек прямоугольника. Специфика НДС в окрестности угловых точек области практически не зависит от значения угла [24, 118], поэтому анализ ПЛО можно проводить по методике работы [4], не решая в общем виде начальную краевую задачу термоупругости. Таким образом, полученные ниже результаты расчетов ПЛО будут справедливы для произвольных сечений деталей, которые содержат угловые точки.

На границах $x_1 = \pm a$; $x_2 = \pm b$ рассматриваемой области задано нормальное нагружение интенсивности $Q_1(x_1)$, $Q_2(x_2)$ соответственно, которое гармонично изменяется во времени с частотой ω . Предполагается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой.

Безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i(x, y)$, $i = 1, 2$ и прироста температуры $\Theta(x, y)$ определяются системой уравнений связанной термоупругости в безразмерных координатах [110]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}\right) &= \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_1, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right) &= \frac{\gamma T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\rho a^2 \omega^2}{\mu} U_2, \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi} \cdot \Theta - \frac{\delta a^2 i \omega}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $x = \tilde{x}_1/a$, $y = \tilde{x}_2/a$, $U_1 = \tilde{U}_1/a$, $U_2 = \tilde{U}_2/a$, $\Theta = \tilde{\Theta}/T_0$, $\sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/\mu$, $\tilde{\Theta} = T - T_0$.

\tilde{U}_i , ($i = 1, 2$) – компоненты вектора перемещений; $\tilde{\Theta}$ – прирост температуры; T – абсолютная температура точек тела; T_0 – температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии; ρ – плотность; λ , μ – параметры Ламе, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$; $\delta = (\lambda T_0)/\lambda_0$; $\chi = \lambda_0/c_\varepsilon$, где α_t – коэффициент линейного теплового расширения; λ_0 – коэффициент теплопроводности; c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации.

Запишем граничные условия в безразмерном виде.

При $x = \pm 1$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \cdot a \cdot \Theta \right) &= \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{11} = q_1(y), \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} &= \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{12} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} + a \cdot \frac{\alpha}{\lambda_1} \cdot \Theta = 0. \quad (2.2)$$

При $y = \pm \eta$:

$$2 \cdot \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \right) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \cdot a \cdot \Theta \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{22} = q_2(x),$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \cdot \sigma_{12} = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} + a \cdot \frac{\alpha}{\lambda_1} \cdot \Theta = 0. \quad (2.3)$$

λ_1 – приведенный коэффициент теплопроводности;

ν – коэффициент Пуассона;

α – коэффициент теплоотдачи.

2.2. Обобщение метода суперпозиции на случай однородных симметричных прямоугольных термоупругих областей

В соответствии с алгоритмом модифицированного метода суперпозиции [48], ищем решение системы уравнений (2.1) в виде:

$$U_1(x, y) = A \operatorname{sh}(px) \cos \alpha (y - \eta) + D \sin \beta (x - 1) \operatorname{ch}(qy),$$

$$U_2(x, y) = B \operatorname{ch}(px) \sin \alpha (y - \eta) + E \cos \beta (x - 1) \operatorname{sh}(qy),$$

$$\Theta(x, y) = C \operatorname{ch}(px) \cos \alpha (y - \eta) + F \cos \beta (x - 1) \operatorname{ch}(qy), \quad (2.4)$$

где p, q, α, β – параметры. Подставляем выражения (2.4) в систему уравнений движения и теплопроводности (2.1). Получим две системы однородных уравнений относительно произвольных постоянных A, B, C и D, E, F соответственно:

$$A \cdot (p^2(1 + E_1) - \alpha^2 + \Omega^2) + B \cdot \alpha p E_1 - C \cdot p \Theta_1 = 0,$$

$$- A \cdot p \alpha E_1 + B \cdot (p^2 - \alpha^2(1 + E_1) + \Omega^2) + C \cdot \alpha \Theta_1 = 0,$$

$$- A \cdot p \Omega_1 - B \cdot \alpha \Omega_1 + C \cdot (p^2 - \alpha^2 - \Omega_2) = 0,$$

$$\begin{aligned}
D \cdot \left(-\beta^2(1+E_1) + q^2 + \Omega^2 \right) - E \cdot \beta q E_1 - F \cdot \beta \Theta_1 &= 0, \\
D \cdot q \beta E_1 + E \cdot \left(-\beta^2 + q^2(1+E_1) + \Omega^2 \right) - F \cdot q \Theta_1 &= 0, \\
-D \cdot \beta \Omega_1 - E \cdot q \Omega_1 + F \cdot \left(q^2 - \beta^2 - \Omega_2 \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $E_1 = 1 + \lambda/\mu$; $\Omega^2 = (\rho\omega^2 a^2)/\mu$; $\Theta_1 = (\gamma T_0)/\mu$; $\Omega_1 = (\eta a^2 i \omega)/T_0$; $\Omega_2 = (a^2 i \omega)/\chi$; $i^2 = -1$.

Обозначим через p_α и q_α – корни характеристических уравнений (2.5) ($\alpha = 1, 2, 3$), полученные из условия существования нетривиального решения двух выписанных однородных систем уравнений:

$$\begin{aligned}
p_1^2 &= \left(E_1 \Omega_2 - \Omega^2 + 2\alpha^2 + \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + 2\alpha^2 E_1 + R \right) / 2(E_1 + 1), \\
p_2^2 &= \alpha^2 - \Omega^2, \\
p_3^2 &= \left(E_1 \Omega_2 - \Omega^2 + 2\alpha^2 + \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + 2\alpha^2 E_1 - R \right) / 2(E_1 + 1), \\
q_1^2 &= \left(E_1 \Omega_2 - \Omega^2 + 2\beta^2 + \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + 2\beta^2 E_1 + R \right) / 2(E_1 + 1), \\
q_2^2 &= \beta^2 - \Omega^2, \\
q_3^2 &= \left(E_1 \Omega_2 - \Omega^2 + 2\beta^2 + \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + 2\beta^2 E_1 - R \right) / 2(E_1 + 1),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $R^2 = \Omega^4 + \Omega^2(2\Omega_2 + 2E_1\Omega_2 - 2\Theta_1\Omega_1) + \Theta_1^2\Omega_1^2 + 2E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + E_1^2\Omega_2^2 + 2E_1\Omega_2^2 + \Omega_2^2$.

Учитывая симметрию задачи, α_k и β_j должны быть выбраны следующим образом: $\alpha_k = (k\pi)/\eta$, $\beta_j = j\pi$, ($k, j = 1, 2, \dots$).

Из анализа систем однородных уравнений следует, что постоянные A, B, C , а также D, E, F связаны соотношениями:

$$A_{k\alpha} = B_{k\alpha} M_{\alpha k}; \quad C_{k\alpha} = B_{k\alpha} N_{\alpha k}; \quad D_{j\alpha} = E_{j\alpha} L_{\alpha j}; \quad F_{j\alpha} = E_{j\alpha} P_{\alpha j},$$

где $M_{\alpha k} = \alpha p_{\alpha k} \cdot \left(-p_{\alpha k}^2 E_1 + \alpha^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \right) / \left((1 + E_1) p_{\alpha k}^4 + \left(-\alpha^2 E_1 + \Omega^2 - E_1 \Omega_2 - \Omega_2 - 2\alpha^2 - \Theta_1 \Omega_1 \right) \cdot p_{\alpha k}^2 + \alpha^4 - \alpha^2 \Omega^2 + \Omega_2 \alpha^2 - \Omega_2 \Omega^2 \right)$,

$$N_{\alpha k} = \Omega_1 \cdot \left(-p_{\alpha k}^2 + \alpha^2 - \Omega^2 \right) / \left(\alpha \cdot \left(-p_{\alpha k}^2 E_1 + \alpha^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \right) \right),$$

$$L_{\alpha j} = \left(2q_{\alpha j}^2 \beta^2 - q_{\alpha j}^4 + q_{\alpha j}^2 \Omega_2 + q_{\alpha j}^2 E_1 \beta^2 - q_{\alpha j}^4 E_1 + q_{\alpha j}^2 E_1 \Omega_2 - \beta^4 - \beta^2 \Omega_2 + \right)$$

$$+ \Omega^2 \beta^2 - \Omega^2 q_{\alpha j}^2 + \Omega^2 \Omega_2 + \Theta_1 q_{\alpha k}^2 \Omega_1) / (-q_{\alpha j} \beta \cdot (\beta^2 E_1 - E_1 q_{\alpha j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)),$$

$$P_{\alpha j} = \Omega_1 \cdot (q_{\alpha j}^2 - \beta^2 + \Omega^2) / (q_{\alpha j} \cdot (\beta^2 E_1 - q_{\alpha j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)).$$

Учитывая то, что решение для данной области должен содержать полные и ортогональные системы функций на отрезках, $|x| \leq 1$, $|y| \leq \eta$ и применяя метод Неймана-Шварца [62, 64], общее решение краевой задачи записываем таким образом:

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^3 B_{k\alpha} M_{\alpha k} sh(p_{\alpha k} x) \right) \cos \alpha_k (y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\beta=1}^3 E_{j\beta} L_{\beta j} ch(q_{\beta j} y) \right) \times$$

$$\times \sin \beta_j (x - 1) + A_0 \sin(k_1 x),$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^3 B_{k\alpha} ch(p_{\alpha k} x) \right) \sin \alpha_k (y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\beta=1}^3 E_{j\beta} sh(q_{\beta j} y) \right) \cos \beta_j (x - 1) +$$

$$+ B_0 \sin(k_1 y),$$

$$\Theta = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^3 B_{k\alpha} N_{\alpha k} ch(p_{\alpha k} x) \right) \cos \alpha_k (y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\beta=1}^3 E_{j\beta} P_{\beta j} ch(q_{\beta j} y) \right) \times$$

$$\times \cos \beta_j (x - 1) + C_0 \cos(k_1 x) + D_0 \cos(k_1 y),$$

где $B_{k\alpha}$, $E_{j\alpha}$, A_0 , B_0 , C_0 , D_0 – произвольные постоянные, которые подлежат определению из граничных условий (2.2) и (2.3).

Для получения определяющей системы интегральных уравнений (СИУ), рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая характеризуется следующими граничными условиями в окрестности границ прямоугольника:

$$U_1(\pm 1, y) = \pm f_1(y), \quad U_2(x, \pm \eta) = \pm f_2(x),$$

$$\sigma_{12}(\pm 1, y) = 0, \quad \sigma_{12}(x, \pm \eta) = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(\pm 1, y) = f_3(y), \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y}(x, \pm \eta) = f_4(x). \quad (2.7)$$

Учитываем, что $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$ – неизвестные функции, причем $f_1(y) = f_1(-y)$, $f_2(x) = f_2(-x)$, $f_3(y) = f_3(-y)$, $f_4(x) = f_4(-x)$, что следует из

характера граничных условий (2.7). Вспомогательная краевая задача (2.1), (2.7) не отвечает, начальной граничной задаче, но допускает аналитическое решение и позволяет, во-первых, удовлетворить часть начальных граничных условий и, во-вторых, выразить все характеристики начальной задачи через коэффициенты Фурье неизвестных функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$.

После определения констант $B_{k\alpha}$ и $E_{j\beta}$ через коэффициенты Фурье $f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}, f_{4k}$ введенных функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$, получаем компоненты вектора перемещений U_1, U_2 и теплового потока Θ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
U_1 = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(f_{1k} \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{(\alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 - p_{1k}^2 E_1)(p_{2k}^2 - p_{3k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)} \right) \times \right. \right. \\
& \times \frac{sh(p_{1k} x)}{sh(p_{1k})} + 2\alpha_k^2 \frac{sh(p_{2k} x)}{sh(p_{2k})} + \\
& + \left. \frac{(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)(p_{2k}^2 - p_{1k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2) sh(p_{3k} x)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(p_{3k}^2 - p_{1k}^2) sh(p_{3k})} \right) + f_{3k} \frac{1}{\Omega_1} \times \\
& \times \frac{(\alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 - p_{1k}^2 E_1)(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)} \times \\
& \times \left(\frac{sh(p_{1k} x)}{sh(p_{1k})} - \frac{sh(p_{3k} x)}{sh(p_{3k})} \right) \cdot \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(f_{2j} \frac{\beta_j}{\Omega^2} \left(\frac{(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{1j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(q_{3j}^2 - q_{2j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2)}{q_{1j}(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)} \right) \times \right. \right. \\
& \times \frac{ch(q_{1j} y)}{sh(q_{1j} \eta)} - 2q_{2j} \frac{ch(q_{2j} y)}{sh(q_{2j} \eta)} + \\
& + \left. \frac{(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{3j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(q_{2j}^2 - q_{1j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) ch(q_{3j} y)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(q_{3j}^2 - q_{1j}^2) sh(q_{3j} \eta)} \right) + f_{4j} \frac{\beta_j}{\Omega_1} \times \\
& \times \frac{(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{1j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{3j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{ch(q_{1j}y)}{q_{1j}sh(q_{1j}\eta)} - \frac{ch(q_{3j}y)}{q_{3j}sh(q_{3j}\eta)} \right) \cdot \sin \beta_j(x-1) + f_{10} \sin(k_1x)/k_1; \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} U_2 = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(f_{1k} \frac{\alpha_k}{\Omega^2} \left(\frac{(\alpha^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 - p_{1k}^2 E_1)(p_{3k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2)}{p_{1k}(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)} \right) \times \right. \right. \\ & \times \frac{ch(p_{1k}x)}{sh(p_{1k})} + 2p_{2k} \frac{ch(p_{2k}x)}{sh(p_{2k})} + \\ & + \left. \frac{(p_{3k}^2 E_1 - \alpha^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)(p_{1k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2) ch(p_{3k}x)}{p_{3k}(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(p_{3k}^2 - p_{1k}^2) sh(p_{3k})} \right) + \\ & + f_{3k} \frac{\alpha_k}{\Omega_1} \frac{(\alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 - p_{1k}^2 E_1)(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)} \times \\ & \times \left(\frac{ch(p_{3k}x)}{p_{3k} sh(p_{3k})} - \frac{ch(p_{1k}x)}{p_{1k} sh(p_{1k})} \right) \Big) \sin \alpha_k(y-\eta) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(f_{2j} \frac{\beta_j}{\Omega^2} \left(\frac{(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{1j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(q_{2j}^2 - q_{3j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)} \right) \times \right. \right. \\ & \times \frac{sh(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} + 2\beta_j^2 \frac{sh(q_{2j}y)}{sh(q_{2j}\eta)} + \\ & + \frac{(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{3j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(q_{1j}^2 - q_{2j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) sh(q_{3j}y)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(q_{3j}^2 - q_{1j}^2) sh(q_{3j}\eta)} + \\ & + f_{4j} \frac{\beta_j}{\Omega_1} \frac{(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{1j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(\beta_j^2 E_1 - E_1 q_{3j}^2 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)} \times \\ & \times \left. \left(\frac{sh(q_{3j}y)}{sh(q_{3j}\eta)} - \frac{sh(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} \right) \right) \Big) \cos \beta_j(x-1) + f_{20} \sin(k_1y)/k_1\eta; \quad (2.9) \\ \Theta = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(f_{1k} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\Omega_1 (p_{2k}^2 + \alpha_k)(p_{1k}^2 - p_{2k}^2)(p_{3k}^2 - p_{2k}^2)}{(p_{1k}^2 - p_{3k}^2)(\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2)} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{ch(p_{1k}x)}{p_{1k} sh(p_{1k})} - \frac{ch(p_{3k}x)}{p_{3k} sh(p_{3k})} \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_{3k} / p_{1k} p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{3k}^2) (\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2) \times \\
& \times \left(\frac{ch(p_{1k} x)}{sh(p_{1k})} p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{2k}^2) (-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1) + \right. \\
& \left. + \frac{ch(p_{3k} x)}{sh(p_{3k})} p_{1k} (p_{2k}^2 - p_{3k}^2) (-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1) \right) \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(f_{2j} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\Omega_1 (q_{2j}^2 - q_{1j}^2) (q_{3j}^2 - q_{2j}^2) (q_{2j}^2 + \beta_j)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2) (\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2)} \left(\frac{ch(q_{1j} y)}{q_{1j} sh(q_{1j} \eta)} - \frac{ch(q_{3j} y)}{q_{3j} sh(q_{3j} \eta)} \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + f_{4j} / q_{1j} q_{3j} (p_{1j}^2 - p_{3j}^2) (\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2) \right) \times \\
& \quad \times \left(\frac{ch(q_{1j} y)}{sh(q_{1j} \eta)} q_{3j} (q_{1j}^2 - q_{2j}^2) (-q_{3j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1) + \frac{ch(q_{3j} y)}{sh(q_{3j} \eta)} \right) \times \\
& \quad \times q_{1j} (q_{2j}^2 - q_{3j}^2) (-q_{1j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1) \cos \beta_j (x - 1) + f_{30} \frac{\cos(k_3 x)}{\cos(k_3)} + \\
& \quad + f_{40} \frac{\cos(k_4 y)}{\cos(k_4 \eta)}. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

2.3. Вывод системы интегральных уравнений для определения волновых характеристик однородных термоупругих областей

Используем полученное решение вспомогательной задачи и соотношения обобщенного закона Гука для изотропного тела:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)); & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)); \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)),
\end{aligned}$$

где ν – коэффициент Пуассона; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – напряжения,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – деформации вдоль соответствующих осей; E – модуль продольной упругости или модуль Юнга.

Запишем выражения для напряжений через коэффициенты Фурье введенных

дополнительных функций.

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{1k}}{\Omega^2} \left(\frac{ch(p_{1k}x)}{sh(p_{1k})} \frac{(p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{1k} (p_{1k}^2 - p_{3k}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) \times \right. \\
& \times \left(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \right) (p_{3k}^2 - p_{2k}^2) (p_{2k}^2 + \alpha_k^2) + 4p_{2k} \alpha_k^2 \frac{ch(p_{2k}x)}{sh(p_{2k})} + \\
& + \frac{ch(p_{3k}x)}{sh(p_{3k})} \frac{(p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2) (-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{3k}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times (p_{2k}^2 - p_{1k}^2) (p_{2k}^2 + \alpha_k^2) \Big) + \frac{f_{3k}}{\Omega_1} \times \\
& \times \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1) (-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{(p_{1k}^2 - p_{3k}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times \left(\frac{ch(p_{1k}x)}{sh(p_{1k})} \frac{(p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{1k}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{ch(p_{3k}x)}{sh(p_{3k})} \frac{(p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{3k}} \right) \Big) \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{f_{2j}}{\Omega^2} \left(\frac{ch(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} \frac{(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{1j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) \times \right. \\
& \times \left(-\beta_j^2 E_1 + q_{1j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1 \right) (q_{2j}^2 - q_{3j}^2) (q_{2j}^2 + \beta_j^2) - 4q_{2j} \beta_j^2 \frac{ch(q_{2j}y)}{sh(q_{2j}\eta)} + \\
& + \frac{ch(q_{3j}y)}{sh(q_{3j}\eta)} \frac{(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2) (\beta_j^2 E_1 - q_{3j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{q_{3j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times (q_{2j}^2 - q_{1j}^2) (q_{2j}^2 + \beta_j^2) \Big) + \\
& + \frac{f_{4j}}{\Omega_1} \frac{(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1) (-\beta_j^2 E_1 + q_{3j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \times \left(\frac{ch(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} \frac{(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{1j}} - \frac{ch(q_{3j}y)}{sh(q_{3j}\eta)} \frac{(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{3j}} \right) \Big) \times
\end{aligned}$$

$$\times \cos \beta_j(x-1) + f_{10}k_1(E_1+1)\frac{\cos(k_1x)}{\sin(k_1)} + f_{20}k_2(E_1-1)\frac{\sin(k_2y)}{\cos(k_2\eta)} + V; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{1k}}{\Omega^2} \left(\frac{ch(p_{1k}x)}{sh(p_{1k})} \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 + \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{1k}(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) \times \right. \\ & \times (-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1) \times \\ & \times (p_{3k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2) - 4p_{2k}\alpha_k^2 \frac{ch(p_{2k}x)}{sh(p_{2k})} + \frac{ch(p_{3k}x)}{sh(p_{3k})} \times \\ & \times \left. \frac{(-p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 + \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1\Omega_2 - \Theta_1\Omega_1)(p_{1k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2)}{p_{3k}(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) + \\ & + \frac{f_{3k}}{\Omega_1} \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1)(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1\Omega_2 - \Theta_1\Omega_1)}{(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\ & \times \left(\frac{ch(p_{1k}x)}{sh(p_{1k})} \frac{(p_{1k}^2 E_1 - p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 - \alpha_k^2)}{p_{1k}} - \frac{ch(p_{3k}x)}{sh(p_{3k})} \frac{(p_{3k}^2 E_1 - p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 - \alpha_k^2)}{p_{3k}} \right) \Bigg) \times \\ & \times \cos \alpha_k(y-\eta) + \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{f_{2j}}{\Omega^2} \left(\frac{ch(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} \frac{(q_{1j}^2 E_1 + q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 + \beta_j^2)(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1)}{q_{1j}(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) \times \right. \\ & \times (q_{2j}^2 - q_{3j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) + 4q_{2j}\beta_j^2 \frac{ch(q_{2j}y)}{sh(q_{2j}\eta)} + \frac{ch(q_{3j}y)}{sh(q_{3j}\eta)} \times \\ & \times \frac{(q_{3j}^2 E_1 + q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 + \beta_j^2)(-\beta_j^2 E_1 + q_{3j}^2 E_1 - E_1\Omega_2 - \Theta_1\Omega_1)}{q_{3j}(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\ & \times (q_{2j}^2 - q_{1j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) \Bigg) + \\ & + \frac{f_{4j}}{\Omega_1} \frac{(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1)(\beta_j^2 E_1 - q_{3j}^2 E_1 + E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1\Omega_2 + \Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\ & \times \left(\frac{ch(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} \frac{(-q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 + \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{1j}} - \frac{ch(q_{3j}y)}{sh(q_{3j}\eta)} \frac{(-q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 + \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{3j}} \right) \Bigg) \times \\ & \times \cos \beta_j(x-1) + f_{10}k_1(E_1-1)\frac{\cos(k_1x)}{\sin(k_1)} + f_{20}k_2(E_1+1)\frac{\cos(k_2y)}{\sin(k_2\eta)} + V; \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2f_{1k}\alpha_k(\alpha_k^2 + p_{2k}^2)}{\Omega^2} \left(\frac{sh(p_{1k}x)}{sh(p_{1k})} \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(p_{3k}^2 - p_{2k}^2)}{(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right. \right. \\
& - \frac{sh(p_{2k}x)}{sh(p_{2k})} + \left. \frac{sh(p_{3k}x)}{sh(p_{3k})} \frac{(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)(p_{1k}^2 - p_{2k}^2)}{(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) + \\
& + \frac{2f_{3k}\alpha_k}{\Omega_1} \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \times \left(\frac{sh(p_{1k}x)}{sh(p_{1k})} - \frac{sh(p_{3k}x)}{sh(p_{3k})} \right) \sin \alpha_k (y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{-2f_{2j}\beta_j(\beta_j^2 + q_{2j}^2)}{\Omega^2} \times \right. \\
& \times \left(\frac{sh(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} \cdot \frac{(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(q_{2j}^2 - q_{3j}^2)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} + \right. \\
& + \left. \frac{sh(q_{2j}y)}{sh(q_{2j}\eta)} + \frac{sh(q_{3j}y)}{sh(q_{3j}\eta)} \frac{(\beta_j^2 E_1 - q_{3j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(q_{1j}^2 - q_{2j}^2)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) + \\
& + \frac{-2f_{4j}\beta_j}{\Omega_1} \frac{(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(-\beta_j^2 E_1 + q_{3j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \times \left(\frac{sh(q_{1j}y)}{sh(q_{1j}\eta)} - \frac{sh(q_{3j}y)}{sh(q_{3j}\eta)} \right) \sin \beta_j (x - 1). \tag{2.13}
\end{aligned}$$

С учетом выражений (2.11) – (2.13) и обозначений

$$chs(q_{1j}y) = ch(q_{1j}y)/sh(q_{1j}\eta), \quad chs(q_{2j}y) = ch(q_{2j}y)/sh(q_{2j}\eta),$$

$$chs(q_{3j}y) = ch(q_{3j}y)/sh(q_{3j}\eta), \quad chs(p_{1k}x) = ch(p_{1k}x)/sh(p_{1k}),$$

$$chs(p_{2k}x) = ch(p_{2k}x)/sh(p_{2k}), \quad chs(p_{3k}x) = ch(p_{3k}x)/sh(p_{3k}),$$

запишем граничные значения для нормальных напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(1, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{1k}}{\Omega^2} \left(cth(p_{1k}) \frac{(p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{1k}(p_{1k}^2 - p_{3k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \right) \times \right. \\
& \times \left(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \right) (p_{3k}^2 - p_{2k}^2) (p_{2k}^2 + \alpha_k^2) - 4p_{2k}\alpha_k^2 cth(p_{2k}) + \\
& + cth(p_{3k}) \frac{(p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)(-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{p_{3k}(p_{1k}^2 - p_{3k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (p_{2k}^2 - p_{1k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2) + \\
& + \frac{f_{3k}}{\Omega_1} \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{(p_{1k}^2 - p_{3k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \times \left(cth(p_{1k}) \frac{(p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{1k}} - cth(p_{3k}) \frac{(p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{3k}} \right) \times \\
& \times \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{f_{2j}}{\Omega^2} \left(chs(q_{1j} y) \frac{(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)(-\beta_j^2 E_1 + q_{1j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{q_{1j}(q_{1j}^2 - q_{3j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \right. \right. \\
& \times (q_{2j}^2 - q_{3j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) - 4q_{2j} \beta_j^2 chs(q_{2j} y) + \\
& + chs(q_{3j} y) \frac{(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)(\beta_j^2 E_1 - q_{3j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{q_{3j}(q_{1j}^2 - q_{3j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \times (q_{2j}^2 - q_{1j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) \left. \right) + \\
& + \frac{f_{4j}}{\Omega_1} \frac{(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(-\beta_j^2 E_1 + q_{3j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \times \left(chs(q_{1j} y) \frac{(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{1j}} - chs(q_{3j} y) \frac{(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{3j}} \right) \Bigg) + \\
& + f_{10} k_1 (E_1 + 1) ctg(k_1) + f_{20} k_2 (E_1 - 1) \frac{\cos(k_2 y)}{\sin(k_2 \eta)} + V,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}(x, \eta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{f_{1k}}{\Omega^2} \left(chs(p_{1k} x) \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 + \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{1k}(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \right. \right. \\
& \times (-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(p_{3k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2) - 4p_{2k} \alpha_k^2 chs(p_{2k} x) + \\
& + chs(p_{3k} x) \frac{(-p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 + \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)(-p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{p_{3k}(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \times (p_{1k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2) \left. \right) + \\
& + \frac{f_{3k}}{\Omega_1} \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{(p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(chs(p_{1k}x) \frac{(p_{1k}^2 E_1 - p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 - \alpha_k^2)}{p_{1k}} - chs(p_{3k}x) \frac{(p_{3k}^2 E_1 - p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 - \alpha_k^2)}{p_{3k}} \right) \Bigg) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{f_{2j}}{\Omega^2} \left(cth(q_{1j}\eta) \frac{(q_{1j}^2 E_1 + q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 + \beta_j^2)(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{q_{1j}(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \right. \right. \\
& \quad \times (q_{2j}^2 - q_{3j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) + 4q_{2j}\beta_j^2 cth(q_{2j}\eta) + \\
& \quad + cth(q_{3j}\eta) \frac{(q_{3j}^2 E_1 + q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 + \beta_j^2)(-\beta_j^2 E_1 + q_{3j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{q_{3j}(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times (q_{2j}^2 - q_{1j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) + \\
& \quad + \frac{f_{4j}}{\Omega_1} \frac{(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(\beta_j^2 E_1 - q_{3j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times \left(cth(q_{1j}\eta) \frac{(-q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 + \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{1j}} - cth(q_{3j}\eta) \times \right. \\
& \quad \times \left. \left. \frac{(-q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 + \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{3j}} \right) \right) \Bigg) \cdot \cos \beta_j (1-x) + \\
& + f_{10} k_1 (E_1 - 1) \frac{\cos(k_1 x)}{\sin(k_1)} + f_{20} k_2 (E_1 + 1) ctg(k_2 \eta) + V, \\
\Theta(1, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(f_{1k} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\Omega_1 (p_{2k}^2 + \alpha_k)}{(p_{1k}^2 - p_{3k}^2)(\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2)} \right) \left(\frac{cth(p_{1k})}{p_{1k}} - \frac{cth(p_{3k}x)}{p_{3k}} \right) \right) + \\
& + \frac{f_{3k}}{p_{1k} p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{3k}^2)(\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2)} \times \\
& \times (cth(p_{1k}) p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{2k}^2) (-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1) + \\
& + cth(p_{3k}x) p_{1k} (p_{2k}^2 - p_{3k}^2) (-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)) \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{2j} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\Omega_1 (q_{2j}^2 - q_{1j}^2)(q_{3j}^2 - q_{2j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2)} \left(\frac{chs(q_{1j}y)}{q_{1j}} - \frac{chs(q_{3j}y)}{q_{3j}} \right) \right) + \\
& + \frac{f_{4j}}{q_{1j} q_{3j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2)(\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(chs(q_{1j}y)q_{3j}(q_{1j}^2 - q_{2j}^2) \right) - q_{3j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \Big) + \\
& + chs(q_{3j}y)q_{1j}(q_{2j}^2 - q_{3j}^2) \Big) - q_{1j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \Big) + \\
& \quad + f_{30} + f_{40} \frac{\cos(k_4 y)}{\cos(k_4 \eta)}, \\
\Theta(x, \eta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(f_{1k} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\Omega_1 (p_{2k}^2 + \alpha_k)}{(p_{1k}^2 - p_{3k}^2)} (p_{1k}^2 - p_{2k}^2) (p_{3k}^2 - p_{2k}^2) \right) \times \right. \\
& \times \left. \left(\frac{chs(p_{1k}x)}{p_{1k}} - \frac{chs(p_{3k}x)}{p_{3k}} \right) + \right. \\
& + \frac{f_{3k}}{p_{1k} p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{3k}^2)} \left(\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2 \right) \left(chs(p_{1k}x) p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{2k}^2) \right) \times \\
& \times \left(-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \right) + chs(p_{3k}x) p_{1k} (p_{2k}^2 - p_{3k}^2) \times \\
& \times \left(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \right) \Big) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{2j} \frac{1}{\Omega^2} \frac{\Omega_1 (q_{2j}^2 - q_{1j}^2)}{(q_{3j}^2 - q_{1j}^2)} (q_{3j}^2 - q_{2j}^2) (q_{2j}^2 + \beta_j) \right) \times \\
& \times \left(\frac{cth(q_{1j}\eta)}{q_{1j}} - \frac{cth(q_{3j}\eta)}{q_{3j}} \right) + \frac{f_{4j}}{q_{1j} q_{3j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2)} \left(\Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2 \right) \times \\
& \times \left(cth(q_{1j}\eta) q_{3j} (q_{1j}^2 - q_{2j}^2) \right) - q_{3j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \Big) + \\
& + cth(q_{3j}\eta) q_{1j} (q_{2j}^2 - q_{3j}^2) \Big) - q_{1j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 \Big) \cos \beta_j (x-1) + \\
& \quad + f_{30} \frac{\cos(k_3 x)}{\cos(k_3)} + f_{40}.
\end{aligned}$$

Используя неучтенные граничные условия для σ_{11} , σ_{22} и теплового потока, сведем исследуемую задачу к решению следующей СИУ уравнений относительно функций $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(x)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\gamma=1}^4 L_{\alpha\gamma} f_{\gamma} = Q_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \\
& f_3(y) + T_1 \Theta = 0, \quad f_4(y) + T_2 \Theta = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Соответствующие операторы получаем из формул для волновых

характеристик (2.8)–(2.13). Так, например, приведем выражения для $L_{11}f_1$ и $L_{12}f_2$:

$$L_{11}f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{\Omega^2} \Delta_{11k} \cos \alpha_k (y - \eta) \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_1(\xi) \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi + \\ + (E_1 + 1)k_1 \operatorname{ctg} k_1 \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_1(\xi) d\xi,$$

$$L_{12}f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{\Omega^2} \Delta_{12j} \int_{-1}^1 f_2(\xi) \cos \beta_j (\xi - 1) d\xi + \\ + (E_1 - 1)k_2 \frac{\cos(k_2 y)}{\sin(k_2 \eta)} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_2(\xi) d\xi,$$

где $\Delta_{11k} = \operatorname{cth}(p_{1k}) \frac{(p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2) (-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{2\alpha_k p_{1k} (p_{1k}^2 - p_{3k}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times$
 $\times (p_{3k}^2 - p_{2k}^2) (p_{2k}^2 + \alpha_k^2) + 2p_{2k} \alpha_k \operatorname{cth}(p_{2k}) +$
 $+ \operatorname{cth}(p_{3k}) \frac{(p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2) (-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{2\alpha_k p_{3k} (p_{1k}^2 - p_{3k}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times$
 $\times (p_{2k}^2 - p_{1k}^2) (p_{2k}^2 + \alpha_k^2),$
 $\Delta_{12j} = \operatorname{chs}(q_{1j} y) \frac{(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2) (-\beta_j^2 E_1 + q_{1j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{2\beta_j q_{1j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times$
 $\times (q_{2j}^2 - q_{3j}^2) (q_{2j}^2 + \beta_j^2) - 2q_{2j} \beta_j \operatorname{chs}(q_{2j} y) +$
 $+ \operatorname{chs}(q_{3j} y) \frac{(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2) (\beta_j^2 E_1 - q_{3j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{2\beta_j q_{3j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2) (E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times$
 $\times (q_{2j}^2 - q_{1j}^2) (q_{2j}^2 + \beta_j^2). \quad (2.15)$

Выражения для других операторов приведены в Приложении А.

2.4. Асимптотический анализ поведения характеристик термомеханического волнового поля в окрестности угловых точек области

Разложение гиперболических и тригонометрических функций, которые входят в структуру операторов $L_{\alpha\gamma}$ по тригонометрическим функциям $\cos \alpha_k(y - \eta)$, $\sin \alpha_k(y - \eta)$, $\cos \beta_j(x - 1)$, $\sin \beta_j(x - 1)$, сведет СИУ к бесконечной системе алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье $f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}$.

Для эффективного решения этой системы исследуем поведение функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ в угловых точках области D . Их коэффициенты Фурье после интегрирования по частям представим в виде:

$$f_{1k} = \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_1(\xi) \cos \alpha_k(\xi - \eta) d\xi = \frac{1}{\alpha_k \eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_1'(\xi) \sin \alpha_k(\eta - \xi) d\xi,$$

$$f_{3k} = \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_3(\xi) \cos \alpha_k(\xi - \eta) d\xi,$$

$$f_{2j} = \int_{-1}^1 f_2(\xi) \cos \beta_j(1 - \xi) d\xi = \frac{1}{\beta_j} \int_{-1}^1 f_2'(\xi) \sin \beta_j(1 - \xi) d\xi,$$

$$f_{4j} = \int_{-1}^1 f_4(\xi) \cos \beta_j(1 - \xi) d\xi.$$

Функции $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ непрерывны в данной области, а их производные имеют особенность в угловых точках, то есть

$$f_1'(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\eta} \pm A(\eta \mp \xi)^{\lambda-1}, \quad f_2'(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm 1} \pm B(1 \mp \xi)^{\lambda-1}; \quad (2.16)$$

функции $f_3(\xi)$, $f_4(\xi)$ имеют особенность в угловых точках, то есть

$$f_3(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm\eta} \pm C(\eta \mp \xi)^{\beta-1}, \quad f_4(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm 1} \pm D(1 \mp \xi)^{\beta-1}. \quad (2.17)$$

Здесь λ, β – ПЛО по напряжениям и температуре соответственно, что характеризуют особенности функций $f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi)$, а A, B, C, D – произвольные постоянные.

Проводим асимптотический анализ левых частей СИУ (2.14) при приближении к угловой точке. Производя интегрирование в формулах (2.16–2.17), определяем, переобозначив константы при особенности, асимптотику коэффициентов Фурье вспомогательных функций при больших значениях индексов в окрестности угловых точек области.

Рассмотрим процедуру асимптотического анализа более детально.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= E_1 \Omega_2 - \Omega^2 + \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1, & R_2 &= \Omega^2 + 2\Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega_2, \\
 R_3 &= 4\beta_j^2 E_1 + 4\beta_j^2 - E_1^2 \Omega_2 - E_1 \Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega^2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega^2, \\
 R_4 &= E_1^2 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + E_1 \Omega^2 + 2\Theta_1 \Omega_1, \\
 R_5 &= -4\beta_j^2 - 4\beta_j^2 E_1 - E_1 \Omega_2 + \Omega^2 - \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1, \\
 R_6 &= E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1, & R_7 &= -E_1 \Omega_2 - \Omega_2 - 4\beta^2 - \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

С учетом асимптотики корней, формул (2.6) и разложения гиперболических функций,

$$\begin{aligned}
 p_{1k} &= \alpha_k \left(1 + \frac{1}{4\alpha_k^2} \frac{R_1 + R}{(1 + E_1)} \right), & q_{1j} &= \beta_j \left(1 + \frac{1}{4\beta_j^2} \frac{R_1 + R}{(1 + E_1)} \right), \\
 p_{2k} &= \alpha_k \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\alpha_k^2} \right), & q_{2j} &= \beta_j \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\beta_j^2} \right), \\
 p_{3k} &= \alpha_k \left(1 + \frac{1}{4\alpha_k^2} \frac{R_1 - R}{(1 + E_1)} \right), & q_{3j} &= \beta_j \left(1 + \frac{1}{4\beta_j^2} \frac{R_1 - R}{(1 + E_1)} \right), \\
 chs(p_{1k}, x) &= e^{-\alpha_k(1-x)} \left(1 - \frac{1}{4} (1-x) \frac{R_1 + R}{\alpha_k(1 + E_1)} \right),
 \end{aligned}$$

$$chs(p_{2k}, x) = e^{-\alpha_k(1-x)} \left(1 + (1-x) \frac{\Omega^2}{2\alpha_k} \right),$$

$$chs(p_{3k}, x) = e^{-\alpha_k(1-x)} \left(1 - \frac{1}{4}(1-x) \frac{R_1 - R}{\alpha_k(1 + E_1)} \right),$$

$$chs(q_{1j}, y) = e^{-\beta_j(\eta-y)} \left(1 - \frac{1}{4}(\eta-y) \frac{R_1 + R}{\beta_j(1 + E_1)} \right),$$

$$chs(q_{2j}, y) = e^{-\beta_j(\eta-y)} \left(1 + (\eta-y) \frac{\Omega^2}{2\beta_j} \right),$$

$$chs(q_{3j}, y) = e^{-\beta_j(\eta-y)} \left(1 - \frac{1}{4}(\eta-y) \frac{R_1 - R}{\beta_j(1 + E_1)} \right),$$

найдем $\Delta_{11k}, \Delta_{12j}, \Delta_{13k}, \Delta_{14j}, \Delta_{21k}, \Delta_{22j}, \Delta_{23k}, \Delta_{24j}$.

Нахождение асимптотики величин $\Delta_{11k}, \Delta_{12j}, \Delta_{13k}, \Delta_{14j}, \Delta_{21k}, \Delta_{22j}, \Delta_{23k}, \Delta_{24j}$ рассмотрим на примере $\Delta_{12j}, \Delta_{22j}, \Delta_{14j}, \Delta_{24j}$.

$$\begin{aligned} \Delta_{12j} &= e^{-\beta_j(\eta-y)} (\Delta_{12j1} + \Delta_{12j2}), \\ \Delta_{12j1} &= \frac{(R_2 - R)(\Omega^2 - 2\beta_j^2)(R_3 - E_1R + R)(R_4 - E_1R)}{-4R(1 + E_1)(R_5 - R)R_6} - (2\beta_j^2 - \Omega^2) + \\ &\quad + \frac{(R_2 + R)(\Omega^2 - 2\beta_j^2)(R_3 + E_1R - R)(R_4 + E_1R)}{4R(1 + E_1)(R_5 + R)R_6}, \\ \Delta_{12j2} &= \left(\frac{-1}{4}(\eta-y) \frac{R_1 + R}{\beta_j(1 + E_1)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)(-\beta_j^2 E_1 + q_{1j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{2\beta_j q_{1j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\ &\quad \times (q_{2j}^2 - q_{3j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) - (\eta-y) \frac{\Omega^2}{2\beta_j} 2q_{2j} \beta_j + \left(\frac{-1}{4}(\eta-y) \frac{R_1 - R}{\beta_j(1 + E_1)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)(\beta_j^2 E_1 - q_{3j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{2\beta_j q_{3j} (q_{1j}^2 - q_{3j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (q_{2j}^2 - q_{1j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2). \\
\Delta_{12j2} = & \left(\frac{-1}{4}(\eta - y) \frac{R_1 + R}{\beta_j(1 + E_1)} \right) \frac{(R_2 - R)(\Omega^2 - 2\beta_j^2)(R_3 - E_1R + R)(R_4 - E_1R)}{-4R(1 + E_1)(R_5 - R)R_6} - \\
& - (\eta - y) \frac{\Omega^2}{2\beta_j} (2\beta_j^2 - \Omega^2) + \left(\frac{-1}{4}(\eta - y) \frac{R_1 - R}{\beta_j(1 + E_1)} \right) \times \\
& \times \frac{(R_2 + R)(\Omega^2 - 2\beta_j^2)(R_3 + E_1R - R)(R_4 + E_1R)}{4R(1 + E_1)(R_5 + R)R_6}. \\
\Delta_{12j2} = & (\Omega^2 - 2\beta_j^2)(\eta - y) \left[\left(\frac{-1}{4} \frac{R_1 + R}{\beta_j(1 + E_1)} \right) \frac{(R_2 - R)(R_3 - E_1R + R)(R_4 - E_1R)}{-4R(1 + E_1)(R_5 - R)R_6} + \right. \\
& \left. + \frac{\Omega^2}{2\beta_j} + \left(\frac{-1}{4} \frac{R_1 - R}{\beta_j(1 + E_1)} \right) \frac{(R_2 + R)(R_3 + E_1R - R)(R_4 + E_1R)}{4R(1 + E_1)(R_5 + R)R_6} \right].
\end{aligned}$$

С учетом (2.18), после некоторых преобразований получим:

$$\Delta_{12j1} = \frac{S_1}{S_2}, \quad \Delta_{12j2} = -\frac{E_1(\eta - y)}{8} \cdot \frac{S_3}{S_4},$$

где, например, S_1 определяется выражением

$$\begin{aligned}
S_1 = & E_1 \left(-16\beta_j^4 (\Omega^2 E_1 \Omega_2 + \Omega^4 E_1 + \Omega^4 E_1^2 + \Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1^2 \Omega_2 + \right. \\
& \left. + \Omega^2 E_1 \Theta_1 \Omega_1) \cdot 8\beta_j^2 \left(-E_1 \Omega_2^2 \Omega^2 + \Omega^4 E_1 \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^6 E_1^2 + \Omega^6 E_1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 \Omega_2 - \Omega^2 E_1 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^4 \Theta_1 \Omega - \Omega_2^2 \Omega^2 E_1^2 \right) + 4 \left(\Omega^6 E_1 \Omega_2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \Omega^4 E_1^2 \Omega_2^2 + \Omega^4 E_1 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^6 E_1^2 \Omega_2 + \Omega_2^2 \Omega^4 E_1 + \Omega^4 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 \right) \right).
\end{aligned}$$

Выражения для S_2, \dots, S_8 вынесены в приложение Б.

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2} = & E_1 \left(\Omega^2 E_1 \Omega_2 + \Omega^4 E_1 + \Omega^4 E_1^2 + \Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1^2 \Omega_2 + \right. \\
& \left. + \Omega^2 E_1 \Theta_1 \Omega_1 \right) / (2E_1 \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1^3 + E_1^2 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& \left. + \Omega^2 E_1 + \Theta_1 \Omega_1 + 2\Omega^2 E_1^2 + E_1 \Omega_2 + E_1^3 \Omega_2 + 2E_1^2 \Omega_2 \right) = \frac{\Omega^2 E_1}{E_1 + 1}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{S_3}{S_4} = \beta_j (128\Omega^4 E_1 + 384\Omega^2 E_1^3 \Omega_2 + 128\Omega^4 E_1^4 + 384\Omega^4 E_1^3 + 384\Omega^4 E_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + 128\Omega^2 E_1^3 \Theta_1 \Omega_1 + 384\Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 E_1 + 384\Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 E_1^2 + 128\Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 + \\
& \quad + 128\Omega^2 E_1 \Omega_2 + 128\Omega^2 E_1^4 \Omega_2 + 384E_1^2 \Omega_2 \Omega^2) / \\
& / (16\Theta_1 \Omega_1 + 16E_1^5 \Omega_2 + 64E_1^4 \Omega_2 + 16\Omega^2 E_1^5 + 64E_1^2 \Omega_2 + 64E_1^3 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& \quad + 64\Omega^2 E_1^4 + 96E_1^3 \Omega_2 + 64\Theta_1 \Omega_1 E_1 + 16E_1 \Omega_2 + 16E_1^4 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& \quad + 96E_1^2 \Theta_1 \Omega_1 + 96\Omega^2 E_1^3 + 16\Omega^2 E_1 + 64\Omega^2 E_1^2) = 8\beta_j \frac{\Omega^2}{E_1 + 1}.
\end{aligned}$$

Тогда $\Delta_{12j1} = \frac{\Omega^2 E_1}{E_1 + 1}$, $\Delta_{12j2} = -\frac{E_1(\eta - y)}{8} \cdot 8\beta_j \frac{\Omega^2}{E_1 + 1} = -(\eta - y)\beta_j \frac{E_1 \Omega^2}{E_1 + 1}$,

$$\Delta_{12j} = e^{-\beta_j(\eta - y)} \left(\frac{\Omega^2 E_1}{E_1 + 1} - (\eta - y)\beta_j \frac{E_1 \Omega^2}{E_1 + 1} \right) = e^{-\beta_j(\eta - y)} \Omega^2 \frac{E_1}{E_1 + 1} (1 - (\eta - y)\beta_j).$$

Проводим аналогичные преобразования для $\Delta_{21k}(p, x)$:

$$\Delta_{21k}(p, x) = e^{-\alpha_k(1-x)} \Omega^2 \frac{E_1}{E_1 + 1} (1 - (1-x)\alpha_k).$$

Учитывая, что при $j \rightarrow \infty$ $\text{cth}(q_{1j}\eta) \rightarrow 1$, $\text{cth}(q_{2j}\eta) \rightarrow 1$, $\text{cth}(q_{3j}\eta) \rightarrow 1$,

$$\begin{aligned}
\Delta_{22j}(q) &= (\Omega^2 - 2\beta_j^2) \times \\
& \times \left(\frac{(R_7 - R)(R_4 - E_1 R)(R_2 - R)}{-4R(R_5 - R)R_6} - 1 + \frac{(R_7 + R)(R_4 + E_1 R)(R_2 + R)}{4R(R_5 + R)R_6} \right),
\end{aligned}$$

$$\Delta_{22j} = \frac{S_5}{S_6},$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{S_5}{S_6} &= \left(\beta_j \left(-4E_1^2 \Omega_2^2 + 12E_1^2 \Omega^4 + 8E_1^2 \Omega_2 \Omega^2 + 4E_1^2 \Omega^4 + \Omega^2 \times \right. \right. \\
& \times (2\Omega_2 + 2E_1 \Omega_2 - 2\Theta_1 \Omega_1) + \Theta_1^2 \Omega_1^2 + 2E_1 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + 2\Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 - \\
& - 8E_1^2 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 E_1^2 \Omega_2^2 + 2E_1 \Omega_2^2 + \Omega_2^2 + 24E_1^2 \Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 - 8E_1^3 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 - \\
& - 4E_1^4 \Omega_2^2 - 4\Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1^2 - 8E_1^3 \Omega_2^2 + 16\Omega^4 E_1^3 + 8E_1^3 \Omega_2 \Omega^2 + 16\Theta_1 \Omega_1 E_1 \Omega^2 \left. \right) / \\
& / (32E_1 \Theta_1 \Omega_1 + 16\Theta_1 \Omega_1 + 16E_1^3 \Omega^2 + 16E_1^3 \Omega_2 + 32E_1^2 \Omega^2 + 16E_1 \Omega^2 + \\
& \quad + 16E_1^2 \Theta_1 \Omega_1 + 16E_1 \Omega_2 + 32E_1^2 \Omega_2) = \Omega^2 \beta_j \frac{E_1}{1 + E_1}.
\end{aligned}$$

Тогда $\Delta_{22j} = \frac{S_5}{S_6} = \beta_j \Omega^2 \frac{E_1}{1 + E_1}$.

Для $\Delta_{11k}(p)$: $\Delta_{11k}(p) = \alpha_k \Omega^2 \frac{E_1}{1 + E_1}$, $\Delta_{14j} = e^{-\beta_j(\eta-y)} (\Delta_{14j1} + \Delta_{14j2})$.

$$\Delta_{14j1} = \frac{(R_4 - RE_1)(R_4 + RE_1)}{2(1 + E_1)\Omega_1 R R_6} \left(\frac{\beta(R_3 - RE_1 + R)}{(R_5 - R)} - \frac{\beta(R_3 + RE_1 - R)}{(R_5 + R)} \right),$$

$$\Delta_{14j2} = \frac{(R_4 - RE_1)(R_4 + RE_1)}{R_6} \times$$

$$\times \left(\frac{(R_1 + R)(R_3 - RE_1 + R)}{(R_5 - R)} - \frac{(R_1 - R)(R_3 + RE_1 - R)}{(R_5 + R)} \right).$$

С учетом выражений (2.18) и аналогичных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{14j1} &= (E_1^2 \Omega_2 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + 2\Theta_1 \Omega_1 - E_1 R) \times \\ &\quad \times (E_1^2 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1 + E_1 R + 2\Theta_1 \Omega_1) \times \\ &\quad / (2(E_1 + 1)\Omega_1 R (\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)) \times \\ &\quad \times (8RE_1^2 + 8E_1 R) \cdot \beta^3 / \left((16 + 32E_1 + 16E_1^2) \beta^4 + (16E_1 \Omega_2 + 8\Theta_1 \Omega_1 + 8E_1^2 \Omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + 8E_1 \Theta_1 \Omega_1 - 8\Omega^2 E_1 - 8\Omega^2 + 8\Omega_2) \beta^2 + 2E_1 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + E_1^2 \Omega_2^2 + 2E_1 \Omega_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \Omega_2^2 + \Theta_1^2 \Omega_1^2 - 2\Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 + 2\Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 - R^2 - 2\Omega^2 E_1 \Omega_2 + \Omega^4 - 2\Omega^2 \Omega_2 \right), \\ \Delta_{14j2} &= \frac{1}{2(1 + E_1)\Omega_1 R} \cdot \frac{1}{\beta(1 + E_1)} \cdot \left(\frac{-1}{4} (\eta - y) \right) \times \\ &\quad \times 2R\beta \cdot (2 \cdot (E_1^2 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 - RE_1 + 2\Theta_1 \Omega_1) \times \\ &\quad \times (E_1^2 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1 + RE_1) \cdot R \cdot (-2\Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + \Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1 - \\ &\quad - 8\Theta_1 \Omega_1 \beta^2 + 2\Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 - 2E_1^2 \Omega_2 \Omega^2 - 8E_1 \Omega_2 \beta^2 - E_1 \Omega_2^2 + \Omega^4 E_1 - 8\Omega_2 \beta^2 + \\ &\quad + 2\Omega^2 \Omega_2 + E_1^2 \Omega_2^2 + 8E_1^2 \Omega_2 \beta^2 - 32\beta^4 E_1 - 16\beta^4 E_1^2 - 16\beta^4 + 8\Omega^2 \beta^2 + \\ &\quad + E_1^3 \Omega_2^2 + \Omega^4 - 8\Omega^2 E_1^2 \beta^2 + 8\Theta_1 \Omega_1 E_1^2 \beta^2 + 8E_1^3 \Omega_2 \beta^2 + R^2 - R^2 E_1 - \\ &\quad - \Omega_2^2 - \Theta_1^2 \Omega_1^2)) / ((\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1) \times \\ &\quad \times (-4\beta_j^2 E_1 - 4\beta_j^2 E_1 - E_1 \Omega_2 + \Omega^2 - \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1 - R) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(-4\beta_j^2 E_1 - 4\beta_j^2 E_1 - E_1 \Omega_2 + \Omega^2 - \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1 + R \right), \\
\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \Delta_{14j1} &= \frac{1}{\beta} \left(E_1^2 \Omega_2 + \Omega^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + 2\Theta_1 \Omega_1 - E_1 R \right) \times \\
& \times \frac{E_1^2 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1 + E_1 R + 2\Theta_1 \Omega_1}{2(E_1 + 1)\Omega_1 R (\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1)} \cdot \frac{8RE_1^2 + 8E_1 R}{16 + 32E_1 + 16E_1^2} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{E_1 \Theta_1}{E_1 + 1}, \\
\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \Delta_{14j2} &= \frac{1}{2(1 + E_1)\Omega_1 R} \cdot \frac{1}{\beta(1 + E_1)} \cdot \left(\frac{-1}{4} (\eta - y) \right) 2R\beta(-E_1)^2 \times \\
& \times \left(-16 - 32E_1 - 16E_1^2 \right) \times \\
& \times \left(\Omega^4 + 2\Omega^2 \Omega_2 + 2\Omega^2 E_1 \Omega_2 - 2\Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 + \Theta_1^2 \Omega_1^2 + 2E_1 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + \right. \\
& \left. + 2\Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + E_1^2 \Omega_2^2 + 2E_1 \Omega_2^2 + \Omega_2^2 \right) + \left(E_1^2 \Omega_2 + E_1 \Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1 + 2\Theta_1 \Omega_1 \right)^2 \times \\
& \times \left(-16 - 32E_1 - 16E_1^2 \right) / \left(\left(\Theta_1 \Omega_1 + E_1 \Omega_2 + \Omega^2 E_1 \right) (-4 - 4E_1)^2 \right) = (\eta - y) \frac{\Theta_1}{(1 + E_1)}, \\
\Delta_{14j} &= e^{-\beta_j(\eta-y)} \Theta \left(\frac{1}{\beta} \cdot \frac{E_1}{1 + E_1} + (\eta - y) \frac{1}{1 + E_1} \right),
\end{aligned}$$

Для Δ_{23k} : $\Delta_{23k} = e^{-\alpha_k(1-x)} (\Delta_{23k1} + \Delta_{23k2})$.

$$\lim_{\alpha_k \rightarrow \infty} \Delta_{23k1} = \Theta_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{E_1}{E_1 + 1}; \quad \lim_{\alpha_k \rightarrow \infty} \Delta_{23k2} = \Theta_1 (1-x) \frac{1}{E_1 + 1}.$$

$$\Delta_{23k} = e^{-\alpha_k(1-x)} \Theta_1 \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{E_1}{E_1 + 1} + (1-x) \frac{1}{E_1 + 1} \right).$$

$\text{cth}(q_{1j}\eta) \rightarrow 1, \text{cth}(q_{2j}\eta) \rightarrow 1, \text{cth}(q_{3j}\eta) \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$,

$$\Delta_{24j} = \frac{-1}{4} \frac{(R_4 + E_1 R)(R_4 - E_1 R)}{RR_6 \Omega_1 (1 + E_1)} 2\beta(1 + E_1) \cdot \left(\frac{-(R_7 - R)}{R_5 - R} + \frac{(R_7 + R)}{R_5 + R} \right), \quad \Delta_{24j} = \frac{S_7}{S_8},$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta_j \rightarrow \infty} \frac{S_7}{S_8} &= \frac{1}{\beta} \cdot \left(-4E_1^3 R^2 + 8E_1^4 \Omega_2 \Omega^2 + 16E_1^2 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + 8E_1^3 \Omega_2 \Omega^2 + \right. \\
& + 24E_1^3 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + 8E_1^4 \Omega_2^2 + 4E_1^3 \Theta_1^2 \Omega_1^2 + 4E_1^3 \Omega^4 + 8E_1^3 \Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 + \\
& + 16E_1^2 \Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 + 8E_1^4 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + 16E_1 \Theta_1^2 \Omega_1^2 + 16E_1^2 \Theta_1^2 \times \\
& \left. \times \Omega_1^2 + 4E_1^3 \Omega_2^2 + 4E_1^5 \Omega_2^2 \right) / \left(16\Omega_1 E_1 \Omega_2 + 32\Omega_1 E_1^2 \Omega_2 + 16\Omega_1 \Omega^2 E_1^3 + \right.
\end{aligned}$$

$$+ 16\Omega_1 E_1^3 \Omega_2 + 16\Theta_1 \Omega_1^2 + 16E_1^2 \Theta_1 \Omega_1^2 + 32\Theta_1 \Omega_1^2 E_1 + 16\Omega_1 E_1 \Omega^2 + \\ + 32\Omega_1 E_1^2 \Omega^2) = \Theta_1 \frac{1}{\beta} \cdot \frac{E_1}{E_1 + 1}, \quad \Delta_{13k} = \Theta_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{E_1}{E_1 + 1}.$$

Тогда для первых двух уравнений системы получим:

$$L_{11}f_1 + L_{12}f_2 + L_{13}f + L_{14}f = \\ = \frac{2E_1}{(E_1 + 1)\eta} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (\eta - y)}{\alpha_k^\lambda} + \frac{2E_1}{(E_1 + 1)} B \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^\lambda} - (\eta - y) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^{\lambda-1}} \right), \\ L_{21}f_1 + L_{22}f_2 + L_{23}f + L_{24}f_4 = \\ = \frac{2E_1}{(E_1 + 1)\eta} A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k (1-x)}}{\alpha_k^\lambda} - (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k (1-x)}}{\alpha_k^{\lambda-1}} \right) + \frac{2E_1}{(E_1 + 1)} B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j (1-x)}{\beta_j^\lambda}.$$

Граничные условия задачи таковы, что обеспечивают ограниченность правых частей системы интегральных уравнений во всей области. Требуя поэтому ограниченности левых частей системы и используя полученные асимптотики, проводим аналогичные преобразования для третьего и четвертого уравнений и приходим к следующей однородной системе уравнений:

$$\frac{2E_1}{(E_1 + 1)\eta} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (\eta - y)}{\alpha_k^\lambda} + \frac{2E_1}{(E_1 + 1)} B \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^\lambda} - (\eta - y) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^{\lambda-1}} \right) + \\ + \frac{E_1 \Theta_1}{(E_1 + 1)\eta} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k (\eta - y)}{\alpha_k^{\beta+1}} + \frac{\Theta_1}{(E_1 + 1)} D \times \\ \times \left(E_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^\beta} + (\eta - y) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j (\eta - y)}}{\beta_j^{\beta+1}} \right) = 0 \\ \frac{2E_1}{(E_1 + 1)\eta} A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k (1-x)}}{\alpha_k^\lambda} - (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k (1-x)}}{\alpha_k^{\lambda-1}} \right) + \\ + \frac{2E_1}{(E_1 + 1)} B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j (1-x)}{\beta_j^\lambda} + \frac{\Theta_1}{(E_1 + 1)\eta} C \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(E_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}} + (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta+1}} \right) + \frac{E_1 \Theta_1}{(E_1 + 1)} D \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+1}} = 0, \\
& \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)\eta} A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\alpha+1}} + C \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \alpha_k(\eta-y)}{\alpha_k^{\beta+1}} (T+1) \right) + \\
& + \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)} B \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\alpha+1}} + (\eta-y) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}} \right) + TD \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\beta}} = 0, \\
& \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)\eta} A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\alpha+1}} + (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}} \right) + T \frac{1}{\eta} C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\beta}} + \\
& + \frac{-\Omega_1 T}{(E_1 + 1)} B \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_j(1-x)}{\beta_j^{\alpha+1}} + D \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \beta_j(1-x)}{\beta_j^{\beta+1}} (T+1) \right) = 0. \quad (2.19)
\end{aligned}$$

После суммирования рядов, входящих в (2.19), с учетом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_k(1-x)}}{\alpha_k^{\lambda-1}} = \frac{\eta}{\pi} (1-x)^{\lambda-2} \Gamma(2-\lambda), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_j(\eta-y)}}{\beta_j^{\lambda-1}} = \frac{1}{\pi} (\eta-y)^{\lambda-2} \Gamma(2-\lambda),$$

$\Gamma(2-\lambda) = (1-\lambda) \cdot \Gamma(1-\lambda)$, получим следующую систему для определения ПЛО:

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi\lambda}{2} A + \lambda B = 0, \\ \lambda A + \sin \frac{\pi\lambda}{2} B = 0, \\ T_1 D \beta = 0, \quad T_2 C \beta = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{\pi\lambda}{2} A + \lambda B = 0, \\ \lambda A + \sin \frac{\pi\lambda}{2} B = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

2.5. Определение параметров особенностей волновых характеристик в сингулярных точках однородной области

Из условия существования нетривиального решения первых двух уравнений системы (2.20) получим характеристическое уравнение для определения параметра λ :

$$\lambda^2 - \sin^2(\pi\lambda/2) = 0. \quad (2.21)$$

Характеристическое уравнение (2.21) имеет один действительный корень $\lambda_0 = 1$ и бесконечное множество комплексных корней $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [69, 71]. Естественно, необходимо учитывать лишь те комплексные корни, для которых $\operatorname{Re} \lambda_k > 1$. Как видим, характер особенности механического поля в угловой точке не зависит от упругих параметров области сечения.

Учитывая механическое содержание функций $f_1(\xi), f_2(\xi)$ и, требуя ограниченности энергии всей системы, приходим к выводу, что при построении асимптотики решения надо учитывать только один действительный корень $\lambda_0 = 1$ и счетное количество комплексных корней $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ с положительной действительной частью. Два последних уравнения системы дают основание говорить, что температура не имеет особенности в угловых точках области, поскольку $D = C = 0$.

После определения дополнительных функций $f_1(y), f_2(x), f_3(y), f_4(x)$ из системы интегральных уравнений (2.14) имеем возможность найти все неизвестные краевой задачи (2.1), (2.3) и все характеристики волнового поля.

Надо отметить, что нахождение показателей локальной особенности λ дает возможность исследовать напряженно-деформированное состояние во всей области D , включая ее угловые точки. Это в свою очередь приводит к эффективной оценке концентрации динамических напряжений в окрестности этих точек, что определяет прочностные характеристики всей области.

Более подробный численный анализ будет проведен в разделе 4. Приведем численные значения первых пяти собственных частот (безразмерные) для однородных стального и свинцового прямоугольного сечений с параметрами $\eta = 1/2, L = 3$ (таблица 2.1).

Резонансные частоты для однородного термоупругого
прямоугольника, $\eta = 1/2$, $L = 3$

Материал, вид расчета	Безразмерные значения собственных частот				
	$\Omega^{(1)}$	$\Omega^{(2)}$	$\Omega^{(3)}$	$\Omega^{(4)}$	$\Omega^{(5)}$
St (упругий расчет)	0,396328	0,647016	0,81899	1,897125	2,031305
St (термоупругий расчет)	0,426856	0,660027	0,843699	1,953419	2,043989
Pb (упругий расчет)	7,309586	12,07443	15,20069	35,78044	38,31847
Pb (термоупругий расчет)	7,946347	12,49412	15,6849	33,5527	37,92307

Таким образом, выполненный расчет подтверждает, что температура не имеет особенности в угловых точках исследуемой области, поскольку собственные частоты упругого и термоупругого случая имеют незначительное отличие (1–3 %).

Определение ПЛО в угловых точках области дает возможность прогнозировать интенсивность ЛКН в этих особых зонах и применить критерии прочности, учитывая максимальные напряжения именно в этих областях с учетом ПЛО. Важным направлением дальнейшего исследования будет исследование ПЛО для неоднородных областей, что, безусловно, повысит уровень практического применения предложенной методики расчетов. Перспективным должен быть и анализ распределения внутренней энергии по области сечения с учетом ЛКН в окрестности сингулярных точек.

2.6. Выводы по разделу 2

В данной главе поставлена и решена краевая задача для однородного изотропного термоупругого прямоугольника. Рассматривались постоянные симметричные колебания тела и исследовались термомеханические

характеристики волнового поля с учетом особенностей компонент тензора напряжения и температуры в окрестности нерегулярных точек границы, – угловых точек прямоугольника.

В основу решения исходной краевой задачи положен алгоритм модифицированного метода суперпозиции, который основан на асимптотическом анализе неизвестных граничных значений характеристик волнового поля в нерегулярных точках границы.

Взятый за основу обобщённый метод суперпозиции позволил свести решение исходной граничной задачи к решению СИУ относительно дополнительных функций, фигурирующих в формулировке специально подобранной вспомогательной краевой задачи, допускающей аналитическое решение. В набор вспомогательных функций кроме механических характеристик вошли и температурные характеристики теплового потока на внешней границе области. Асимптотический анализ поведения решения СИУ в сингулярных точках границы области позволил оптимальным образом подобрать координатные функции при решении СИУ.

Предложенный метод анализа волновых полей на этапе определения асимптотического поведения НДС в нерегулярных точках сечения обозначил необходимость введения важных параметров – ПЛО по напряжениям для механических волновых характеристик и аналогичного параметра для температурных характеристик.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [28, 51, 52, 54, 90-92].

РАЗДЕЛ 3

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ НА СЛУЧАЙ НЕОДНОРОДНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕЙСЯ СОПРЯЖЕНИЕМ ДВУХ СРЕД

3.1. Формулировка и решение краевой задачи для изотропного термоупругого неоднородного прямоугольника с плоскопараллельными границами

Моделирование НДС кусочно-неоднородных областей осложняется наличием локальной концентрации напряжений в местах сопряжения областей, состоящих из материалов с постоянными, но различными упругими и температурными свойствами, а также в сингулярных точках границы.

Для исследования локального НДС конструкций в зонах геометрической концентрации напряжений необходим комплексный анализ: аналитический, численный. Поэтому приведенный далее расчетно-аналитический подход к исследованию НДС конструкций определяет, по существу, эффективное средство для достижения одной из поставленных в работе целей: разработке метода исследования НДС составных конструкций в зонах геометрической концентрации напряжений для дальнейшего учета характера границы и внутренней структуры области с целью минимизации возможных локальных напряжений.

Основной задачей данной главы послужило распространение алгоритма метода суперпозиции для расчета термоупругих кусочно-неоднородных тел и определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых точек прямоугольника, а также обобщение разработанной ранее (раздел 2) схемы для численно-аналитического расчета параметров локальной особенности (ПЛО) по напряжениям и анализ влияния температурных эффектов на ПЛО.

Определение характера поведения напряженно-деформированного состояния в окрестности нерегулярных точек внешних и внутренних границ кусочно-неоднородных тел позволит при дальнейшем численном анализе наилучшим образом аппроксимировать решение и построить алгоритм его

нахождения.

Учет локального характера концентрации напряжений и ПЛО позволит распространить полученные ниже результаты на иные геометрические конфигурации областей.

Пусть сечение детали – некоторая прямоугольная область, которая занимает в системе координат $\alpha_1 O \alpha_2$ область $D = G^{(1)} \cup G^{(2)}$, причем

$$G^{(1)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : |\alpha_1| \leq c; |\alpha_2| \leq b\},$$

$$G^{(2)} = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 \in [-a, -c] \cup [c, a]; |\alpha_2| \leq b\},$$

где α_1, α_2 – декартовы координаты (рисунок 3.1). Области $G^{(m)}$ ($m = 1, 2$) состыкованы друг с другом. Они являются изотропными и, в общем случае, имеют разные упругие константы.

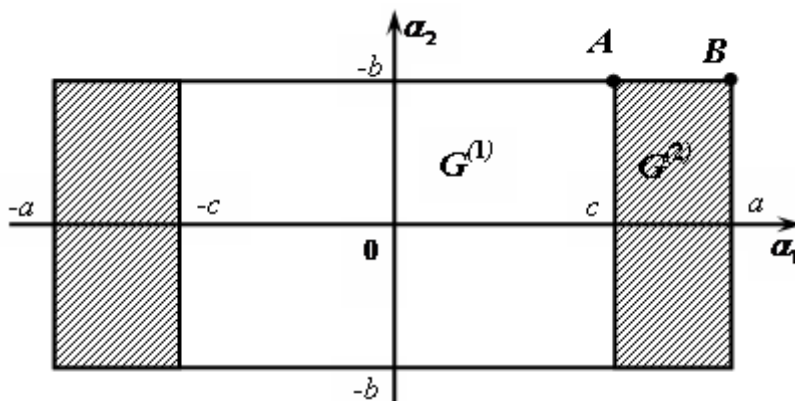


Рисунок 3.1 Геометрия сечения тела

На границах области $\alpha_1 = \pm a$, $\alpha_2 = \pm b$ задано нормальное нагружение интенсивности $q_1(\alpha_1)$ и $q_2(\alpha_2)$ соответственно, которое гармонично изменяется во времени с частотой ω . Предполагается, что данная область имеет свободный теплообмен с окружающей средой. Безразмерные амплитудные характеристики перемещений $U_i(x, y), i = 1, 2$ и прироста температуры $\Theta(x, y)$ определяются системой уравнений связанной термоупругости в безразмерных координатах для областей $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, соответственно [110]:

$$\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial x} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_1^{(m)}, \\
&\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \left(1 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}\right) \left(\frac{\partial^2 U_2^{(m)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1^{(m)}}{\partial x \partial y}\right) = \\
&\frac{\gamma^{(m)} T_0}{\mu^{(m)}} \cdot \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial y} - \frac{\rho^{(m)} a^2 \omega^2}{\mu^{(m)}} U_2^{(m)}, \\
&\frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta^{(m)}}{\partial y^2} - \frac{a^2 \omega i}{\chi^{(m)}} \cdot \Theta^{(m)} - \frac{\delta^{(m)} a^2 i \omega}{T_0} \cdot \left(\frac{\partial U_1^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial U_2^{(m)}}{\partial y}\right) = 0. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие обозначения:

$$x = \frac{\alpha_1}{a}; \quad y = \frac{\alpha_2}{a}; \quad U_1^{(m)} = \frac{\tilde{U}_1^{(m)}}{a}; \quad U_2^{(m)} = \frac{\tilde{U}_2^{(m)}}{a}; \quad \Theta^{(m)} = \frac{\tilde{\Theta}^{(m)}}{T_0};$$

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \frac{\tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}}{\mu^{(m)}}; \quad \tilde{\Theta}^{(m)} = T^{(m)} - T_0;$$

$\tilde{U}_i^{(m)} (i, m = 1, 2)$ – компоненты вектора перемещений;

$\tilde{\Theta}^{(m)}$ – прирост температуры; $T^{(m)}$ – абсолютная температура точек тела;

T_0 – температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии;

$\rho^{(m)}$ – плотность; $\lambda^{(m)}, \mu^{(m)}$ – параметры Ламе;

$$\gamma^{(m)} = (3\lambda^{(m)} + 2\mu^{(m)}) \cdot \alpha_t^{(m)}; \quad \delta^{(m)} = \gamma^{(m)} T_0 / \lambda_0^{(m)}; \quad \chi^{(m)} = \lambda_0^{(m)} / c_\varepsilon^{(m)},$$

где $\alpha_t^{(m)}$ – коэффициент линейного термического расширения;

$\lambda_0^{(m)}$ – коэффициент теплопроводности;

$c_\varepsilon^{(m)}$ – удельная теплоемкость при постоянной деформации.

В данных обозначениях верхний индекс определяет принадлежность механической характеристики или упругого параметра области $G^{(m)}$, $m = 1, 2$.

При формулировке граничных условий, учитывая симметрию области, рассмотрим напряженное состояние части области, расположенной в первой координатной четверти. Вводим локальную безразмерную координату

$\hat{x} = (\alpha_1 - c)/a$, $\hat{x} \in [0, \delta_2]$; $\delta_2 = 1 - \delta$, $\delta = c/a$ и безразмерные амплитудные компоненты тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(m)}$, связанные с перемещениями законом

Гука:

$$\sigma_{11}^{(m)} = C_{11}^{(m)}U_{1,1}^{(m)} + C_{12}^{(m)}U_{2,2}^{(m)}, \quad \sigma_{22}^{(m)} = C_{12}^{(m)}U_{1,1}^{(m)} + C_{11}^{(m)}U_{2,2}^{(m)},$$

$$\sigma_{12}^{(m)} = U_{1,2}^{(m)} + U_{2,1}^{(m)},$$

где $C_{11}^{(m)} = 2 + \frac{\lambda^{(m)}}{\mu^{(m)}}$, $C_{12}^{(m)} = C_{11}^{(m)} - 2$.

Таким образом, для областей $\bar{G}^{(1)} = \{(x, y): |x| \leq \delta; |y| \leq \eta\}$ и $\bar{G}^{(2)} = \{(\hat{x}, y): 0 \leq \hat{x} \leq \delta_2; |y| \leq \eta\}$, граничные условия в безразмерном виде запишутся следующим образом:

$$\sigma_{1\beta}^{(1)}(\delta, y) = r_{21}\sigma_{1\beta}^{(2)}(0, y), \quad U_{\beta}^{(1)}(\delta, y) = U_{\beta}^{(2)}(0, y),$$

$$\sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q_2^{(1)}(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0, \quad \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}}, \quad \Theta^{(1)} = \Theta^{(2)},$$

$$\frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} \Theta^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q_1^{(2)}(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0,$$

$$\sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q_2^{(2)}(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} + a \frac{\alpha^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \Theta^{(2)} = 0, \quad (3.2)$$

где $q_{\beta}^{(m)} = q_{\beta} / \mu^{(m)}$, $\eta = b/a$, $r_{21} = \mu^{(2)} / \mu^{(1)}$, $\beta = 1, 2$;

$\lambda_1^{(m)}$ – приведенный коэффициент теплопроводности;

$\alpha^{(m)}$ – коэффициент теплоотдачи.

3.2. Обобщение метода суперпозиции на случай кусочно-неоднородных прямоугольных термоупругих областей

Следуя алгоритму метода суперпозиции, общее решение $U_i^{(m)}$ и $\Theta^{(m)}$

конструируем в виде суммы двух частных решений системы. При выборе формы этих частных решений необходимо учитывать возможность удовлетворения при их помощи не только граничным условиям на внешней границе области, но и условиям сопряжения механических и температурных характеристик на границе раздела сред [48].

Имеем следующие выражения для общего решения краевой задачи (3.1), (3.2) в областях $\bar{G}^{(m)}$ ($m = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
 U_1^{(1)} &= \bar{H}^{(1)} sh(t^{(1)}x) \cos \alpha^{(1)}(y - \eta) + \bar{R}^{(1)} ch(r^{(1)}y) \sin \chi^{(1)}(x - \delta), \\
 U_2^{(1)} &= H^{(1)} ch(t^{(1)}x) \sin \alpha^{(1)}(y - \eta) + R^{(1)} sh(r^{(1)}y) \cos \chi^{(1)}(x - \delta), \\
 \Theta^{(1)} &= K^{(1)} ch(t^{(1)}x) \cos \alpha^{(1)}(y - \eta) + L^{(1)} ch(r^{(1)}y) \cos \chi^{(1)}(x - \delta), \\
 U_1^{(2)} &= (\bar{H}^{(2)} sh(t^{(2)}\hat{x}) + \bar{Q}^{(2)} ch(t^{(2)}\hat{x})) \cos \alpha^{(1)}(y - \eta) + \bar{R}^{(2)} ch(r^{(2)}y) \sin \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta), \\
 U_2^{(2)} &= (H^{(2)} ch(t^{(2)}\hat{x}) + Q^{(2)} sh(t^{(2)}\hat{x})) \sin \alpha^{(1)}(y - \eta) + R^{(2)} sh(r^{(2)}y) \cos \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta), \\
 \Theta^{(2)} &= (K^{(2)} ch(t^{(2)}\hat{x}) + M^{(2)} sh(t^{(2)}\hat{x})) \cos \alpha^{(1)}(y - \eta) + L^{(2)} ch(r^{(2)}y) \cos \chi^{(2)}(\hat{x} - \delta).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

В качестве значений параметров $\alpha^{(1)}$, $\chi^{(m)}$ выбираем последовательности чисел: $\alpha_k = \frac{k\pi}{\eta}$, $\chi_j^{(1)} = \frac{j\pi}{\delta}$, $\chi_j^{(2)} = \frac{j\pi}{\delta_2}$, $k = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots$

Подставляем выражения (3.3) в системы уравнений движения и теплопроводности (3.1) и (3.2). Получим две системы однородных уравнений относительно произвольных постоянных $\bar{H}^{(m)}$, $H^{(m)}$, $\bar{R}^{(m)}$, $R^{(m)}$, $\bar{Q}^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $K^{(m)}$, $L^{(m)}$, $M^{(m)}$. Запишем ее для области $\bar{G}^{(1)}$ (для области $\bar{G}^{(2)}$ – аналогично).

$$\begin{aligned}
 &\bar{H} \left(t^2 C_{11}^{(1)} - \alpha^{(1)2} + \Omega^{(1)2} \right) + H \alpha^{(1)} t (C_{11}^{(1)} - 1) - K t \Theta_1^{(1)} = 0, \\
 &-\bar{H} t \alpha^{(1)} (C_{11}^{(1)} - 1) + H \left(t^2 - \alpha^{(1)2} C_{11}^{(1)} + \Omega^{(1)2} \right) + K \alpha^{(1)} \Theta_1^{(1)} = 0, \\
 &-\bar{H} t \Omega_1^{(1)} - H \alpha^{(1)} \Omega_1^{(1)} + K \left(t^2 - \alpha^{(1)2} - \Omega_2^{(1)2} \right) = 0, \\
 &\bar{R} \left(-\chi^{(1)2} C_{11}^{(1)} + r^2 + \Omega^{(1)2} \right) + R \chi^{(1)} r (C_{11}^{(1)} - 1) - L \chi^{(1)} \Theta_1^{(1)} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\bar{R}r\chi^{(1)}(C_{11}^{(1)} - 1) + R\left(-\chi^{(1)2} + r^2C_{11}^{(1)} + \Omega^{(1)2}\right) - Lr\Theta_1^{(1)} = 0,$$

$$\bar{R}\chi^{(1)}\Omega_1^{(1)} - Rr\Omega_1^{(1)} + L\left(r^2 - \chi^{(1)2} - \Omega_2^{(1)}\right) = 0,$$

где $\Theta_1^{(1)} = \frac{\gamma^{(1)}T_0}{\mu^{(1)}}$, $\Omega_1^{(1)} = \frac{\eta^{(1)}a^2i\omega}{T_0}$, $\Omega_2^{(1)} = \frac{a^2i\omega}{\chi^{(1)}}$, $i^2 = -1$.

Данный набор констант обеспечивает необходимую степень произвола для удовлетворения граничных условий и условий сопряжения в рассматриваемой составной области [33, 39].

Обозначим через $t_{\alpha k}^{(m)}$ и $r_{\alpha j}^{(m)}$ – корни характеристических уравнений ($\alpha = 1, 2, 3$), полученные при условии существования нетривиального решения двух однородных систем уравнений:

$$t_1^{(m)2} = \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + \right. \\ \left. + 2\alpha^{(1)2}(C_{11}^{(m)} - 1) + S^{(m)} \right) / 2C_{11}^{(m)}, \quad t_2^{(m)2} = \alpha^{(1)2} - \Omega^{(m)2},$$

$$t_3^{(m)2} = \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + \right. \\ \left. + 2\alpha^{(1)2}(C_{11}^{(m)} - 1) - S^{(m)} \right) / 2C_{11}^{(m)},$$

$$r_1^{(m)2} = \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + \right. \\ \left. + 2\chi^{(m)2}(C_{11}^{(m)} - 1) + S^{(m)} \right) / 2C_{11}^{(m)},$$

$$r_2^{(m)2} = \chi^{(m)2} - \Omega^{(m)2},$$

$$r_3^{(m)2} = \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + \right. \\ \left. + 2\chi^{(m)2}(C_{11}^{(m)} - 1) - S^{(m)} \right) / 2C_{11}^{(m)}, \quad (3.4)$$

где $S^{(m)2} = \Omega^{(m)4} + \Omega^{(m)2}(2\Omega_2^{(m)} + 2(C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - 2\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)}) + \Theta_1^{(m)2}\Omega_1^{(m)2} +$
 $+ 2(C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)}\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + 2\Omega_2^{(m)}\Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + (C_{11}^{(m)} - 1)^2\Omega_2^{(m)2} +$

$$+ 2\left(C_{11}^{(m)} - 1\right)\Omega_2^{(m)2} + \Omega_2^{(m)2},$$

$$\Theta_1^{(1)} = \gamma^{(1)}T_0/\mu^{(1)}, \quad \Omega_1^{(1)} = \eta^{(1)}a^2i\omega/T_0, \quad \Omega_2^{(1)} = a^2i\omega/\chi^{(1)}, \quad i^2 = -1.$$

Из анализа систем однородных уравнений получаем соотношения, связывающие постоянные $\bar{H}^{(m)}$, $H^{(m)}$, $\bar{R}^{(m)}$, $R^{(m)}$, $\bar{Q}^{(m)}$, $Q^{(m)}$, $K^{(m)}$, $L^{(m)}$, $M^{(m)}$:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{k\alpha}^{(m)} &= H_{k\alpha}^{(m)}P_{1\alpha k}^{(m)}, & K_{k\alpha}^{(m)} &= H_{k\alpha}^{(m)}P_{2\alpha k}^{(m)}, & \bar{Q}_{k\alpha}^{(m)} &= Q_{k\alpha}^{(m)}P_{1\alpha k}^{(m)}, \\ M_{k\alpha}^{(m)} &= Q_{k\alpha}^{(m)}P_{2\alpha k}^{(m)}, & \bar{R}_{j\alpha}^{(m)} &= R_{j\alpha}^{(m)}B_{1\alpha j}^{(m)}, & L_{j\alpha}^{(m)} &= R_{j\alpha}^{(m)}B_{2\alpha j}^{(m)}, \end{aligned}$$

где $\alpha = 1, 2, 3$, а выражения для $P_{1\alpha k}^{(m)}$, $P_{2\alpha k}^{(m)}$, $B_{1\alpha j}^{(m)}$, $B_{2\alpha j}^{(m)}$ описывают формулы (3.5).

$$\begin{aligned} P_{1\alpha k}^{(m)} &= \left(\alpha^{(1)}t_{\alpha k} \left(-t_{\alpha k}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + \alpha^{(1)2} (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} \right) \right) / \\ & \left(t_{\alpha k}^4 (C_{11}^{(m)} - 1) + \left(-\alpha^{(1)2} (C_{11}^{(m)} - 1) + \Omega_2^{(m)2} - t_{\alpha k}^2 (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - \Omega_2^{(m)} - 2\alpha^{(1)2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} \right) + \alpha^{(1)4} - \alpha^{(1)2}\Omega_2^{(m)2} + \Omega_2^{(m)}\alpha^{(1)2} - \Omega_2^{(m)}\Omega_2^{(m)2} \right), \\ P_{2\alpha k}^{(m)} &= \frac{\Omega_1^{(m)} \left(-t_{\alpha k}^2 + \alpha^{(1)2} - \Omega_2^{(m)2} \right)}{\alpha^{(1)} \left(-t_{\alpha k}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} \right)}, \\ B_{1\alpha j}^{(m)} &= \left(2r_{\alpha j}^2 \chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^4 + r_{\alpha j}^2 \Omega_2^{(m)} + r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1)\chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^4 (C_{11}^{(m)} - 1) + \right. \\ & \left. + r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) \cdot \Omega_2^{(m)} - \chi^{(m)4} - \right. \\ & \left. - \chi^{(m)2} \Omega_2^{(m)} + \Omega_2^{(m)2} \chi^{(m)2} - \Omega_2^{(m)2} r_{\alpha j}^2 + \Omega_2^{(m)2} \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} r_{\alpha j}^2 \right) / \left(-r_{\alpha j} \chi^{(m)} \times \right. \\ & \left. \times \left((C_{11}^{(m)} - 1)\chi^{(m)2} - r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} \right) \right), \\ B_{2\alpha j}^{(m)} &= \frac{\Omega_1^{(m)} \left(r_{\alpha j}^2 - \chi^{(m)2} + \Omega_2^{(m)2} \right)}{r_{\alpha j} \left(\chi^{(m)2} (C_{11}^{(m)} - 1) - r_{\alpha j}^2 (C_{11}^{(m)} - 1) + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} \right)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Общее решение краевой задачи строим отдельно для каждой области $\bar{G}^{(m)}$.

Для области $\bar{G}^{(1)}$:

$$U_1^{(1)}(x, y) = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{1\beta k}^{(1)} H_{\beta k}^{(1)} sh\left(t_{\beta k}^{(1)} x\right) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{1\beta j}^{(1)} R_{\beta j}^{(1)} \operatorname{ch}(r_{\beta j}^{(1)} y) \sin \chi_j^{(1)}(x - \delta) + H_0^{(1)} \sin l_1^{(1)} x, \\
U_2^{(1)}(x, y) & = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 H_{\beta k}^{(1)} \operatorname{ch}(t_{\beta k}^{(1)} x) \sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
& + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 R_{\beta j}^{(1)} \operatorname{sh}(r_{\beta j}^{(1)} y) \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) + R_0^{(1)} \sin l_1^{(1)} y \\
\Theta^{(1)}(x, y) & = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{2\beta k}^{(1)} H_{\beta k}^{(1)} \operatorname{ch}(t_{\beta k}^{(1)} x) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
& + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{2\beta j}^{(1)} R_{\beta j}^{(1)} \operatorname{ch}(r_{\beta j}^{(1)} y) \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) + B_0^{(1)} \cos l_1^{(1)} x + C_0^{(1)} \cos l_1^{(1)} y.
\end{aligned}$$

Для области $\bar{G}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
U_1^{(2)}(\hat{x}, y) & = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{1\beta k}^{(2)} \left(H_{\beta k}^{(2)} \operatorname{sh}(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) + Q_{\beta k}^{(2)} \operatorname{ch}(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) \right) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
& + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{1\beta j}^{(2)} R_{\beta j}^{(2)} \operatorname{ch}(r_{\beta j}^{(2)} y) \sin \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta) + H_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} \hat{x} + Q_0^{(2)} \cos l_2^{(2)} \hat{x}, \\
U_2^{(2)}(\hat{x}, y) & = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 \left(H_{\beta k}^{(2)} \operatorname{ch}(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) + Q_{\beta k}^{(2)} \operatorname{sh}(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) \right) \sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
& + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 R_{\beta j}^{(2)} \operatorname{sh}(r_{\beta j}^{(2)} y) \cos \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) + R_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} y, \\
\Theta^{(2)}(x, y) & = \sum_k \sum_{\beta=1}^3 P_{2\beta k}^{(2)} \left(H_{\beta k}^{(2)} \operatorname{ch}(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) + Q_{\beta k}^{(2)} \operatorname{sh}(t_{\beta k}^{(2)} \hat{x}) \right) \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) + \\
& + \sum_j \sum_{\beta=1}^3 B_{2\beta j}^{(2)} R_{\beta j}^{(2)} \operatorname{ch}(r_{\beta j}^{(2)} y) \cos \chi_j^{(2)}(x - \delta_2) + B_0^{(2)} \sin l_2^{(2)} \hat{x} + C_0^{(2)} \cos l_2^{(2)} \hat{x},
\end{aligned}$$

где $H_{\beta k}^{(m)}$, $R_{\beta k}^{(m)}$, $H_0^{(m)}$, $R_0^{(m)}$, $B_0^{(m)}$, $C_0^{(m)}$, $Q_0^{(m)}$ – произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий (3.2).

3.3. Решение вспомогательных краевых задач для случая гармонических колебаний составного прямоугольника

Аналогично алгоритму для однородной термоупругой области, рассмотрим вспомогательную краевую задачу. При данных граничных условиях вид этой вспомогательной задачи значительно усложняется, поскольку при ее формулировке необходимо не только добиться аналитического решения, но и ввести граничные условия и условия сопряжения, т. е. как можно больше условий из (3.2). Это позволит максимально упростить вид последующей определяющей системы интегральных уравнений. Итак, рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая характеризуется следующими условиями в окрестности границ прямоугольного сечения детали:

для области $\bar{G}^{(1)}$:

$$U_1^{(1)}(\delta, y) = f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(1)}(\delta, y) = \varphi_1(y), \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=\delta} = f_5(y),$$

$$U_2^{(1)}(x, \eta) = f_2(x), \quad \sigma_{12}^{(1)}(x, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} = f_8(x),$$

для области $\bar{G}^{(2)}$:

$$U_1^{(2)}(0, y) = f_1(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(0, y) = r_{12}\varphi_1(y), \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=0} = f_5(y),$$

$$U_2^{(2)}(\hat{x}, \eta) = f_4(\hat{x}), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} \right|_{y=\eta} = f_7(\hat{x}),$$

$$U_1^{(2)}(\delta_2, y) = f_3(y), \quad \sigma_{12}^{(2)}(\delta_2, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{x}=\delta_2} = f_6(y),$$

где $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$ – неизвестные вспомогательные функции.

После определения констант $H_{\beta k}^{(m)}$ и $R_{\beta k}^{(m)}$, через коэффициенты Фурье f_{1k} , f_{2j} , f_{3k} , f_{4j} , f_{5k} , f_{6k} , f_{7j} , f_{8j} , φ_{1k} введенных функций $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$,

$f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$, получаем компоненты вектора перемещений U_1, U_2 и температуру Θ . Например в области $\bar{G}^{(1)}$ они имеют вид:

$$\begin{aligned}
U_1^{(1)}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k} \left(\left(-\Delta_1^{(1)} \frac{sh(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} + 2\Delta_2^{(1)} \frac{sh(t_2^{(1)}x)}{sh(t_2^{(1)}\delta)} + \Delta_3^{(1)} \frac{sh(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + f_{5k} \left(\Delta_4^{(1)} \left(-\frac{sh(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} + \frac{sh(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{1k} \left(\Delta_6^{(1)} \frac{sh(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} + \Delta_2^{(1)} \frac{sh(t_2^{(1)}x)}{sh(t_2^{(1)}\delta)} - \Delta_7^{(1)} \frac{sh(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) \right] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
&\quad \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{2j} \left(\left(-\Delta_8^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)}y)}{sh(r_1^{(1)}\eta)} - 2\Delta_9^{(1)} \frac{ch(r_2^{(1)}y)}{sh(r_2^{(1)}\mu)} + \Delta_{10}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)}y)}{sh(r_3^{(1)}\eta)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + f_{8j} \left(\left(-\Delta_{11}^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)}y)}{sh(r_1^{(1)}\eta)} + \Delta_{12}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)}y)}{sh(r_3^{(1)}\eta)} \right) \right) \right] \times \sin \chi_j^{(1)}(x - \delta) + f_{10} \frac{\sin k_1^{(1)}x}{\sin k_1^{(1)}\delta}, \\
U_2^{(1)}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k} \left(\left(\Delta_{13}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} - \Delta_{14}^{(1)} \frac{ch(t_2^{(1)}x)}{sh(t_2^{(1)}\delta)} - \Delta_{15}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) + f_{5k} \left(-\Delta_{16}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta_{17}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) + \varphi_{1k} \left(-\Delta_{18}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} - \Delta_{19}^{(1)} \frac{ch(t_2^{(1)}x)}{sh(t_2^{(1)}\delta)} + \Delta_{20}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) \right] \sin \alpha_k (y - \eta) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{2j} \left(\Delta_{21}^{(1)} \frac{sh(r_1^{(1)}y)}{sh(r_1^{(1)}\eta)} + \Delta_{22}^{(1)} \frac{sh(r_2^{(1)}y)}{sh(r_2^{(1)}\mu)} - \Delta_{23}^{(1)} \frac{sh(r_3^{(1)}y)}{sh(r_3^{(1)}\eta)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + f_{8j} \left(\Delta_{24}^{(1)} \left(\frac{sh(r_1^{(1)}y)}{sh(r_1^{(1)}\eta)} - \frac{sh(r_3^{(1)}y)}{sh(r_3^{(1)}\eta)} \right) \right) \right] \cdot \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) + f_{20} \frac{\sin k_1^{(1)}y}{\sin k_1^{(1)}\eta}, \\
\Theta^{(1)}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k} \left(\left(\Delta_{25}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} - \Delta_{26}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) + f_{5k} \left(-\Delta_{27}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} + \Delta_{28}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{1k} \left(-\Delta_{33}^{(1)} \frac{ch(t_1^{(1)}x)}{sh(t_1^{(1)}\delta)} + \Delta_{34}^{(1)} \frac{ch(t_3^{(1)}x)}{sh(t_3^{(1)}\delta)} \right) \right] \cos \alpha_k (y - \eta) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{2j} \left(\Delta_{29}^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} - \Delta_{30}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) + f_{8j} \left(\Delta_{31}^{(1)} \frac{ch(r_1^{(1)} y)}{sh(r_1^{(1)} \eta)} - \Delta_{32}^{(1)} \frac{ch(r_3^{(1)} y)}{sh(r_3^{(1)} \eta)} \right) \right] \times \\
& \times \cos \chi_j^{(1)}(x - \delta) - f_{30} \frac{\cos k_1^{(1)} x}{k_1^{(1)} \sin k_1^{(1)} \delta} - f_{40} \frac{\cos k_1^{(1)} y}{k_1^{(1)} \sin k_1^{(1)} \eta}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Тогда для области $\bar{G}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
U_1^{(2)}(\hat{x}, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k} \left(\Delta_1^{(2)} \frac{sh(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - 2\Delta_2^{(2)} \frac{sh(t_2^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_2^{(2)} \delta_2)} - \Delta_3^{(2)} \frac{sh(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + \right. \\
& + f_{5k} \left(\Delta_4^{(2)} \left(\frac{sh(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - \frac{sh(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) \right) + \\
& + f_{3k} \left(-\Delta_1^{(2)} \frac{sh(t_1^{(2)} \hat{x})}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} + 2\Delta_2^{(2)} \frac{sh(t_2^{(2)} \hat{x})}{sh(t_2^{(2)} \delta_2)} + \Delta_3^{(2)} \frac{sh(t_3^{(2)} \hat{x})}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + \\
& + f_{6k} \left(\Delta_4^{(2)} \left(\frac{sh(t_1^{(2)} \hat{x})}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - \frac{sh(t_3^{(2)} \hat{x})}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) \right) + \\
& \left. + \varphi_{1k} \left(-\Delta_6^{(2)} \frac{sh(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - \Delta_2^{(2)} \frac{sh(t_2^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_2^{(2)} \delta_2)} - \Delta_7^{(2)} \frac{sh(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) \right] \times \\
& \times \cos \alpha_k(y - \eta) + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{4j} \left((-\Delta_8^{(2)}) \frac{ch(r_1^{(2)} y)}{sh(r_1^{(2)} \eta)} - 2\Delta_9^{(2)} \frac{ch(r_2^{(2)} y)}{sh(r_2^{(2)} \mu)} + \Delta_{10}^{(2)} \frac{ch(r_3^{(2)} y)}{sh(r_3^{(2)} \eta)} \right) + \right. \\
& + f_{7j} \left((-\Delta_{11}^{(2)}) \frac{ch(r_1^{(2)} y)}{sh(r_1^{(2)} \eta)} + \Delta_{12}^{(2)} \frac{ch(r_3^{(2)} y)}{sh(r_3^{(2)} \eta)} \right) \left. \right] \times \\
& \times \sin \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta) + f_{30} \frac{\sin k_2^{(2)} \hat{x}}{\sin k_2^{(2)} \delta_2} + f_{10} \frac{\sin k_2^{(2)}(\hat{x} - \delta_2)}{\sin k_2^{(2)} \delta_2}, \\
U_2^{(2)}(\hat{x}, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k}^{(2)} \left(-\Delta_{13}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} + \Delta_{14}^{(2)} \frac{ch(t_2^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_2^{(2)} \delta_2)} + \right. \\
& + \Delta_{15}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \left. \right) + f_{5k} \left(\Delta_{16}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - \Delta_{17}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_{3k} \left(\Delta_{13}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)} \hat{x})}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - \Delta_{14}^{(2)} \frac{ch(t_2^{(2)} \hat{x})}{sh(t_2^{(2)} \delta_2)} - \Delta_{15}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)} \hat{x})}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + \\
& \quad + f_{6k} \left(-\Delta_{16}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)} \hat{x})}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} + \Delta_{17}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)} \hat{x})}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + \\
& + \varphi_{1k} \left(\Delta_{18}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} + \Delta_{19}^{(2)} \frac{ch(t_2^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_2^{(2)} \delta_2)} - \Delta_{20}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{4j} \left(\Delta_{21}^{(2)} \frac{sh(r_1^{(2)} y)}{sh(r_1^{(2)} \eta)} + \Delta_{22}^{(2)} \frac{sh(r_2^{(2)} y)}{sh(r_2^{(2)} \mu)} - \Delta_{23}^{(2)} \frac{sh(r_3^{(2)} y)}{sh(r_3^{(2)} \eta)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + f_{7j} \left(\Delta_{24}^{(2)} \left(\frac{sh(r_1^{(2)} y)}{sh(r_1^{(2)} \eta)} - \frac{sh(r_3^{(2)} y)}{sh(r_3^{(2)} \eta)} \right) \right) \right] \cdot \cos \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) + f_{40} \frac{\sin k_2^{(2)} y}{\sin k_2^{(2)} \eta}, \\
\Theta^{(2)}(\hat{x}, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{1k}^{(2)} \left(\Delta_{25}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - \Delta_{26}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + f_{5k} \left(-\Delta_{27}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} + \Delta_{28}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + \right. \\
& + f_{3k} \left(-\Delta_{25}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)} \hat{x})}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} + \Delta_{26}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)} \hat{x})}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + f_{6k} \left(\Delta_{27}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)} \hat{x})}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} - \Delta_{28}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)} \hat{x})}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) + \\
& \quad \left. + \varphi_{1k} \left(-\Delta_{33}^{(2)} \frac{ch(t_1^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_1^{(2)} \delta_2)} + \Delta_{34}^{(2)} \frac{ch(t_3^{(2)}(\hat{x} - \delta_2))}{sh(t_3^{(2)} \delta_2)} \right) \right] \cos \alpha_k (y - \eta) + \\
& + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{4j} \left(\Delta_{29}^{(2)} \frac{ch(r_1^{(2)} y)}{sh(r_1^{(2)} \eta)} - \Delta_{30}^{(2)} \frac{ch(r_3^{(2)} y)}{sh(r_3^{(2)} \eta)} \right) + f_{7j} \left(\Delta_{31}^{(2)} \frac{ch(r_1^{(2)} y)}{sh(r_1^{(2)} \eta)} - \Delta_{32}^{(2)} \frac{ch(r_3^{(2)} y)}{sh(r_3^{(2)} \eta)} \right) \right] \times \\
& \quad \times \cos \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta_2) - f_{50} \frac{\cos k_2^{(2)} \hat{x}}{k_2^{(2)} \sin k_2^{(2)} \delta_2} - f_{60} \frac{\cos k_2^{(2)} y}{k_2^{(2)} \sin k_2^{(2)} \eta}, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

где, например,

$$\begin{aligned}
\Delta_{13}^{(m)} = & \alpha_k \left(\Omega^{(m)^2} - 2\alpha_k^2 \right) \left(\Omega^{(m)^2} - \alpha_k^2 + t_{3k}^{(2)^2} \right) \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{1k}^{(2)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1) \times \right. \\
& \times \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \Big/ \Omega^{(m)^2} t_{1k}^{(2)} \left(t_{1k}^{(2)^2} - t_{3k}^{(2)^2} \right) \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega^{(m)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)}, \quad \Delta_{14}^{(m)} = 2\alpha_k t_{2k} / \Omega^{(m)^2}, \\
\Delta_{15}^{(m)} &= \alpha_k \left(\Omega^{(m)^2} - 2\alpha_k^2 \right) \left(\Omega^{(m)^2} - \alpha_k^2 + t_{1k}^{(2)^2} \right) \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{3k}^{(2)^2} + \right. \\
& \left. + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) / \Omega^{(m)^2} t_{3k}^{(2)} \left(t_{1k}^{(2)^2} - t_{3k}^{(2)^2} \right) \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega^{(m)^2} + \right. \\
& \left. + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right), \\
\Delta_{16}^{(m)} &= \alpha_k \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{1k}^{(2)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) \times \\
& \times \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{3k}^{(2)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) / \Omega_1^{(m)} t_{1k}^{(2)} \left(t_{1k}^{(2)^2} - t_{3k}^{(2)^2} \right) \times \\
& \times \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega^{(m)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right), \\
\Delta_{17}^{(m)} &= \alpha_k \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{1k}^{(2)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) \times \\
& \times \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{3k}^{(2)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) / \Omega_1^{(m)} t_{3k}^{(2)} \left(t_{1k}^{(2)^2} - t_{3k}^{(2)^2} \right) \times \\
& \times \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega^{(m)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right), \\
\Delta_{18}^{(m)} &= \alpha_k^2 \left(\Omega^{(m)^2} - \alpha_k^2 + t_{3k}^{(2)^2} \right) \times \\
& \times \left(\Omega^{(m)^2} t_{1k}^{(2)} \left(t_{1k}^{(2)^2} - t_{3k}^{(2)^2} \right) \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega^{(m)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) \right)^{-1} \times \\
& \times \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{1k}^{(2)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right), \\
\Delta_{19}^{(m)} &= t_{2k} / \Omega^{(m)^2}, \\
\Delta_{20}^{(m)} &= \alpha_k^2 \left(\Omega^{(m)^2} - \alpha_k^2 + t_{1k}^{(2)^2} \right) \times \\
& \times \left(\Omega^{(m)^2} t_{3k}^{(2)} \left(t_{1k}^{(2)^2} - t_{3k}^{(2)^2} \right) \left((C_{11}^{(m)} - 1)\Omega^{(m)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) \right)^{-1}, \\
& \times \left((C_{11}^{(m)} - 1)\alpha_k^2 - (C_{11}^{(m)} - 1)t_{3k}^{(2)^2} + (C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{21}^{(m)} &= \left(\chi_j^{(m)^2} + r_{2j}^{(2)^2} \right) \left(-\chi_j^{(m)^2} + \Omega^{(m)^2} + r_{3j}^{(2)^2} \right) \times \\ &\times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) r_{1j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) / \\ &/ \left(\left(\chi_j^{(m)^2} - r_{2j}^{(2)^2} \right) \left(r_{1j}^{(2)^2} - r_{3j}^{(2)^2} \right) \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega^{(m)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\Delta_{22}^{(m)} = 2 \chi_j^{(m)^2} / \Omega^{(m)^2},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{23}^{(m)} &= \left(\chi_j^{(m)^2} + r_{2j}^{(2)^2} \right) \left(-\chi_j^{(m)^2} + \Omega^{(m)^2} + r_{1j}^{(2)^2} \right) \times \\ &\times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) r_{3j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) / \\ &/ \left(\left(\chi_j^{(m)^2} - r_{2j}^{(2)^2} \right) \left(r_{1j}^{(2)^2} - r_{3j}^{(2)^2} \right) \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega^{(m)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{24}^{(m)} &= \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) r_{1j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) \times \\ &\times \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \chi_j^{(m)^2} - \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) r_{3j}^{(2)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right) / \\ &/ \Omega_1^{(m)} \left(r_{1j}^{(2)^2} - r_{3j}^{(2)^2} \right) \left(\left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega^{(m)^2} + \left(C_{11}^{(m)} - 1 \right) \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)} \Omega_1^{(m)} \right). \end{aligned}$$

$$f_{10} = \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_1(\xi) d\xi, \quad f_{1k} = \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_1(\xi) \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi,$$

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_1(\xi) \sin \alpha_k (\xi - \eta) d\xi,$$

$$f_{20} = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f_2(\xi) d\xi, \quad f_{2j} = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f_2(\xi) \cos \chi_j (\xi - \delta) d\xi,$$

$$f_{30} = \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_3(\xi) d\xi, \quad f_{3k} = \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_3(\xi) \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi,$$

$$\begin{aligned}
f_{40} &= \frac{1}{\delta_2} \int_0^{\delta_2} f_4(\xi) d\xi, & f_{4j} &= \frac{2}{\delta_2} \int_0^{\delta_2} f_4(\xi) \cos \chi_j(\xi - \delta_2) d\xi, \\
f_{50} &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f_5(\xi) d\xi, & f_{5j} &= \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f_5(\xi) \cos \chi_j(\xi - \delta) d\xi, \\
f_{60} &= \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_6(\xi) d\xi, & f_{6k} &= \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_6(\xi) \cos \alpha_k(\xi - \eta) d\xi, \\
f_{7j} &= \frac{2}{\delta_2} \int_0^{\delta_2} f_7(\xi) \cos \chi_j(\xi - \delta_2) d\xi, & f_{8j} &= \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} f_8(\xi) \cos \chi_j(\xi - \delta) d\xi.
\end{aligned}$$

Для определения введенных вспомогательных функций, примем во внимание неучтенные граничные условия и условия сопряжения, а именно:

$$\begin{aligned}
U_2^{(1)}(\delta, y) &= U_2^{(2)}(0, y), & \Theta^{(1)} \Big|_{x=\delta} &= \Theta^{(2)} \Big|_{\hat{x}=0}, & \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) &= \sigma_{11}^{(2)}(0, y), \\
\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) &= q, & \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) &= q, & \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) &= q;
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial y} + T^{(2)} \Theta^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial x} + T^{(1)} \Theta^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial \Theta^{(2)}}{\partial \hat{x}} + T^{(2)} \Theta^{(2)} = 0. \tag{3.9}$$

Сведем исследуемую задачу к решению следующей системы интегральных уравнений относительно функций $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$:

$$M_{k1} \varphi_1 + \sum_{r=1}^8 L_{kr} f_r = Q_k, \tag{3.10}$$

где $k = 1, 2, \dots, 7$, $r = 1, 2, \dots, 8$.

$$f_6 + T^{(1)} \Theta^{(1)} = 0, \quad f_7 + T^{(2)} \Theta^{(2)} = 0, \quad f_8 + T^{(1)} \Theta^{(1)} = 0, \tag{3.11}$$

где $T^{(m)} = (\alpha^{(m)} a) / \lambda_1^{(m)}$, $m = 1, 2$.

Выражения (3.10), (3.11) образуют СИУ. В данной системе в уравнениях (3.10) номер уравнения совпадает с номером граничного условия в формулах (3.8), уравнения (3.11) соответствуют граничным условиям (3.9), а операторы получаются из формул для волновых характеристик.

Например, для первых двух уравнений имеем:

$$\begin{aligned}
L_{11}f_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k} (\Delta_{13}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(1)} \delta) + \Delta_{13}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(2)} \delta_2) - \Delta_{14}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{2k}^{(1)} \delta) - \\
&\quad - \Delta_{14}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{2k}^{(2)} \delta_2) - \Delta_{15}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(1)} \delta) - \Delta_{15}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(2)} \delta_2)) \sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta), \\
L_{12}f_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j} \left(\Delta_{21}^{(1)} \frac{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(1)} y)}{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(1)} \eta)} + \Delta_{22}^{(1)} \frac{\operatorname{sh}(r_{2j}^{(1)} y)}{\operatorname{sh}(r_{2j}^{(1)} \eta)} - \Delta_{23}^{(1)} \frac{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(1)} y)}{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(1)} \eta)} \right) + f_{20} \frac{\sin k_1^{(1)} y}{\sin k_1^{(1)} \eta}, \\
L_{14}f_4 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{4j} \left(-\Delta_{21}^{(2)} \frac{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(2)} y)}{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(2)} \eta)} - \Delta_{22}^{(2)} \frac{\operatorname{sh}(r_{2j}^{(2)} y)}{\operatorname{sh}(r_{2j}^{(2)} \eta)} + \Delta_{23}^{(2)} \frac{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(2)} y)}{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(2)} \eta)} \right) \cos \chi_j^{(2)} \delta_2 - \\
&\quad - f_{40} \frac{\sin k_1^{(2)} y}{\sin k_1^{(2)} \eta}, \\
L_{15}f_5 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{5k} \left(-\Delta_{16}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(1)} \delta) - \Delta_{16}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(2)} \delta) + \Delta_{17}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(1)} \delta) + \Delta_{17}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(2)} \delta) \right) \times \\
&\quad \times \sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta), \\
L_{17}f_7 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{7j} \left(-\Delta_{24}^{(2)} \frac{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(2)} y)}{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(2)} \eta)} + \Delta_{24}^{(2)} \frac{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(2)} y)}{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(2)} \eta)} \right) \cos \chi_j^{(2)} \delta_2, \\
L_{18}f_8 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{7j} \left(\Delta_{24}^{(1)} \frac{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(1)} y)}{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(1)} \eta)} - \Delta_{24}^{(1)} \frac{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(1)} y)}{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(1)} \eta)} \right), \\
M_{11}\varphi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{1k} \left(-\Delta_{18}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(1)} \delta) - \Delta_{18}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(2)} \delta_2) - \Delta_{19}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{2k}^{(1)} \delta) - \Delta_{19}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{2k}^{(2)} \delta_2) + \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{20}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(1)} \delta) + \Delta_{20}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(2)} \delta_2) \right) \cdot \sin \alpha_k(y - \eta), \\
L_{21}f_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{1k} \left(\Delta_{25}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(1)} \delta) - \Delta_{25}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{1k}^{(2)} \delta) - \Delta_{26}^{(1)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(1)} \delta) + \Delta_{26}^{(2)} \operatorname{cth}(t_{3k}^{(2)} \delta) \right) \times \\
&\quad \times \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta), \\
L_{22}f_2 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j} \left(\Delta_{29}^{(2)} \frac{\operatorname{ch}(r_{1j}^{(2)} y)}{\operatorname{sh}(r_{1j}^{(2)} \eta)} - \Delta_{30}^{(1)} \frac{\operatorname{ch}(r_{3j}^{(2)} y)}{\operatorname{sh}(r_{3j}^{(2)} \eta)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{24}f_4 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{4j} \left(-\Delta_{29}^{(2)} \frac{ch(r_{1j}^{(2)}y)}{sh(r_{1j}^{(2)}\eta)} + \Delta_{30}^{(2)} \frac{ch(r_{3j}^{(2)}y)}{sh(r_{3j}^{(2)}\eta)} \right) \cos \chi_j^{(2)} \delta_2, \\
L_{21}f_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{5k} \left(-\Delta_{27}^{(1)} cth(t_{1k}^{(1)}\delta) + \Delta_{27}^{(2)} cth(t_{1k}^{(2)}\delta) + \Delta_{28}^{(1)} cth(t_{3k}^{(1)}\delta) - \Delta_{28}^{(2)} \cdot cth(t_{3k}^{(2)}\delta) \right) \times \\
&\quad \times \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta) - f_{100} ch(k_1^{(1)}\delta), \\
L_{27}f_7 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{7j} \left(-\Delta_{31}^{(2)} \frac{ch(r_{1j}^{(2)}y)}{sh(r_{1j}^{(2)}\eta)} + \Delta_{32}^{(2)} \frac{ch(r_{3j}^{(2)}y)}{sh(r_{3j}^{(2)}\eta)} \right) \cos \chi_j^{(2)} \delta_2 + f_{20} \frac{\cos k_1^{(2)}y}{k_1 \sin k_1^{(2)}\eta}, \\
L_{28}f_8 &= \sum_{j=1}^{\infty} f_{8j} \left(\Delta_{31}^{(1)} \frac{ch(r_{1j}^{(2)}y)}{sh(r_{1j}^{(2)}\eta)} - \Delta_{32}^{(1)} \frac{ch(r_{3j}^{(2)}y)}{sh(r_{3j}^{(2)}\eta)} \right) - f_{110} \frac{\cos k_1^{(1)}y}{k_1 \sin k_1^{(1)}\eta}, \\
M_{21}\varphi_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{1k} \left(-\Delta_{33}^{(1)} cth(t_{1k}^{(1)}\delta) - \Delta_{33}^{(2)} cth(t_{1k}^{(2)}\delta_2) + \Delta_{34}^{(1)} cth(t_{3k}^{(1)}\delta) - \Delta_{34}^{(2)} cth(t_{3k}^{(2)}\delta_2) \right) \times \\
&\quad \times \cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

3.4. Асимптотический анализ поведения вспомогательных функций в окрестности сингулярных точек границы составного сечения

Проведем исследование решения СИУ в угловых точках областей $\bar{G}^{(m)}$. В рассматриваемой задаче такими точками являются угловые точки стыка областей (A) и внешняя угловая точка сечения (B). Это позволит определить асимптотику коэффициентов Фурье неизвестных функций в случае, когда $k \rightarrow \infty$ и $j \rightarrow \infty$.

Соответственно алгоритму, приведенному в разделе 2 для однородной области, предположим, что функции $\varphi_{1k}(y)$, $f_{5k}(y)$, $f_{7j}(\hat{x})$, $f_{8j}(x)$ имеют особенность в угловой точке стыка областей $A(\delta, \eta)$, т.е.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\xi) &= \Phi_1^A (\eta - \xi)^{\alpha-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; & f_5(\xi) &= F_5^A (\eta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \\
f_7(\xi) &= F_7^A \xi^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow 0; & f_8(\xi) &= F_8^A (\delta - \xi)^{\beta-1}, \quad \xi \rightarrow \delta. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Аналогичными будут функции $f_{6k}(y)$, $f_{7j}(\hat{x})$ в окрестности угловой точки

$B(\delta_2, \eta)$ области $\bar{G}^{(2)}$:

$$f_6(\xi) = F_6^B(\eta - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \quad f_7(\xi) = F_7^B(\delta_2 - \xi)^{\gamma-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2. \quad (3.9)$$

Функции, непрерывные в своих областях определения, производные которых имеют разрыв в угловых точках, в окрестности точки стыка областей $A(\delta, \eta)$ будут $f_{1k}(y)$, $f_{2j}(x)$, $f_{4k}(\hat{x})$, т.е.

$$\begin{aligned} f_1'(\xi) &= F_1^A(\eta - \xi)^{\alpha-1} \text{ если } \xi \rightarrow \eta; & f_2'(\xi) &= F_2^A(\delta - \xi)^{\alpha-1} \text{ если } \xi \rightarrow \delta; \\ f_4'(\xi) &= F_4^A \xi^{\alpha-1} \text{ если } \xi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В окрестности точки $B(\delta_2, \eta)$ области $\bar{G}^{(2)}$, такими будут $f_{3k}(y)$, $f_{4k}(\hat{x})$, т.е.

$$f_3'(\xi) = F_3^B(\eta - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \eta; \quad f_4'(\xi) = F_4^B(\delta_2 - \xi)^{\lambda-1}, \quad \xi \rightarrow \delta_2, \quad (3.11)$$

где $\alpha, \lambda, \beta, \gamma$ – параметры локальной особенности (ПЛО) по напряжениям и температуре соответственно, характеризующие особенности функций $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(y)$, $f_4(\hat{x})$, $f_5(y)$, $f_6(y)$, $f_7(\hat{x})$, $f_8(x)$, $\varphi_1(y)$, а $F_1^A, F_2^A, \dots, F_7^B, F_8^A$ – произвольные постоянные.

Определяем асимптотику коэффициентов Фурье функций в окрестности точек A и B . Можно показать, что когда $k \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi_{1k} &\underset{\xi \rightarrow \eta}{\cong} \Phi_1 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\alpha}, & f_{1k} &\underset{\xi \rightarrow \eta}{\cong} F_1 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\alpha-1}, \\ f_{2j} &\underset{\xi \rightarrow \delta}{\cong} F_2 \delta^{-1} (\chi_j^{(1)})^{-\alpha-1}, & f_{3k} &\underset{\xi \rightarrow \eta}{\cong} F_3 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\lambda-1}, \\ f_{4j} &\underset{\xi \rightarrow \delta_2}{\cong} F_4 \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\lambda-1}, & f_{4j} &\underset{\xi \rightarrow 0}{\cong} \bar{F}_4 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\alpha-1}, \\ f_{5k} &\underset{\xi \rightarrow \eta}{\cong} F_5 \eta^{-1} (\alpha_k^{(1)})^{-\beta}, & f_{6k} &\underset{\xi \rightarrow \eta}{\cong} F_6 \eta^{-1} (\alpha_k^{(2)})^{-\gamma}, \\ f_{7j} &\underset{\xi \rightarrow \delta_2}{\cong} F_7 \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\gamma}, & f_{7j} &\underset{\xi \rightarrow 0}{\cong} \bar{F}_7 (-1)^{j+1} \delta_2^{-1} (\chi_j^{(2)})^{-\beta}, \\ f_{8j} &\underset{\xi \rightarrow \delta}{\cong} F_8 \delta^{-1} (\chi_j^{(1)})^{-\beta}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\Phi_1 = -2\Phi_1^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_1 = 2F_1^A \Gamma_1(\alpha)$, $F_2 = 2F_2^A \Gamma_1(\chi)$, $F_3 = 2F_3^B \Gamma_1(\alpha)$, $\bar{F}_4 = 2F_4^A \Gamma_1(\chi)$,

$$F_4 = 2F_4^B \Gamma_1(\chi), \quad F_5 = 2F_5^A \Gamma_1(\alpha), \quad F_6 = 2F_6^B \Gamma_1(\alpha), \quad \bar{F}_7 = 2F_7^A \Gamma_1(\chi), \quad F_7 = 2F_7^B \Gamma_1(\chi), \\ F_8 = 2F_8^A \Gamma_1(\chi), \quad \Gamma(x) - \text{гамма-функция}, \quad \Gamma_1(\alpha) = \Gamma(\alpha) \sin(\pi\alpha/2).$$

Если подставить формулы (3.8)–(3.12) в выражения для линейных операторов (3.7) системы интегральных уравнений, получим возможность исследовать асимптотическое поведение левых частей системы. Таким образом, для определения характера особенности вспомогательных функций в окрестности точки A получим следующие уравнения:

$$U_2^{(1)}(\delta, y) = U_2^{(2)}(0, y), \quad \Theta^{(1)} \Big|_{x=\delta} = \Theta^{(2)} \Big|_{\hat{x}=0}, \quad \sigma_{11}^{(1)}(\delta, y) = \sigma_{11}^{(2)}(0, y), \quad (\text{если } y \rightarrow \eta), \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, \eta) = q, \quad f_8 + T^{(1)}\Theta^{(1)} = 0, \quad (\text{если } x \rightarrow \delta), \\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0, \quad (\text{если } \hat{x} \rightarrow 0). \quad (3.13)$$

В окрестности точки B имеем следующие уравнения

$$\sigma_{11}^{(2)}(\delta_2, y) = q, \quad f_6 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0 \quad (\text{если } y \rightarrow \eta), \\ \sigma_{22}^{(2)}(\hat{x}, \eta) = q, \quad f_7 + T^{(2)}\Theta^{(2)} = 0, \quad (\text{если } \hat{x} \rightarrow \delta_2). \quad (3.14)$$

Дальнейший асимптотический анализ рассмотрим детальнее на примере первого граничного условия. Найдём следующие асимптотики:

$$\Delta_{13}^{(1)} \text{cth}(t_{1k}^{(1)} \delta) - \Delta_{14}^{(1)} \text{cth}(t_{2k}^{(1)} \delta) - \Delta_{15}^{(1)} \text{cth}(t_{3k}^{(1)} \delta) + \Delta_{13}^{(2)} \text{cth}(t_{1k}^{(2)} \delta) - \\ - \Delta_{14}^{(2)} \text{cth}(t_{2k}^{(2)} \delta) - \Delta_{15}^{(2)} \text{cth}(t_{3k}^{(2)} \delta) \cong - \left(\frac{1}{C_{11}^{(1)}} + \frac{1}{C_{11}^{(2)}} \right), \\ \Delta_{21}^{(1)} \frac{\text{sh}(r_{1j}^{(1)} y)}{\text{sh}(r_{1j}^{(1)} \eta)} + \Delta_{22}^{(1)} \frac{\text{sh}(r_{2j}^{(1)} y)}{\text{sh}(r_{2j}^{(1)} \eta)} - \Delta_{23}^{(1)} \frac{\text{sh}(r_{3j}^{(1)} y)}{\text{sh}(r_{3j}^{(1)} \eta)} \cong \\ \cong e^{-\chi_j^{(1)}(\eta-y)} \left(1 + (\eta-y) \chi_j^{(1)} \left(1 - \frac{1}{C_{11}^{(1)}} \right) \right).$$

Учитывая, что

$$\frac{\text{sh}(r_{1j}^{(1)} y)}{\text{sh}(r_{1j}^{(1)} \eta)} \cong e^{-\chi_j^{(2)}(\eta-y)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(1 + \frac{-1}{4}(\eta - y) \frac{(C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} + S^{(m)}}{\chi_j^{(2)}C_{11}^{(m)}} \right), \\
& \frac{sh(r_{2j}^{(1)}y)}{sh(r_{2j}^{(1)}\eta)} \cong e^{-\chi_j^{(2)}(\eta-y)} \left(1 + (\eta - y) \frac{\Omega^{(m)2}}{2\chi_j^{(2)}} \right), \\
& \frac{sh(r_{3j}^{(1)}y)}{sh(r_{3j}^{(1)}\eta)} \cong e^{-\chi_j^{(2)}(\eta-y)} \times \\
& \times \left(1 + \frac{-1}{4}(\eta - y) \frac{(C_{11}^{(m)} - 1)\Omega_2^{(m)} - \Omega^{(m)2} + 2\alpha^{(1)2} + \Omega_2^{(m)} + \Theta_1^{(m)}\Omega_1^{(m)} - S^{(m)}}{\chi_j^{(2)}C_{11}^{(m)}} \right), \\
& - \Delta_{21}^{(2)} \frac{sh(r_{1j}^{(2)}y)}{sh(r_{1j}^{(2)}\eta)} - \Delta_{22}^{(2)} \frac{sh(r_{2j}^{(2)}y)}{sh(r_{2j}^{(2)}\eta)} + \Delta_{23}^{(2)} \frac{sh(r_{3j}^{(2)}y)}{sh(r_{3j}^{(2)}\eta)} \cong \\
& \cong -e^{-\chi_j^{(2)}(\eta-y)} \left(1 + (\eta - y)\chi_j^{(2)} \left(1 - \frac{1}{C_{11}^{(2)}} \right) \right), \\
& - \Delta_{16}^{(1)}cth(t_{1k}^{(1)}\delta) - \Delta_{16}^{(2)}cth(t_{1k}^{(2)}\delta) + \Delta_{17}^{(1)}cth(t_{3k}^{(1)}\delta) + \Delta_{17}^{(2)}cth(t_{3k}^{(2)}\delta) \cong \frac{1}{\alpha_k^2} \cdot \left(\frac{\Theta_1^{(1)}}{2C_{11}^{(1)}} + \frac{\Theta_1^{(2)}}{2C_{11}^{(2)}} \right), \\
& - \Delta_{24}^{(2)} \frac{sh(r_{1j}^{(2)}y)}{sh(r_{1j}^{(2)}\eta)} + \Delta_{24}^{(2)} \frac{sh(r_{3j}^{(2)}y)}{sh(r_{3j}^{(2)}\eta)} \cong -e^{-\chi_j^{(2)}(\eta-y)} \left((\eta - y) \frac{1}{\chi_j^{(2)}} \cdot \frac{-\Theta_1^{(2)}}{2C_{11}^{(2)}} \right), \\
& \Delta_{24}^{(1)} \frac{sh(r_{1j}^{(1)}y)}{sh(r_{1j}^{(1)}\eta)} - \Delta_{24}^{(1)} \frac{sh(r_{3j}^{(1)}y)}{sh(r_{3j}^{(1)}\eta)} \cong e^{-\chi_j^{(1)}(\eta-y)} \left((\eta - y) \frac{1}{\chi_j^{(1)}} \cdot \frac{-\Theta_1^{(1)}}{2C_{11}^{(1)}} \right), \\
& - \Delta_{18}^{(1)}cth(t_{1k}^{(1)}\delta) + \Delta_{18}^{(2)}cth(t_{1k}^{(2)}\delta_2) - \Delta_{19}^{(1)}cth(t_{2k}^{(1)}\delta) - \Delta_{19}^{(2)}cth(t_{2k}^{(2)}\delta_2) + \\
& + \Delta_{20}^{(1)}cth(t_{3k}^{(1)}\delta) + \Delta_{20}^{(2)}cth(t_{3k}^{(2)}\delta_2) \cong \frac{1}{\alpha_k} \left(\frac{C_{11}^{(2)} + 1}{2C_{11}^{(2)}} + r_{12} \frac{C_{11}^{(2)} + 1}{2C_{11}^{(2)}} \right).
\end{aligned}$$

Подставляем асимптотические выражения для коэффициентов Фурье вспомогательных функций (3.12) в уравнения (3.13) и (3.14).

После суммирования рядов и учитывая асимптотическую значимость неизвестных функций, для соответствующих точек, получим следующую

однородную систему алгебраических уравнений для определения ПЛО по напряжениям и температуре:

$$-m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + 2(n^{(1)} + r_{21}n^{(2)}) \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + 2n^{(1)}\alpha F_2 + 2n^{(2)}r_{21}\alpha \bar{F}_4 = 0,$$

$$(n_{11}^{(1)} + r_{12}n_{11}^{(2)}) \sin \frac{\pi\alpha}{2} \Phi_1 + 2m_{12} \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_1 + 2(1 - n^{(1)}\alpha)F_2 + 2(1 - n^{(2)}\alpha)\bar{F}_4 = 0. \quad (3.15)$$

$$\left((n^{(1)})^{-1} + \alpha \right) \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} F_2 = 0, \quad \left((n^{(2)})^{-1} + \alpha \right) r_{12} \Phi_1 + 2\alpha F_1 + 2 \sin \frac{\pi\alpha}{2} \bar{F}_4 = 0,$$

$$4F_5 \cos \frac{\pi\beta}{2} + 2F_8 + 2\bar{F}_7 = 0, \quad \bar{F}_7(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0, \quad F_8(-\beta) \sin \frac{\pi\beta}{2} = 0; \quad (3.16)$$

$$\sin \frac{\pi\lambda}{2} F_3 + \lambda F_4 = 0, \quad \lambda F_3 + \sin \frac{\pi\lambda}{2} F_4 = 0; \quad (3.17)$$

$$F_6(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0, \quad F_7(-\gamma) \sin \frac{\pi\gamma}{2} = 0. \quad (3.18)$$

Здесь были использованы обозначения:

$$m_{12} = \left(C_{11}^{(1)-1} + C_{11}^{(2)-1} \right), \quad n^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} - 1}{C_{11}^{(m)}}, \quad n_{11}^{(m)} = \frac{C_{11}^{(m)} + 1}{C_{11}^{(m)}}.$$

3.5. Характеристическое уравнение для показателей локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках области

Особенность системы (3.15)–(3.18) состоит в том, что она распадается на четыре части. Первые четыре уравнения, объединенных формулами (3.15) содержат неизвестные Φ_1 , F_1 , F_2 , \bar{F}_4 . Они определяют значение α – ПЛО по напряжениям в точке A .

Пятое, шестое и седьмое уравнения (3.16), содержат неизвестные F_5 , \bar{F}_7 , F_8 и определяют значение β – ПЛО по температуре в точке A .

Уравнения (3.17) и (3.18) содержат неизвестные F_3 , F_4 и F_6 , F_7 соответственно и определяют особенность во внешней угловой точке B – ПЛО по напряжениям и температуре λ и γ .

При условии существования нетривиального решения уравнений (3.15) и (3.16) данной системы получим характеристическое уравнение для определения параметра λ :

$$\lambda^2 - \sin^2(\pi\lambda)/2 = 0. \quad (3.19)$$

Характеристическое уравнение (3.19) совпадает с соответствующим уравнением для однородной области, полученным в разделе 2, имеет один действительный корень $\lambda_0 = 1$ и множество комплексных корней $\lambda_k = \tau_k \pm i\sigma_k$ [30]. Необходимо учесть лишь те комплексные корни, для которых $\text{Re } \lambda_k > 1$.

Уравнения (3.16) и (3.18) системы дают основание говорить, что температура не имеет особенностей в угловых и внутренних точках области, поскольку из этих уравнений следует, что неизвестные F_5, \bar{F}_7, F_8 и F_6, F_7 равны нулю.

ПЛО α по напряжениям, характеризующий характер разрывов волновых характеристик во внутренней угловой точке A не зависит от частоты и геометрических параметров сечения (η, δ_2) и определяется только значениями упругих констант. Данный параметр может быть определён из условия существования нетривиального решения системы (3.15). Эта система является симметричной относительно упругих параметров областей $G^{(m)}$.

$$\Delta(\alpha, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)}, \lambda^{(2)}, \mu^{(2)}, r_{21}) = 0. \quad (3.20)$$

При определённых соотношениях термоупругих свойств материалов стыкуемых областей, уравнение (3.20) имеет вещественный корень $0 < \alpha < 1$, что характеризует возникновение локальных особенностей в значениях напряжений в точке A .

Применим для решения СИУ (3.10)-(3.11) метод Бубнова-Галеркина, учитывая при выборе координатных функций характер особенностей решения (3.12). В результате приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений с известной асимптотикой неизвестных, которая определяется корнями уравнений (3.19), (3.20). Аналогично [48], приравнивая определитель этой системы к нулю, получим частотное уравнение для определения значений РЧ, что дает

возможность численно исследовать и собственные формы колебаний.

Следует отметить, что если стоит задача исследования только характера особенности напряженного состояния в окрестности точек A и B , а не во всей области сечения в целом, то нет необходимости строить решения для конечных прямоугольных областей и решать краевую задачу (3.1)-(3.2). Используя методы выделения особенностей [48], можно понизить размерность исходной задачи и определить параметры, характеризующие особенность, из соответствующих граничных условий.

Предлагаемый численно-аналитический метод решения достаточно эффективен и позволяет после выделения особенностей решения в особых точках границы построить простой алгоритм численного исследования собственных частот и форм колебаний областей рассматриваемой геометрии и неоднородности. В его рамках возможно рассмотрение волновых полей в неоднородных многосвязных областях и задач о кинематическом возбуждении колебаний.

3.6. Численная реализация решения СИУ методом Бубнова – Галеркина

Переразлагаем гиперболические и тригонометрические функции, входящие в выражения для операторов $M_{k1}L_{kr}$ из этой системы, по функциям $\cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta)$, $\sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta)$, $\cos \chi_j^{(1)}(x - \delta)$, $\cos \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta_2)$. Из граничных условий (3.8)-(3.9) получим бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов Фурье $f_{1k}, f_{2j}, f_{3k}, f_{4j}, f_{5k}, f_{6k}, f_{7j}, f_{8j}, f_{10}, \dots, \varphi_{1k}$.

Проведённый асимптотический анализ позволяет свести эту систему к конечной, поскольку при больших j и k можно заменить коэффициенты Фурье их асимптотикой. Она определяется значениями ПЛО волнового поля в точках A и B в соответствии с формулами (3.12).

После нахождения неизвестных вспомогательных функций $f_1(\xi)$,

$f_2(\xi), \dots, \varphi_1(\xi)$ в СИУ и ортогонализации невязки относительно систем функций $\cos \alpha_k^{(1)}(y - \eta)$, $\sin \alpha_k^{(1)}(y - \eta)$, $\cos \chi_j^{(1)}(x - \delta)$, $\cos \chi_j^{(2)}(\hat{x} - \delta_2)$, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Данная система после вычисления бесконечных сумм становится конечной.

Определение неизвестных коэффициентов для вспомогательных функций позволяет по формулам (3.6)-(3.7) вычислить для конкретных значений частотного параметра все характеристики волнового поля.

Таким образом, предлагаемый численно-аналитический метод решения позволяет построить простой алгоритм численного исследования РЧ и форм колебаний областей рассматриваемой геометрии и неоднородности. В его рамках возможно рассмотрение волновых полей как неоднородных многосвязных областей, так и задач о кинематическом возбуждении колебаний.

Определение ПЛО в угловых точках сечения областей дает возможность прогнозировать интенсивность ЛКН в этих проблемных зонах и применить критерии прочности, принимая максимальные напряжения именно в этих областях с учетом ПЛО [33, 39].

Численное исследование полученных математических моделей реализовано для призматической детали, сечение которой содержит три прямоугольных, жестко соединенных между собой, области. Геометрию сечения характеризуют параметры $\eta = 1/2$, $\delta_2 = 0,17$.

Каждая из областей $G^{(m)}$ ($m = \overline{1, 2}$) занята однородным изотропным термоупругим материалом, обладающим своим набором физических характеристик, т.е. материал внешней области отличен от материала соседней области сечения.

В таблице 3.1 приведены некоторые результаты численного исследования резонансных частот для составного термоупругого сечения численным методом Бубнова-Галеркина и МКЭ. Представлены семь собственных частот двухслойной прямоугольной области с различными комбинациями материалов. Например,

St-Pb – область с центральным материалом St (сталь) и крайним Pb (свинец). Интерес для исследования представляют частоты Ω с номерами 4–10. Метод конечных элементов был реализован с помощью универсального расчетного комплекса ANSYS на базе ЮФУ. Сведения об используемом программном комплексе: бессрочная лицензия № 467447 от 22.03.2007, подписанная в 2008 году, содержит ANSYS Academic Research + AUTODYN + CFD и позволяет выполнять диссертационные исследования (версия ANSYS 11.0).

Таблица 3.1

Резонансные частоты для неоднородного
прямоугольника (метод Бубнова – Галеркина и МКЭ)

Сочетание материалов, вид расчета	Безразмерные значения собственных частот						
	$\Omega^{(4)}$	$\Omega^{(5)}$	$\Omega^{(6)}$	$\Omega^{(7)}$	$\Omega^{(8)}$	$\Omega^{(9)}$	$\Omega^{(10)}$
Метод Бубнова – Галеркина							
St-Pb (упругий)	0,0187	0,0450	0,0477	0,0490	0,0548	0,0714	0,0827
St-Pb (термоупр.)	0,0175	0,0449	0,0461	0,0502	0,0554	0,0804	0,0845
изменение, %	0,0012	0,0001	0,0016	-0,0012	-0,0005	-0,0090	-0,0017
Ti-Pb (упругий)	0,0089	0,0209	0,0218	2,3409	0,0285	0,0376	0,0437
Ti-Pb (термоупр.)	0,0086	0,0208	0,0224	0,0240	0,0290	0,0433	0,0444
изменение, %	0,0003	0,0001	-0,0006	2,3169	-0,0005	-0,0057	-0,0006
Pb-Ti (упругий)	0,0020	0,0044	0,0049	0,0108	0,0109	0,0124	0,0175
Pb-Ti (термоупр.)	0,0019	0,0048	0,0055	0,0110	0,0137	0,0166	0,0181
изменение, %	0,0001	-0,0004	-0,0005	-0,0001	-0,0028	-0,0041	-0,0006
МКЭ							
St-Pb (упругий)	0,0179	0,0428	0,0454	0,0466	0,0522	0,0680	0,0788

Сочетание материалов, вид расчета	Безразмерные значения собственных частот						
	$\Omega^{(4)}$	$\Omega^{(5)}$	$\Omega^{(6)}$	$\Omega^{(7)}$	$\Omega^{(8)}$	$\Omega^{(9)}$	$\Omega^{(10)}$
St-Pb (термоупр.)	0,0165	0,0424	0,0435	0,0473	0,0526	0,0758	0,0797
изменение, %	0,0013	0,0004	0,0019	-0,0007	-0,0004	-0,0078	-0,0009
Ti-Pb (упругий)	0,0084	0,0198	0,0213	0,0223	0,0271	0,0358	0,0412
Ti-Pb (термоупр.)	0,0081	0,0197	0,0205	0,0226	0,0273	0,0408	0,0422
изменение, %	0,0003	0,0001	0,0008	-0,0004	-0,0002	-0,0051	-0,0010
Pb-Ti (упругий)	0,0019	0,0042	0,0047	0,0103	0,0104	0,0118	0,0167
Pb-Ti (термоупр.)	0,0018	0,0045	0,0052	0,0103	0,0129	0,0156	0,0171
изменение, %	0,0001	-0,0004	-0,0005	0,0000	-0,0025	-0,0038	-0,0004

Для сравнительного анализа точности полученных результатов были также найдены значения 7-и собственных размерных частот (Ω , Гц) упругого и термоупругого сечений.

Выполнив дополнительно исследование конечно-элементной модели неоднородного прямоугольника с динамически адаптивной сеткой, отметим достаточно высокую степень близости частотных значений МКЭ и полученных методом Бубнова – Галеркина (различие в результатах составляет в среднем 2-4%). Довольно высокая точность метода Бубнова – Галеркина обеспечивается тем, что он основан на использовании одинаковых систем базисных функций, как для выбора приближенного решения, так и для выбора весовой функции. Кроме того, согласно принципу построения аппроксимирующей функции данный метод обеспечивает выполнение всех граничных условий.

Из данных таблицы 3.1 следует, что значения первых частот, для упругой области преобладают над соответствующими значениями термоупругой в среднем на 0,5–3,5%.

На более высоких частотах 7–10, в том числе частотах КР, значения

термоупругих частот больше соответствующих упругих на 0,5–13 %. Причём, максимальное различие наблюдается именно на частотах краевого резонанса 8–9 на 6–13 %. Данный факт объясняется тем, что в рассматриваемой задаче температурные волны появляются исключительно за счёт эффекта связанности, который заметен тем сильнее, чем выше номер частоты.

С ростом частоты усиливается затухание упругих волн, при этом максимальное значение амплитуд тепловых волн увеличивается, а расстояние, на которое они проникают в среду, уменьшается.

Этим же объясняется тот факт, что для областей, где присутствует более выраженное различие термоупругих свойств материалов, образующих составную область (Ti-Pb, Pb-Ti), преобладание значений термоупругих частот более выражено. Кроме того, чем большую площадь занимает материал с более высокими значениями упругих констант (в данном рассматриваемом случае это Ti), тем ярче выражено различие значений частот рассчитанных с учетом температурного поля и соответствующих значений частот для упругой области. Так, на частотах краевого резонанса это различие достигает 10–13 %.

В целом, как показывают результаты, температурный фактор не оказывает существенного влияния на резонансные частоты, однако при определённом сочетании материалов составной области и ее геометрических параметров, наличие температурного фактора способствует возрастанию значений частот краевого резонанса на 10–13 %, что может оказаться полезным при прогнозировании интенсивности ЛКН в проблемных зонах сечения.

Дальнейшим направлением развития данной проблемы может быть исследование ПЛО для анизотропных составных деталей, что, безусловно, повысит уровень практического применения предложенной методики расчета. Перспективным должен быть и анализ распределения внутренней энергии по области сечения с учетом ЛКН в окрестности нерегулярных точек.

3.7. Выводы по разделу 3

Для решения задач расчета НДС при вибрационном нагружении термоупругих призматических деталей с однородным и кусочно-однородным составным сечением разработан метод качественного анализа и численно-аналитического решения соответствующих краевых задач. Как показали результаты исследования, сложность формы исследуемых областей (геометрическая неоднородность), связанность полей деформации и температуры вносят дополнительные математические трудности в расчет распределения напряжений в твердом термоупругом неоднородном теле с учетом ЛКН в окрестности внутренних и внешних границ области. Предложенный метод позволяет свести решение исходной граничной задачи к решению СИУ относительно дополнительных функций, фигурирующих в формулировке специально подобранной вспомогательной краевой задачи, допускающей аналитическое решение. В набор вспомогательных функций входят и температурные характеристики теплового потока на внешней границе области.

Асимптотический анализ поведения решения СИУ в сингулярных точках сечения детали позволяет оптимальным образом подобрать координатные функции при решении СИУ методом Бубнова – Галеркина и свести задачу к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье дополнительных функций с известной асимптотикой их поведения на бесконечности. Это позволяет провести редукцию бесконечной системы не механически, а эффективно, с учетом найденной асимптотики неизвестных. При этом координатные функции для механических и температурных характеристик волнового поля различны.

Разработанный математический метод анализа волновых полей в кусочно-однородных термоупругих средах на этапе определения асимптотического поведения НДС в нерегулярных точках составного сечения, как и ранее, предполагает введение важных параметров – ПЛО по напряжениям. В задаче гармонических колебаний термоупругих тел в сингулярных точках границы таких

параметров два: для механических и температурных волновых характеристик, соответственно.

Проведенный анализ влияния температурного поля на спектр резонансных частот для однородной и кусочно-однородной прямоугольной области, свидетельствует, что это влияние существенно зависит от частоты для всех рассматриваемых сочетаний геометрических, упругих и температурных параметров.

Таким образом, метод суперпозиции в данной интерпретации можно рассматривать как общий методологический подход, расширяющий возможности исследований НДС составных конструкций, что подтверждается приведенным решением рассматриваемой связанной задачи термоупругости для кусочно-однородных тел в окрестности нерегулярных точек или линий границы области.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [31, 38-41, 81, 83, 88, 108, 128].

РАЗДЕЛ 4

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОГО ПОЛЯ КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

4.1. Численный анализ зависимости ПЛО от термоупругих параметров среды

Проведение численного исследования является неотъемлемой частью общего аналитического исследования динамической прочности неоднородных термоупругих областей с определением характера динамического НДС в окрестности сингулярных угловых точек сечения.

Определение ПЛО по напряжениям α играет первоочередную роль в прочностном расчете, поскольку именно он определяет, в конечном счете, интенсивность ЛКН в сингулярной точке стыка областей $A(\delta, \eta)$. Вопросам изучения ПЛО при сопряжении нескольких разнородных термоупругих сред в статических задачах посвящено достаточно много работ. В большинстве работ рассматривается практически важный вопрос зависимости ПЛО от термоупругих постоянных стыкуемых областей.

Рассмотрим анализ зависимости ПЛО от соотношения жесткостей стыкуемых сред. На рисунке 4.1 представлены графики этой зависимости для случая, когда в качестве материала внутренней области принимались сталь, свинец и вольфрам. В качестве основных параметров выберем отношения:

$$r_{2S} = \mu^{(2)} / \mu^{(St)}, \quad \nu_{2S} = \nu^{(2)} / \nu^{(St)}, \quad (4.1)$$

где $\mu^{(St)}, \nu^{(St)}$ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона стали.

Пунктирной линией изображены кривые, соответствующие значению $\nu_{2S} = 1,3$, штрих пунктирной – значению $\nu_{2S} = 0,769$, сплошной – значению $\nu_{2S} = 1$. Для второго и третьего случаев (материал области $G^{(1)}$ – свинец или вольфрам) коэффициент Пуассона материала внешней области принят

фиксированным и равным $\nu^{(2)} = 0,29$.

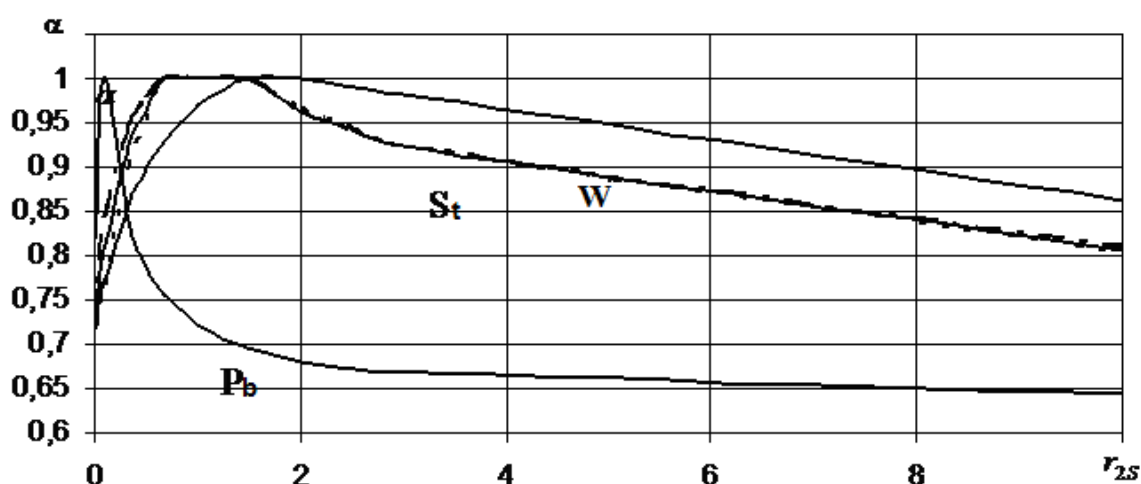


Рисунок 4.1 Зависимость ПЛО $\alpha = \alpha(r_{2s})$ от жесткости наплавки при различных материалах внутренней области ($r_{2s} = \mu^{(2)} / \mu^{(St)}$, $\nu^{(2)} = 0,29$).

Анализируя результаты численного решения уравнения (3.20) и данные рисунка 4.1 можно отметить, что:

1. Параметр α существенно зависит от упругих параметров внутренней области;
2. Для рассмотренных сочетаний упругих постоянных стыкуемых областей не получено комплексных корней уравнения (3.20) с положительной действительной частью, меньшей единицы;
3. Значение $\alpha = 1$ является корнем уравнения (3.20) при любых сочетаниях материалов стыкуемых областей. Для большинства сочетаний, однако, этот корень получается вторым по величине положительным корнем этого уравнения;
4. При сопряжении областей, изготовленных из одинаковых материалов, локальная особенность по напряжениям отсутствует и значение ПЛО α всегда равно единице;
5. При некоторых значениях параметра r_{2s} особенность исчезает и при сопряжении разных материалов, но наименьших положительных корней, больших единицы не возникает ни для каких сочетаний материалов;
6. Размеры диапазона изменения параметра r_{2s} , соответствующие значению $\alpha = 1$, существенно зависят от упругих постоянных внутренней области. Для

стали, это значение достигается при $0,60 < r_{2S} < 1,75$. Свинца – $0,074 < r_{2S} < 0,081$, вольфрама – $1,82 < r_{2S} < 1,93$. Тогда интенсивность ЛКН в особой точке на стыке двух сред зависит не только от близости значений упругих постоянных стыкуемых областей, но и от типа конкретных зафиксированных материалов одной из областей. Таким образом, выбор упругих параметров наплавов должным образом позволит минимизировать ЛКН в исследуемой точке;

7. Варьирование значения коэффициента Пуассона материала внешней области (параметра ν_{2S}) оказывает незначительное влияние на величину ПЛО практически при любых соотношениях модулей сдвига стыкуемых областей. Анализ рисунка 1.4 позволяет утверждать, что для области изменения параметра r_{2S} , соответствующей значению $\alpha = 1$, увеличение значения коэффициента Пуассона материала внешней области несколько уменьшает значение ПЛО и наоборот. Это изменение ПЛО наиболее существенно при малых значениях параметра r_{2S} . Так, при $r_{2S} = 0,001$ значение ПЛО $\alpha = 0,719$ при $\nu_{2S} = 1$. При том же значении параметра r_{2S} , но при $\nu_{2S} = 1,3$ ПЛО $\alpha = 0,665$. Уменьшение значения параметра ν_{2S} увеличивает значение ПЛО: при $\nu_{2S} = 0,769$, $r_{2S} = 0,001$ имеем $\alpha = 0,765$. При увеличении значения параметра r_{2S} изменения в величине ПЛО, вносимые варьированием значения $\nu^{(2)}$, уменьшаются. В той области изменения параметра r_{2S} , которой соответствует максимальное значение $\alpha = 1$, изменение значения $\nu^{(2)}$ не является существенным. При дальнейшем увеличении параметра r_{2S} увеличение параметра ν_{2S} уже увеличивает значение ПЛО, однако, этим фактом можно пренебречь, поскольку это увеличение имеет порядок 10^{-3} и на рисунке 4.1 в этой области изменения параметра r_{2S} все кривые сливаются;

8. При достаточно больших и малых значениях модуля сдвига наплавов значение ПЛО α стабилизируется, стремясь к определенному значению [33, 39].

Сформулированные выводы будут справедливыми и случая, когда варьируются термоупругие постоянные внутренней области.

Исследуем асимптотику решения разрешающего уравнения (3.20) по

параметру $\varepsilon = r_{21}^{-1}$. Приняв $\alpha = \alpha_0$, перепишем его в виде:

$$(\sin^2(\pi\alpha_0/2) - \alpha_0^2)(\alpha_0^2 + (3 - 4\nu^{(1)})\sin^2(\pi\alpha_0/2) - 4(1 - \nu^{(1)})^2) = 0. \quad (4.2)$$

Представляют интерес корни второго сомножителя в данном уравнении. Они будут определяться только значением коэффициента Пуассона внутренней области. Для всех материалов корни этого сомножителя удовлетворяют неравенству $0 < \alpha_0 < 1$ [39]. В таблице 4.1 приведены значения α_0 для различных материалов внутренней области сечения.

Таким образом, при очень больших значениях модуля сдвига наплавов мы имеем возможность изменением термоупругих свойств, а точнее коэффициента Пуассона материала внутренней области, достичь максимально возможного значения ПЛО.

Таблица 4.1

Асимптотические значения ПЛО, соответствующие бесконечно большому значению модуля сдвига внешней области сечения

Al,Mg	W,St	Au	Cu	Mo	Ni	Sn,Br	Pt	Pb	Ag	Ti	Zn
0,680	0,718	0,638	0,692	0,781	0,705	0,692	0,656	0,633	0,662	0,711	0,857

На рисунке 4.2 приведен график зависимости $\alpha_0 = \alpha_0(\nu^{(1)})$, который можно использовать при выборе значения $\nu^{(1)}$.

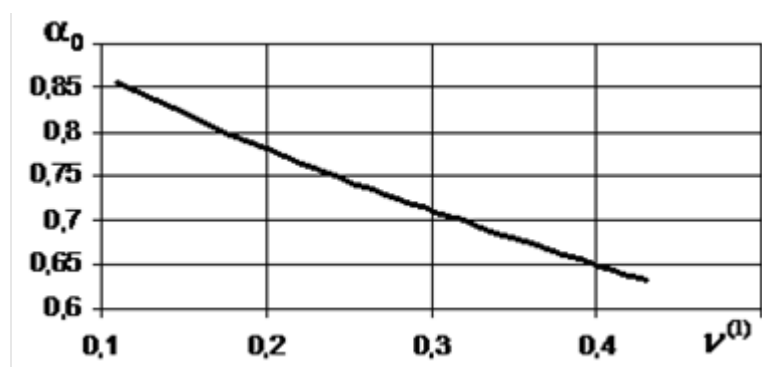


Рисунок 4.2 Зависимость асимптотического значения ПЛО от коэффициента Пуассона внутренней области ($\nu^{(1)} \rightarrow \infty$)

Полученная зависимость имеет практически линейный характер. Уменьшение значения коэффициента Пуассона для материала внутренней

области вызывает рост асимптотического значения ПЛО α_0 . При стремлении значения параметра r_{2S} к нулю, асимптотическое значение ПЛО будет определяться уже коэффициентом Пуассона внешней области. Так, например, для случая, когда области $G^{(2)}$ соответствует материал Pb (свинец), при стремлении значения параметра r_{2S} к нулю и $\nu_{2S} = 1$ имеем $\alpha = 0,718$, что соответствует значению α_0 , когда материал внешней области – St (сталь).

Рассмотрим также анализ зависимости ПЛО α от соотношения коэффициентов Пуассона стыкуемых областей при фиксированных модулях сдвига. На рисунке 4.3 представлена указанная зависимость для некоторых значений упругих характеристик стыкуемых областей.

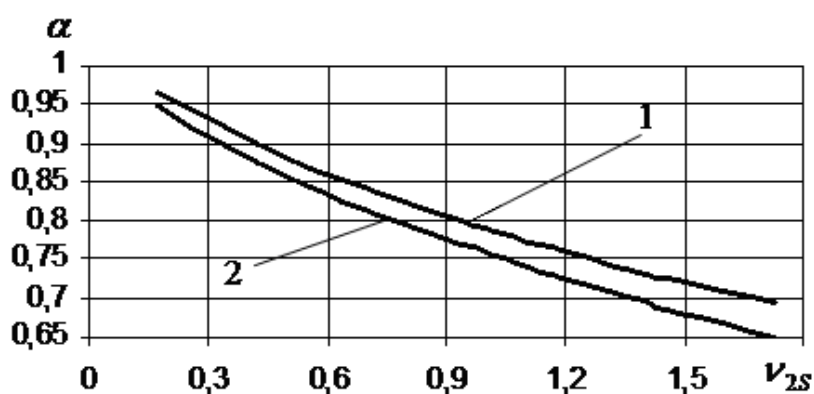


Рисунок 4.3 Зависимость ПЛО от соотношения коэффициентов Пуассона стыкуемых областей

В качестве значения модуля сдвига внешней области принято значение модуля сдвига свинца. Кривой (1) соответствует случай, когда материал области $G^{(1)}$ – сталь, а кривой (2) – вольфрам. Изменение значения отношения коэффициентов Пуассона определяется, как и ранее, параметром ν_{2S} .

Таким образом, происходит уменьшение параметра особенности при увеличении коэффициента Пуассона материала наплавки, а также при увеличении жесткостного параметра r_{2S} .

4.2. Зависимость спектра резонансных частот от некоторых параметров сечения кусочно-неоднородной термоупругой области

Исследование волновых эффектов в широком диапазоне термомеханических параметров позволяет описывать динамические явления термоупругости в неоднородных областях.

При исследовании свойств колебательных систем в виде прямоугольника следует произвести некоторую классификацию представляющих интерес зависимостей влияния тех или иных геометрических параметров и физических свойств области на процесс возникновения связанных термомеханических полей и, как следствие, термоупругого деформирования тела.

На рисунках 4.4–4.11 представлены спектры собственных частот для продольных колебаний неоднородных прямоугольных областей. Рассмотрена зависимость значений частот краевого резонанса от параметра $L = a/b$, $L \in [1; 3,25]$, определяющего изменение длины прямоугольника, при сохранении общей площади исследуемой неоднородной термоупругой области (рисунок 3.1).

Параметр δ_2 ($\delta_2 = 1 - \delta$, $\delta = c/a$) определяет «ширину наплавки» и, как следствие, соотношение площадей занимаемых областями $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$. Проведём сравнительный анализ зависимости спектра собственных частот от внешних размеров области в указанных границах при различных значениях данного параметра: $\delta_2 = 0,9$ («широкая» наплавка), $\delta_2 = 0,5$ («средняя» наплавка), $\delta_2 = 0,17$ («узкая» наплавка).

Области $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ на рисунках 4.4-4.11 представлены материалами с ярко выраженным различием физико-химических и, как следствие, термоупругих свойств. На каждой из представленных графических зависимостей в окрестности определённой частоты наблюдаются почти горизонтальные участки, так называемые «плато».

Это свидетельствует о том, что при существенном изменении длины прямоугольника одна из собственных частот не меняется. Появление плато на

спектре резонансных частот и наличие концентрации волновых движений на внешней границе области свидетельствует о возникновении явления краевого резонанса [71]. Частоты, в окрестности которых расположено плато можно считать частотами краевого резонанса.

Следует отметить, что для $\delta_2 = 0,9$ области $(\text{Ti}, G^{(1)})-(\text{Pb}, G^{(2)})$ (рисунок 4.4) и $\delta_2 = 0,17$ $(\text{Pb}, G^{(1)})-(\text{Ti}, G^{(2)})$ (рисунок 4.5), такие участки наблюдаются в окрестности частотного значения $\Omega = 0,067$ при любом L из представленного диапазона. В этом случае в рассматриваемых областях преобладающим материалом является свинец (Pb), что с учётом указанных вариантов ширины наплавки и сочетания материалов приближает область к однородной по её физическим характеристикам в целом.

Так, в подтверждение сказанного, на рисунке 4.6 изображён спектр собственных частот для однородной термоупругой области (Pb). Частотой краевого резонанса можно считать $\Omega = 0,08$. Очевидно, что данные значения частот достаточно близки.

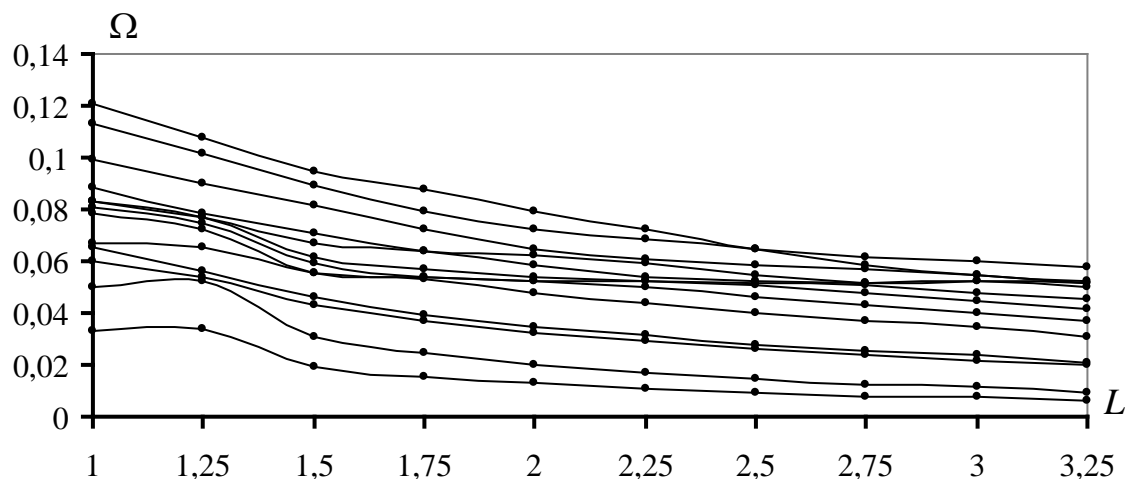


Рисунок 4.4 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для области (Ti-Pb) , $\delta_2 = 0,9$

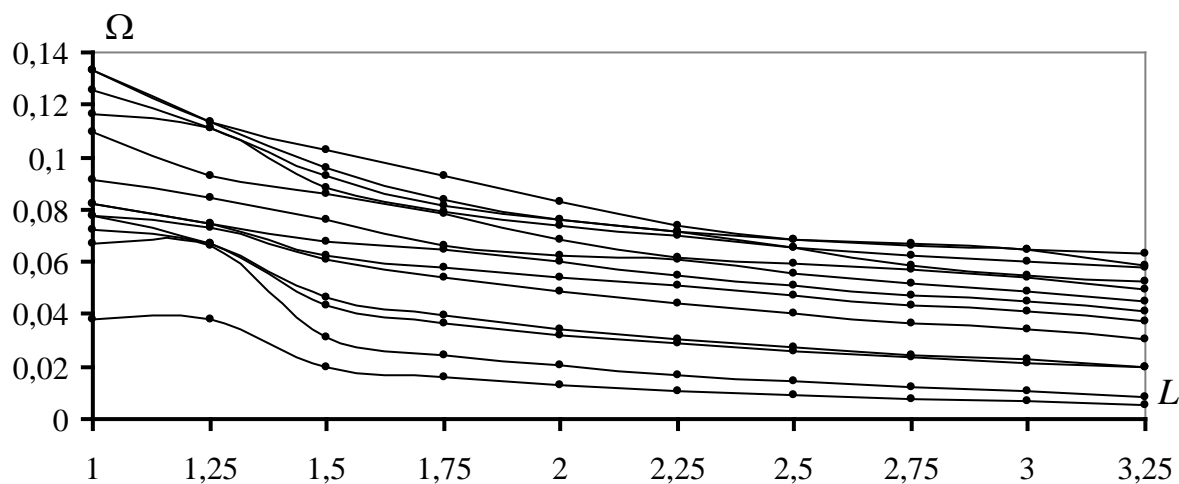


Рисунок 4.5 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для области (Pb-Ti), $\delta_2 = 0,17$

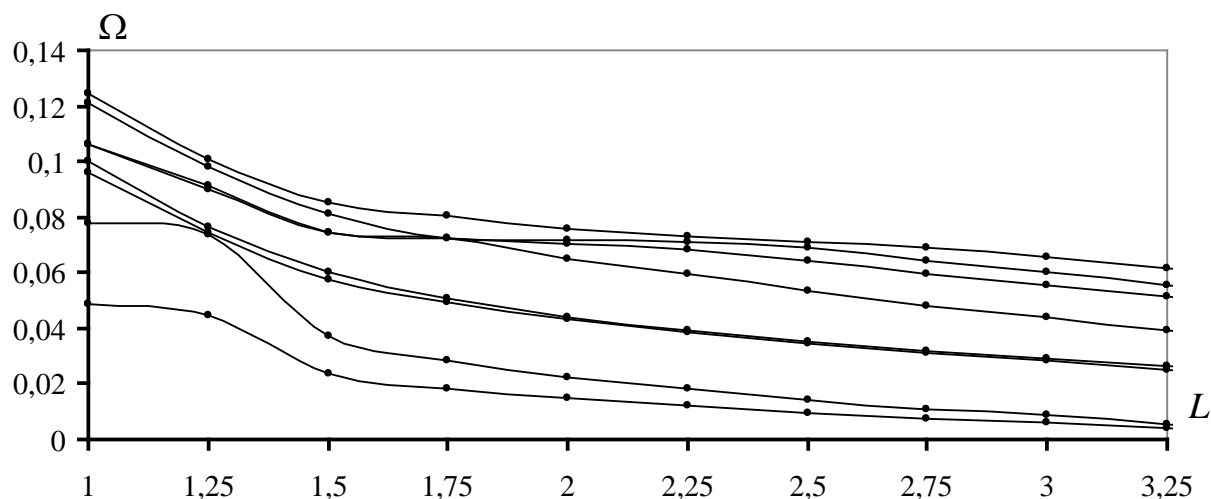


Рисунок 4.6 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для однородной области, (Pb)

Аналогично, для областей с параметрами $\delta_2 = 0,9$ (Pb, $G^{(1)}$)-(Ti, $G^{(2)}$) и $\delta_2 = 0,17$ (Ti, $G^{(1)}$)-(Pb, $G^{(2)}$) такие участки наблюдаются в окрестности частоты $\Omega = 0,25$. Преобладающим в данном случае материалом является (Ti). Для однородной (Ti) области, согласно рисунку 4.9, таким значением частоты будет $\Omega = 0,25$, которое приближается к полученным значениям для областей, «стремящихся» к однородным на рисунках 4.7–4.8.

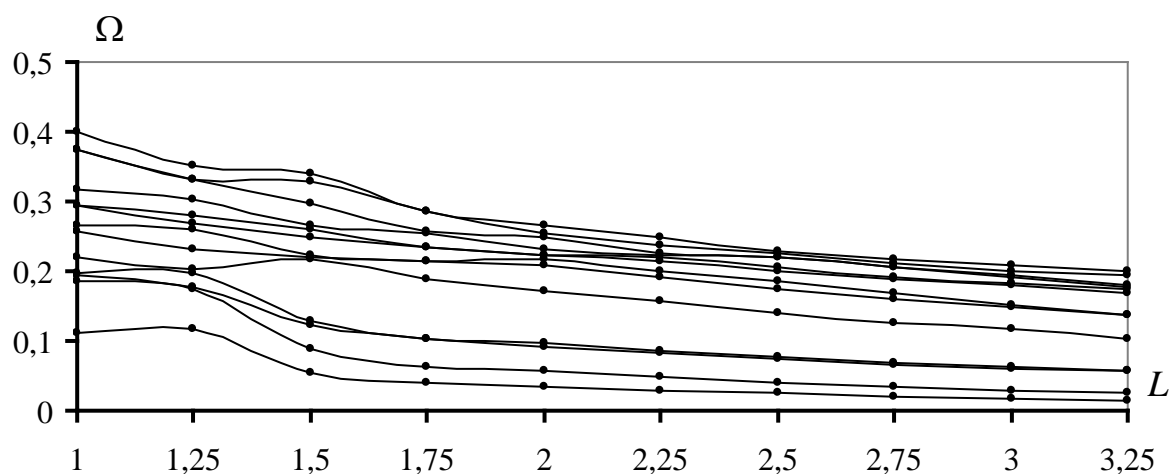


Рисунок 4.7 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для области (Pb-Ti), $\delta_2 = 0,9$

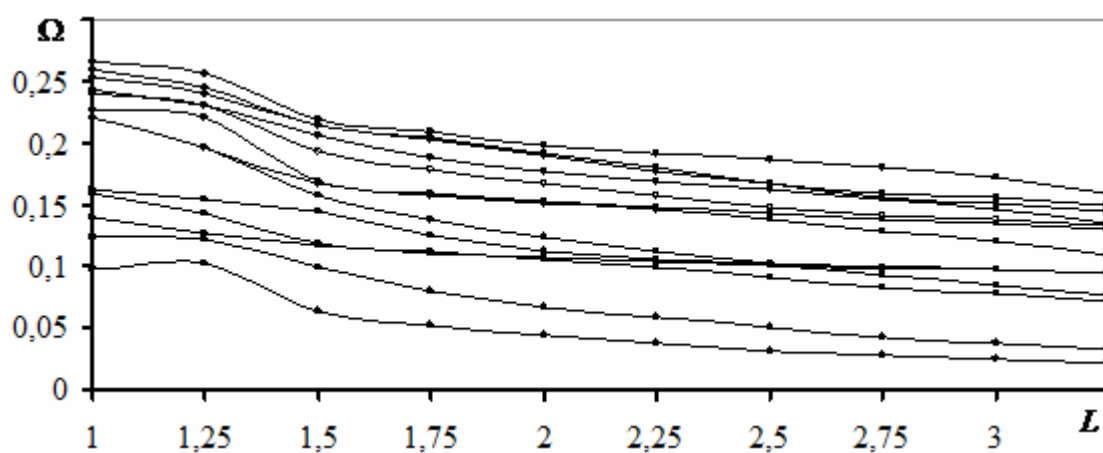


Рисунок 4.8 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для области (Ti-Pb), $\delta_2 = 0,17$

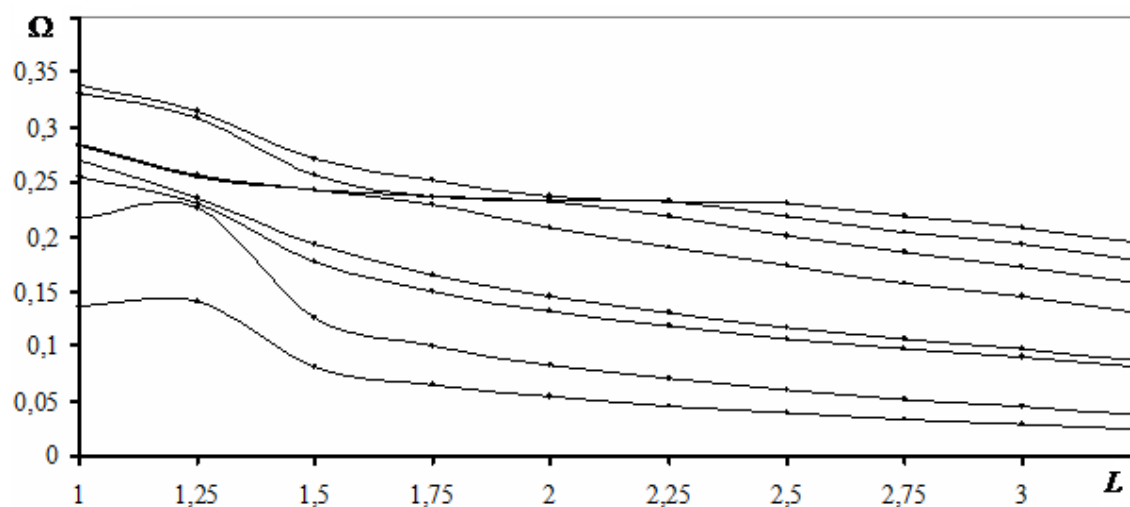


Рисунок 4.9 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для однородной области, (Ti)

Для $\delta_2 = 0,5$, т.е. области с наиболее ярко выраженной неоднородностью из рассматриваемых и для представленных сочетаний материалов, частотным значением, в окрестности которого расположено плато будет $\Omega = 0,95$. Для данного значения параметра δ_2 участок плато начинает формироваться на графике (рисунки 4.10–4.11) только при $L \cong 1,75$.

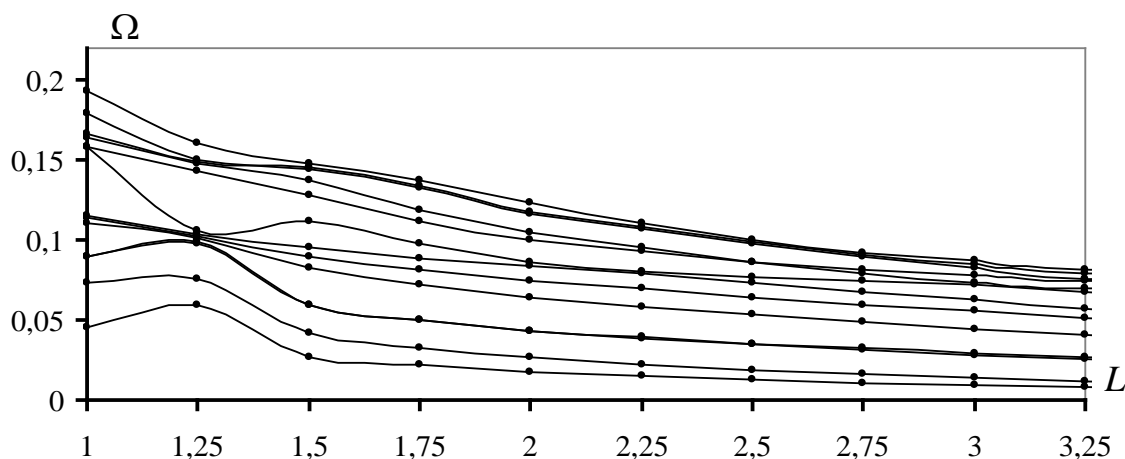


Рисунок 4.10 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для области (Pb-Ti), $\delta_2 = 0,5$

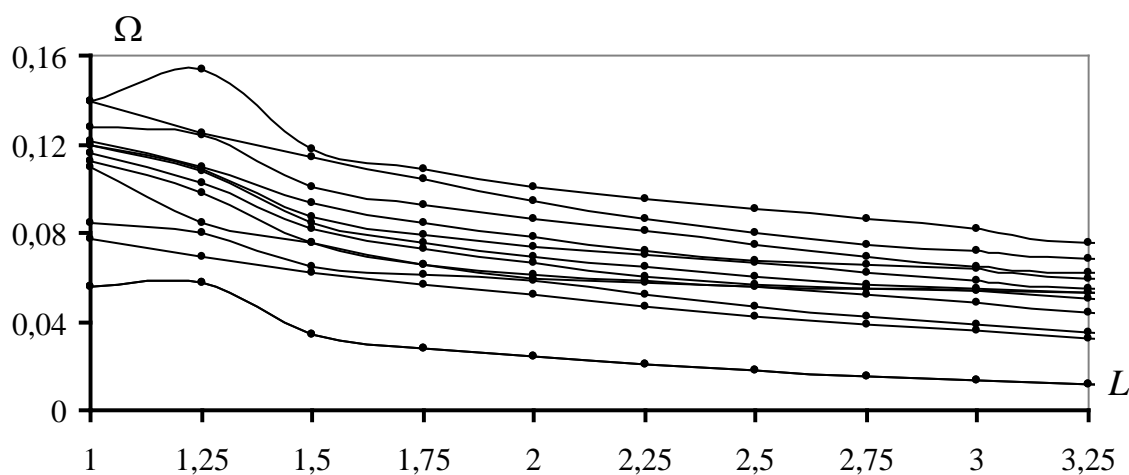


Рисунок 4.11 Зависимость спектра собственных частот от параметра L для области (Ti-Pb), $\delta_2 = 0,5$

Независимо от геометрических размеров прямоугольника, значения частот, лежащие в центральных участках плато $1,75 < L < 3$, заключены в меньшем интервале (меньше разнос по вертикали спектральных кривых краевого

резонанса), чем при $1 < L < 1,75$, где плато ещё не полностью сформировались, а потому частоты изменяются в большем диапазоне. Это справедливо для любого сочетания материалов областей и значений параметра $\delta_2 = 0,17$ и $\delta_2 = 0,9$.

Так, например, для $\delta_2 = 0,9$ (Ti, $G^{(1)}$)-(Pb, $G^{(2)}$) (рисунок 4.4) и $\delta_2 = 0,17$ (Pb, $G^{(1)}$)-(Ti, $G^{(2)}$) (рисунок 4.5) таким интервалом частот будет $0,6 < \Omega < 0,7$ в центральном участке плато и $0,5 < \Omega < 0,9$ для $1 < L < 1,75$, соответственно.

Также прослеживается определённая зависимость номера частоты краевого резонанса от параметра δ_2 . Так, например, для сочетания материалов (Ti, $G^{(1)}$)-(Pb, $G^{(2)}$) и $1,5 < L < 2,5$ имеем следующие частоты краевого резонанса: $\delta_2 = 0,17$ ~ 6-7 частоты, $\delta_2 = 0,5$ ~ 7-8 частоты, $\delta_2 = 0,9$ ~ 9-10 частоты. Для сочетания материалов (Pb, $G^{(1)}$)-(Ti, $G^{(2)}$) (с более «жестким» материалом по краям) и $1,5 < L < 2,5$ имеем следующие крайние частоты: $\delta_2 = 0,17$ ~ 11-12 частоты, $\delta_2 = 0,5$ ~ 9-10 частоты, $\delta_2 = 0,9$ ~ 10-11 частоты.

Таким образом, сформулируем основные выводы.

1. Значение частоты краевого резонанса зависит от соизмеримости площадей, занимаемых рассматриваемыми материалами. Для областей, обладающих незначительным отличием от соответствующей геометрически однородной, значения частот краевого резонанса либо совпадают, либо различаются незначительно;
2. Значение частоты краевого резонанса выше для области, обладающей, в целом, более высокими значениями упругих констант (большей общей жесткостью);
3. При увеличении L , по мере формирования плато, начиная с некоторого значения L , частоты изменяются в меньшем диапазоне;
4. Явление краевого резонанса и сгущение собственных частот в спектре наблюдаются в области более высоких частот (8–12).
5. С увеличением параметра δ_2 для любых сочетаний материалов отмечается рост номера и частоты краевого резонанса. В случае, когда область $G^{(2)}$

представлена материалом с более высокими значениями упругих констант (Ti), номера частот КР выше, чем в случае $G^{(2)}$ – (Pb).

б. Неоднородность области способствует понижению значений частот, причём тем сильнее, чем большую площадь занимает материал с меньшими значениями упругих констант.

Рассмотрим более детально зависимости значений безразмерных частот от параметра δ_2 при фиксированном значении $L = 3$, определяющего ширину наплавки (области $G^{(2)}$). Соответствующие графические зависимости для термоупругой области для $L = 3$ и сочетаний материалов (St-Pb) и (Pb-St) представлены на рисунках 4.12–4.13 соответственно.

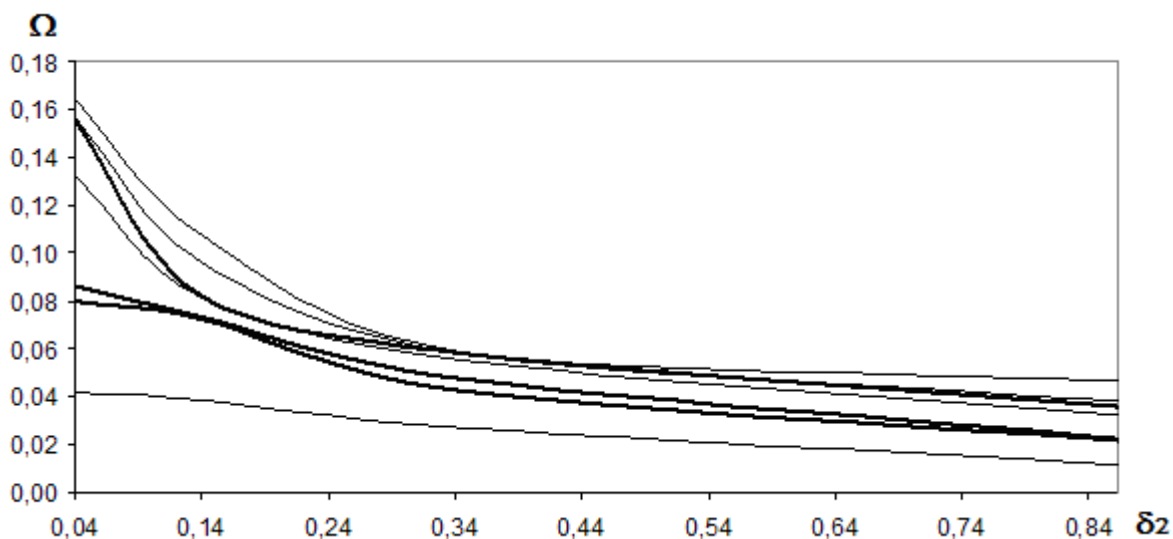


Рисунок 4.12 Графическая зависимость значений безразмерных частот от параметра δ_2 , $L = 3$, (St-Pb)

При изменении параметра δ_2 в интервале $0,03 \leq \delta_2 \leq 0,83$ изменяется площадь, занимаемая областью $G^{(2)}$. При $\delta_2 = 0,03$ и $\delta_2 = 0,83$ данная площадь будет наименьшей и наибольшей соответственно в рассматриваемом интервале.

Таким образом, характеристики области будут приближаться к характеристикам однородного сечения по средним значениям физических материалов: на рисунке 4.12 это (Pb), а на рисунке 4.13 – (St).

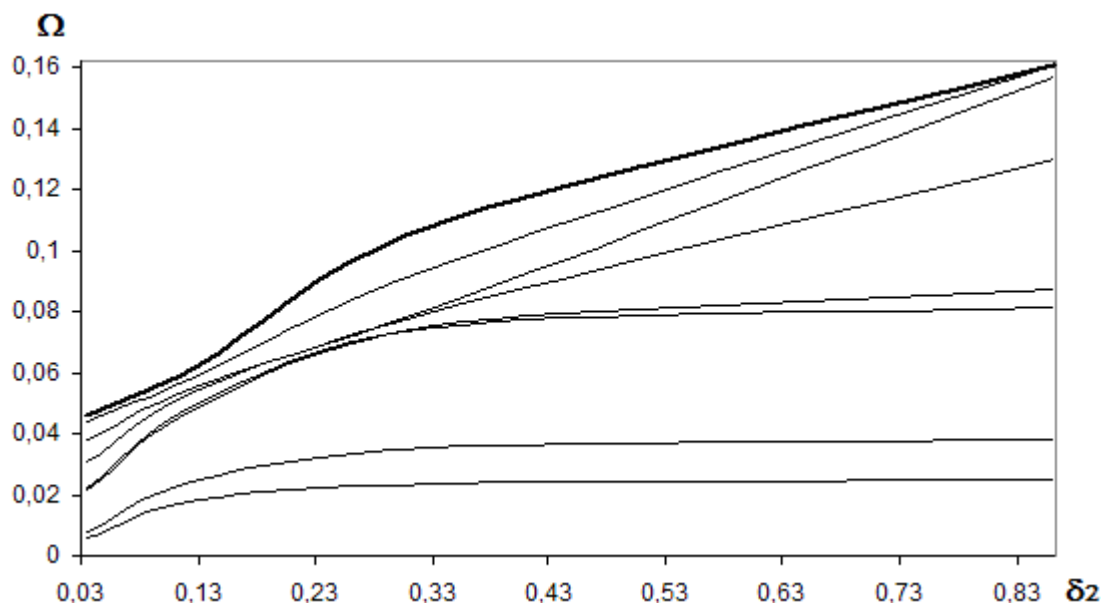


Рисунок 4.13 Графическая зависимость значений безразмерных частот от параметра δ_2 , $L = 3$, (Pb-St)

Согласно данным рисунков 4.12–4.13 сформулируем выводы.

1. С увеличением значения параметра δ_2 , значений собственных частот изменяются прямо пропорционально изменению общей «жесткости» рассматриваемой области G , так, например, с увеличением параметра δ_2 для сочетания материалов (Pb-St) значения собственных частот увеличиваются ($0,005 \leq \Omega \leq 0,16$), а для (St-Pb) – уменьшаются в том же диапазоне.

2. Динамика изменения значений частот краевого резонанса для сочетания материалов (St-Pb) наиболее выражена в достаточно небольшом интервале $0,03 \leq \delta_2 \leq 0,33$, далее с увеличением значения параметра δ_2 собственные частоты практически не изменяются. В области (Pb-St) при $\delta_2 \geq 0,33$ (т.е. практически на всём исследуемом интервале изменения δ_2) отмечается значительный и стабильный рост значений частот краевого резонанса и приближающихся к ним.

Ключевой вывод заключается в том, что интенсивность краевого резонанса в первую очередь зависит от величины площади, занимаемой «жестким» материалом, в составном сечении. Чем больше данная площадь, тем выше значения частот КР, «ярче» выражены плато на частотном спектре и сильнее локализация волновых движений в сингулярных точках сечения.

4.3. Влияние коэффициента температурного расширения на собственные частоты исследуемой кусочно-неоднородной термоупругой области

С теоретической точки зрения температурное расширение является относительно неисследованной областью физической науки. Однако объем эмпирических данных в этой области быстро растет. Практическое влияние изменения коэффициента расширения для однородных тел за счет изменения температуры невелико, и для решения многих практических задач им можно пренебречь, поскольку точные измерения показывают небольшое изменение коэффициента расширения за счет температуры [16, 76].

Вместе с тем, большинству материалов и инженерных конструкций в определённой мере присуща природная, конструкционная и деформационная неоднородность физико-механических свойств [7, 147]. Учет этих факторов при исследовании динамических процессов деформирования обуславливает более адекватные представления о качественном характере НДС термоупругих тел и позволяет получить более достоверные количественные оценки. Для неоднородных областей анализ механизмов теплового расширения, а также влияние на них состава и структуры тела может оказать решающую роль уже на этапе проектирования изделия.

Как показывает практика, чаще всего соединяемые термоупругие элементы имеют существенно различающиеся коэффициенты температурного расширения (КТР). Это рассогласование коэффициентов температурного расширения при температурном нагружении может приводить к появлению напряжения, достаточного для образования трещин вблизи границы раздела соединяемых элементов при резких колебаниях температуры, возникающих в процессе работы узла соединения. Образование таких трещин может оказывать вредное воздействие на ожидаемые характеристики узла соединения, такие как прочность и срок службы. Можно считать, что коэффициент температурного расширения при изменении температуры оказывает определенное влияние на напряженное

состояние структуры и, как следствие, на ее прочностные характеристики [76].

Подобные задачи возникают на практике, в частности, при получении сварных соединений разнородных материалов с различными коэффициентами температурного расширения, работоспособных в условиях, для которых они предназначены. В таких случаях для обеспечения достаточного уровня прочности следует по возможности исключить образование в зоне сплавления структурной и механической неоднородности либо ограничить ее до такой степени, чтобы размеры (ширина) получаемых в процессе сплавления прослоек были меньше критических для данных условий. В этом случае прослойка полностью вовлекается в упругую деформацию, что обеспечивает более высокую прочность и надёжность изделия.

Поэтому целесообразно проведение исследования влияния коэффициента температурного расширения (КТР) на динамику изменения собственных частот исследуемой области с учётом степени ее неоднородности, т.е. геометрических размеров области $G^{(2)}$.

Исследуемая ниже область обладает следующими геометрическими характеристиками: $L = 3$, параметр δ_2 изменяется в интервале $0,038 \leq \delta_2 \leq 0,9$. Физические характеристики области G : $(St, G^{(1)})$ – «центральная» область и $(Ti, G^{(2)})$ – «внешняя» область. КТР ($\alpha \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$) области $G^{(2)}$ изменяется в интервале $4,5 \leq \alpha \leq 53$, при сохранении неизменными остальных свойств материала.

Общие результаты изменения безразмерных значений собственных частот $\Omega = \Omega(\delta_2, \bar{\alpha})$, ($\bar{\alpha} = \alpha / \alpha_{st}$, где $\alpha_{st} = 1,8 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ – КТР стали) отображены на рисунке 4.14. Представляют интерес частоты № 3–11, каждому номеру частоты соответствует соответствующая поверхность.

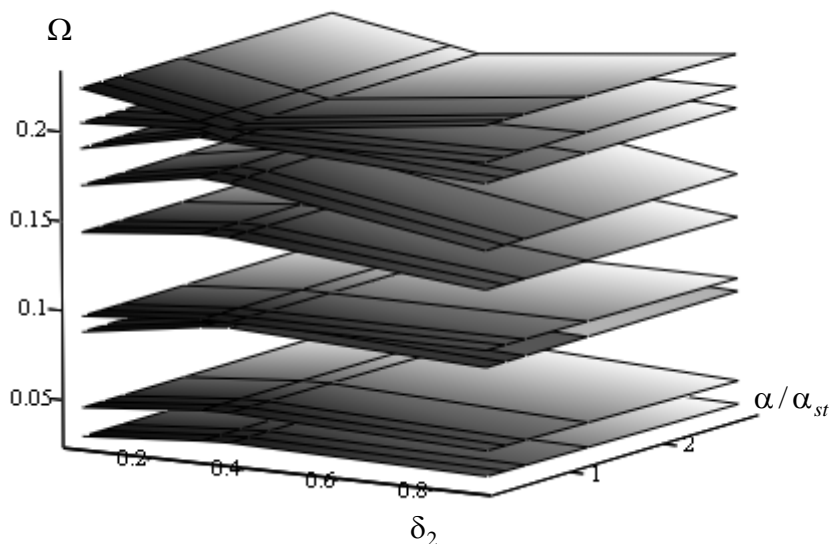


Рисунок 4.14 Графическая зависимость изменения значений частот Ω от параметров δ_2 и $\alpha_{(G_2)}$, $L = 3$, (St-Ti)

Исходя из анализа данных рис. 4.14, сформулируем выводы.

1. Для значений параметра δ_2 приближающихся к крайним значениям рассматриваемого интервала $0,038 \leq \delta_2 \leq 0,9$, справедливы выводы раздела 2, где, в частности, численно и аналитически доказано малое влияние термоупругих свойств области на спектр РЧ, что также подтверждает выводы п. 4.2 текущей главы, в котором исследовалась зависимость спектра собственных частот от параметра δ_2 .

2. Аналогичная картина наблюдается и в том случае, когда изменяется $\alpha_{(G_1)}$ (рисунок 4.15). В рассматриваемом случае $L = 3$, параметр $\delta_2 = 0,34$, $(St, G^{(1)})$ – «центральная» область и $(Pb, G^{(2)})$ – «внешняя» область, $0,25 \leq \bar{\alpha} \leq 2,75$. При значительном увеличении α значения частот незначительно уменьшаются. Следовательно, коэффициент линейного температурного расширения не оказывает значительного влияния на собственные частоты исследуемой области.

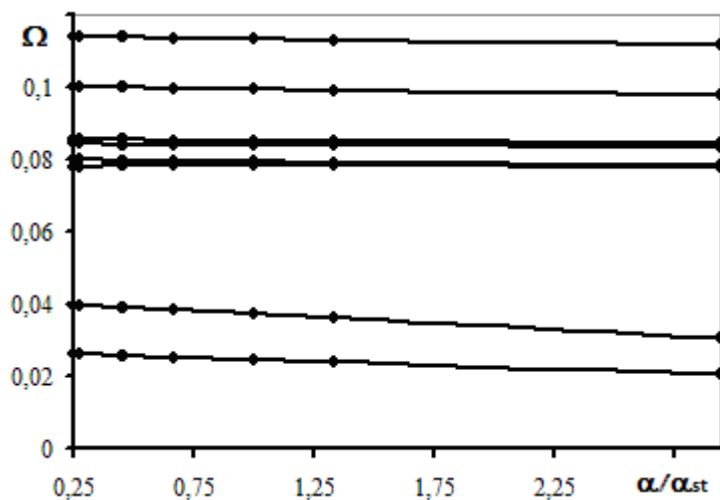


Рисунок 4.15 Зависимость собственных частот термоупругого прямоугольника от безразмерной величины α/α_{st} , $L = 3$, (St-Pb)

3. Однако для данного сочетания материалов исследуемой области и значений параметра δ_2 , близких к середине исследуемого интервала (с ярко выраженной неоднородностью), отмечается некоторое усиление влияния $\alpha_{(G_2)}$ на значения собственных частот. Данные рисунков 4.16–4.17 свидетельствуют, что для областей с ярко выраженной неоднородностью ($\delta_2 = 0,29$ и $\delta_2 = 0,34$), значения частот краевого резонанса (Ω_8, Ω_9) значительно превосходят соответствующие значения на краях интервала $\delta_2 = 0,038$ и $\delta_2 = 0,9$.

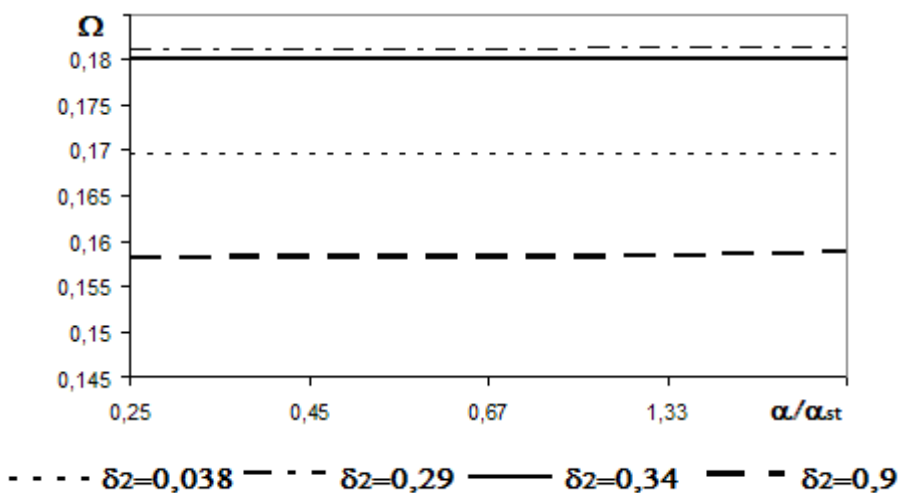


Рисунок 4.16 Зависимость изменения значений частоты Ω_8 от параметра δ_2 и $\alpha_{(G_2)}$, $L = 3$, (St-Ti)

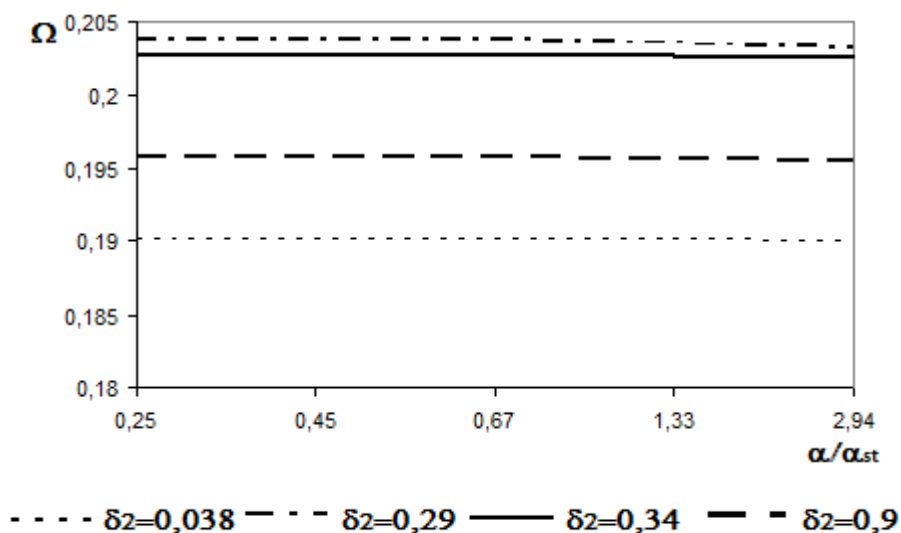


Рисунок 4.17 Зависимость изменения значений частоты Ω_9 от параметра δ_2 и $\alpha_{(G_2)}$, $L = 3$, (St-Ti)

4. Такое, в целом, незначительное влияние коэффициента температурного расширения области $G^{(2)}$ на спектр собственных частот области G объясняется некоторой идеализацией термоупругих свойств исследуемой области (у области $G^{(2)}$ изменяется только значение коэффициента α). Данное ограничение было применено с целью определения влияния на процесс термоупругого деформирования тела свойств материала, зависящих непосредственно от наличия температурного фактора. Однако, в ситуациях, приближённых к реальным, тела с более высоким коэффициентом температурного расширения имеют, как правило, более низкий модуль упругости. Как следствие, разница коэффициентов линейного температурного расширения материалов неоднородной области может приводить к возникновению значительных напряжений при нагревании.

4.4. Влияние упругих параметров области с учётом температурного фактора на собственные частоты исследуемой области

Для более детального исследования зависимости резонансных частот от геометрических и термоупругих параметров области рассмотрим трёхмерные зависимости, представленные на рисунках 4.18–4.22, которые дают возможность выделить точки (\bar{E}, L) , $(\bar{\nu}, L)$, (\bar{E}, δ_2) , $(\bar{\nu}, \delta_2)$, в которых наблюдаются зоны

нерегулярности на соответствующих поверхностях $\Omega(\bar{E}, L)$, $\Omega(\bar{\nu}, L)$, $\Omega(\bar{E}, \delta_2)$, $\Omega(\bar{\nu}, \delta_2)$. Здесь $\bar{E} = E/E_{st}$, $\bar{\nu} = \nu/\nu_{st}$, E_{st} – модуль нормальной упругости стали, ν_{st} – коэффициент Пуассона стали.

Собственные частоты поперечных и продольных колебаний области, формирующих плато в спектре собственных частот, зависят от её размеров, плотности и модуля нормальной упругости. В частности, существуют упрощённые инженерные зависимости между значениями собственных частот и упругими характеристиками колеблющейся области [114], из которых следует прямо пропорциональная зависимость упругой характеристики квадрату частотного значения. Целесообразно углубленное исследование зависимости значений резонансных частот от термоупругого параметра E , отвечающего согласно закону Гука за термоупругую деформацию и геометрического параметра L . Результаты данного исследования для области, представленной сочетанием материалов (Pb-Ti) и фиксированных значений $\delta_2 = 0,1$ и $\delta_2 = 0,9$ отражены на рисунках 4.18–4.19.

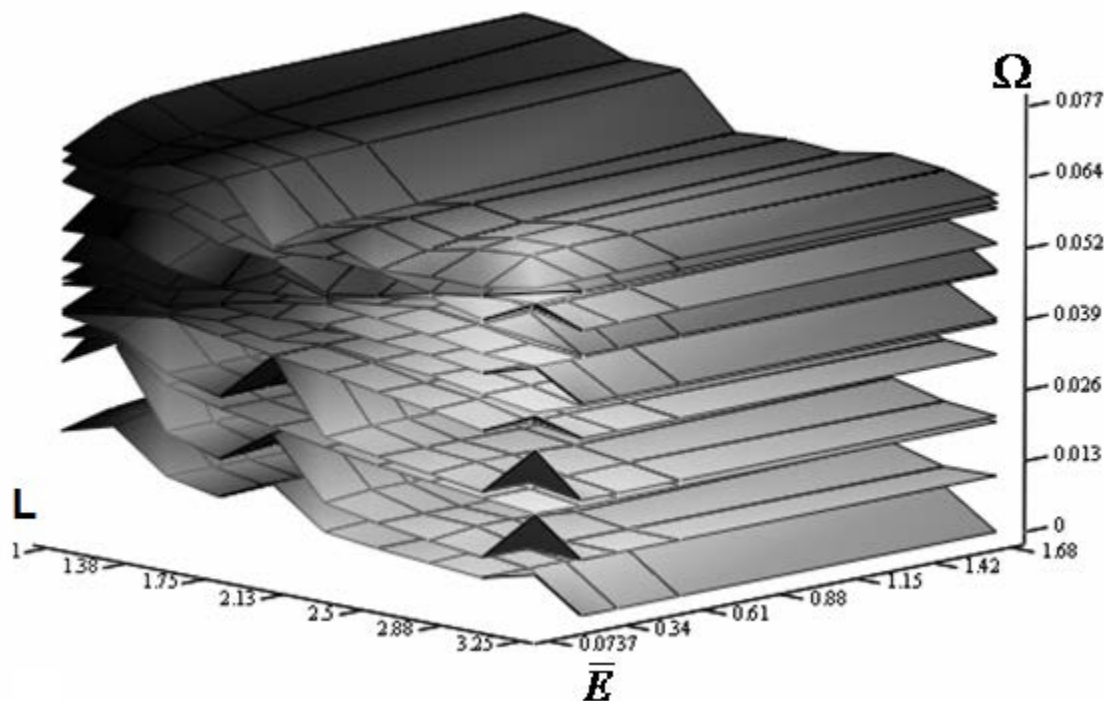


Рисунок 4.18 Трехмерная зависимость $\Omega(\bar{E}, L)$, (Pb-Ti), $\delta_2 = 0,1$

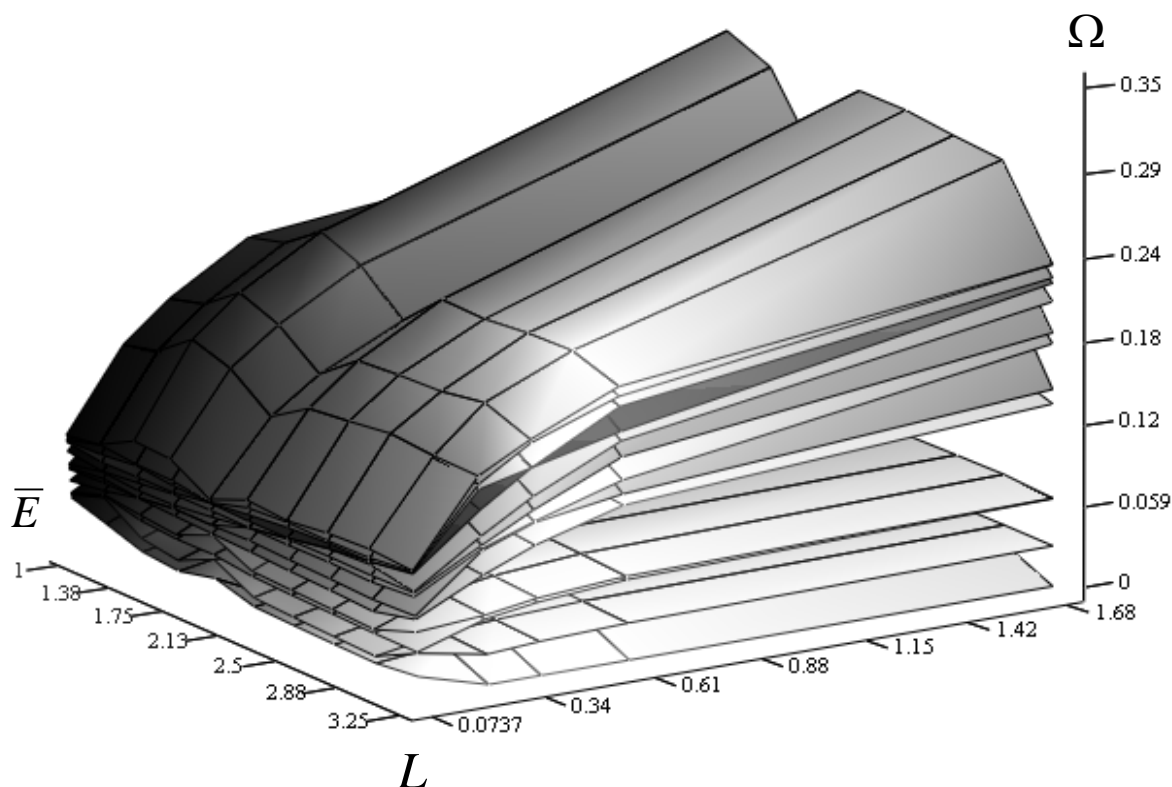


Рисунок 4.19 Трёхмерная зависимость $\Omega(\bar{E}, L)$, (Pb-Ti), $\delta_2 = 0,9$

Отметим основные результаты анализа зависимостей.

1. Общим для представленных зависимостей есть наличие участков разрыва градиента для каждой частоты, что хорошо согласуется со спектральными кривыми (линиями уровня), представленными ранее на рисунках 4.5, 4.7.
2. В обоих случаях для $\delta_2 = 0,1$ и $\delta_2 = 0,9$ присутствует увеличение частотных значений при увеличении параметра E , что, кстати, согласуется с [68], однако для $\delta_2 = 0,1$ это увеличение является столь незначительным, что не визуализируется графически. О нём можно судить лишь по полученным значениям частот.
3. Для $\delta_2 = 0,9$ значения частот увеличиваются в 3–4 раза, что обусловлено большей общей жёсткостью области, что видно на рисунке 4.19. Также для данной области характерна малая зависимость низких частот (№ 3–5) от изменения \bar{E} .
4. При увеличении параметра L отмечается уменьшение частотных значений для $\delta_2 = 0,1$ и $\delta_2 = 0,9$. Данные результаты и выводы подтверждаются [68].

Рассмотрим подобную трёхмерную зависимость $\Omega(\bar{v}, L)$ для области, представленной сочетанием материалов (Pb-Ti) и фиксированного значения

$\delta_2 = 0,1$ (рис.4.20).

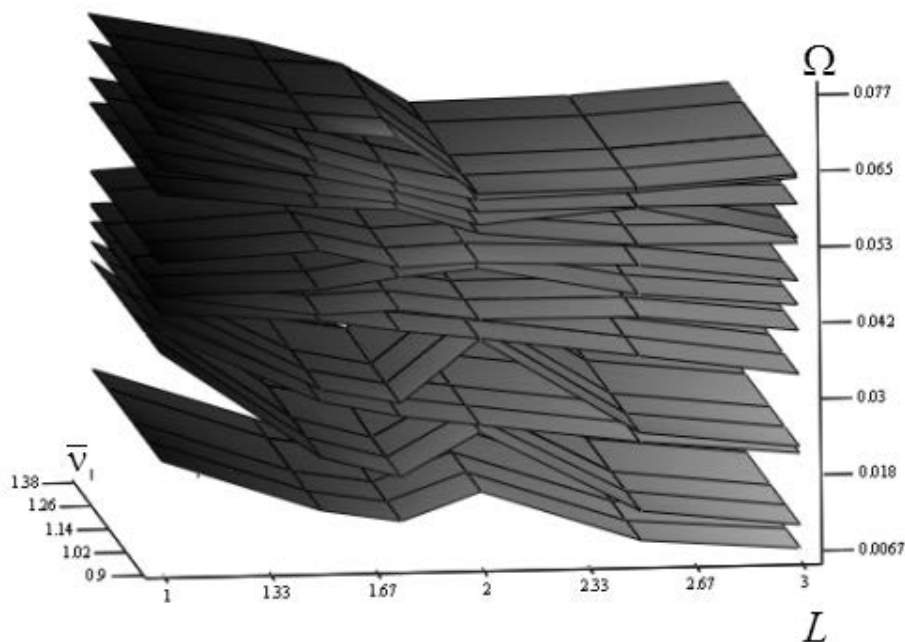


Рисунок 4.20 Трёхмерная зависимость $\Omega(\bar{\nu}, L)$, (Pb-Ti), $\delta_2 = 0,1$

Можно сформулировать следующие выводы:

1. Для однородной области [68] частота КР существенно зависит от коэффициента Пуассона, повышаясь с его увеличением. Однако для рассмотренной неоднородной области частотные значения остаются практически неизменными (присутствует даже незначительное их уменьшение), что объясняется следующим: при увеличении значения параметра $\bar{\nu}$ области $G^{(2)}$ жёсткость области $G^{(2)}$ уменьшается, а следовательно уменьшается и общая жёсткость области G , что влечёт уменьшение значений частотного спектра. Данный факт обоснован в п. 4.2.
2. При увеличении параметра L отмечается общее уменьшение частотных значений. Также на участках $L \in [1,67; 2,67]$ хорошо видны зоны скачкообразного изменения частот, кардинально влияющие на распределение энергии по сечению области.
3. Явление КР и сгущение собственных частот в спектре наблюдаются в области более высоких частот.

Далее на рисунке 4.21 представлена трёхмерная зависимость $\Omega(\bar{E}, \delta_2)$, для области (Pb-Ti) с фиксированным значением $L = 3$.

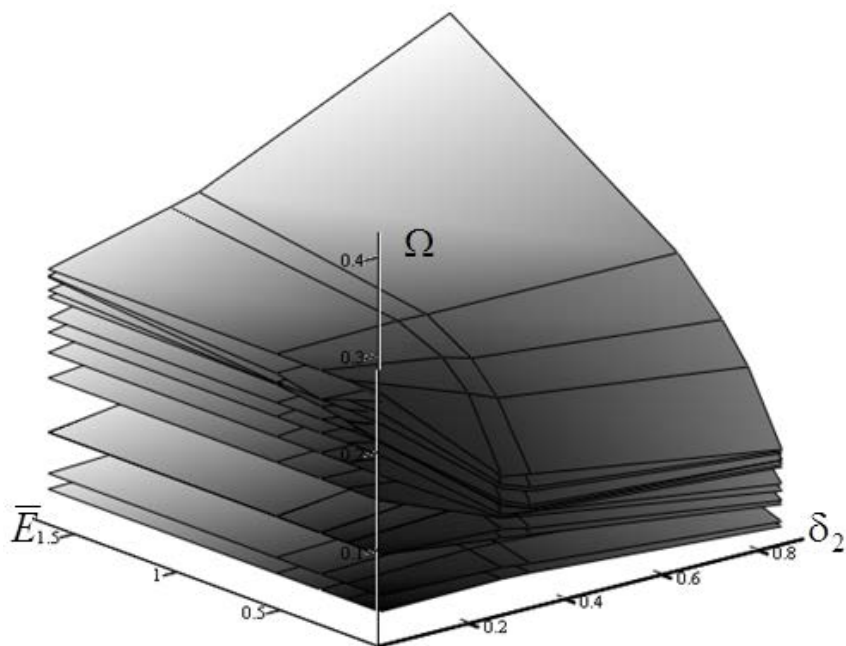


Рисунок 4.21 Трёхмерная зависимость $\Omega(\bar{E}, \delta_2)$, (Pb-Ti), $L = 3$

Можно отметить увеличение значений резонансных частот с ростом общей жёсткости области при любых значениях параметра δ_2 , причём с увеличением δ_2 этот рост наиболее заметен, особенно для высоких частот. Это подтверждает предыдущие выводы. Что касается линий уровня $\Omega(\bar{E}, \delta_2)$, имеем участки заметного убывания (при малых $\delta_2 < 0,4$) и практически постоянства при дальнейшем увеличении δ_2 . Рассмотрим зависимость $\Omega(\bar{\nu}, \delta_2)$ для области (Pb-Ti) с фиксированным значением $L = 3$ (рисунок 4.22).

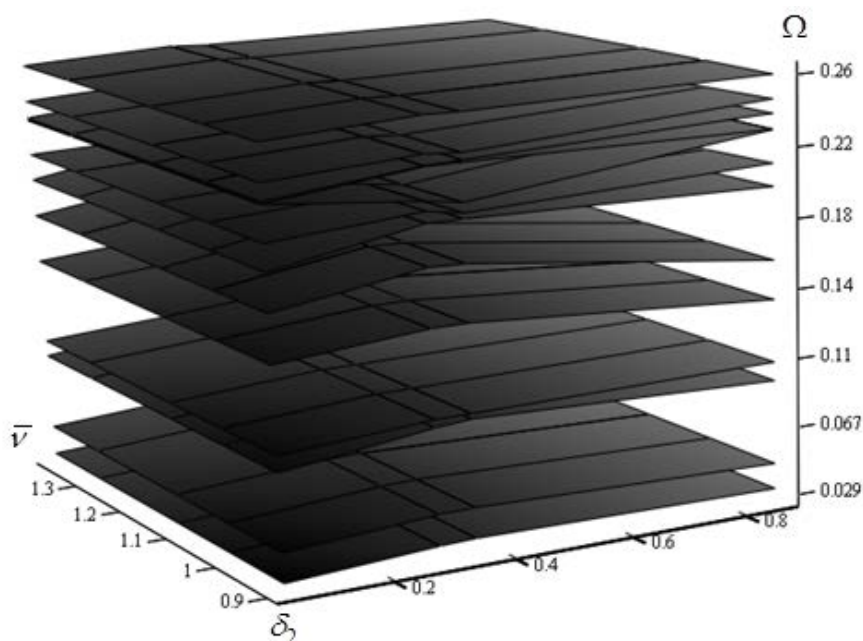


Рисунок 4.22 Трёхмерная зависимость $\Omega(\bar{\nu}, \delta_2)$, (Pb-Ti), $L = 3$

Очевидно, что практически для всех частот имеем поверхности близкие к плоскости.

Исследуем зависимость значений собственных частот от модуля сдвига центральной области $G_{(1)}$. Область G обладает такими геометрическими характеристиками: $L = 3$, $\delta_2 = 0,038$. Физические характеристики области G : (St, $G^{(1)}$) – «центральная» область и (Pb, $G^{(2)}$) – «внешняя» область. Модуль сдвига, (μ , Н/м²) области $G^{(2)}$ изменяется в интервале $2,7e+10 \leq \mu \leq 1,6e+11$, при сохранении неизменными остальных свойств материала.

Результаты вычислений значений значимых РЧ отображены на рисунке 4.23. Очевидно, что значения собственных частот уменьшаются при увеличении модуля сдвига области $G_{(1)}$, причём на частотах краевого резонанса и приближающихся к ним это изменение происходит более резко.

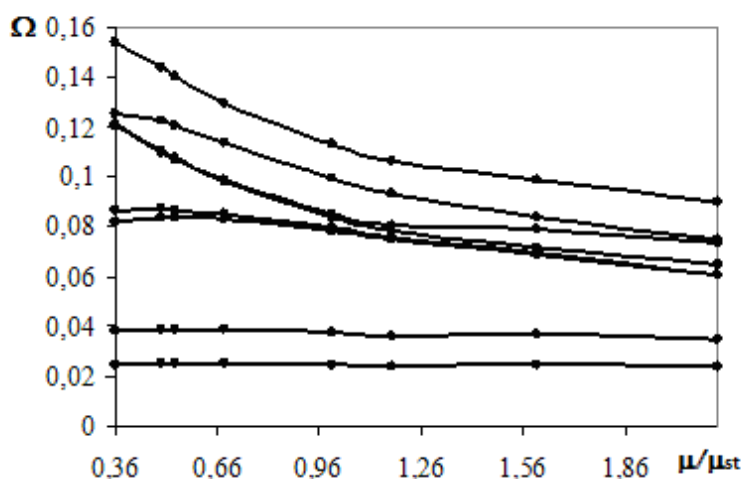


Рисунок 4.23 Зависимость собственных частот термоупругой области от модуля сдвига, μ области $G^{(1)}$, (St-Pb), $L = 3$, $\delta_2 = 0,038$

Анализ влияния сочетаний материалов и размеров наплавки (область $G^{(2)}$) на интенсивность тонких динамических эффектов в условиях динамических и температурных нагрузок на элементы конструкций, позволяет оптимизировать их геометрические параметры сечения с целью улучшения прочностных характеристик неоднородных деталей.

4.5. Распределение энергии деформации по площади термоупругого неоднородного сечения на резонансных частотах

Как показывают результаты экспериментальных исследований [93], наиболее уязвимыми в плане прочности участками составных областей являются границы соединений составных частей области, обладающих различными термомеханическими свойствами. Аналитические расчёты и численное моделирование показывают, что напряжения (энергия), возникающие в этих участках напрямую зависят также и от геометрических характеристик составных частей области, а также термической нагрузки.

В качестве величины, определяющей меру повреждения (прочности), можно использовать энергию термоупругой деформации в материале. Считается, минимальная энергия, обусловленная напряжениями, соответствует максимальной прочности составной области.

Следовательно, целесообразно проведение сравнительного анализа энергетической характеристики (\bar{E}) средней за период, накопленной во внутренней области сечения детали для интегрального описания влияния особенностей волнового поля на вибродинамическое поведение составных деталей. Данная безразмерная величина вычисляется по формуле (4.3), согласно [69]:

$$\bar{E} = \sum_{m=1}^2 \iint_{G^{(m)}} (U_1^{(m)2} + U_2^{(m)2}) dG^{(m)} \quad (4.3)$$

Результаты анализа распределения средней за период энергии по площади прямоугольника, в частности, в особых областях прямоугольного сечения деталей для разных форм колебаний отражены в таблице 4.2.

Рассмотрены сечения с наплавками различной ширины: узкая наплавка при $\delta_2 = 0,17$; средняя ширина наплавки – $\delta_2 = 0,5$; широкая наплавка – $\delta_2 = 0,9$. Каждое из рассмотренных сечений представлено для сочетания материалов Pb-Ti и Ti-Pb (сечения с «жесткими» и «мягкими» наплавками) при наличии и

отсутствии температурной составляющей.

Таблица 4.2

Проявление резонанса для различных значений параметра δ_2

№ Ω	$\delta_2 = 0,17$				$\delta_2 = 0,5$				$\delta_2 = 0,9$						
	Pb-Ti		Ti-Pb		Pb-Ti		Ti-Pb		Pb-Ti		Ti-Pb				
	ГР	КР	ГР	КР	ГР	КР	ГР	КР	ГР	КР	ГР	КР			
	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	т	у	
1		+-								+-		+-	+-		
2		+-								+-		+-	+-		
3		+-								+-		+	+-		
4					+-					+-		+	+		
5					+					+-	+-		+	+	
6					+					+	+		+	+	
7					+		+-	+-		+	+-		+	+	
8					+		+-	+-		+	+-		+	+-	
9					+					+	+		+	+-	
10					+			+-	+-	+			+	+	
11					+		+-						+	+	
12	+-	+-			+			+-		+-			+	+	
13	+-		+-		+			+-	+	+-				+-	+-
14		+-			+			+-	+-	+				+-	+
15					+		+	+-		+			+-	+-	

На найденных 15-ти собственных частотах исследуем проявление эффектов граничного («ГР») и краевого резонанса («КР»). Ярко выраженную ЛКН отметим знаком «+» в соответствующей ячейке таблицы, слабо выраженную ЛКН, соответственно, «+ -», при отсутствии ЛКН ячейка таблицы остаётся пустой. Внешние размеры исследуемого составного сечения определяет параметр $L = 3,25$.

Для проверки результатов аналитических расчётов напряжённо-деформированных состояний в неоднородных деталях (средах) наиболее приемлемыми являются численные методы, в первую очередь, метод конечных элементов, широко используемый в современных программных пакетах анализа элементов конструкций, таких как ANSYS, COSMOS/Design, STAR LS Dyna и

т. п. [11, 102]. В подтверждение полученных результатов были проведены расчёты с использованием программного комплекса ANSYS. Задачей программного анализа стала проверка полученной зависимости явления граничного и краевого резонанса от параметра δ_2 для различных сочетаний материалов в упругом и термоупругом случаях. Полученные результаты представлены на рисунках 4.24–4.26.

Основываясь на результатах проведённых аналитических и численных исследований, можно сформулировать следующие выводы относительно особенностей ЛКН в сингулярных зонах составного сечения детали.

1. Наличие неоднородности в сечении резко уменьшает интенсивность краевого резонанса. Это следует, как из данных таблицы 4.2 и из представленных на рисунках 4.24–4.38 эпюр распределения энергии по сечению тела. Он представлен слабо только при узких «мягких» наплавках и только на высоких частотах. Наличие же «мягких» наплавки, резко уменьшает интенсивность краевого резонанса при любых значениях δ_2 .
2. Можно отметить, что ГР и КР одновременно (в той или иной степени выраженности) присутствует в том случае, когда внешняя область обладает более «мягкими» характеристиками. При этом ГР выражен более ярко. Если же более «мягкая» область оказывается внутренней, наблюдаем соответственно ГР (на линии раздела сред). Это объясняется тем, что происходит направленный перенос энергии из более «жёсткой» в более «мягкую» область и соответствующая её концентрация на границе раздела сред со стороны более «мягкой» области.
3. Если рассмотреть более детально полученные результаты, можно отметить, что основные признаки локализации волновых движений наблюдается на частотах с меньшими номерами окрестности границы раздела сред (граничный резонанс). Наиболее ярко он представлен при узких «мягких» и широких «жёстких» наплавках. То есть, как было указано ранее, наличие граничного резонанса и его интенсивность прямо пропорционально площади части сечения, занимаемого «жёстким» материалом (Ti). Сформулированные выводы подтверждаются результатами численных расчётов по МКЭ. Для сочетания

материалов Pb-Ti ($L = 3,25$, $\delta_2 = 0,17$) эпюра распределения энергии для 12-ой частоты представлена на рис. 4.24.

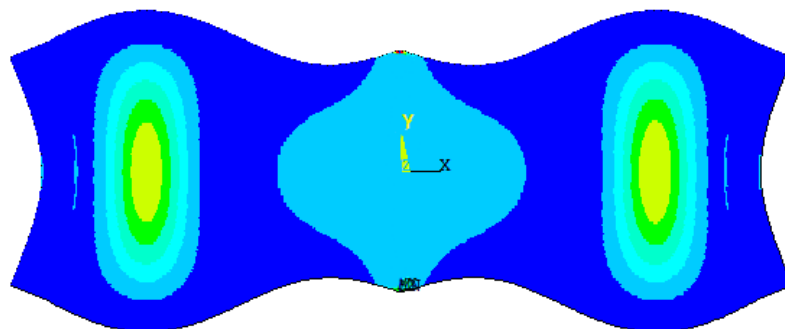


Рисунок 4.24 Эпюра распределения энергии для 12-ой частоты

В остальных случаях локализация волнового поля на границе раздела сред существенна. Например, для сочетания материалов Ti-Pb ($L = 3,25$, $\delta_2 = 0,17$) на рисунках 4.25–4.26 представлены эпюры распределения энергии по площади составного сечения для 10 и 11 частот.

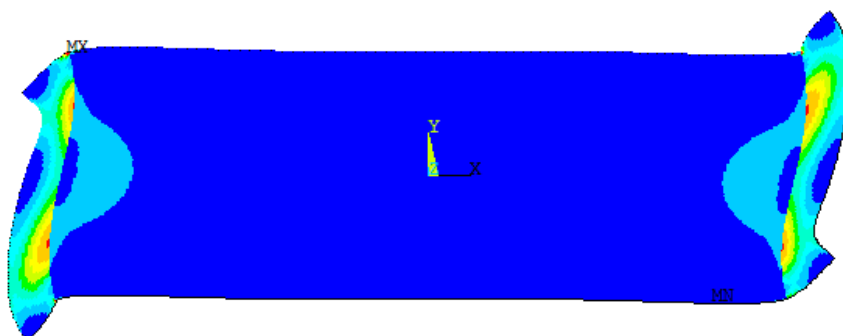


Рисунок 4.25 Эпюра распределения энергии для 10-ой частоты

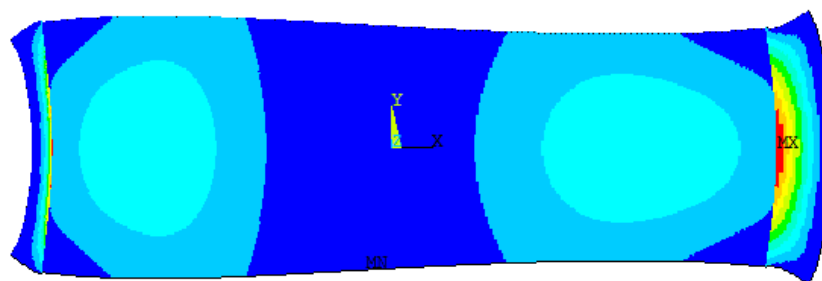


Рисунок 4.26 Эпюра распределения энергии для 11-ой частоты

4. Термоупругость «смазывает» краевой и граничный эффекты. Отмечается гораздо меньше частот, на которых происходит локализация исследуемых явлений. Так, например, для (Pb-Ti, $\delta_2 = 0,5$) граничный эффект отмечается на 14-

ти частотах, а для термоупругой – на семи. Аналогично, для упругой области (Ti-Pb, $\delta_2 = 0,17$) краевой эффект присутствует на семи частотах, а для термоупругой – на четырёх.

5. Наблюдается гораздо меньшее влияние геометрии неоднородности на интенсивность краевого резонанса в упругом и термоупругом расчёте. Локализация во внешних угловых точках и на внешней границе сечения происходит гораздо реже, чем на границе раздела сред.

6. При малых L ($L < 1,5$) и больших значениях L ($L > 5$) локализация напряжений в особых зонах сечения практически отсутствует.

4.6. Концентрация напряжений в характерных точках термоупругого неоднородного сечения на резонансных частотах

Аналитические расчёты и численное моделирование показывают, что распределение напряжений в неоднородном сечении подтверждает результаты исследования распределения энергии деформации.

Рассмотрены сечения с наплавками для $\delta_2 = 0,17$ и сочетания материалов Pb-Ti и Ti-Pb. Сечение представляет собой прямоугольную область G с «жёсткими»/«мягкими» наплавками (рисунок 3.1). На найденных 15-ти собственных частотах анализируем распределение напряжений и, соответственно, проявление эффектов граничного и краевого резонанса.

На интенсивность и локализацию и, часто, ПЛО напряжений существенное влияние оказывает сочетание материалов. Для области с сочетанием материалов Pb-Ti (с «жёсткими» наплавками) интенсивность напряжений гораздо выше на границах области при приближении к угловой точке B , что обосновывает выраженный краевой резонанс.

Так на рисунке 4.27 изображено распределение напряжений σ_x вдоль верхней границы сечения $(x;\eta)$ для восьмой собственной частоты (исследуется 1/4 часть области G , расположенная в 1-ой координатной четверти).

Очевидно, что σ_x принимает максимальное значение в угловой точке B . Кривыми (1) и (2) обозначены распределения напряжений σ_x для первых (ненулевых) собственных частот Ω_4, Ω_3 . В данном случае значительного изменения значений по длине сечения не наблюдается.

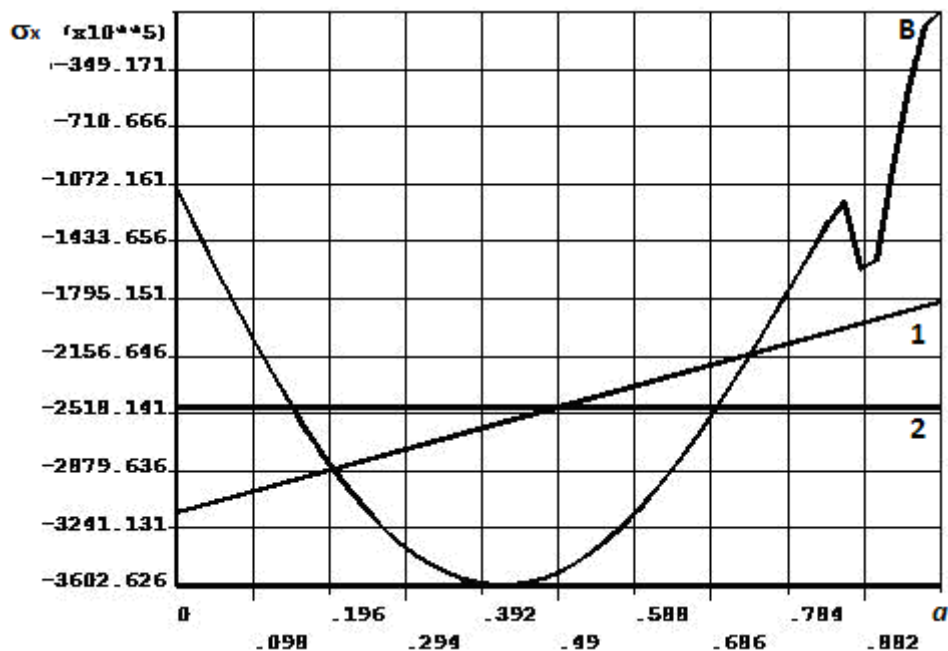


Рисунок 4.27 Изменение значений σ_x для 8-ой собственной частоты по длине сечения и $L = 3,25$, (Pb-Ti)

Рассматривая распределение напряжений в сечении Ti-Pb (с «мягкими» внешними наплавками) по длине сечения, отметим, что интенсивность напряжений гораздо выше на границе раздела центральной «мягкой» и внешней «жесткой» области – наплавки, особенно при приближении к точке A , что обосновывает выраженный граничный резонанс. Подтверждением данного факта можно считать данные рисунков 4.28–4.29, на которых изображено распределение напряжений σ_x вдоль границы стыка двух различных материалов для девятой и десятой собственных частот. Очевидно, что σ_x принимает максимальное значение в точке A . Причём, данное явление наблюдается практически на всех частотах в большей или меньшей степени.

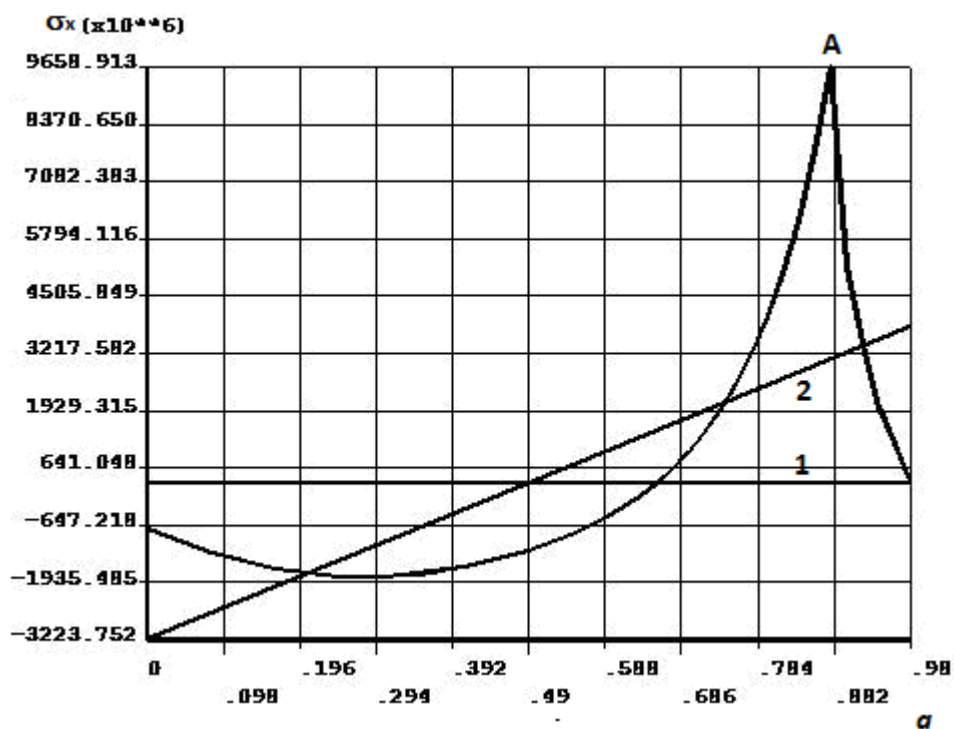


Рисунок 4.28 Изменение значений σ_x для 9-ой собственной частоты по длине сечения и $L = 3,25$, (Ti-Pb)

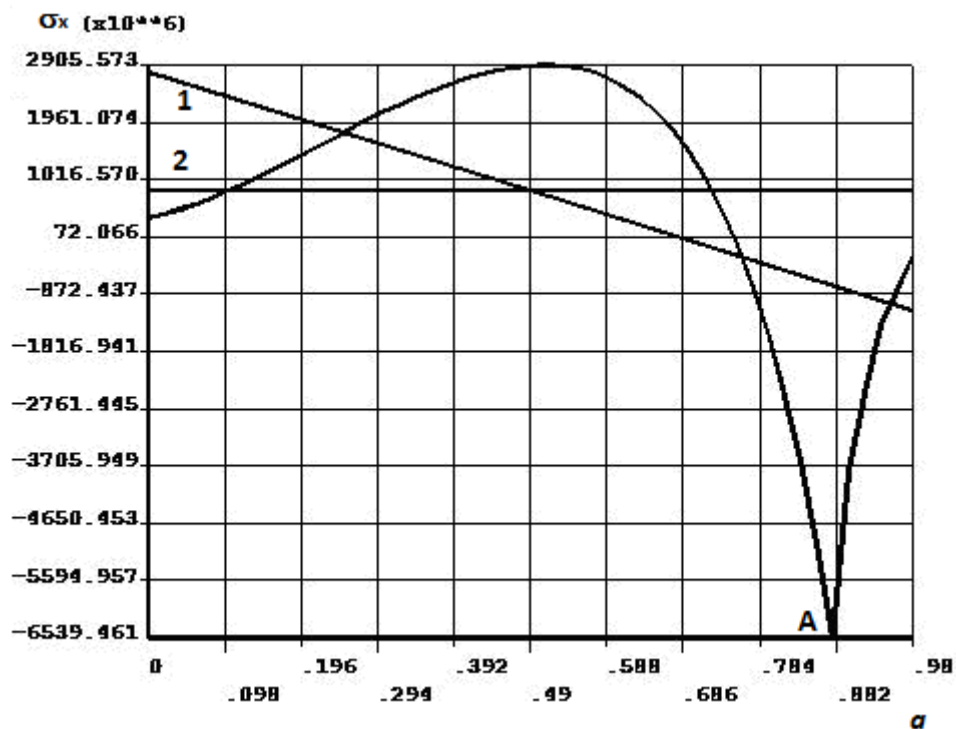


Рисунок 4.29 Изменение значений σ_x для 10-ой собственной частоты по длине сечения и $L = 3,25$, (Ti-Pb)

Уровень σ_y поперечных напряжений изменяется аналогично уровню

продольных, однако уровень σ_y значительно ниже уровня σ_x на соответствующих частотах.

Таким образом, интенсивность локальной концентрации напряжений в особых точках сечения напрямую зависит от размера площади сечения, занимаемой более «жестким» материалом. В случае, когда узкие наплавки более «мягкие», то имеем признаки граничного резонанса, если же «жесткие» – слабо выраженный краевой резонанс.

4.7. Выводы по разделу 4

В данном разделе рассмотрены результаты численного анализа характеристик волнового поля для неоднородной термоупругой области. В частности, были проанализированы особенности поведения волновых характеристик в различных средах неоднородного прямоугольника с точки зрения проявления граничных и краевых динамических эффектов. Рассматривались различные значения жесткостных и геометрических параметров сечения, с целью определения тех, на которых эти эффекты выражены наиболее отчетливо.

Анализ зависимости ПЛО от соотношения жесткостей стыкуемых сред, показал существенная зависимость ПЛО от упругих параметров внутренней области. При сопряжении областей, изготовленных из одинаковых материалов, локальная особенность по напряжениям отсутствует.

Наблюдается зависимость спектра резонансных частот от соотношения размеров площадей, занимаемых рассматриваемыми материалами. Для областей, упругие параметры которых близки, значения частот краевого резонанса либо совпадают, либо различаются незначительно, причем неоднородность области способствует понижению значений частот.

Коэффициент линейного температурного расширения не оказывает значительного влияния на собственные частоты исследуемой области, однако для сочетания материалов исследуемой области с ярко выраженной неоднородностью отмечается некоторое усиление влияния коэффициента линейного

температурного расширения на значения собственных частот.

Значения резонансных частот растут при увеличении термоупругих характеристик сечения, однако отмечается их уменьшение при увеличении значений геометрического параметра L , что позволяет, варьируя значения геометрических и физико-механических параметров, влиять на значения РЧ.

Для однородной области частота КР существенно зависит от коэффициента Пуассона, повышаясь с его увеличением. Однако для рассмотренной неоднородной области частотные значения остаются практически неизменными. Очевидно, что значения собственных частот уменьшаются при увеличении модуля сдвига области, причём на частотах краевого резонанса и приближающихся к ним это изменение происходит более резко.

Исследование распределения энергии деформации по площади термоупругого неоднородного сечения на резонансных частотах показало, что наличие неоднородности в сечении резко уменьшает интенсивность краевого резонанса, причем ГР и КР одновременно присутствует в том случае, когда внешняя область обладает более «мягкими» характеристиками. Отмечается меньшее влияние геометрии неоднородности на интенсивность КР, т.е. локализация краевых эффектов во внешних угловых точках и на внешней границе сечения происходит гораздо реже, чем на границе раздела сред.

В целом, интенсивность локальной концентрации напряжений в особых точках сечения напрямую зависит от размера площади сечения, занимаемой более «жестким» материалом. В случае, если площадь «жесткого» материала преобладает, имеем признаки граничного резонанса, в обратном случае – слабо выраженный краевой резонанс.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [28, 30, 32-37, 45-50, 53, 82, 86-89].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основанием для проведенного в данной работе исследования послужило недостаточное освещение проблем анализа краевых и граничных эффектов в связанных задачах термоупругости неоднородных тел конечных размеров, что подтверждается весьма малым количеством публикаций по этим исключительно актуальным вопросам.

Результатом сравнения и обобщения разработанных методов решения связанных задач термоупругости стала возможность теоретического обоснования и реализации нового направления развития алгоритма метода суперпозиции для решения динамических задач термоупругости неоднородных областей с негладкой границей с целью исследования термоупругих эффектов и определения характера динамического НДС в окрестности сингулярных точек областей.

Это позволило сформулировать ряд выводов теоретического и научно-прикладного характера, отражающие решения задач диссертационного исследования в соответствии с поставленной целью.

1. По проведенному в работе анализу состояния рассматриваемых вопросов, близких по тематике к поднятым в диссертации, можно сказать, что существующие до настоящего времени модели динамических задач термоупругости неоднородных тел и применяемые методы расчета динамической прочности не позволяют их использование для большого класса структурно неоднородных объектов. Они не всегда точно и полно описывают вызванное соответствующим распределением температуры напряженно-деформированное состояние ввиду серьезных математических трудностей, вызванных учетом взаимосвязи тепловых и механических полей и, как следствие, не удовлетворяют современным требованиям практики.

2. Обобщение метода суперпозиции при решении задач установившихся колебаний термоупругих прямоугольных областей позволило свести исследуемую задачу к системе сингулярных интегральных уравнений с известной асимптотикой неизвестных. Дальнейшее определение характера поведения напряженно-деформированного состояния в окрестности нерегулярных точек внешних и

внутренних границ кусочно-неоднородных тел даёт возможность при численном анализе наилучшим образом аппроксимировать решение и построить эффективный алгоритм его нахождения. В целом, предложенные этапы исследования являются основой достоверной оценки учёта влияния температурных параметров на природу краевого резонанса и интенсивность концентрации напряжений в опасных зонах сечения области.

3. Впервые, согласно сформулированному в работе общему подходу к решению динамических задач термоупругости для неоднородных областей с точки зрения оценки роли температурных полей и термоупругих волн в процессе возникновения ЛКН дано комплексное исследование большинства динамических характеристик НДС с учётом температурных воздействий на характеристики волнового поля. Разработанный алгоритм решения сформулированных в работе задач носит достаточно универсальный характер и может быть применён для расчета волновых полей при различных силовых и температурных граничных условиях и наличии неоднородности внутренней структуры исследуемых объектов.

4. В работе изучены эффекты локализации волновых движений для однородных и неоднородных термоупругих областей. Как показали результаты исследования, сложность формы исследуемых областей (геометрическая неоднородность), связанность полей деформации и температуры вносят дополнительные математические трудности в расчет распределения напряжений в твёрдом термоупругом неоднородном теле с учётом ЛКН в окрестности внутренних и внешних границ области. Интенсивность возникающей при этом концентрации напряжений определяется введенными критериями – ПЛО по напряжениям и температуре, значения которых определяются упругими и температурными характеристиками областей составного сечения. Найдены определяющие уравнения для расчета значений этих параметров для случаев сопряжения двух различных термоупругих областей. Результаты численного анализа ПЛО, приведенные в работе, позволяют еще на этапе проектирования составного сечения оптимальным образом подбирать сочетания термоупругих

характеристик стыкуемых сред с целью минимизации интенсивности ЛКН.

5. Предложенные в работе методы решения граничных задач динамической теории термоупругости использовались для подробного анализа спектров резонансных частот, кинематических (смещений) и энергетических характеристик собственных форм неоднородных областей. Для различных видов сочетаний геометрических, температурных и упругих параметров сечения проанализированы зоны протяженности действия краевых и граничных динамических эффектов; определены условия соотношения этих параметров с целью уменьшения концентрации температурных и динамических напряжений в окрестности внутренних и внешних границ области.

6. Для проверки достоверности предложенных методов выполнено решение отдельных задач, имеющих известные аналитические решения и экспериментальные результаты. Адекватность разработанной методики и численные результаты, полученные в работе с использованием построенных решений граничных задач, сопоставлены с численными результатами, полученными при помощи МКЭ в вычислительном комплексе ANSYS. Дополнительным контролем достоверности в каждой рассматриваемой задаче служила точность удовлетворения граничных условий и условий сопряжения. Можно утверждать, что влияние температурного поля на спектр резонансных частот для кусочно-неоднородной прямоугольной области незначительно, что и подтверждает проведенный КЭ анализ для различных сочетаний геометрических, упругих и температурных параметров двухслойной прямоугольной области: резонансные частоты, рассчитанные с учетом и без учета температурного поля, различаются незначительно.

7. Полученные автором решения задач динамического расчета термоупругих неоднородных тел конечных размеров позволяют выявить основные закономерности динамического деформирования в различных компонентах исследуемых конструкций. Помимо этого, становится возможным существенно сократить объем экспериментальных исследований, необходимых для реализации отдельных этапов инженерных расчётов, в частности, для установления

благоприятных, с точки зрения снижения уровня термоупругих напряжений в элементах конструкций, численных значений различных параметров задачи и функциональных связей между ними. Это, в свою очередь, способствует уменьшению материальных и временных затрат на обработку изделий, даёт возможность экономически более выгодно осуществлять регулирование и контроль технологических процессов проектирования на промышленных предприятиях различных отраслей. Кроме того, на основе предложенных методов исследования могут быть выявлены дополнительные факторы, влияющие на рассматриваемые вопросы прочностных расчетов динамического НДС элементов конструкций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А. Г. О плоской деформации малонапряженного неоднородно-составного клина / А. Г. Акопян // Известия АН Армении. Механика. – 1994. – Т. 47, № 5–6. – С. 42–48.
2. Акопян А. Г. О продольном сдвиге неоднородно-составного клина / А. Г. Акопян // Изв. АН Армении. Механика. – 1994. – Т. 47, № 1–2. – С. 21–26.
3. Аксентян О. К., Лущик О. Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина. // Изв. АН СССР МТТ. 1978. – С. 102–108.
4. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра / О. К. Аксентян // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 1. – С. 178–186.
5. Алтухов Е. В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин: монография / Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 435 с.
6. Алтухов Е. В. Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транспортных пластин / Е. В. Алтухов // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – вып 37. – С. 8–13.
7. Алтухов Е. В. Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транслопных термоупругих пластинах / Е. В. Алтухов, В. П. Шевченко // Докл. НАН Украины. – 2007. – № 4. – С. 49–53.
8. Артемьева Е. А. Анализ влияния температурных полей на характер разрушения деталей / Е. А. Артемьева, Ю. В. Денисов // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 6 (Ч. 6). – С. 1329–1332.
9. Ахметов Н. К. Некоторые задачи теории упругости для сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек / Н. К. Ахметов, Ю. А. Устинов // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. – К.: Наук. думка, 2007. – Т. 2. – С. 48–61.
10. Бабешко М. Е. Термоупругопластическое деформирование составных оболочек в процессах осесимметричного нагружения с учетом третьего инварианта девиатора напряжений / М. Е. Бабешко, Ю. Н. Шевченко // Прикладная механика: междунар. науч. журнал. – 2010. – Т. 46, № 12. – С. 31–41.

11. Басов К. А. ANSYS в примерах и задачах / К. А. Басов. – М.: Компьютер-Пресс, 2002. – 224 с.
12. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов. / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
13. Бахрамов Б. М. Об одной динамической задаче для клиновидного упругого слоя / Б. М. Бахрамов // Изв. АН Уз. СР. Сер. физ.-мат. – 1970.– № 2. – С. 88–89.
14. Бахрамов Б. М. Об одной задаче по определению поверхностных волн для клиновидного слоя / Б. М. Бахрамов, И. Г. Филиппов // Труды семинара по краевым задачам.– Казань: Казан. гос. ун-т 1970. – №7. – С. 47–66.
15. Белоконь А. В. Метод интегральных уравнений в задачах осесимметричной деформации трансверсально-изотропного цилиндра / А. В. Белоконь, Е. П. Маликов // Изв. АН Арм. ССР. Механика. – 1982. – Т. 35, № 2. – С. 17–26.
16. Белоконь А. В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров / А. В. Белоконь // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, № 1. – С. 56–59.
17. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М.: Наука., 1985. – 321с.
18. Беркович В. Н. О локализации волнового процесса в кусочно-однородной клиновидной среде / В. Н. Беркович // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – Краснодар, 2010. – № 2. – С. 26–32.
19. Беркович В. Н. Особенности волновых полей при колебаниях составной клиновидной среды / В. Н. Беркович, М. М. Шварцман // Тр. XVI Междун. конф. «Математика. Экономика. Образование.» разд. «Математические модели в естественных науках и экологии». – Ростов н/Д, 2008. – С. 81–88.
20. Бескопыльный А. Н. Определение частоты собственных колебаний составной конструкции / А. Н. Бескопыльный, Б. М. Языев, И. А. Краснобаев // Интернет-журнал Науковедение. – 2013. – №5 (18). – С. 237–243.
21. Бескопыльный А. Н. Расчёт на прочность армированных балок с заполнителем из бимодульного материала с использованием различных теорий

- прочности / А. Н. Бескопыльный, Е. Э. Кадомцева // Инженерный вестник Дона. – 2013. – №4 (27). – С. 245–256.
22. Биркган А. Ю. Исследование больших прогибов прямоугольной пластинки при помощи цифровых электронных машин / А. Ю. Биркган, А. С. Вольмир // Известия АН СССР. – 1959. – № 2. – С. 37–39.
23. Блинова В. Г. Метод определения асимптотик в общей вершине упругих клиньев / В. Г. Блинова, А. М. Линьков // Прикладная математика и механика. 1995. – Т. 59, № 2. – С. 199–208.
24. Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора / Д. Боджи // Тр. Америк. общества инженеров-механиков. Прикладная механика. – 1971. – Т. 38, № 2. – С. 87–96.
25. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла / В. В. Болотин // Прикладная математика и механика, 1960. – Т. 24, 2. – С. 361–366.
26. Быркэ М. С. К решению плоской задачи теории упругости для слоистого клина / М. С. Быркэ // Вопросы механики деформируемых систем. – Кишинев, 1977. – Вып. 1. – С. 32–36.
27. Вайнберг Д. В. Метод конечного элемента в механике деформируемых тел. / Д. В. Вайнберг // Прикладная механика.– 1972.– Т. 8, вып. 8. – С. 3–28.
28. Вовк Л.П. Вплив температури на локальну концентрацію динамічних напружень у деталях з нерегулярною границею / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль // Прикладні завдання математики в механіці, економіці та екології, VII міжнар. студ. конф.: Зб. наук. праць, м. Севастополь, 15 квітня 2009 р. – Севастополь: СТМ, 2009. – С. 203.
29. Вовк Л.П. Анализ характеристик волнового поля в задачах диагностики неоднородных термоупругих областей / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2017. – № 1. – С. 28–44.
30. Вовк Л.П. Аналіз спектру резонансних частот термоупругих неоднорідних областей с негладкой границею / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль // Современные

проблемы и пути их решения в науке транспорте и образовании 2011: Тр. Междунар. науч.-практ. конф., Экономика, физика и математика. – Одесса: Черноморье, 2011, Т. 10. – С. 79–84.

31. Вовк Л.П. Асимптотический метод исследования краевых задач теории термоупругости в областях с негладкой границей / Л.П. Вовк, К.С. Кисель // Методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике: Матер. X междунар. науч.-практ. конф., 26 февраля 2010 г. – Новочеркасск: ЮРГТУ (НПИ), 2010. – С. 4–6.

32. Вовк Л.П. Влияние геометрических характеристик неоднородной термоупругой пластинки на явление краевого резонанса / Л.П. Вовк, К.С. Кисель, О.Б. Калашнікова // Прикладні задачі математики в механіці, економіці та екології, XI міжнар. студ. конф.: Зб. наук. праць. м. Севастополь, 15-19 квітня 2013 р. – Севастополь: СТМ, 2013. – С. 16–19.

33. Вовк Л.П. Динамический прочностный расчет деталей сложной конфигурации в программном комплексе ANSYS / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Современные проблемы развития транспортно-промышленного комплекса: технологии, экономико-управленческие инфраструктурные аспекты. Образовательные технологии в подготовке специалистов для транспортно-промышленного комплекса: Тр. XIII Междунар. науч. науч.-практ. республ. конф., 24-25 ноября 2016, г. Донецк. – Донецк: ДонНТУ, 2016. – С. 83–88.

34. Вовк Л.П. Зависимость явления краевого резонанса термоупругой области от некоторых физических характеристик области / Л.П. Вовк, К.С. Кисель, О.Б. Калашнікова // Сб. науч. тр. SWorld. –Т. 3, вып. 3. – Иваново: МАРКОВА АД, 2013. – С. 35–38.

35. Вовк Л.П. Использование средств термоупругого анализа программы ANSYS в исследовании спектров собственных частот для тонких изотропных и анизотропных тел / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Вести Автомоб.-дор. ин-та ДонНТУ. – 2017. – № 3 (22). – С. 3–9.

36. Вовк Л.П. Исследование влияния коэффициента температурного расширения на собственные частоты кусочно-неоднородных сечений деталей машин / Л.П.

- Вовк, Е.С. Кисель // Инновационные перспективы Донбасса: Сб. матер. междунар. науч.-практ. конф., г. Донецк, 20-22 мая, 2015 г. – Донецк: ДонНТУ, 2015. – С. 6–10.
37. Вовк Л.П. Исследование спектров собственных частот тонких изотропных и анизотропных тел / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Науч.-техн. аспекты развития автотранспортного комплекса: Сб. матер. III Междунар. науч.-практ. конф. «Инновационные перспективы Донбасса: Инфраструктурное и социально-экономическое развитие», 2017. Донецк: ДонНТУ, 2017. – С. 27–32.
38. Вовк Л.П. Исследование явления краевого резонанса в неоднородном термоупругом сечении [Электронный ресурс] / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике: Матер. II Междунар. науч.-практ. конф., г. Азов, 19 мая 2015 г. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2015. – С. 256. – URL: <http://atidstu.ru/atidgtu-rf/node/1163>.
39. Вовк Л.П. Інтенсивність динамічної концентрації напружень у задачах сталих коливань кусково-неоднорідних термопружних областей / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль // Вісник СумДУ. Сер. Техн. науки. – 2010. – Т. 1, № 3 – С. 20–25.
40. Вовк Л.П. Локальная концентрация напряжений в особых точках неоднородной термоупругой области / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель, В.А. Матвеев // Сб. науч. тр. SWorld. – Т. 4, вып. 4. – Иваново: МАРКОВА АД, 2013. – С. 43–46.
41. Вовк Л.П. Математическое моделирование напряжённно-деформированного состояния неоднородной прямоугольной пластинки с учётом её термоупругих характеристик / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль // Наука України. Перспективи та потенціал: Мат. VI Всеукр. наук.-практ. заоч. конф., м. Запоріжжя, 22-23 лютого 2013 р. – Запоріжжя: Всеукр. партнерство «Нова освіта», 2013. – С. 176–180.
42. Вовк Л.П. О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л. П. Вовк, Б. В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, вып. 2. – С. 269–278.
43. Вовк Л.П. Обзор основных методов решения краевых задач термоупругости / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Перспективы развития научных исследований в 21 веке:

Сб. матер. IX междунар. науч.-практ. конф., г. Махачкала, 31 октября, 2015 г. – Махачкала: ООО «Апробация», 2015. – С. 8–9.

44. Вовк Л.П. Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред / Л. П. Вовк, Б. В. Соболев // Прикладная математика и механика – 2005. – Т. 69, вып. 2. – С. 279–289.

45. Вовк Л.П. Особенности динамического прочностного расчета автомобильных деталей сложной конфигурации / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Проблемы развития транспортной отрасли: Сб. тезисов докл. I республ. науч.-практ. конф., г. Горловка, 16 июня 2016 г. / Автомобильно-дорожный институт ГОУВПО «ДонНТУ». – Горловка: АДИ ДонНТУ, 2016. – С. 21–28.

46. Вовк Л.П. Особенности динамического прочностного расчета анизотропных термоупругих областей / Л. П. Вовк, Е. С. Кисель // Современные проблемы механики сплошной среды: Тезисы докл. XVIII междунар. конф., г. Ростов-на Дону, 13 октября 2015 г. – Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2015. – С. 44.

47. Вовк Л.П. Особенности динамического прочностного расчета деталей сложной конфигурации / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Вести Автомоб.-дор. ин-та ДонНТУ. – 2016. – № 2 (2). – С. 12–18.

48. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л. П. Вовк. – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267 с.

49. Вовк Л.П. Перспективные задачи исследований термоупругих эффектов в кусочно-неоднородных телах с нерегулярной границей / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель, Е.А. Новицкая. // Научный взгляд в будущее. – 2016. – Т. 7, № 1 (1). – С. 198–200.

50. Вовк Л.П. Распределение энергии деформации по площади термоупругого неоднородного сечения детали на резонансных частотах / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Вести Автомоб.-дор. ин-та ДонНТУ. – 2016. – № 1 (18). – С. 46–54.

51. Вовк Л. П. Решение краевых задач для термоупругих однородных областей с негладкой границей / Л. П. Вовк, К. С. Кисель, О. Б. Калашникова // European Applied Sciences: modern approaches in scientific researches, 7th International Scientific Conference: Papers of the 7th International Scientific Conference, Stuttgart, Germany, December 16, 2013. – Stuttgart, Germany: ORT Publishing, 2013 – P.22–25.

52. Вовк Л.П. Розв'язання крайових задач термопружних областей з негладкою границею / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль // Вісник Терноп. держ. техн. ун-ту. – 2009. – Т. 14, № 4. – С.176–180.
53. Вовк Л.П. Численный анализ зависимости параметров локальной особенности от термоупругих параметров среды / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: Сб. статей по матер. XVI междунар. заоч. науч.-практ. конф. – № 4 (16) – М.: Изд-во «Междунар. центр науки и образования», 2014. – С. 89–96.
54. Вовк Л.П. Якісний аналіз особливостей концентрації термічних напружень у деталях з нерегулярною границею / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль // Вісті Автомоб.-дор. ін-ту. – 2009. – № 1(8). – С. 13–23.
55. Ворович Е. И., Пряхина О. Д. Об одном эффективном методе решения задачи о колебании упругой балки на упругом слое / Е. И. Ворович, О. Д. Пряхина // Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1989. – № 4.– С. 96–101.
56. Ворович И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 319 с.
57. Галлагер Р. Метод конечных элементов / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 432 с.
58. Гетман И. П. Об отражении изгибных волн Лэмба от границы раздела двух состыкованных полуполос / И. П. Гетман, О. Н. Лисицкий // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 54–59.
59. Гетман И. П. Математическая теория твердых нерегулярных волноводов / И. П. Гетман, Ю. А. Устинов. – Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1993. – 140 с.
60. Гетман И. П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос / И. П. Гетман, О. Н. Лисицкий // Прикладная математика и механика. – 1988. – Т. 52, вып. 6. – С. 1044–1048.
61. Глушков Е. В. Сингулярность напряжений в многогранных угловых точках упругих разномодульных соединений / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, Р. Хофф // Доклады АН СССР. – 2000. – Т. 370. – С. 181–185.
62. Городецкая Н. С. Еще раз о краевом резонансе / Н. С. Городецкая // Акустичний вісник.– 2000.– Вып. 3, № 4. – С. 35–44.

63. Городецкий А. С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А. С. Городецкий. – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.
64. Греков М. А. Сингулярная плоская задача теории упругости / М. А. Греков. – С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. ун-та, 2001. – 192 с.
65. Греков М. А. Сингулярные решения и интегральные уравнения плоской задачи теории упругости. Исследования по механике строительных конструкций и материалов / М. А. Греков. – С.-Пб.: С.-Пб. гос. архитектурно-строительный ун-т, 1999. – С. 75–92.
66. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Г. Паничкин. – М.: Машиностроение, 1984. – 182 с.
67. Григолюк Э. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э. И. Григолюк, Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак. – К.: Наукова думка, 1979. – 364 с.
68. Гримадо П. Б. О температурных напряжениях в полубесконечном теле, возникающих в результате мгновенно приложенного ступенчатого потока / П. Б. Гримадо // Прикладная механика. – 1970. – № 4. – С. 247–248.
69. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К.: Наукова думка, 1981. – 283 с.
70. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – К.: Наукова думка, 1978. – 264 с.
71. Гринченко В. Т. Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах / В. Т. Гринченко, Н. С. Городецкая // Акустичний вісник. – 2004. – Вып. 7, № 1. – С. 30–43.
72. Гринченко В. Т. О резонансе в полубесконечной упругой полосе / В. Т. Гринченко, В. Т. Мелешко // Прикладная механика. – 1980. – № 2. – С. 58–63.
73. Даниловская В. И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы / В. И. Даниловская // Прикладная математика и механика. – 1950. – Т. 14, № 3. – С. 316–318.
74. Даниловская В. И. Об одной динамической задаче термоупругости / В. И. Даниловская // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16, № 3. – С. 341–344.

75. Доля Е. В. Колебания и виброразогрев упруго-вязкоупругой прямоугольной слоистой призмы под действием вибрирующего штампа / Е. В. Доля, О. П. Червинко // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 8. – С. 71–79.
76. Зарубин В. С. Расчет теплонапряженных конструкций / В. С. Зарубин, И. В. Станкевич – М.: Машиностроение, 2005. – 352 с.
77. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике / О. С. Зенкевич. – М.: МИР, 1975. – 542 с.
78. Каландия А. И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов / А. И. Каландия // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 1. – С. 132–135.
79. Калоеров С. А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки / С. А. Калоеров, Д. А. Добряк // Вісник Донец. ун-ту. Сер. А Природничі науки. – 2006. – Вып. 2. – С. 77–88.
80. Као Т. Т. О термически возбуждаемых волнах напряжений в полубесконечной среде с законом теплопроводности, отличным от закона Лурье / Т. Т. Као // Ракетная техника и космонавтика. – 1976. – Т. 14, № 6. – С. 142–143.
81. Кисель Е. С. Анализ влияния температурного фактора на локальную концентрацию напряжений в термоупругом слое / Е. С. Кисель, М. А. Абаза // Математическая культура инженера: Матер. студ. науч.-техн. конф., г. Донецк, 16 апреля, 2013 г. – Донецк: ДонНТУ, 2013. – С. 39–42.
82. Кисель Е. С. Зависимость собственных частот термоупругой области от коэффициента температурного расширения и модуля сдвига / Е. С. Кисель, О. Б. Калашникова // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: Сб. статей по матер. XIII междунар. заоч. науч.-практ. конф. – № 1 (13). – М.: Изд-во «Междунар. центр науки и образования», 2014. – С. 50–55.
83. Кисель Е. С. Исследование явления краевого резонанса конечной неоднородной термоупругой области / Е. С. Кисель, О. Б. Калашникова // Теоретические и практические проблемы развития науки: Сб. матер. III междунар. науч.-практ. конф., г. Махачкала, 30 ноября, 2013 г. – Махачкала: ООО «Апробация», 2013. – С. 25–28.

84. Кисель Е.С. Обзор основных методов решения краевых задач термоупругости / Е.С. Кисель, Е.А. Новицкая // Молодёжный форум: технические и математические науки: Тр. Междунар. науч.-практ. конф., г. Воронеж, 9-12 ноября 2015 года. – Воронеж: ВГЛТУ, 2015. – С. 45–48.
85. Кисель Е.С. Обзор основных методов решения связанных задач термоупругости / Е.С. Кисель, А.С. Столярова // Молодёжный форум: технические и математические науки: Тр. Междунар. науч.-практ. конф., г. Воронеж, 9-12 ноября 2015 года. – Воронеж: ВГЛТУ, 2015. – С. 52–55.
86. Кисель Е.С. Численный анализ характеристик волнового поля в задачах диагностики неоднородных термоупругих деталей / Е.С. Кисель // Вісті Автомоб.-дор. ін-ту. – 2014. – № 2 (17) – С. 47–57.
87. Кисіль К.С. Анализ распределения энергии в особых областях прямоугольного сечения для разных форм колебаний / К.С. Кисіль, И.С. Граков // Сб. науч. тр. SWorld. –Т. 3, вып. 3. – Иваново: МАРКОВА АД, 2013. – С. 99–103.
88. Кисіль К.С. Асимптотичний аналіз крайових задач еліптичного типу для областей з нерегулярною границею / К.С. Кисіль // Вісник науковця–2009: Зб. матер. Всеукр. наук.-практ. конф., м. Миколаїв, 2 квітня 2009 р. – Миколаїв: НУК, 2009. – С. 288.
89. Кисіль К.С. Исследование спектра резонансных частот упругих и термоупругих областей с негладкой границей / К.С. Кисіль, Т.В. Боднар // XIV міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: Мат. конф., м. Київ, 19-21 квітня 2012 р. – Київ: НТУУ, 2012, Т. 1. – С.118.
90. Кисіль К.С. Комплексний асимптотичний метод рішення сингулярної системи / К.С. Кисіль, І.В. Даниленко // XIII міжнар. конф. ім. акад. М. Кравчука: Матер. конф., м. Київ, 13-15 травня 2010 р. – Київ: НТУУ, 2010, Т. 2. – С.126.
91. Кисіль К.С. Крайові задачі термопружних областей з негладкою границею / К.С. Кисіль, Р.С. Астанін // XIV міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука: Мат. конф., м. Київ, 19-21 квітня 2012 р. – Київ: НТУУ 2012, Т. 1. – С.72.
92. Кисіль К.С. Метод суперпозицій у розрахунку призматичних термопружних деталей прямокутного перерізу / К.С. Кисіль // Альянс наук: вчений – вченому, VI

міжнар. наук.-практ. конф.: Зб. наук. праць, м. Дніпропетровськ, 18-19 березня 2009 р. – Дніпропетровськ: ПДАБА, 2009, Т. 4. – С. 115.

93. Ковалев В. А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / В. А. Ковалев, Ю. Н. Радаев. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2010. – 328 с.

94. Коваленко М. Д. Однородные решения теории упругости. Биортогональные разложения / М. Д. Коваленко, Н. В. Клейн // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т 11, № 3. – С. 393–408.

95. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. // Труды Московского математического общества. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.

96. Космодамианский А. С. Определение напряженного состояния многосвязных трансформных пластин / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 5. – С. 909–917.

97. Космодамианский А. С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А. С. Космодамианский, В. И. Сторожев. – К.: Наукова думка, 1985. – 175 с.

98. Космодамианский А. С. Толстые многосвязные пластины / А. С. Космодамианский, В. А. Шалдырван. – К.: Наукова думка, 1978. – 240 с.

99. Крысько В. А. О влиянии эффекта температурной связанности полей температуры и деформации на динамическую устойчивость пологих оболочек / В. А. Крысько, В. Ф. Кириченко, Н. А. Хаметова // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, №11. – С. 46–50.

100. Ламзюк В. Д. Основные граничные задачи плоской теории упругости для составного клина / В. Д. Ламзюк, А. И. Феденко // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск: Днепр. ун-т, 1979. – Вып. 3. – С. 64–75.

101. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости / Н. Н. Лебедев. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1937. – 110 с.

102. Леонтьев Н. В. Применение системы ANSYS к решению задач модального и гармонического анализа / Н. В. Леонтьев. – Нижний Новгород, 2006. – С. 54–70.

103. Мазья В. Г. О коэффициентах в асимптотике решения эллиптических краевых задач вблизи ребра / В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 229, №1. – С. 33–36.
104. Матросов А. В. Метод суперпозиции: общее решение для упругого шестигранника / А. В. Матросов // Методы прикладной математики в транспортных системах. – СПб.:СПГУВК, 1998. – С. 170–177.
105. Мелешко В. В. Метод суперпозиции в задачах о тепловых напряжениях в прямоугольных пластинах / В. В. Мелешко // Прикладная механика. – 2005. – Т.41, № 9. – С. 101 – 117.
106. Мелешко В. В. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней / Мелешко В. В., Папков С. О. – Акустичний вісник. – 2009. – Т. 12, № 4.– С. 34–51.
107. Мелешко В. В. Упругие волноводы: история и современность. /В. В. Мелешко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
108. Моисеенко И.А. Распространение волн в анизотропных неоднородных цилиндрах секторного сечения со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью / И.А. Моисеенко, Е.С. Кисель // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 2. – С. 36–53.
109. Мысовский Ю. В. Однородные решения пространственных задач о вынужденных колебаниях трансформных пластин / Ю. В. Мысовский, В. И. Сторожев, В. А. Шалдырван // Теоретическая и прикладная механика. – 1977. – № 8. – С. 66–73.
110. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
111. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
112. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. Фрид. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

113. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учебное пособие для вузов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М.: Высшая школа, 1985.
114. Павлов С. П. Оптимизация формы термоупругих тел: монография / С. П. Павлов, В. А. Крысько. – Саратов: СГТУ, 2000. – 160 с.
115. Папков С. О. О локализации собственных частот прямоугольной призмы посредством исключения неизвестных в квазирегулярной бесконечной системе / С. О. Папков, В. Н. Чехов // Доповіді НАН України. – 2004.– № 10.– С. 57–62.
116. Папкович П. Ф. Общий интеграл тепловых напряжений / П. Ф. Папкович // Прикладная математика и механика. – 1937. – Т.1, № 2. – С. 245 – 246.
117. Партон В. З. Интегральные уравнения теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1977. – 311 с.
118. Партон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
119. Пельц С. П. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы / С. П. Пельц, В. М. Шихман // Доклады АН СССР. –1987. – Т. 295, № 4.– С. 821–824.
120. Постнов В. А. Строительная механика корабля и теория упругости: учебник для вузов: в 2 т. / В. А. Постнов // – Л: Судостроение, 1987. – Т. 1. – 288 с.
121. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям / В. К. Прокопов // Труды Ленинградского политехнического ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31–46.
122. Прокофьев Б. М. Контактная задача для составного клина / Б. М. Прокофьев // Взаимодействие в механике конструкций. – К., Одесса, 1980. – С. 52–59.
123. Раппорт Р. М. Однородные решения теории деформации многослойного полупространства и некоторые их приложения /Р. М. Раппорт // Известия АН Арм. ССР. – 1984.– Т. 37, № 1. –С. 23–34.
124. Розин Л. А. Задачи теории упругости и численные методы их решения / Л. А. Розин. – СПб.: СПбГТУ, 1998 . – 532 с.

125. Сафарян Н. Б. О малонапряженности плосконапряженного составного клина / Н. Б. Сафарян // Изв. АН Армении. Механика.– 1994.– Т. 47, № 5–6. – С. 49–54.
126. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
127. Синицин А. П. Метод конечных элементов в динамике сооружений / А. П. Синицин – М.: Стройиздат, 1978. – 230 с.
128. Соболев Б.В. Обобщение метода суперпозиции решения краевых задач теории термоупругости для тел с нерегулярной границей / Б.В. Соболев, Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Инновация, экология и ресурсосберегающие технологии на предприятиях машиностроения, авиастроения, транспорта и сельского хозяйства: Тр. IX междунар. науч.-техн. конф., г. Ростов на Дону, 6-8 октября 2010 г. – Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ, 2010. – С. 465–469.
129. Сторожев В. И. Особенности спектра собственных колебаний трансформированной дисковой пластины в окрестности краевого резонанса / В. И. Сторожев, Ю. В. Мысовский, О. Д. Соколова // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 184–189.
130. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс: пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 352 с.
131. Тужилин А. А. Новые представления дифракционных полей в клиновидных областях с идеальными границами / А. А. Тужилин // Акустический журнал. – 1963. – Т. 9, вып. 2. – С. 19–27.
132. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю. А. Устинов // Ростов-н/Д: ООО ЦВВР. – 2006. – С. 256.
133. Устинов Ю. А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит / Ю. А. Устинов // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 216, № 4. – С. 755–758.
134. Устинов Ю. А. О полноте системы однородных решений теории плит // Прикладная математика и механика, – 1976, –Т.40, Вып. 3. – С.236–243.
135. Устинов Ю. А. О структуре погранслоя в слоистых плитах / Ю.А. Устинов // Доклады АН СССР. –1976. – Т. 229, № 2 .– С. 325–328.

136. Уфимцев П. Я. Поперечная диффузия при дифракции на клине / П. Я. Уфимцев // Радиотехника и электроника. – 1965. – Т.9. – С. 234-345.
137. Фильштинский Л. А. Двумерные фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Сиренко // Теоретическая и прикладная механика – Х.: Основа, 2003. – Вып. 37. – С. 157–161.
138. Фильштинский Л. А. Фундаментальные решения связанной термоупругости / Л. А. Фильштинский, Ю. В. Сиренко, Н. В. Литвиненко // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С. 140–142.
139. Auld B. A. A variational analysis of edge resonance in semi-infinite plate / B. A. Auld, E. J. Tsao // IEEE Trans. SU.– 1977.– V. 24, № 5. – P. 317–326.
140. Bahtui A. Coupled Thermoelasticity of of Functionally Graded Cylindrical Shells / A. Bahtui, M. R. Eslami // Mechanics Research Commun.– 2007. – V. 34. – P. 1–18.
141. Bogy D. B. Plane steady vibrations of an orthogonal elastic wedge / D. B. Bogy, K. C. Wang // J. Elasticity. –1974. – V. 4, № 1. – P. 310–315.
142. Bogy D. B. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials / D. B. Bogy // Int. J. Solids Struct. – 1971. – № 7. – P. 993–1005.
143. Budaev B. V. Diffraction by a plane sector / B. K. Budaev, D. B. Bogy // Proc. Roy. Soc. A. – 2006.– P. 3529–3546.
144. Budaev B. V. Rayleigh wave scattering by a wedge. Part I. / B. K. Budaev, D. B. Bogy // Wave Motion. – 1995. – V. 23, № 5.– P. 239–257.
145. Chen Dai-Heng. Analysis of stress singularity at a vertex of bonded wedges based on the separation of variables technique / Chen Dai-Heng // Nihon kikai gakkai ronbunshu. A Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. – 1999. – V. 65, №. 635. – P. 1–8.
146. Chen Dai-Heng. Logarithmic singular stress field in bonded wedges / Chen Dai-Heng // A Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. –1993. –V. 59, № 567. – P. 2687–2693.
147. Darinskii A. N. Weakly localized waves on the corrugated surface / A. N. Darinskii // J. Acoust. Soc. Am. – 2000. – № 107(5). – P. 2447–2453.
148. Erbay S. Longitudinal wave propagation in a generalized thermo-elastic cylinder / S. Erbay, E. Suhubi // J. Thermal. Stresses. – 1986 . – Vol. 9. – P. 279 –295.

149. Forray M. Buckling of Heated Rectangular plates / M. Forray, M. Newman // *Machine Design*. – 1962. – Vol. 34, №13. – P. 24–93.
150. Forray M. J. Permanent Buckling of Simply Supported Rectangular Plates Under Arbitrary Symmetrical Temperature Distributions / M. J. Forray // *Republe Aviation Corp. Rep. NE-SAM-16*, 1956, June.
151. Forray M. On the postbuckling behaviour of rectangular plates/ M. Forray, M. Newman // *J. of the Aerospace Sciences* . –1962. –Vol. 29. – № 6.
152. Fuchs K. Investigation of wave propagation in wedge-shaped media / K. Fuchs // *Z. Geophys.* – 1965. – V. 31. – № 2. – P. 261–293.
153. Gajendar N. Deformation and thermal stress in a rectangular plate / N. Gajendar // *Arch. mech. Stosowanej.* – 1965. – V. 17. – № 2. – P. 3–17.
154. Gautesen A. K. On scattering of an SH-wave by a corner comprised of two different elastic materials / A. K. Gautesen // *Mechanics of Materials*. – 2003. – V. 35. – Issues 3–6. – P. 407–414.
155. Hein V. L. Stress singularities in a two-material wedge / V. L. Hein, F. Erdogan // *Int J. Fract. Mech.* –1971. – V.7, № 3. –P. 317–330.
156. Massalasa C. V. Propagation of thermoelastic waves in an infinite circular cylinder with thermal relaxation / C. V. Massalasa, G. Tsolakidisa // *Journal of Sound and Vibration*. – 1987. – Vol. 117(3). – P. 529–535.
157. Mishuris G. S. Boundary value problems for Poisson's equation in a multi-wedge multi-layered region / G. S. Mishuris // *Arch. Mech.* 1996. –Vol. 48, № 4. – P. 711–745.
158. Misra J. C. Study of thermoelastic wave propagation in a half-space using GN theory / J. C. Misra // *Journal of Thermal Stresses*. – 2000. – № 23. – P. 327–351.
159. Nasedkin A.V. Finite element modeling of coupled problems: textbook / A. V. Nasedkin, A. A. Nasedkina // *Rostov-on-Don: publishing house of Southern Federal University*. – 2015. – P. 75–106.
160. Nkemzi B. On solution of Lamé equations in axisymmetric domains with conical points / B. Nkemzi // *Math. Methods Appl. Sciences*. – 2005. – V. 28.– P. 29–41.
161. Noda N. Stress singularities in edge-bonded dissimilar wedges / N. Noda, T. Tsuji // *Trans JSME*. – 1992. –V. 58, № 546. – P. 123–129.

162. Norris A. N. Thermoelastic Relaxation in Elastic Structures With Application to Thin Plates / A. N. Norris // *Quart. J. Mech. Appl.*– 2005. –№ 58 (1). – P. 145–163.
163. Oden J. T. Variational methods in theoretical mechanics / J. T. Oden, J. N. Reddy // Heidelberg: Springer – Verlag, 1976. – 502 p.
164. Onoe M. Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod / M. Onoe // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1961.– 33, № 11. – P. 1627.
165. Sinclair G. B. (2004) Stress Singularities in Classical Elasticity – I: Removal, Interpretation and Analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 57. – № 4 – P. 251-297.
166. Sinclair, G. B. (2004) Stress Singularities in Classical Elasticity – II: Removal, Interpretation and Analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 57. – № 5 – P. 385-439.
167. Stainier L. Study and validation of a variational theory of thermo-mechanical coupling in finite visco-plasticity / L. Stainier, M. Ortiz // *International Journal of Solids and Structures*. – 2010.– № 47. – P. 705–715.
168. Stein E. Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics // WILEY.– 2003.– T. 3.– 424 s.
169. Sunakawa M. Deformation and thermal stress in a rectangular plate subjected to atrodynamic heating / M. Sunakawa, V. Uemura // *Aeronautical Rsch. Inst., Univ. of Toky.* – 1960.– Rep. № 359. – P. 240–256.
170. Todhunter I. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials from Galilei to the present time / I. Todhunter. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1886. – V. 1. – P. 544–626.
171. Wong H. L., Luco J. E. Dynamic response of rectangular foundations to obliquely incident seismic waves / H. L. Wong, J. E. Luco // *Earthquake Eng. and Struct. Dyn.* – 1978. – V.6, № I. – P. 3–16.
172. Zhang N., Joseph P. F. A nonlinear finite element eigenanalysis of singular plane stress fields in bimaterial wedges including complex eigenvalues / N. Zhang, P. F. Joseph // *Int. J. Fract.* – 1998. – V. 90, № 3. – P. 175–207.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Операторы, входящие в состав СИУ

$$L_{13}f_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{13k} \cos \alpha_k (y - \eta) \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{3k} \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi,$$

$$L_{14}f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{14j} \int_{-1}^1 f_{4j} \cos \beta_j (\xi - 1) d\xi,$$

$$L_{21}f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\alpha_k}{\Omega^2} \Delta_{21k} \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k} \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi + (E_1 + 1)k_1 \frac{\cos(k_1 x)}{\sin(k_1)} \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{1k}(\xi) d\xi,$$

$$L_{22}f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\beta_j}{\Omega^2} \Delta_{22j} \cos \beta_j (x - 1) \int_{-1}^1 f_{2j} \cos \beta_j (\xi - 1) d\xi +$$

$$+ (E_1 - 1)k_2 \operatorname{ctg}(k_2 \eta) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{2j}(\xi) d\xi,$$

$$L_{23}f_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{23k} \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_{3k} \cos \alpha_k (\xi - \eta) d\xi,$$

$$L_{24}f_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_{24j} \cos \beta_j (x - 1) \int_{-1}^1 f_{4j} \cos \beta_j (\xi - 1) d\xi,$$

где $\Delta_{13k} = \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(-p_{3k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{\Omega_1 (p_{1k}^2 - p_{3k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times$

$$\times \left(\frac{\operatorname{cth}(p_{1k})(p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{1k}} - \frac{\operatorname{cth}(p_{3k})(p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 - \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{3k}} \right),$$

$$\Delta_{14j} = \frac{(-q_{1j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(q_{3j}^2 E_1 - \beta_j^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{\Omega_1 (q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{chs(q_{1j}y)(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{1j}} - \frac{chs(q_{3j}y)(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{3j}} \right), \\
\Delta_{21k} &= chs(p_{1k}x) \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + p_{1k}^2 + \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{2\alpha_k p_{1k} (p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times (p_{3k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2) - 2p_{2k} \alpha_k chs(p_{2k}x) + \\
& \quad + chs(p_{3k}x) \frac{(-p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 + \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{2\alpha_k p_{3k} (p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times (p_{1k}^2 - p_{2k}^2)(p_{2k}^2 + \alpha_k^2), \\
\Delta_{22j} &= cth(q_{1j}\eta) \frac{(q_{1j}^2 E_1 + q_{1j}^2 - \beta_j^2 E_1 + \beta_j^2)(\beta_j^2 E_1 - q_{1j}^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{2\beta_j q_{1j} (q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times (q_{2j}^2 - q_{3j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2) + 2q_{2j} \beta_j cth(q_{2j}\eta) + \\
& \quad + cth(q_{3j}\eta) \frac{(q_{3j}^2 E_1 + q_{3j}^2 - \beta_j^2 E_1 + \beta_j^2)(-\beta_j^2 E_1 + q_{3j}^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{2\beta_j q_{3j} (q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times (q_{2j}^2 - q_{1j}^2)(q_{2j}^2 + \beta_j^2), \\
\Delta_{23k} &= \frac{(-p_{1k}^2 E_1 + \alpha_k^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(p_{3k}^2 E_1 - \alpha_k^2 E_1 - E_1 \Omega_2 - \Theta_1 \Omega_1)}{\Omega_1 (p_{3k}^2 - p_{1k}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times \left(\frac{chs(p_{1k}x)(p_{1k}^2 E_1 - p_{1k}^2 - \alpha_k^2 E_1 - \alpha_k^2)}{p_{1k}} + \frac{chs(p_{3k}x)(-p_{3k}^2 E_1 + p_{3k}^2 + \alpha_k^2 E_1 + \alpha_k^2)}{p_{3k}} \right), \\
\Delta_{24j} &= \frac{(-q_{1j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)(-q_{3j}^2 E_1 + \beta_j^2 E_1 + E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1)}{\Omega_1 (q_{3j}^2 - q_{1j}^2)(E_1 \Omega_2 + \Theta_1 \Omega_1 + \Omega^2 E_1)} \times \\
& \quad \times \left(\frac{cth(q_{1j}\eta)(q_{1j}^2 E_1 - q_{1j}^2 + \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{1j}} - \frac{cth(q_{3j}\eta)(q_{3j}^2 E_1 - q_{3j}^2 + \beta_j^2 E_1 - \beta_j^2)}{q_{3j}} \right).
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Выражения, определяющие нахождение асимптотики величин

$$\Delta_{11k}, \Delta_{12j}, \Delta_{13k}, \Delta_{14j}, \Delta_{21k}, \Delta_{22j}, \Delta_{23k}, \Delta_{24j}$$

$$\begin{aligned} S_2 = & -16\beta_j^4 \left(2E_1\Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1^3 + E_1^2\Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1 + \Theta_1\Omega_1 + 2\Omega^2 E_1^2 + E_1\Omega_2 + E_1^3\Omega_2 + \right. \\ & \left. + 2E_1^2\Omega_2 \right) - 8\beta_j^2 \left(2E_1^2\Omega_2^2 + \Theta_1^2\Omega_1^2 - \Omega^4 E_1^2 + E_1\Theta_1^2\Omega_1^2 + E_1\Omega_2^2 + 2E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1^2 \times \right. \\ & \times \Theta_1\Omega_1 - \Omega^4 E_1 + 3E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + \Omega^2 E_1^2\Omega_2 + \Omega_2\Theta_1\Omega_1 - \Omega^2\Theta_1\Omega_1 + E_1^3\Omega_2^2 + \\ & \left. + \Omega^2 E_1^3\Omega_2 \right) + 4 \left(E_1\Omega_2^2\Omega^2 + \Omega^2 E_1^2\Omega_2 + \Omega^2 E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + \Omega_2^2\Omega^2 E_1^2 + \Omega^4 E_1\Omega_2 + \right. \\ & \left. + \Omega^2\Theta_1\Omega_1\Omega_2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 = & \beta_j^6 \left(64\Omega^2\Omega_2 + 192\Omega^4 E_1 + 448\Omega^2 E_1^3\Omega_2 + 128\Omega_2^2 E_1 + 32E_1^4\Omega_2^2 + \right. \\ & \left. + 128E_1^3\Omega_2^2 - 32R^2 E_1^2 - 64R^2 E_1 + 128\Omega^4 E_1^4 + 32\Omega^4 + 384\Omega^4 E_1^3 + 416\Omega^4 E_1^2 + \right. \\ & \left. + 32\Omega_2^2 - 32R^2 + 128\Omega^2 E_1^3\Theta_1\Omega_1 + 192\Omega_2\Theta_1\Omega_1 E_1 + 192\Omega_2\Theta_1\Omega_1 E_1^2 + \right. \\ & \left. + 64E_1^3\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 192E_1^2\Omega_2^2 + 32\Theta_1^2\Omega_1^2 + 256\Theta_1\Omega_1\Omega^2 E_1 + 320\Theta_1\Omega_1\Omega^2 E_1^2 + \right. \\ & \left. + 64\Theta_1\Omega_1\Omega^2 + 64\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 320\Omega^2 E_1\Omega_2 + 64\Theta_1^2\Omega_1^2 E_1 + 128\Omega^2 E_1^4\Omega_2 + \right. \\ & \left. + 32\Theta_1^2\Omega_1^2 E_1^2 + 576E_1^2\Omega_2\Omega^2 \right) + \beta_j^4 \left(288\Omega^2 E_1^3\Omega_2^2 + 256\Omega^2 E_1^2\Omega_2^2 + 128\Omega^2 E_1^4\Omega_2^2 + \right. \\ & \left. + 32\Omega^2\Theta_1^2\Omega_1^2 - 32\Omega^2 R^2 E_1^2 - 96\Omega^4\Theta_1\Omega_1 - 32\Omega^4 E_1^3\Omega_2 - 208\Omega^4 E_1^2\Omega_2 - 48\Omega^4\Omega_2 - \right. \\ & \left. - 16R^2\Omega_2 + 32\Theta_1^3\Omega_1^3 + 96E_1^2\Omega_2^3 + 16E_1^4\Omega_2^3 - 192\Omega^4 E_1\Omega_2 - 32\Omega^6 + 16\Omega_2^3 - \right. \\ & \left. + 32\Omega^2 R^2 - 128\Omega^4\Theta_1\Omega_1 E_1^2 - 256\Omega^4\Theta_1\Omega_1 E_1 + 288\Omega^2 E_1^3\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + \right. \\ & \left. + 64\Omega_2^3 E_1 - 304E_1^3\Omega_2^6 + 80\Omega^2 E_1\Omega_2^2 + 64E_1^3\Omega_2^3 + 32\Omega^4\Theta_1\Omega_1 E_1^3 + \right. \\ & \left. + 215\Omega^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 E_1^2 + 192E_1\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 176\Theta_1^2\Omega_1^2\Omega^2 E_1 + 64E_1^3\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + \right. \\ & \left. + 80\Theta_1^2\Omega_1^2 E_1^2\Omega_2 + 160\Theta_1^2\Omega_1^2 E_1\Omega_2 + 16\Theta_1^2\Omega_1^2\Omega^2 E_1^3 + 192E_1^2\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + \right. \\ & \left. + 32\Theta_1\Omega_1\Omega^2 E_1^4\Omega_2 - 208\Omega^6 E_1 - 64\Omega^6 E_1^4 + 32\Omega^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 - 16\Omega^2 R^2 E_1^3 + \right. \\ & \left. + 64\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 32\Omega^4 E_1^4\Omega_2 - 32R^2 E_1\Omega_2 + 16\Omega^2 R^2 E_1 - 32R^2\Theta_1\Omega_1 + 80\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2 + \right. \\ & \left. + 16E_1^5\Omega_2^2\Omega^2 + 32\Theta_1^3\Omega_1^3 E_1 - 16R^2 E_1^2\Omega_2 + 160\Theta_1^2\Omega_1^2\Omega^2 E_1^2 + 288\Omega^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 E_1 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -32R^2E_1\Theta_1\Omega_1) + \beta_j^2(-44\Omega^4\Theta_1^2\Omega_1^2 - 88\Omega^6E_1^2\Omega_2 - 128E_1^3\Omega^6\Omega_2 - 8\Omega^2\Theta_1^3\Omega_1^3 + \\
& + 8\Omega^6\Omega_2 + 56\Omega^8E_1^3 - 188\Omega^4E_1^2\Omega_2^2 - 156\Omega^4E_1^3\Omega_2^2 - 56\Omega^4\Omega_2\Theta_1\Omega_1 - 2R^4E_1 - \\
& - 2E_1^5\Omega_2^4 - 6E_1^4\Omega_2^4 - 4E_1^3\Omega_2^4 + 2\Theta_1^4\Omega_1^4 + 16\Omega^2E_1^3\Omega_2^3 + 8\Omega^2E_1^4\Omega_2^3 + 4\Omega_2^4E_1^2 + \\
& \quad + 6\Omega_2^4E_1 - 8\Omega^4E_1^5\Omega_2^2 - \\
& - 72\Omega^4\Theta_1^2\Omega_1^2E_1^2 + 70\Omega^8E_1 + 120\Omega^8E_1^2 - 12\Omega_2^2\Omega^4 - 56\Omega^4E_1^4\Omega_2^2 + 2R^4 - 8\Omega_2^3\Omega^2 - \\
& - 12R^2\Omega^4 + 2\Omega_2^4 + 10\Omega^8 + 8\Omega^2R^2\Omega_2 - 24\Omega^2\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2 - 8\Omega^4\Theta_1^2\Omega_1^2E_1^3 - 92\Omega^4E_1\Omega_2^2 + \\
& + 8R^2\Omega^4E_1^2 - 4R^2\Omega^4E_1 + 24\Omega^2E_1^2\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 - 24\Omega_2^2\Omega^2\Theta_1\Omega_1 - 16\Omega^4\Theta_1\Omega_1E_1^4\Omega_2 + \\
& \quad + 16\Omega_2^3\Theta_1\Omega_1E_1 - 128\Omega^4\Theta_1\Omega_1E_1^3\Omega_2 - 312\Omega^4\Theta_1\Omega_1E_1^2\Omega_2 - 48\Omega^6E_1^3\Theta_1\Omega_1 - \\
& - 24\Omega^2E_1\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 12\Omega_2^2\Theta_1^2\Omega_1^2E_1 - 12\Omega_2^2\Theta_1^2\Omega_1^2E_1^2 - 132\Omega^4\Theta_1^2\Omega_1^2E_1 + \\
& \quad + 8R^2E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 - 8\Omega^2R^2E_1\Theta_1\Omega_1 - 8E_1^4\Omega_2^3\Theta_1\Omega_1 - 48\Omega^6E_1^2\Theta_1\Omega_1 - \\
& - 12E_1^3\Omega_2^2\Theta_1^2\Omega_1^2 - 8R^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 8\Omega^2\Theta_1^3\Omega_1^3E_1 + 24\Omega^2\Theta_1^2\Omega_1^2E_1^2\Omega_2 - 4\Omega_2^2R^2 - \\
& \quad - 8\Omega^2R^2E_1^2\Omega_2 + 8R^2\Omega^4E_1^3 - 4R^2\Theta_1^2\Omega_1^2 + 12\Omega_2^2\Theta_1^2\Omega_1^2 - 4\Omega_2^2R^2E_1 + \\
& + 4E_1^3\Omega_2^2R^2 - 16\Omega^2\Omega_2^3E_1 - 2\Theta_1^4\Omega_1^4E_1 + 8\Omega_2\Theta_1^3\Omega_1^3 + 4E_1^2\Omega_2^2R^2 + 8\Omega_2^3\Theta_1\Omega_1 + \\
& + 40\Omega^6\Theta_1\Omega_1 - 48\Omega^6E_1^4\Omega_2 + 24\Omega^2E_1^3\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 4R^2E_1\Theta_1^2\Omega_1^2 - 256\Omega^4E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + \\
& \quad + 8\Omega^2R^2\Theta_1\Omega_1 - 16\Omega_2^3E_1^3\Theta_1\Omega_1 + 56\Omega^6E_1\Theta_1\Omega_1 - 8\Theta_1^3\Omega_1^3E_1^2\Omega_2) - \\
& - 40\Omega^4\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2E_1 - 8\Omega^4\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2 + 16\Omega^8E_1^3\Omega_2 - \Omega^2\Theta_1^4\Omega_1^4 + \\
& + 2\Omega^2E_1^3\Omega_2^4 + 3\Omega^2E_1^4\Omega_2^4 + \Omega^2E_1^5\Omega_2^4 + \Omega^2R^4E_1 - 3\Omega^2\Omega_2^4E_1 - 2\Omega^2\Omega_2^4E_1^2 - \\
& - 4\Omega^4\Theta_1^3\Omega_1^3 + 2\Omega^2\Omega_2^2R^2 - 8\Omega^4\Omega_2^3E_1 + 6\Omega^6E_1^2\Omega_2^2 + 24\Omega^8E_1^2\Omega_2 + 8\Omega^6R^2E_1^2 - \\
& - 8\Omega^6E_1^4\Omega_2^2 + 10\Omega^6\Omega_2^2E_1 + 6\Omega^6R^2E_1 - 8\Omega^4E_1^4\Omega_2^3 + 10\Omega^6\Theta_1^2\Omega_1^2 - 4\Omega^8\Theta_1\Omega_1 - \\
& - 10\Omega^6E_1^3\Omega_2^2 - 24\Omega^4E_1^2\Omega_2^3 + 8\Omega^8E_1\Omega_2 - 7\Omega^{10}E_1 - 8\Omega^{10}E_1^2 - \Omega^{10} - \Omega^2\Omega_2^4 + \\
& \quad + 2\Omega^6R^2 - \Omega^2R^4 + 2\Omega^6\Omega_2^2 - 28\Omega^4E_1^3\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 - 2\Omega^2E_1^3\Omega_2^2R^2 - \\
& - 60\Omega^4E_1^2\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 4\Omega^6E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 - 16E_1^3\Omega^6\Omega_2\Theta_1\Omega_1 - 32\Omega^4\Theta_1^2\Omega_1^2E_1^2\Omega_2 - \\
& \quad - 8\Omega^6E_1^2\Theta_1^2\Omega_1^2 + 12R^2\Omega^4\Theta_1\Omega_1E_1 - 12\Omega^4E_1\Theta_1^3\Omega_1^3 + 14\Omega^6\Theta_1^2\Omega_1^2E_1 + \\
& + \Omega^2\Theta_1^4\Omega_1^4E_1 + 2\Omega^2\Omega_2^2R^2E_1 - 2\Omega^2E_1^2\Omega_2^2R^2 - 4\Omega^2\Omega_2\Theta_1^3\Omega_1^3 + 4R^2\Omega^4\Theta_1\Omega_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4\Omega^2 R^2 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 - 4\Omega_2^2 \Omega^4 \Theta_1 \Omega_1 + 16\Omega^8 E_1^2 \Theta_1 \Omega_1 + 4\Omega^2 E_1^4 \Omega_2^3 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + 8\Omega^2 E_1^3 \Omega_2^3 \Theta_1 \Omega_1 + 6\Omega^2 E_1^3 \Omega_2^2 \Theta_1^2 \Omega_1^2 + 12\Omega^6 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 - 36\Omega^4 E_1 \Omega_2^2 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + 8R^2 \Omega^4 E_1^2 \Omega_2 - 8\Omega_2^3 \Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 E_1 - 4\Omega_2^3 \Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 + 32\Omega^6 E_1 \Theta_1 \Omega_1 \Omega_2 - \\
& - 4R^2 \Omega^2 E_1^2 \Theta_1 \Omega_1 \Omega_2 - 6\Omega_2^2 \Omega^2 \Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1 + 4\Omega^2 \Theta_1^3 \Omega_1^3 E_1^2 \Omega_2 - 2\Omega^2 \Theta_1^2 \Omega_1^2 R^2 E_1 + \\
& + 2\Omega^2 \Theta_1^2 \Omega_1^2 R^2 + 8R^2 \Omega^4 \Omega_2 E_1 + 6\Omega_2^2 \Omega^2 \Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1^2 - 6\Omega_2^2 \Omega^2 \Theta_1^2 \Omega_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 = & \beta_j^5 (16\Theta_1 \Omega_1 + 16E_1^5 \Omega_2 + 64E_1^4 \Omega_2 + 16\Omega^2 E_1^5 + 64E_1^2 \Omega_2 + 64E_1^3 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + 96E_1^3 \Omega_2 + 64\Theta_1 \Omega_1 E_1 + 16E_1 \Omega_2 + 16E_1^4 \Theta_1 \Omega_1 + 96E_1^2 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + 96\Omega^2 E_1^3 + 16\Omega^2 E_1 + 64\Omega^2 E_1^2) + \beta_j^3 (8E_1^3 \Theta_1^2 \Omega_1^2 + 8E_1^5 \Omega_2 \Omega^2 - 8\Omega^4 E_1 + \\
& + 24\Omega_2 \Omega^2 E_1^3 + 8\Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 E_1^4 + 8\Omega_2^2 E_1 + 32E_1^4 \Omega_2^2 + 48E_1^3 \Omega_2^2 - 8\Omega^4 E_1^4 - \\
& - 24\Omega^4 E_1^3 + 16E_1^4 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + 8E_1^5 \Omega_2^2 + 16\Omega^2 E_1^3 \Theta_1 \Omega_1 + 40\Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 E_1 + \\
& + 72\Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 E_1^2 + 56E_1^3 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + 32E_1^2 \Omega_2^2 + 8\Theta_1^2 \Omega_1^2 - 16\Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 E_1 - \\
& - 8\Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 + 8\Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + 24\Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1 + 24\Omega^2 E_1^4 \Omega_2 + 24\Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1^2 + \\
& + 8E_1^2 \Omega_2 \Omega^2) + \beta_j (-2\Omega^2 E_1^2 \Omega_2^2 + 2\Omega^2 E_1^4 \Omega_2^2 - 2\Omega^2 R^2 E_1^2 + \Omega^4 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + E_1^2 \Theta_1^3 \Omega_1^3 - E_1^3 \Omega_2 R^2 - 5\Omega^4 E_1^3 \Omega_2 - 4\Omega^4 E_1^2 \Omega_2 + \Theta_1^3 \Omega_1^3 + 4E_1^2 \Omega_2^3 + \\
& + 4E_1^4 \Omega_2^3 - \Omega^4 E_1 \Omega_2 + 2\Omega^6 E_1^2 - 3\Omega^4 \Theta_1 \Omega_1 E_1^2 - E_1^2 R^2 \Theta_1 \Omega_1 + 3E_1^4 \Omega_2^2 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + 3E_1^3 \Omega_2 \Theta_1^2 \Omega_1^2 + E_1^5 \Omega_2^3 + 2\Omega^2 E_1^3 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 + \Omega_2^3 E_1 + E_1^3 \Omega_2^6 - \Omega^2 E_1 \Omega_2^2 + 6E_1^3 \Omega_2^3 - \\
& - 2\Omega^4 \Theta_1 \Omega_1 E_1^3 - 4\Omega^2 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 E_1^2 + 6E_1 \Omega_2^2 \Theta_1 \Omega_1 - 3\Theta_1^2 \Omega_1^2 \Omega^2 E_1 + 10E_1^3 \Omega_2^2 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + 8\Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1^2 \Omega_2 + 7\Theta_1^2 \Omega_1^2 E_1 \Omega_2 + \Theta_1^2 \Omega_1^2 \Omega^2 E_1^3 + 12E_1^2 \Omega_2^2 \Theta_1 \Omega_1 + \\
& + 2\Theta_1 \Omega_1 \Omega^2 E_1^4 \Omega_2 + \Omega^6 E_1 - 2\Omega^2 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 - \Omega^2 R^2 E_1^3 + \Omega_2^2 \Theta_1 \Omega_1 - 2\Omega^4 E_1^4 \Omega_2 - \\
& - R^2 E_1 \Omega_2 - \Omega^2 R^2 E_1 - R^2 \Theta_1 \Omega_1 + 2\Omega_2 \Theta_1^2 \Omega_1^2 + E_1^5 \Omega_2^2 \Omega^2 + 2\Theta_1^3 \Omega_1^3 E_1 - \\
& 2R^2 E_1^2 \Omega_2 - 6\Omega^2 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 E_1 - 2R^2 E_1 \Theta_1 \Omega_1),
\end{aligned}$$

$$S_5 = \beta_j^5 (-4E_1^2 \Omega_2^2 + 12E_1^2 \Omega^4 + 8E_1^2 \Omega_2 \Omega^2 + 4E_1^2 R^2 + 24E_1^2 \Omega^2 \Theta_1 \Omega_1 - 8E_1^3 \Omega_2 \Theta_1 \Omega_1 -$$

$$\begin{aligned}
& -8E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 - 4E_1^4\Omega_2^2 - 4\Theta_1^2\Omega_1^2E_1^2 - 8E_1^3\Omega_2^2 + 16\Omega^4E_1^3 + 8E_1^3\Omega_2\Omega^2 + 16\Theta_1\Omega_1E_1\Omega^2) + \\
& + \beta_j^3(-6\Theta_1^2\Omega_1^2E_1^2\Omega_2 - 2E_1^4\Omega_2^3 - 8\Omega^6E_1^3 - 4E_1^3\Omega_2^3 - 8E_1^2\Omega^6 + 2E_1^2R^2\Omega_2 + 4\Theta_1^2\Omega_1^2E_1\Omega^2 + \\
& + 8E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^2 - 4E_1\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2 - 2\Omega^4E_1^2\Omega_2 + 4E_1^3\Omega_2^2\Omega^2 - 2E_1^2\Omega_2^3 + 4E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^2 - \\
& - 6E_1^3\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 - 2\Theta_1^3\Omega_1^3E_1 + 2E_1R^2\Theta_1\Omega_1 - 10\Omega^4E_1\Theta_1\Omega_1 - 8E_1^2\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 4E_1^2\Omega_2^2\Omega^2 - \\
& - 8E_1^2\Omega^4\Theta_1\Omega_1 - 2E_1\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1) + \beta_j(E_1^4\Omega_2^3\Omega^2 - E_1^2R^2\Omega^2\Omega_2 + 2\Theta_1^2\Omega_1^2\Omega^2E_1\Omega_2 - \Omega^6E_1^2\Omega_2 - \\
& - E_1\Omega_2^2\Omega^4 + \Omega^6\Theta_1\Omega_1E_1 - 2\Omega^6E_1^3\Omega_2 - E_1^2R^2\Omega^4 + 3E_1^2\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2\Omega^2 - 2E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^4 - \\
& - E_1R^2\Omega^2\Theta_1\Omega_1 + 3E_1^3\Omega_2^2\Omega^2\Theta_1\Omega_1 - 2\Omega^6E_1^2\Theta_1\Omega_1 + E_1^2\Omega_2^3\Omega^2 + \Omega^8E_1^2 + E_1^4\Omega_2^2\Omega^4 + \\
& + 2E_1^3\Omega_2^2\Omega^2 + + 2E_1^3\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^4 + E_1\Omega_2^2\Omega^2\Theta_1\Omega_1 + \Theta_1^2\Omega_1^2E_1^2\Omega^4 - \\
& - 2\Theta_1^2\Omega_1^2E_1\Omega^4 - 2E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^4 + 4E_1^2\Omega_2^2\Omega^2\Theta_1\Omega_1 + \Theta_1^3\Omega_1^3E_1\Omega^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_6 = & \beta_j^4(32E_1\Theta_1\Omega_1 + 16\Theta_1\Omega_1 + 16E_1^3\Omega^2 + 16E_1^3\Omega_2 + 32E_1^2\Omega^2 + 16E_1\Omega^2 + 16E_1^2\Theta_1\Omega_1 + \\
& + 16E_1\Omega_2 + 32E_1^2\Omega_2) + \beta_j^2(-8\Omega^2\Theta_1\Omega_1 + 8E_1^3\Omega_2\Omega^2 + 8E_1^2\Omega_2\Omega^2 + 24E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1 - \\
& - 8E_1\Omega^4 + 8\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 8E_1^3\Omega_2\Omega^2 + 8E_1^2\Omega^2\Theta_1\Omega_1 + 8\Theta_1^2\Omega_1^2 + 8E_1^3\Omega_2^2 - 8E_1^2\Omega^4 + \\
& + 16E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 8\Theta_1^2\Omega_1^2E_1 + 16E_1^2\Omega_2^2) - E_1\Omega_2^2\Omega^2 - \Omega^4E_1\Omega_2 - 2\Omega^4E_1^2\Omega_2 + E_1^3\Omega_2^2\Omega^2 - \\
& - 2\Theta_1^2\Omega_1^2\Omega^2 - E_1R^2\Omega^2 + 2E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^2 - 2E_1\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^2 - 2\Omega_2\Theta_1\Omega_1\Omega^2 + \Theta_1^2\Omega_1^2E_1\Omega^2 + \\
& + \Omega^4\Theta_1\Omega_1 - 2\Omega^4E_1\Theta_1\Omega_1 + \Omega^6E_1 - R^2\Theta_1\Omega_1 + 3E_1^2\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 4E_1\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1 + 3E_1\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2 - \\
& - \Omega_2E_1R^2 + E_1^3\Omega_2^3 + 2E_1^2\Omega_2^3 + E_1\Omega_2^3 + \Theta_1^3\Omega_1^3 + 2\Omega_2\Theta_1^2\Omega_1^2 + \Omega_2^2\Theta_1\Omega_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_7 = & \beta^3(-4E_1^3R^2 + 8E_1^4\Omega_2\Omega^2 + 16E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 8E_1^3\Omega_2\Omega^2 + 24E_1^3\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 8E_1^4\Omega_2^2 + \\
& + 4E_1^3\Theta_1^2\Omega_1^2 + 4E_1^3\Omega^4 + 8E_1^3\Theta_1\Omega_1\Omega^2 + 16E_1^2\Theta_1\Omega_1\Omega^2 + 8E_1^4\Omega_2\Theta_1\Omega_1 + 16E_1\Theta_1^2\Omega_1^2 + \\
& + 16E_1^2\Theta_1^2\Omega_1^2 + 4E_1^3\Omega_2^2 + 4E_1^5\Omega_2^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_8 = & \beta^4(16\Omega_1E_1\Omega_2 + 32\Omega_1E_1^2\Omega_2 + 16\Omega_1\Omega^2E_1^3 + 16\Omega_1E_1^3\Omega_2 + 16\Theta_1\Omega_1^2 + 16E_1^2\Theta_1\Omega_1^2 + \\
& + 32\Theta_1\Omega_1^2E_1 + 16\Omega_1E_1\Omega^2 + 32\Omega_1E_1^2\Omega^2) + \beta^2(-8\Omega_1\Omega^4E_1^2 + 16E_1^2\Omega_2\Theta_1\Omega_1^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 24E_1\Theta_1\Omega_2\Omega_1^2 + 8E_1^2\Theta_1\Omega^2\Omega_1^2 + 8\Omega_1^3E_1\Theta_1^2 - 8\Omega_1E_1\Omega^4 + 8\Theta_1\Omega_2\Omega_1^2 + \\
& + 8\Omega_1E_1^3\Omega_2^2 - 8\Theta_1\Omega_1^2\Omega^2 + 8\Omega_1E_1\Omega_2^2 + 8\Omega_1E_1^3\Omega_2\Omega^2 + 8\Omega_1E_1^2\Omega_2\Omega^2 + \\
& + 8\Omega_1^3\Theta_1^2 + 16\Omega_1E_1^2\Omega_2^2) + \Omega_1E_1^3\Omega_2^2\Omega^2 - \Omega_1E_1\Omega_2^2\Omega^2 - \Omega_1E_1R^2\Omega_2 - \\
& - \Omega_1\Omega^4E_1\Omega_2 - \Omega_1\Omega^2E_1R^2 + 2E_1^2\Theta_1\Omega^2\Omega_2\Omega_1^2 + 3\Omega_1^3E_1\Theta_1^2\Omega_2 - 2E_1\Theta_1\Omega^4\Omega_1^2 + \\
& + 4E_1\Theta_1\Omega_2^2\Omega_1^2 + 3E_1^2\Omega_2^2\Theta_1\Omega_1^2 - 2\Omega_1\Omega^4E_1^2\Omega_2 - 2\Theta_1\Omega_1^2\Omega_2\Omega^2 + E_1\Theta_1^2\Omega_1^3\Omega^2 + \\
& + \Theta_1\Omega_1^2\Omega^4 + \Theta_1\Omega_1^2\Omega_2^2 + 2\Omega_1E_1^2\Omega_2^3 + \Omega_1E_1\Omega_2^3 + \Omega_1E_1^3\Omega_2^3 - 2E_1\Theta_1\Omega_1^2\Omega_2\Omega^2 + \\
& + \Omega_1^4\Theta_1^3 - \Theta_1\Omega_1^2R^2 + 2\Omega_1^3\Theta_1^2\Omega_2 - 2\Omega_1^3\Theta_1^2\Omega^2 + \Omega_1\Omega^6E_1.
\end{aligned}$$