

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Царенко Сергей Николаевич

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ
НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРУГИХ
СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор технических наук, профессор
Улитин Геннадий Михайлович

Донецк – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
РАЗДЕЛ 1. Основные методы и результаты численно-аналитических исследований по проблемам механики стержневых конструкций.....	18
1.1. Анализ областей применения неклассических вариантов стержневых моделей для анализа деформативных и прочностных свойств сооружений и элементов конструкций.....	18
1.2. Состояние исследований неклассических моделей изгиба и устойчивости стержневых систем.....	24
1.3. Актуальная проблематика исследований в области динамики продольных и крутильных колебаний стержней с осевой неоднородностью физико-механических свойств.....	28
1.4. Результаты исследований по проблеме динамического изгиба балок с осевой неоднородностью механических и геометрических характеристик.....	34
1.5. Выводы.....	39
РАЗДЕЛ 2. Разработка численно-аналитических методик исследования моделей изгиба и устойчивости неоднородных весо-вых стержневых систем.....	41
2.1. Исследование модели изгиба растянутых стержней со ступенчатой неоднородностью физико-механических характеристик.....	42
2.2. Численно-аналитические решения задач изгиба и устойчивости сжатых стержней со ступенчатой неоднородностью физико-механических характеристик.....	46
2.3. Анализ модели изгиба и устойчивости стержней с продольной квадратичной неоднородностью изгибной жесткости.....	53
2.3.1. Исследование устойчивости от действия собственного веса стержней с продольной квадратичной неоднородностью изгибной жесткости.....	61

2.3.2. Исследование устойчивости стержней с продольной квадратичной неоднородностью изгибной жесткости при сжатии локальными силами по торцам.....	66
2.4. Исследование закономерностей для характеристик устойчивости весовых стержней со степенной неоднородностью физико-механических свойств.....	70
2.5. Выводы.....	76
РАЗДЕЛ 3. Численно-аналитические приемы исследования неклассических моделей изгиба и устойчивости невесомых стержней.....	77
3.1. Методика анализа моделей изгиба растянутых стержней со степенной неоднородностью геометрических характеристик.....	79
3.2. Численно-аналитические исследования задач изгиба и устойчивости сжатых стержней со степенной неоднородностью геометрических характеристик.....	84
3.2.1. Исследование устойчивости консольных конструкций.....	88
3.2.2. Исследование устойчивости стержневой конструкций с шарнирными опорами на торцах.....	91
3.2.3. Исследование устойчивости конструкций с заделкой и шарнирной опорой.....	92
3.3. Исследование проблемы изгиба растянутых стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости.....	94
3.4. Анализ модели изгиба и устойчивости сжатых стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости.....	98
3.5. Исследование проблемы продольно-поперечного изгиба стержней с учетом распределенных нагрузок.....	105
3.6. Выводы.....	112
РАЗДЕЛ 4. Разработка численно-аналитических методов анализа динамики продольных и крутильных колебаний стержневых конструкций с осевой неоднородностью геометрических и механических свойств.....	114

4.1. Методика интегрирования уравнений динамики неоднородных стержней в рядах по собственным функциям.....	114
4.1.1. Применение методики при решении задачи об ударе конического стержня.....	122
4.1.2. Аналитическая методика моделирования динамических процессов при ударе гиперболического стержня.....	128
4.1.3. Исследование неоднородной стержневой конструкции на собственные и вынужденные колебания при продольном ударе с учетом наличия сосредоточенной массы.....	134
4.2. Развитие и применение метода начальных параметров применительно к проблемам динамики продольных и крутильных колебаний неоднородных стержней.....	141
4.2.1. Применение метода начальных параметров к исследованию динамических процессов при продольном ударе неоднородного стержня...	144
4.2.2. Моделирование динамических процессов в конструкциях с осевой неоднородностью геометрических характеристик при крутильных колебаниях.....	150
4.3. Получение и применение асимптотических представлений для собственных функций граничных задач динамики неоднородных стержней.....	156
4.3.1. Асимптотика собственных функций для стержня со свободными концами.....	157
4.3.2. Асимптотика собственных функций для стержня с жестко-закрепленными концами.....	160
4.3.3. Асимптотика собственных функций для стержня ограниченного по малому основанию.....	163
4.3.4. Асимптотика собственных функций для стержня ограниченного по большому основанию.....	165

4.4. Разработка специализированной методики усреднения переменных коэффициентов в уравнениях продольных и крутильных колебаний произвольно-неоднородных стержней.....	168
4.5. Выводы.....	177
РАЗДЕЛ 5. Разработка методики анализа моделей изгибных колебаний конструкций с осевой неоднородностью геометрических и механических свойств.....	179
5.1. Методика интегрирования уравнения динамического изгиба неоднородных балок.....	179
5.1.1. Применение методики к задаче о вынужденных колебаниях стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости.....	186
5.1.2. Применение методики для исследования динамических процессов в стержне с переменной линейной плотностью и изгибной жесткостью при собственных колебаниях.....	192
5.2. Аналитические соотношения метода начальных параметров применительно к проблемам динамического изгиба балок с физико-механической осевой неоднородностью.....	198
5.3. Получение и применение асимптотических представлений для собственных функций граничных задач динамического изгиба балок с осевой неоднородностью геометрических характеристик.....	207
5.3.1. Асимптотика собственных функций консольного стержня.....	209
5.3.2. Асимптотика собственных функций стержня с шарнирными опорами по торцам.....	211
5.3.3. Асимптотика собственных функций стержня с защемлением в основании и шарнирно опертым концом.....	214
5.4. Выводы.....	217
РАЗДЕЛ 6. Численно-аналитические исследования неклассической модели динамического изгиба балки с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости.....	218

6.1. Аналитическая методика интегрирования уравнения динамического изгиба растянутой балки.....	221
6.2. Аналитическая методика интегрирования уравнения динамического изгиба сжатой балки.....	227
6.3. Исследование стержневой конструкции на вынужденные изгибные колебания при учете наличия продольной нагрузки.....	229
6.4. Применение разработанной методики для анализа динамической неустойчивости в случаях «мертвой» и следящей продольной силы.....	235
6.4.1. Устойчивость консольной конструкции.....	235
6.4.2. Устойчивость стержня с шарнирными опорами по торцам.....	238
6.4.3. Устойчивость стержня со свободным и шарнирно опертым концом.....	240
6.5. Выводы.....	242
РАЗДЕЛ 7. Приложения методов анализа неклассических моделей динамики и устойчивости неоднородных стержней к расчету инженерных конструкций.....	243
7.1. Расчет продольно-поперечного изгиба весомых стержней применительно к исследованию устойчивости стальных крепей при спуске на плаву.....	243
7.2. Инженерная методика расчета критических нагрузок в стержнях с неоднородностью физико-механических свойств.....	256
7.3. Рекомендации к определению коэффициента восстановления при ударе упругих неоднородных стержней.....	261
7.4. Выводы.....	272
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	274
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	277

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Математические модели упругих стержней широко используются для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) при статических, динамических нагрузках и в задачах устойчивости объектов машиностроения, строительства, биомеханики и пр. В теории упругости применяются методы исследования, основанные на аналитических, численных и численно-аналитических решениях. Тем не менее, не так много задач, для которых разработаны методики, подходы, позволяющие сравнительно быстро и достоверно получать необходимые расчетные зависимости. В отношении стержневых систем аналогичные алгоритмы, основанные на решениях в аналитической форме, хорошо проработаны для небольшого класса стержней простой формы и однородной структуры и представлены в научной и справочной литературе, т.е. такие модели можно рассматривать, как классические. Методики расчета статического и динамического деформирования упругих стержней с усложненной конфигурацией физико-механических и геометрических характеристик (в виде осевой неоднородности линейной плотности, модуля упругости и пр.) рассмотренные в научной литературе, как правило, не носят системный характер, а ставят целью решение узкоспециализированной задачи. Это в свою очередь ограничивает возможность использования этих решений в более широкой сфере. Так как для стержней сложной конфигурации возникают трудности математического характера (необходимость решения неоднородных уравнений с переменными коэффициентами, проблема ортогональности собственных функций в задачах с распределенными и сосредоточенными параметрами и т.п.). Применение вариационных и проекционных методов позволяет обойти в какой-то степени указанные трудности и поэтому последние имеют собственные недостатки, такие как: сложность выбора тестовых и пробных функций, оценка полученного решения. Для практического расчета стержневых конструкций этими методами используют различные программные комплексы объектного и

имитационного моделирования. Однако и последний подход также имеет сложности, как например, необходимость привязки к конкретным параметрам объекта исследования, а также сохраняется проблема верификации результатов расчета.

Таким образом, разработка численно-аналитических методик исследования упругих стержневых моделей со сложной конфигурацией нагрузок и физико-механических свойств позволяют:

- расширить область рассматриваемых объектов с применением стержневых моделей;
- решать задачи верификации результатов применения прямых численных методов;
- эффективно выполнять анализ моделей при варьировании их параметров;
- рассматривать проблемы структурно-параметрической оптимизации;
- решать задачи с использованием асимптотических представлений.

Степень разработанности темы. Стержневые модели нашли широкое применение в инженерной практике расчета объектов машиностроения и строительства, включая все отраслевые направления. При этом они используются, как для непосредственного решения тех или иных прикладных задач, так и в создании теоретических основ для целого ряда методологических разработок. Так различные постановки задач для упругого стержня использовались:

- при моделировании статических и динамических процессов в бурильных колонах, на основе которого были созданы теоретические основы технологии бурения и различные их уточнения, которые представлены в работах: З.Г. Керимова, В.Н. Потураева, Г.М. Саркисова, А.Е.Сарояна, Д.В. Даринга, Е.В. Харченко, Г.М. Улитина и др.;
- для создания ряда положений теории расчета на устойчивость и динамические воздействия строительных конструкций зданий и сооружений в трудах: А.А. Амосова, В.В. Болотина, О.В. Мкртычева, В.Л. Мондруса, А.П. Филиппова, Е. Вильсона, Р. Клафа, Н.М. Ньюмарка, Дж. Пензиена, В.

Прагера, Г. Рауса, Р.Л. Халфмана, Г.В. Хаузнера, С.М. Харриса, Э. Чопра, Е.Б. Кореновой, Г.А. Джинчвелашвили и др.;

- для исследования механизма формирования ударных волн в бойках и волноводах силовых импульсных систем, на базе которого создана теория и заложены принципы построения адаптивных ударных механизмов основные идеи, которой представлены в работах: О.Д. Алимова, Л.Т. Дворникова, В.К. Манжосова, Ю.Н. Санкина, И.Д. Шапошникова, В.Э. Еремьянца, Б.Н. Стахановского, А.А. Мясникова, О.Б. Малкова и др.

Различным аспектам теории статического деформирования и устойчивости стержневых систем посвящены исследования: Динника А.Н., Ржаницына А.Р., Работнова Ю.Н., Вольмира А.С., Шулькина Е.Б., Морозова Н.Ф., Товстика П.Е., Андреева В.И., Языева Б.М., Шевченко Ф.Л., Улитина Г.М., Михайловского Е.И., Элишакова И., Вовка Л.П., Шалдырвана В.А. и др.

Ряд задач связанный с вопросами динамики упругих систем, рассмотрен в работах: Тимошенко С.П., Пановко Я.Г., Кильчевского Н.А., Филиппова А.П., Васидзу К., Жилина П.А., Журавлева В.Ф., Костина В.Г., Саурина В.В., Акуленко Л.Д., Ватульяна А.О. Ерофеева В.И., Кравчука А.С., Крысько В.А., Ахтямова А.М., Горбачева В.И., Ильина В.А., Морозова Н.Ф., Локтева А.А., Илюхина А.А., Алгазина С.Д. и др.

Особого внимания заслуживают труды отдельных ученых. Так в работах А.А. Илюхина [101, 102, 103, 104, 105, 106] решена задача устойчивости в нелинейной постановке о ветвлении решений, близкая постановке Эйлера, для криволинейных стержней методами гамильтоновой механики построено приближенное решение и предварительно исследована устойчивость для широкого класса граничных условий. В фундаментальных трудах В.А. Шалдырвана [127, 261, 262] широко рассмотрены вопросы использования методов математической физики применительно к исследованию НДС объектов с усложненными физико-механическими свойствами. В работах Е.Б. Кореновой [123, 124, 125, 126] разработаны методики анализа моделей статического и динамического деформирования конструкций с неоднородной структурой на

основе аналитических решений с применением специальных функций. Работы А.М. Югова [286, 287, 288, 289, 348] охватывают широкую область технических задач по проблемам анализа моделей деформирования строительных конструкций и сооружений, в том числе в условиях сложных режимов нагружения.

Анализ литературных источников показал, что, несмотря на значительный объем исследований, проведенных в рамках прикладных задач, а также солидную базу методов решения задач устойчивости и динамики стержневых систем на основе линейной и нелинейной теории упругости, имеет место комплекс проблем при использовании математических моделей стержней сложной конфигурации. Это в основном связано с тем, что большинство методов ориентировано на индивидуальный подход при рассмотрении той или иной граничной задачи. Таким образом, целый ряд задач переходит из разряда инженерной проблемы в ранг научной. Соответственно поиск новых решений в аналитической форме и развитие уже известных, на базе которых можно выстроить универсальные подходы к решению разнообразных граничных задач, является актуальной научной проблемой и ее решению посвящена настоящая работа.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертационная работа содержит исследования, выполненные автором по тематическим планам научно-методических работ ДонНТУ: № НЗ.1-10 «Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния длинномерных наземных конструкций и сооружений, как систем с распределенными параметрами»; № Н-4.13 «Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния систем с распределенными параметрами в расчетах на устойчивость и динамическую нагрузку»; № Н-5.16 «Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния упругих систем».

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка численно-аналитических методик анализа моделей статического и динамического деформирования и устойчивости исходной формы стержневых конструкций с усложненными механическими и геометрическими характеристиками.

Для достижения поставленной цели в работе сформулированы следующие основные задачи исследования:

- провести анализ и исследовать статическую форму продольно-поперечного изгиба стержней ступенчато-переменной жесткости при учете распределенных и локальных продольных нагрузок;
- разработать методику анализа устойчивости стержней со ступенчато-переменными механическими и геометрическими характеристиками при продольном изгибе от собственного веса;
- разработать методики анализа продольно-поперечного изгиба и устойчивости стержневых конструкций с непрерывной квадратичной осевой неоднородностью;
- разработать методику анализа изгиба и устойчивости невесомых стержневых конструкций с произвольной степенной неоднородностью механических и геометрических свойств;
- исследовать основные свойства функций представляющих собой новые аналитические решения уравнений деформирования неоднородных стержневых конструкций;
- разработать методику расчета параметров динамического деформирования при продольных и крутильных колебаниях стержневых конструкций со степенным законом осевой неоднородности;
- разработать прикладную версию методики анализа НДС продольных и крутильных колебаний стержневых конструкций с произвольной осевой неоднородностью;
- разработать специальные подходы к реализации метода Фурье применительно к проблемам динамики неоднородных стержневых конструкций с учетом наличия сосредоточенных масс;
- разработать методику исследования модели изгибных колебаний предварительно нагруженных стержней с частным видом осевой неоднородности;
- рассмотреть ряд неклассических краевых задач статики, динамики и устойчивости стержневых конструкций, представляющих прикладное значение.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является математическая модель статического и динамического деформирования упругого стержня с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, а его предметом – напряженно-деформированное состояние и устойчивость стержневых конструкций при статическом и динамическом нагружении.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что

- в работе получила развитие теория продольно-поперечного изгиба упругих весомых стержневых систем со ступенчатым изменением геометрических и физико-механических характеристик. Разработана методика для анализа устойчивости моделей упругих стержней с непрерывным изменением физико-механических свойств;

- впервые рассмотрена математическая модель продольно-поперечного изгиба и устойчивости весомого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости от продольной координаты, при одновременном учете распределенных и сосредоточенных продольных сил. Решение уравнения изгиба получено в функциях Бесселя и Ломмеля, что позволяет рассматривать любой вид граничных условий;

- поставлена задача и получены новые решения в аналитической форме для продольно-поперечного изгиба невесомых упругих стержней, изгибная жесткость которых изменяется по произвольному степенному закону от продольной координаты, под действием как распределенных, так и сосредоточенных нагрузок. В случае локальных нагрузок для решения краевых задач методом начальных параметров введены новые функции и исследованы их основные свойства;

- получены новые аналитические решения задач о продольных и крутильных колебаниях на основе волновой теории удара, а также разработано применение метода Фурье для динамических расчетов упругих стержней со степенной неоднородностью геометрических и физико-механических характеристик;

- разработана прикладная методика решения задач динамики продольных и крутильных колебаний на основе упрощения математической модели путем

усреднения переменных коэффициентов для упругих стержней с произвольной конфигурацией физико-механических свойств. Сравнение результатов расчета по приближенному методу с известными точными решениями показали достаточную точность для инженерных задач;

- разработан общий подход на основе метода Фурье к решению математических моделей поперечных колебаний упругих балок с переменной изгибной жесткостью и линейной плотностью. Для рассматриваемой задачи динамического изгиба неоднородных балок использованы функции, которые являются аналогом функций Крылова;

- получены асимптотические представления для собственных функций граничных задач динамики поперечных, продольных и крутильных колебаний неоднородных стержней;

- получено новое решение задачи динамического изгиба и выполнены численно-аналитические исследования модели поперечных колебаний предварительно нагруженных стержней с квадратичной осевой неоднородностью изгибной жесткости;

- выполнены численно-аналитические исследования ударных процессов в неоднородных стержнях, на основе которых разработаны рекомендации к определению коэффициента восстановления при ударе упругих стержней с учетом их геометрической формы.

Теоретическая значимость работы заключается в исследовании актуальных вопросов теории расчета НДС упругих стержневых систем с неоднородностью геометрических характеристик и физико-механических свойств; на основе новых решений разработаны алгоритмы расчета НДС стержней сложной конфигурации; рассмотрены различные аспекты задач устойчивости весоных и невесомых стержней; для задач статического и динамического деформирования упругих стержневых систем введены функции, которые являются аналогами функций Крылова, и исследованы их основные свойства; разработана методика расчета на динамические воздействия на основе метода Фурье, применительно к неоднородным стержневым системам и получены

асимптотические представления для собственных функций соответствующих граничных задач.

Практическая значимость работы. Полученные в работе результаты предоставляют возможность моделирования НДС при статическом и динамическом нагружении целого ряда объектов машиностроения и строительства, таких как: валы сложной конфигурации, бойки и волноводы силовых импульсных систем, бурильные трубы и обсадные колоны, ракеты, буровые вышки, опоры линий электропередач, стойки ветрогенераторов, башни теле-радио связи, грануляционные башни предприятий по производству минудобрений, высокие дымовые трубы и пр. Представленные в работе аналитические решения задач механики упругих стержней также можно использовать для построения эталонных моделей и верификации расчетных данных при работе с программными комплексами объектного и имитационного моделирования. Предложенные алгоритмы расчетов могут быть положены в основу инженерных методов и практических рекомендаций при разработке технической и регламентирующей документации.

Представленные в диссертации исследования были использованы для обоснования параметров стальных крепей и в разработке технических регламентов спуска обсадных колон на плаву, в рамках работы по хоздоговорной теме № 13-189 между ДонНТУ и ГПОАО «Донецкое ШПУ» ГП ОАО «ГХК «СШБ».

Теоретические разработки диссертации позволяют совершенствовать учебный процесс при изложении вопросов динамики и устойчивости стержневых систем с распределенными и сосредоточенными параметрами. Результаты этих разработок используются в учебном процессе ДонНТУ, ДонНАСА (г.Макеевка), ДонИЖТ. Материалы исследований нашли частичное отражение в учебном пособии «Задачі з опору матеріалів» изданном с грифом Министерства образования и науки Украины автором совместно с проф. Шевченко Ф.Л.

Методология и методы исследования. Построение математических моделей осуществлялось на основе линейной теории упругости общих гипотез

механики деформируемого твердого тела, строительной механики и сопротивления материалов (гипотеза о малости деформаций; принцип независимости действия сил; гипотеза плоских сечений Эйлера-Бернулли и др.). При решении задач продольно-поперечного изгиба и устойчивости использованы функции Бесселя и Ломмеля, а для решения неоднородных уравнений применялся метод вариации произвольных постоянных. Математические модели для описания ударных процессов построены на основе волновой теории плоского удара. Решение различных граничных задач динамики упругих стержней выполнено методом Фурье для собственных функций ортогональных с весом. Для представления расчетных зависимостей использовался метод начальных параметров. На основе численных исследований определены эмпирические формулы, используемые для их аппроксимации.

На защиту выносятся следующие положения:

- решение задач продольно-поперечного изгиба весоных и невесоных стержней сложной конфигурации при действии сосредоточенных и распределенных нагрузок с использованием функций Бесселя и Ломмеля;
- методика решения задач продольного и крутильного удара стержней со степенной неоднородностью геометрических и физико-механических характеристик на основе метода Фурье для собственных функций ортогональных с весом;
- прикладной метод динамического расчета на продольные и крутильные колебания упругих стержней с произвольной неоднородностью физико-механических свойств;
- решение задач поперечных колебаний упругих стержней с переменной изгибной жесткостью и линейной плотностью методом Фурье, в том числе для случаев, когда собственные функции соответствующих граничных задач не ортогональны;
- решение задачи изгибных колебаний предварительно загруженного упругого стержня с квадратичным законом изменения поперечной жесткости с

использованием введенных функций, вид которых позволяет рассматривать любые граничные условия;

- инженерные методы расчета стержневых систем на устойчивость и динамические воздействия, разработанные на основе аналитических решений.

Степень достоверности и апробация результатов. Обоснованность и достоверность научных положений, результатов исследования и выводов подтверждается: постановкой рассматриваемых задач в рамках положений классической теории упругости и механики деформируемого твердого тела; применением известных методов решения задач математической физики; согласованностью некоторых полученных результатов с результатами, рассмотренными в литературе с использованием альтернативных методов исследования, включая экспериментальные.

Основные положения исследования были доложены и обсуждены на научных семинарах: кафедры «Сопротивление материалов» ДонНТУ (2014 г.); кафедры «Теоретической и прикладной механики» ДонНАСА (2014 г.); диссертационного совета Д 01.016.03, ДонНУ (2017 г.). Результаты работы докладывались на международных научно-практических конференциях: Международная научно-практическая конференция «Вибрации в технике и технологиях» (Львов, 2011 г.; Полтава, 2012 г.; Львов, 2014 г.); Международная научно-техническая конференция «Форум горняков» (Днепропетровск, 2011, 2012 гг.); 6-я Международная Конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики» (Тула, 2011 г.); Международная научно-техническая конференция «Динамика, надежность и долговечность механических и биомеханических систем» (Севастополь, 2012, 2014 гг.); XIII Всероссийская научно-практическая конференция «Современная строительная наука и образование» (Москва, 2016 г.); XIV Международная научно-практическая конференция «Развитие фундаментальных основ науки и образования в строительстве» (Москва, 2017 г.); VII Международная научно-

методическая конференция «Обучение математике в техническом университете» (Донецк, 2017 г.).

Публикации. Основные положения диссертации опубликованы в 29 работах [213, 222, 223, 225, 226, 228, 229, 230, 233, 235, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 266, 273, 274, 275, 277, 278, 279, 280, 344, 351, 352], в том числе: 11 статей в специализированных журналах из перечня ВАК ДНР [235, 229, 230, 246, 247, 233, 351, 352, 222, 225, 344]; 15 работ в прочих рецензируемых журналах и сборниках научных статей [213, 223, 226, 228, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 273, 274, 275, 277, 280]; 2 публикации материалов и тезисов на международных конференциях [278, 279]; 1 учебное пособие с грифом МОНУ [266].

Личный вклад автора в работы, опубликованные с соавторами: [235, 229, 230, 233, 351, 352, 222, 225, 344, 228, 277, 226, 223, 251] – соискателем разработаны математические модели, проведены вычисления и выполнен анализ результатов исследований; [253, 273, 274, 275, 280, 213, 279, 278] – соискателем проведены вычисления; [266] – соискателем проведены вычисления в задачах устойчивости и динамики.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа содержит 314 страниц машинописного текста и состоит из введения, семи разделов, выводов, списка литературы из 362 источников на 38 страницах. Основной текст, изложенный на 274 страницах, иллюстрируется 101 рисунком и содержит 9 таблиц.

РАЗДЕЛ 1

Основные методы и результаты численно-аналитических исследований по проблемам механики стержневых конструкций

1.1. Анализ областей применения неклассических вариантов стержневых моделей для анализа деформативных и прочностных свойств сооружений и элементов конструкций

Рассмотрим область и специфику применения математических моделей статического и динамического деформирования стержневых систем в решении актуальных прикладных задач.

Модель продольно поперечного изгиба упругих стержней используется для исследований НДС и устойчивости технических объектов широкого класса. Так в работах [2, 60, 69, 70, 151, 326] данная модель применяется для изучения проблематики работы трубопроводного транспорта в сложных технологических условиях. Влияние конструктивных решений узловых соединений металлоконструкций на величину критической силы и формы потери устойчивости трубчатого стержня на основе сопоставительного анализа результатов расчета идеализированной стержневой модели и конечно-элементной модели выполнены в статье [64]. В работе [187] исследовано напряженно-деформированного состояния сварной колонны двутаврового сечения с упруго-податливыми поясными швами, работающей на продольно-поперечный изгиб. В статье [199] рассматривается продольно-поперечный изгиб и задача по определению критического усилия, вызывающего потерю продольной устойчивости при осевом сжатии составного бруса, состоящего из внутренней трубы, вставленной без зазора в наружную трубу. В работах [221, 354] на основе исследований устойчивости бурильных колонн, как упругого весомого стержня разработаны технологические регламенты работы бурильного оборудования. Теоретические основы расчета на устойчивость и динамику пространственных стержневых конструкций рассматриваются в работе [310]. Проблемы

устойчивости спиральных стержней, включая специфику, позволяющую их рассматривать, как модели молекул ДНК, исследовались в работах [329, 330, 103, 106]. Изучение условий нелинейной устойчивости адгезионных состояний между упругим и жестким полупространствами, которые моделируют процессы характерные для широкого диапазона инженерных систем, рассмотрены в [332].

На базе теории колебаний упругих стержней созданы теоретические основы анализа структурных несовершенств конструкций и разработаны методы дефектоскопии. Так в работах [4, 5] проведены исследования влияния дефектов различной физической природы: массы, упругости, жесткости и пр., в структуре стержневых конструкций на частоты и формы продольных колебаний, на основании чего разработаны численно-аналитические и экспериментальные методы анализа упругих систем с дефектами. Рассматриваются и обратные задачи, связанные с идентификацией дефектов, по параметрам продольных колебаний, так в работах [22, 23, 217] рассмотрен способ определения размера и положения трещины по собственным частотам продольных колебаний, в статье [27] аналогичные исследования выполнены по определению местоположения дефекта в виде полости, динамика продольного удара в стержнях с цилиндрической полостью рассмотрена в [297]. Практические способы прогнозирования аварий и контроля целостности трубопроводных магистралей на основе модели продольных колебаний однородного стержня изложены в [236, 237]. Определение дефектов в валах по параметрам крутильных колебаний рассмотрено в работе [241], а в [242] подобная проблема рассматривается в контексте изучения аварий на буровом оборудовании. Влияние дефекта в виде тонкого разреза на амплитудно-частотные характеристики консольной балки исследовано в статье [51], обратная задача по выявлению дефекта в форме полости малого размера рассмотрена в [49]. В работе [288] представлен принцип вариации масс для уточнения параметров вибрационной модели, используемой для анализа структуры фермовой конструкции.

В ряде работ на основе уравнений колебаний стержней проведены исследования по определению параметров структуры объектов. Поиск

местонахождения границы между двумя участками стержня разной плотности по собственным частотам его свободных продольных колебаний выполнен в работе [24], а решение задачи по определению длины, модуля упругости и плотности коррозионного участка стержня по частотам продольных колебаний получено в [26], схожая проблема рассмотрена в статье [28]. В [243] начальная координата и величина прикрепленной распределенной массы к ступенчатому стержню, а также отношение площадей ступеней определяются по трем низшим собственным частотам продольных колебаний. Неклассические модели деформирования (Релея–Лява, Бишоп, Мидлина–Германа) также используются для описания динамических процессов в слоистых упругих [19, 21] и вязкоупругих [20] элементах конструкций. В работе [25] получены формулы для идентификации интенсивности постоянной поперечной распределенной нагрузки и упругих закреплений стержня по пяти значениям его смещений. Влияние характеристик многоопорного вала с грузами на спектр частот его колебаний, а также обратная задача по определению параметров грузов по частотам поперечных колебаний, рассмотрены в статье [208]. Определению скорости и усилия натяжения движущегося стержня по двум собственным частотам изгибных колебаний посвящена работа [244]. В [157] рассматриваются критерии минимальной материалоемкости стержней при ограничениях по устойчивости или по величине первой собственной частоты.

Одним из наиболее распространенных направлений исследования является использование математических моделей продольных, поперечных и крутильных колебаний упругих стержней для изучения напряженно-деформированного состояния (НДС) и резонансных явлений в различных объектах. Так в [13, 14] выполнены численные исследования процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением, на основе модели продольных колебаний упругого стержня с учетом бокового сопротивления, проведено сопоставление численных результатов с аналитическим решением для частного случая. Аналогичная задача рассмотрена в работе [188] с использованием приближенной аналитической модели. Расчет напряжений в арматурном стержне при продольном

деформировании от динамического воздействия, вследствие внезапного образования трещин в железобетонном элементе выполнен в [63]. Результаты экспериментальных исследований железобетонных колонн на продольный удар представлены в статье [283]. В [40] рассмотрены проблемы построения модели методом конечных элементов и верификации результатов исследования волновых процессов в трубопроводе. Выявлению условий возникновения параметрических крутильных колебаний в конструкции роторно-лопастного двигателя посвящена статья [185]. Исследования собственных частот продольных колебаний стремени, входящего в систему звукопроводящих слуховых косточек, на основе модели упругого стержня из различных материалов, выполнены в [177], при этом задача решается, как аналитически, так и с использованием программного комплекса на базе метода конечных элементов. В [180] рассматривается проблема возникновения продольных автоколебаний в пакете стержней, которая актуальна для изучения динамики жидкостных ракет. Вопросы, связанные с крутильными колебаниями авиакрыльев, рассмотрены в работе [186]. Созданию и исследованию математической модели генератора колебаний ударного типа для активизации нефтяных скважин посвящены статьи [210, 211], для решения задачи применяются разностные методы, их свойства изучаются на линейной задаче, решение которой получено методом Фурье. Построение математической модели для определения спектра собственных частот крутильных колебаний вала с насаженными на него дисками и ее численный анализ выполнен в [214]. Динамика крутильных колебаний трансмиссионного вала с учетом особенностей сопряженных узлов рассмотрена в [34]. Расчету продольных сил в стержневой системе, моделирующей электрод электрофильтра при работе механизма встряхивания, на основе исследований распространения в стержневых системах волн продольных и изгибных деформаций, которые вызваны действием кратковременного ударного импульса, посвящена статья [282]. Исследование НДС различных объектов (клапаны, штампы) с использованием модели продольных колебаний упругого стержня с наличием сосредоточенной массы при ударе об упругий ограничитель, рассмотрено в работах [324, 359]. Резонансные

явления взаимодействия упругого стержня, при наличии инерционной нагрузки на его конце, с упругой полуограниченной средой исследованы в статье [36]. Исследованию влияния неоднородности поля скоростей и давлений жидкости, возникающей при изгибных колебаниях трубопровода, на амплитуду и частоты его резонансных поперечных колебаний посвящена работа [53]. Возникновение параметрического резонанса изгибных колебаний в стержне с нестационарной связью исследовано в статье [56]. В [100] рассмотрены аспекты использования стержневых моделей при определении низших собственных частот поперечных колебаний корпусных деталей кораблей. Поперечные колебания гребных валов с учетом различных конструктивных особенностей рассмотрены в статьях [165, 166]. В работе [290] с применением вариационного принципа Остроградского-Гамильтона выведены уравнения колебаний стержней типа шпинделя при пространственном нагружении.

Теоретические и экспериментальные исследования механизма формирования ударных волн в бойках и волноводах силовых импульсных систем, на базе которых создана теория и заложены принципы, построения адаптивных ударных механизмов, представлены в монографиях [15, 39, 159, 160, 204]. Отдельные вопросы по исследованию ударных процессов в импульсных механизмах представлены в ряде научных статей. Так в [91] рассматривается проблема совершенствования ударных систем путем синтезирования форм бойков графоаналитическим методом по форме генерируемого ударного импульса, наиболее эффективно соответствующего физико-механическим свойствам разрушаемого объекта. Теоретические и экспериментальные исследования влияния бойков с непрерывно-изменяемой геометрической формой на форму ударного импульса представлены в статье [92], аналогичные исследования для ступенчато-переменной формы выполнены в [205, 285, 299]. В статье [203] рассмотрена задача моделирования заготовок ковочных молотов в виде вязкоупругого тела Максвелла, испытывающего ударные нагрузки, выполнено сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными.

Отдельно следует отметить эффективность использования стержневых моделей для исследования динамических процессов в бурильном оборудовании. Так определению собственных частот продольных колебаний буровой колонны как системы с распределенными и сосредоточенными параметрами посвящены работы [193, 195]. Построение математических моделей и их решение с учетом конструктивных особенностей бурильного оборудования (буровая вышка, талевая система, привод, утяжелители, долото и пр.) рассмотрено в работах [300, 353, 206, 245]. Экспериментальные исследования продольных колебаний проведены в работах [29, 114]. В работе [158] на основе модели длинного упругого стержня создана математическая модель динамики бурильной колонны в скважине, разработанная модель является имитационной и реализуется с использованием метода конечных элементов. Исследование эффективности применения конической бурильной штанги по сравнению со штангой постоянного сечения при бурении шпуров и скважин малого диаметра продольным ударом рассмотрено в [263], моделирование взаимодействия ударника с волноводом выполнено на основе волновой модели плоского удара Сен-Венана. В работе [141] разработана нелинейная математическая модель пространственных поперечных колебаний бурильной колонны, на основе модели упругого стержня, подвергается действию продольной сжимающей нагрузки и крутящего момента.

На основе стержневых моделей создан ряд положений теории расчета на устойчивость и динамические воздействия строительных конструкций зданий и сооружений [303, 304, 346, 11, 117]. Так решению актуальных вопросов связанных с сейсмостойкостью зданий и сооружений посвящены работы [75, 77, 149, 76]. Проблемы гашения колебаний в стержневых элементах строительных конструкций рассмотрены в работах [83, 240]. Аналитическая методика расчета фундаментов зданий и сооружений в условиях тесной городской застройки на основе модели балки на упругом основании представлена в [126]. Динамика отдельных сооружений с учетом их конструктивных и эксплуатационных особенностей рассмотрена в статьях [68, 78]. Исследования НДС в стержневых

конструкциях в условиях сложного нагружения проведены в работах [286, 287, 289].

Как видим из обзора, модели статического и динамического деформирования упругих стержней нашли широкое применение в инженерной практике расчета объектов машиностроения, металлургии, строительства, горного оборудования, биомеханики и пр. Они используются, как для непосредственного решения тех или иных прикладных задач, так и в создании теоретических основ для целого ряда методологических разработок. При этом в равной степени используются, как аналитические, так и численные методы решения задач. Применение разных методов связано с их спецификой. Аналитические решения дают более полное представление о механизме динамического процесса и степени влияния характеристик модели на его параметры, но ограничиваются относительно простыми моделями. Численные методы, наряду с использованием программных комплексов объектного и имитационного моделирования, позволяют рассматривать задачи практически любой сложности, но заложенная в их основу модель «черного ящика», ставит эти методы на уровень экспериментальных, где в качестве объекта рассматривается не физическое тело, а математическая модель. В этом случае взаимосвязь между параметрами модели и процесса устанавливается эмпирически, что ограничивает область применения полученных результатов. Таким образом, развитие разных методов исследований не отрицает альтернативные, а дополняет их.

1.2. Состояние исследований неклассических моделей изгиба и устойчивости стержневых систем

Основные идеи и подходы к исследованию устойчивости упругих систем рассмотрены в литературе [55, 80, 216, 310, 356, 355, 104]. Теоретические основы исследования упругих систем на устойчивость были созданы и получили развитие в трудах: Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, А. Гринхила, А. Клебша, Р. Мизеса, С.П. Тимошенко, А.Н. Динника, И.Г. Бубнова, А.С. Вольмира, А.Р. Ржаницына, Ю.Н.

Работнова Ю.Н., Н.Ф. Морозова, Товстика П.Е., Андреева В.И, Языева Б.М., Илюхина А.А., Шевченко Ф.Л., Улитина Г.М., Михайловского Е.И., Elishakoff I. и др. и др.

Рассмотрим основные результаты и методы исследования устойчивости и продольно-поперечного изгиба упругих стержневых конструкций.

В ряде работ рассматривается устойчивость упругого стержня в неклассической постановке. Так в работах [16, 172, 173, 219, 333] получено решение задач устойчивости продольно сжатого стержня при односторонних ограничениях на перемещения, включая случаи упругой среды, при различных граничных условиях, результаты, полученные аналитическим путем, проверены численным методом. Устойчивость стержней с учетом упругопластических свойств материала, а также физической и геометрической нелинейности в пространственной постановке рассматривается в [52, 85, 86]. Задача продольно-поперечного изгиба слоистых анизотропных стержней в трехмерной постановке с применением асимптотических методов решается в работах [66, 67]. Задачи деформирования естественно-закрученных стержней в пространственной постановке рассмотрены в работах [107, 102, 101]. В [95] рассматривается устойчивость сжатого стержня при наличии локальной неоднородности в виде поперечного надреза. Способ для определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе от равномерно распределенной поперечной нагрузки и продольной силы получен в [115], при этом рассматривается, как линейное так и не линейное решение задачи. Оценка влияния формы сечения стержня на его устойчивость проведена в работах [120, 121, 122], где отмечается, что в зависимости от формы профиля влияние на критическую силу может достигать до 8%. В статье [142] исследована устойчивость упругих стержней при учете влияния деформации сдвига. Продольно-поперечный изгиб стержня, вызванный его вращением в центрифуге, рассматривается в статье [202]. Проблеме устойчивости упругого стержня, зажатого на обоих концах и нагруженного сжимающей силой и парой посвящена

работа [319], при этом учитывается, как сдвиг поперечного сечения, так и сжимаемость оси стержня.

Задача устойчивости сжатых стержней с учетом ползучести с применением метода Галеркина рассмотрена в [119]. Моделирование дифференциальных уравнений при расчете на поперечный и продольно-поперечный изгиб стержневых систем, как без учета, так и с учетом вязкоупругих свойств материалов выполнено в [179]. Исследования продольно-поперечного изгиба реономных стержней представлены в работах [200, 201]. Устойчивость полимерного стержня при ползучести рассмотрена с использованием энергетического метода Тимошенко – Ритца в [256]. Изучение устойчивости стержней, материал которых характеризуется нелокальной упругостью и демпфированием, характерным для композитов и наноматериалов на примере стержня с шарнирными концами выполнено в [336].

Результаты моделирования продольно-поперечного изгиба балок в различных программных комплексах представлены в статье [189]. Решению задачи оптимизации формы поперечного сечения сжатых стержней из условия устойчивости посвящена статья [255].

Отдельно следует отметить результаты диссертационных исследований по проблематике устойчивости стержневых систем. Так в диссертационной работе [58] разработан интегрированный метод численного анализа на основе обобщенной теории деформирования и устойчивости равновесия пространственных стержневых систем. В работе [118] исследуется устойчивость сжатых неоднородных стержней с учётом физической нелинейности материала, при этом учитываться косвенная неоднородность, которая возникает в процессе эксплуатации- конструкции под воздействием различных физических полей. Разработке методов расчета полимерных стержней переменной жесткости на устойчивость с учетом физически нелинейных моделей материала посвящена работа [144], также на основе уточненного моделирования сформулированы упрощающие гипотезы и разработана методика инженерных расчетов.

Некоторые работы рассматривают проблематику продольно-поперечного изгиба и устойчивости стержневых конструкций с осевой неоднородностью физико-механических свойств. В работах [108, 109] разработан приближенный метод вычисления изгибающего момента и прогиба при продольно-поперечном изгибе по известным решениям задач о поперечном изгибе и устойчивости. В работах [134, 135] рассмотрена устойчивость стержней с произвольно изменяющейся изгибной жесткостью на основе решения уравнения продольного изгиба в виде ряда, построенного с помощью интегральных рекуррентных зависимостей. Предложенное решение можно использовать только для некоторых простых схем, описанных в работе [135], и не подходит, например, при наличии упругих связей. В монографии [355] при решении задачи устойчивости стержня переменной жесткости использован численный подход на основе аппроксимации формы стержней с непрерывно-изменяющейся жесткостью ступенчатой формой. В работах [146, 147, 148] получены базисные функции для нахождения двусторонних оценок критического значения параметра нагружения в задачах устойчивости упругого неоднородно сжатого однопролетного стержня переменного поперечного сечения при различных условиях закрепления концов, функции получены из форм потери устойчивости упругого стержня постоянного поперечного сечения. Метод конечных разностей к решению задачи устойчивости использован в [168]. Работе [342] на основе операторных методов теории бифуркации получены асимптотические формулы определения критических нагрузок продольного изгиба стержней, как однородной, так и переменной жесткости.

В работах [221, 315, 354] для исследования проблемы устойчивости весомих стержней использованы функции Бесселя и Ломмеля, также в работе [221] дается определение модифицированной функции Ломмеля. Функции Бесселя к расчету на устойчивость стержневой конструкции с квадратичным законом изменения изгибной жесткости, при учете сдвиговой деформации, использованы в статье [209]. Теория статического и динамического расчета неоднородных пластин на базе специальных функций рассмотрена в работах [123, 124, 125].

Как видим из обзора, проблема расчета стержней с осевой неоднородностью физико-механических свойств на продольно-поперечный изгиб и устойчивость, в особенности при наличии распределенных нагрузок не имеет единого и системного подхода к решению. Таким образом, актуальной является разработка математических моделей на основе аналитических решений уравнения изгиба стержней переменной жесткости. Это позволит исследовать проблему устойчивости для общих случаев закреплений стержня, а также учитывать влияние продольных нагрузок на параметры НДС стержневых конструкций.

1.3. Актуальная проблематика исследований в области динамики продольных и крутильных колебаний стержней с осевой неоднородностью физико-механических свойств

История возникновения и этапы развития теории колебаний и удара, достаточно подробно, рассмотрены во многих трудах и монографиях [11, 15, 61, 116, 159, 160, 183, 184, 204, 215], посвященных данному вопросу. Существенный вклад в развитие теории сделали: И. Ньютон, Д. Бернулли, Навье, Пуассон, Юнг, Кокс, Д'Аламбер, Сен-Венан, В. Томсон, П. Тэта, Э. Раус, Рэлей, Герц, Штаерман, Сирс, А.Н. Динник, С.П. Тимошенко, В.Л. Бидерман, Я.Г. Пановко, Н.А. Кильчевский, Е.В. Александров, А.П. Филиппов, В.В. Болотин, В.Г. Костин, В.В. Саурин, Л.Д. Акуленко, А.О. Ватульян, В.И. Ерофеев, А.С. Кравчук, А.М. Ахтямов, В.И. Горбачев, В.А. Ильин, Н.Ф. Морозов, С.Д. Алгазин и др. На основе исторического обзора и рассмотрения текущего состояния теории моделирования ударных процессов, в монографии [204] представлена схема, классифицирующая ударные модели и методы их исследования. Так к основным моделям отнесены:

- модель соударения абсолютно твердых тел;
- модель Герца;
- дискретная модель;
- энергетическая модель;
- модель Сен-Венана;

- модель Сирса.

Основные методы исследования:

- численное интегрирование;
- метод конечных элементов;
- метод Релея;
- метод Риза;
- метод Бубнова – Галеркина;
- операционный метод;
- метод Д'Аламбера;
- метод Фурье.

Для практических целей исследования динамических процессов продольных и крутильных колебаний в упругих стержнях наиболее широкое распространение получила волновая модель плоского удара Сен-Венана [54, 183, 184, 192, 239, 309]. Однако такая модель имеет множество допущений, таких как: линеаризация модели, пренебрежения контактной деформацией и поперечными смещениями и др. В большинстве случаев обоснованность таких допущений подтверждается результатами исследований альтернативных моделей [79, 90, 116] (модель Сирса, стержень Релея и т.п.) и экспериментов [15, 116]. Тем не менее, активное внедрение новых технологий и материалов требует более глубокого анализа и оценок существующих моделей и методов.

В некоторых работах рассмотрены динамические модели продольного удара с учетом поперечных смещений. Так математическая модель одномерных продольных колебаний короткого стержня Рэлея с динамическими нелинейными граничными условиями рассмотрена в [32, 33], аналогичная задача для случая нелинейного затухания второго порядка решена в работе [31]. Из структуры уравнения продольных колебаний, степень влияния поперечных смещений определяется соотношением коэффициентом Пуассона, полярного момента инерции масс и продольной жесткости сечения стержня [90]. В работе [79] приведены количественные оценки такого влияния, так для однородного цилиндра с отношение длины к радиусу $l/R = 100$ увеличение периода колебаний

от влияния инерционных сил в радиальном направлении составило 0,0022% для первого тона колебаний и 0,02% для третьего тона, для конического стержня это влияние оказалось еще меньше. Дополнительно к поперечным смещениям влияние сдвиговых деформаций (модель Рэлея-Бишопа) рассмотрено в статье [190], где также отмечено, что учитывать указанные деформации следует для весьма коротких «стержней» (продольный размер соизмерим с поперечным) и при исследовании частот высоких порядков. В работе [317] рассматривались модели Лява и Мидлина-Германа на примере многоступенчатого неоднородного стержня и отмечено необходимость учета поперечных и сдвиговых деформаций при некоторых условиях состыковок ступеней.

В ряде работ рассмотрено влияние параметров модели и эффектов колебательного процесса, требующих нелинейной постановки задачи. Так при исследовании импульсов волн колебаний с учетом их воздействия на преграду, используется уравнение движения с квадратичным приближением [74]. В работе [73] с учетом нелинейных факторов проведено уточнение вариационной постановки задач динамики одномерных упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками. В [220] рассмотрены условия формирования локализованных волн деформаций (солитонов) в составных нелинейно-упругих стержнях при продольных колебаниях, аналогичная проблема возникновения уединенных волн, включая случаи крутильных и изгибных колебаний, рассмотрена в работе [361]. В статье [87] установлено, что депланация поперечных сечений вызывает появление дисперсии фазовой скорости крутильной волны и приводит еще к появлению характерной для интенсивных продольных колебаний квадратичной нелинейности, не встречавшейся прежде в математических моделях, описывающих крутильные колебания. В [133] получено уравнение продольных колебаний нелинейно деформируемых стержней в смысле произвольного вида нелинейности, указан способ усреднения нелинейных свойств композиционных стержней, для некоторых случаев получены аналитические выражения для собственных частот колебания, аналогичные вопросы для крутильных колебаний рассмотрены в статье [132]. В работах [35,

169-171] проводится исследования устойчивости стержня при динамическом нагружении, вызванным продольным ударом, в линейной и нелинейной постановках, более точная нелинейная система уравнений позволяет оценить область применимости линейного приближенного подхода. Динамика продольного удара в тонкостенных стержнях, рассмотрена в [162, 163, 316].

Методологические подходы к построению математических моделей и их исследованию рассмотрены в работах [176, 196]. В [84, 257, 258, 260] рассматривается динамика продольного удара в стержнях из вязкоупругих материалов, где используются различные постановки для однородных и неоднородных стержней из материала Кельвина-Фойгта, в статье [347] наряду с теоретическими расчетами деформирования вязкоупругого стержня при продольном ударе представлены результаты экспериментальных исследований. В диссертационных работах [94, 107, 155] рассмотрена специфика построения различных моделей колебательных (продольно-крутильные и продольно-изгибные колебания упругих стержней) и ударных процессов (модели Лява, Бишопа, Мидлина-Германа) и их численные исследования. Вопросы оптимальных граничных управлений продольными колебаниями в системах стержневидных тел с различными физико-механическими характеристиками рассмотрены в работах [96-98, 156, 198, 212]. Теоретические и экспериментальные результаты исследований для стержней сопряженных через жесткую сферу представлены в [360].

Существенное теоретическое и практическое значение представляют вопросы, связанные с проблемой реконструкции физико-механических и геометрических характеристик стержней по параметрам колебательного процесса. Основные идеи относительно решения обратных задач колебаний для упругих неоднородных стержней, связанных с определением законов изменения таких свойств стержня, как: модуль упругости, модуль сдвига и плотность по амплитудно-частотным характеристикам в режиме установившихся продольных, изгибных и крутильных колебаниях, рассмотрены в работах [41, 44, 45, 50, 72]. В

статье [46] аналогичный метод применен для идентификации полости в упругом стержне.

Более подробно рассмотрим основные подходы к решению задач динамики продольных и крутильных колебаний стержневых конструкций с механической и геометрической осевой неоднородностью. В технической литературе [183, 184, 192, 215] отмечено, что для стержней с осевой неоднородностью не существует единого подхода для вывода зависимостей НДС в аналитической форме и для этой цели, как более универсальные, рассматриваются вариационные подходы к решению задач динамики. При этом не возникает особых трудностей для случаев ступенчато-переменного сечения, так в [185] рассмотрены крутильные колебания в валах ступенчато-переменной массой и жесткостью, но исследования ограничены анализом собственных форм и частот колебаний. В работах [15, 39, 99, 159, 160, 205, 299] проведены исследования НДС стержней ступенчатой формы при продольном соударении, на основе модели плоского удара Сен-Венана, а решение получено методом Д'Аламбера, динамика продольного и крутильного удара ступенчатых стержней методом Фурье рассмотрена в работах [353, 224, 231, 232, 234, 265, 267, 268, 269, 272]. Учитывая относительную простоту в установлении закона деформирования однородных стержней методом Д'Аламбера, этот подход был распространен на стержневидные тела сложной геометрии, при этом форма стержня аппроксимируется последовательно-соединенными цилиндрическими однородными участками [91, 159, 160, 355]. Методика исследования упругих колебаний стержня переменного сечения на основе дискретизации модели изложена в работе [10], аналогичный подход к задаче изгибных колебаний неоднородных балок рассмотрен в [9]. Однако стоит заметить, что здесь возникают такие же проблемы, как и при использовании программ объектного моделирования, это оценка точности, верификация результатов расчета и пр. Обойти проблему решений уравнений с переменными коэффициентами можно, используя операционный метод, общие положения которого, применительно к задачам продольного удара, и примеры расчетов изложены в работах [62, 161, 285, 263]. Основная сложность в использовании

операционного метода – это его громоздкость и неуниверсальность в решении граничных задач, в частности, при наличии локальных инерционных нагрузок, что в значительной степени ограничивает его для применения в инженерной практике.

Метод Фурье достаточно точно и наглядно отражает механизм колебательного процесса, особенно в системах с распределенными и сосредоточенными параметрами, но имеет собственные недостатки в расчетах стержневидных тел с осевой неоднородностью, как например, необходимость решения уравнений с переменными коэффициентами, проблема ортогональности собственных функций, в частности, при наличии сосредоточенных и локализованных инерционных нагрузок и т.п. Методология решения задач динамики продольных и крутильных колебаний методом Фурье для однородных стержней достаточно хорошо проработана [183, 184, 192, 215, 264, 266] и успешно использована для исследований систем со сложными структурными схемами [232, 224, 231, 268, 234]. В случае наличия осевой неоднородности механических или геометрических характеристик методик решения не существует, а те задачи, которые рассмотрены в литературе, как правило, носят слишком частный характер. Так в работах [137, 138, 139] решение граничных задач продольных колебаний стержней переменного сечения ищется в виде степенных рядов, но такую форму решения сложно использовать даже в рамках рассмотрения спектральной задачи. Аналитические решения в виде элементарных функций получены в работе [191] для стержней (концентраторов) конического, экспоненциального и катеноидального очертания, исследования ограничены анализом собственных форм колебаний для двух видов граничных условий и оценкой влияния геометрических параметров на коэффициент усиления (отношение максимальных скоростей торцевых сечений). Колебания конического стержня на основе аналитического решения в элементарных функциях рассмотрены в [150, 311, 357], однако, как и в предыдущем случае проведен лишь модальный анализ. Аналогичная ситуация и для крутильных колебаний, так решение для конического вала с использованием функций Бесселя получено в

[37], а случай когда крутильная жесткость изменяется по линейному закону от продольной координаты рассмотрен в статье [298]. Как видим, метод Фурье для определения параметров НДС в задачах динамики стержней с осевой неоднородностью не получил должного развития.

1.4. Результаты исследований по проблеме динамического изгиба балок с осевой неоднородностью механических и геометрических характеристик

Общие принципы и подходы исследования динамического изгиба стержней рассмотрены в литературе [264, 271, 303, 304, 313, 337, 346, 355, 215, 239, 192, 184, 194, 38]. Основными моделями для исследования динамических процессов при поперечных колебаниях являются:

- дискретная модель;
- модель Эйлера-Бернулли;
- модель Тимошенко.

Рассмотрим актуальные задачи теории изгибных колебаний и методы их решений. Анализ публикаций и полученных результатов в области динамического поведения неоднородных балок и стержней по материалам зарубежной печати достаточно подробно проведен в работе [71].

Наиболее широкое распространение при решении задач динамики стержневидных конструкций с усложненной структурой получили численные и приближенные методы. Так в работе [6] на основе метода сагиттарной функции построены зависимости собственных частот и форм поперечных колебаний для вращающегося стержня и установлена эволюция к модели, соответствующей колебаниям быстро вращающейся нити под действием центробежных сил инерции. Аналогичный подход использован в статье [7] для случая колебаний неоднородного стержня. Численно-аналитическое исследование задачи на собственные значения для случаев поперечных колебаний упругих стержней с локально сосредоточенными неоднородностями представлено в работе [42]. В статье [59] рассмотрена задача изгибных колебаний ортотропных полос

переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки, решение получено численно методом коллокаций. В работе [57] решается задача о собственном колебании прямого участка непрерывно неоднородного упругого трубопровода, лежащего на двухконстантном основании типа П. Л. Пастернака, рассмотрен линейный характер неоднородности модуля упругости и линейной плотности, приближенное решение уравнения изгиба получено методом Бубнова-Галеркина. Анализ влияния нелокального демпфирования материала на вынужденные колебания стержней, находящихся под действием периодической детерминированной и стохастической стационарной поперечной нагрузки с использованием метода Бубнова-Галеркина выполнен в [281]. Метод конечных разностей к исследованию изгибных колебаний свободных и вынужденных вертикальных стержней переменного сечения использован в работе [145]. При решении задач удара тонкостенных стержней с учетом контактного взаимодействия стержня с ударяемым телом в статьях [152, 162] нелинейное интегральное уравнение решается численным методом Эйлера. Применение метода сплайнов к вычислению собственных частот поперечных колебаний стержня с переменным поперечным сечением рассмотрено в [181, 322]. В работе [292] рассматривается построение моделей с использованием частичной дискретизации для задач динамики стержней с переменным распределением параметров.

Динамические модели неоднородных стержней с применением программных комплексов рассмотрены в работах [328, 349, 339, 321, 318]. Некоторые исследования посвящены не решению конкретных прикладных задач с использованием программных средств, а рассматривают проблему адекватного построения моделей. Например, в работе [18] на основе известного аналитического решения задачи о собственных колебаниях консольного стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости выполнена верификация результатов расчетов в программных комплексах MOCODISS и COMPASS. В статье [82] экспериментальные и численные исследования в программе ANSYS колебаний естественно закрученных анизотропных стержней использовались для

подтверждения правильности теоретических положений, полученных автором. Исследования динамических характеристик стержневых конструкций в программных комплексах Lira-CAD и SAP2000 представлено в [348].

Аналитические решения задач динамического изгиба балок получены в виде ортогональных полиномов [301], функций Бесселя [320, 340, 331, 305, 338, 308, 307, 296], гипергеометрических рядов [358, 345], степенных рядов, полученных методом Фробениуса [302]. Частный случай балки с экспоненциальным законом изменения площади поперечного сечения рассмотрен в [312]. Проблема ортогональности собственных форм применительно к балке Тимошенко для некоторых граничных задач рассмотрена в статьях [30, 164]. В работе [43] рассмотрены свободные изгибные колебания однородного прямого стержня без учета инерции вращения его поперечных сечений, проведены исследования возможных комбинаций технически реализуемых простых граничных условий. Метод интегральных преобразований с экспоненциально-тригонометрическими ядрами для анализа изгибных колебаний в вертикальной плоскости мостовых конструкций использован в [68]. В статье [78] рассмотрены колебания неоднородных стержней с переменными во времени и длине массой и жесткостью сечений, для решения дифференциальных уравнений поперечных колебаний используются ряды Фурье и функции Бесселя. Использование формулы Даламбера для исследования поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности, рассмотрено в [98]. Аналитическое решение уравнения колебаний стержня с переменной массой и жесткостью получено в рядах, построенных с использованием интегральных рекуррентных зависимостей [136, 140], однако найденное решение трудно использовать применительно к инженерным задачам динамики конструкций, особенно при наличии инерционных нагрузок. В статье [167] рассматривается аналитическое решение для частного случая изгибных колебаний стержня гиперболического очертания. Пространственные колебания стержня с учетом геометрической нелинейности, обусловленной изменением длины средней линии стержня, рассмотрены в [174, 175, 335]. Исследованию частотного спектра и

колебательной скорости стержня под действием периодических ударов с учетом сдвиговых деформаций и инерции вращения его сечений для различных видов граничных условий посвящена работа [197]. В статье [218] балка Тимошенко используется для моделирования стержневой системы содержащей нанообъект, также выполнен анализ влияния сдвиговой деформации на значения собственных частот системы. Частные случаи неоднородных стержней, для которых уравнения колебаний могут быть преобразованы к уравнению для однородного стержня, рассмотрены в работе [293].

В ряде работ на основе общих положений теории упругости исследуются влияние факторов, находящихся вне гипотез, принятых для балочных моделей. В статье [47] проведен теоретический и численный анализ степени влияния параметра непризматичности поперечного сечения стержня на его собственные частоты колебаний при разных комбинациях краевых условий. В работе [93] получено уравнение изгибных колебаний из общих динамических уравнений теории упругости, что дает возможность определить все искомые неизвестные задачи и по новому оценить их вклад в напряженно-деформированное состояние балочных элементов, выполнено сравнение с классической моделью балки Тимошенко. Различные вариационные подходы к решению начально-краевых задач динамики линейных упругих систем рассмотрены в работах [128, 129, 130, 207], где проводятся исследования влияния геометрических и упругих характеристик балки на частоты и формы собственных колебаний. Например, в статье [130] отмечено, что для 12-й формы гипотеза Бернулли об ортогональности поперечного сечения балки к ее срединной линии не применима для анализа высокочастотных собственных движений. Анализ уточненных уравнений свободных колебаний стержня-полосы посвящена статья [182], в частности рассмотрены неклассические бессдвиговые продольно-поперечные формы свободных колебаний, сопровождающихся искажением плоской формы поперечных сечений, показано, что соответствующие им частоты колебаний сильно зависят от коэффициента Пуассона, модуля упругости в поперечном направлении и при одном и том же значении частотного параметра (тона) могут

быть значительно ниже частот, соответствующих классическим продольным формам свободных колебаний. Используя постановку пространственной задачи теории упругости, в статье [295] проведен анализ устойчивости и высокочастотных колебаний стержней.

Некоторые работы посвящены исследованиям влияния продольных нагрузок на характеристики изгибных колебаний. Так в статье [88] рассматривается упругий неоднородный стержень, нагруженный продольной нагрузкой, исследования проведены для случаев следящей и мертвой нагрузки на концах, получено аналитическое выражение для фундаментального решения задачи о свободных поперечных колебаниях однородного стержня и сформулирован метод последовательных приближений для стержня переменного поперечного сечения, аналогичный подход для однородного стержня рассмотрен в [254]. Результаты численного исследования методом конечных элементов задачи о поперечных колебаниях прямого стержня при нагружении его продольной силой, которая гармонически изменяется со временем представлены в [111]. В работе [8] для движущегося стержня посредством численно-аналитической процедуры, с заданной точностью, определены и проанализированы собственные частоты возможных мод колебаний, установлены глобальные свойства спектра в зависимости от скорости, продольной силы и номера моды. Продольно-поперечные колебания тонкостенных стержней рассмотрены в работах [143, 162]. В [172] проведено исследование возбуждения поперечных колебаний при кратковременном продольном ударе по стержню. Поперечные колебания центрально сжатых прямолинейных стержней трубчатого сечения с использованием метода Бубнова-Галеркина исследованы в [178].

Отдельные вопросы о влиянии физико-механических свойствах материала стержня на динамические характеристики рассмотрены в работах [341, 362, 327, 325, 334, 294, 323]. В статье [3] проведен анализ спектра поперечных колебаний стержня в неоднородной упругой среде с переменным коэффициентом жесткости и произвольными граничными условиями упругого крепления, показано, что внешняя среда может приводить к аномальному эффекту – увеличению

собственных частот низших мод колебаний при удлинении длины стержня. Малые поперечные колебания вязкоупругого однородного стержня рассмотрены в [65]. В работе [84] получено приближенное решение трехмерной задачи теории линейной вязкоупругости, заданной в тонком периодическом неоднородном стержне из материала Кельвина-Фойгхта, в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра, который характеризует диаметр сечения стержня и размер неоднородности.

Результаты экспериментальных исследований динамики балок представлены в работах [259, 284].

Как и в случае с продольными и крутильными колебаниями применение аналитических решений к исследованию динамического изгиба неоднородных стержней в основном ограничивается выводом уравнения в специальных функциях, реже спектральным анализом отдельных граничных задач. При этом точные решения в замкнутой форме представляют особый интерес из-за того, что они служат критериями, по которым можно оценить точность различных приближенных решений, полученных с помощью методов Релея-Ритца, Бубнова-Галеркина, конечных разностей, конечных элементов, дифференциальных квадратур и др. [71, 314]. Таким образом, поиск новых решений в аналитической форме, а также развитие методов динамического расчета является актуальной проблемой современной теории моделирования и расчета упругих систем.

1.5. Выводы

Результат обзора литературных источников можно обобщить в следующих выводах:

1. Построение математических моделей НДС широкого класса физических объектов выполняется на основе теории стержней, что говорит о необходимости ее дальнейшего развития и совершенствования.

2. Для решения актуальных задач механики стержневых систем применяются аналитические, численные и экспериментальные методы

исследования, причем во многом эти методы находятся во взаимосвязи, уточняя и дополняя друг друга.

3. Задачи продольно-поперечного изгиба и устойчивости стержневых конструкций с осевой неоднородностью механических и геометрических характеристик на основе аналитических решений, представленные в литературе, в основном не имеют методологических подходов, а носят частный характер в рамках рассмотрения той или иной граничной задачи. Что в свою очередь ограничивает возможность использования уже полученных решений в инженерной практике.

4. В исследованиях колебаний и удара стержневых систем используют модели на основе упрощающих гипотез и допущений, что позволяет оценить степень влияния различных факторов и обосновать наиболее рациональные параметры для модели.

5. Теория и практика изучения продольных колебаний упругих стержней показали, что для подавляющего большинства случаев модель плоского удара Сен-Венана является приемлемой и достаточно точно описывает динамический процесс.

6. Применение метода Фурье к решению уравнений динамического деформирования позволяет точно и наглядно отразить механизм колебательного процесса и установить взаимосвязь между механическими, геометрическими параметрами тела и динамическими характеристиками процесса;

7. Метод Фурье практически не используется для динамических расчетов стержней с осевой механической и геометрической неоднородностью, что в основном связано с недостаточным уровнем развития методики его применения для данных объектов.

8. Создание методологии расчета на продольные и крутильные колебания упругих стержней с осевой неоднородностью механических и геометрических характеристик является актуальной научной проблемой, которая имеет существенное фундаментальное и прикладное значения.

РАЗДЕЛ 2

Разработка численно-аналитических методик исследования моделей изгиба и устойчивости неоднородных весоных стержневых систем

Проблема продольно-поперечного изгиба стержневых конструкций актуальна для ряда технических задач. Несмотря на то, что получены решения для отдельных задач продольно-поперечного изгиба и устойчивости весоных стержней, в литературе отсутствует единый подход к построению математических моделей на базе аналитического решения уравнения изгиба, который обеспечивал бы возможность исследования различных граничных условий в сложных конструкциях стержневых систем.

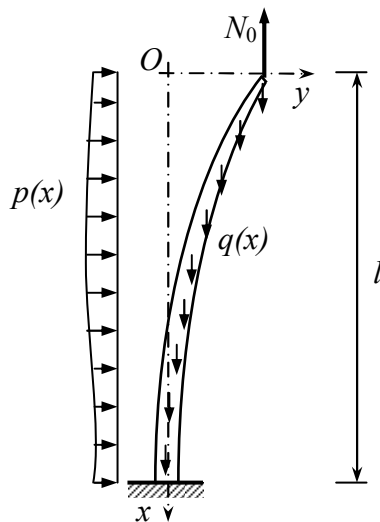


Рисунок 2.1. Схема продольно-поперечного изгиба стержневой конструкции

Рассматривается упругий стержень длиной l , на который действует продольная нагрузка интенсивностью $q(x)$ и поперечная нагрузка интенсивностью $p(x)$ (рисунок 2.1). Из условий равновесия элемента такого стержня следует система уравнений

$$EJ(x)\frac{d^2y}{dx^2} = M(x); \quad \frac{dM}{dx} = Q_y(x) \pm N(x)\frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dQ_y}{dx} = p(x), \quad (2.1)$$

где $y(x)$ - уравнение изогнутой оси стержня, $EJ(x)$ - изгибная жесткость стержня, $M(x)$ - изгибающий момент, $Q_y(x)$ - проекция перерезывающей силы на поперечную ось, $N(x)$ - продольное усилие. Знак минус во втором уравнении (2.1) соответствует состоянию сжатия, а плюс – растяжения.

Система уравнений (2.1) приводится к уравнению прогибов $y(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \pm \frac{d}{dx} \left(N(x) \frac{dy}{dx} \right) = p(x). \quad (2.2)$$

Знак минус в уравнении (2.2) соответствует состоянию растяжения, а плюс – сжатия.

В общем случае уравнение (2.2) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами. Только для нескольких случаев сочетания изгибной жесткости и действующих нагрузок могут быть получены решения в аналитической форме. Так для весоных стержней ($q(x) \neq 0$) известны решения некоторых граничных задач для случая однородной структуры [221] и остроконечных конструкций [80].

2.1. Исследование модели изгиба растянутых стержней со ступенчатой неоднородностью физико-механических характеристик

Рассматривается весоная стержневая система ступенчато-переменной жесткости длиной l , которая состоит из n стержней. и находится под действием горизонтальной распределенной нагрузки интенсивностью p (рисунок 2.2). К одному концу системы приложена вертикальная сила N_0 , интенсивность поперечной нагрузки на k -ом стержне – p_k , а интенсивность продольной нагрузки – q_k , l_k – его длина ($1 \leq k \leq n$). Из условий равновесия элемента k -го стержня следует система уравнений

$$EJ_k \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x); \quad \frac{dM}{dx} = Q_y(x) + N(x) \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dQ_y}{dx} = p_k,$$

здесь EJ_k – изгибная жесткость k -го стержня, $y(x)$ – уравнение изогнутой оси системы, $M(x)$ – изгибающий момент, $Q_y(x)$ – проекция поперечной силы на ось

y , $N(x) = N_0 + \sum_{i=1}^k q_i l_i + q_k \left(x - \sum_{i=1}^k l_i \right)$ – продольное усилие.

Для k -го участка рассматриваемой стержневой системы с учетом принятых обозначений уравнение прогибов (2.2) получим в виде

$$EJ_k \frac{d^4 y}{dx^4} - \left(N_0 + \sum_{i=1}^k q_i l_i + q_k \left(x - \sum_{i=1}^k l_i \right) \right) \frac{d^2 y}{dx^2} - q_k \frac{dy}{dx} = p_k. \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) проведем замены:

$$\frac{dy}{dx} = \theta, \quad \xi_k = \frac{N_0}{q_n l} + \frac{1}{q_n l} \sum_{i=1}^k q_i l_i + \frac{q_k}{q_n l} \left(x - \sum_{i=1}^k l_i \right).$$

Тогда оно примет вид

$$\frac{d^3 \theta}{d\xi_k^3} - \lambda^2 a_k^2 \xi_k \frac{d^2 \theta}{d\xi_k^2} - \lambda^2 a_k^2 \theta = \lambda^2 a_k^2 \frac{p_k}{q_k}. \quad (2.4)$$

$$\text{где } \lambda^2 = \frac{q_n l^3}{EJ_n}, \quad a_k^2 = \frac{q_n^2 EJ_n}{q_k^2 EJ_k}.$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$\frac{d^3 \theta}{d\xi_k^3} - \lambda^2 a_k^2 \xi_k \frac{d^2 \theta}{d\xi_k^2} - \lambda^2 a_k^2 \theta = 0. \quad (2.5)$$

Для коэффициентов уравнения (2.5)

выполняется условие $\frac{\partial(\lambda^2 a_k^2 \xi_k)}{\partial \xi_k} = \lambda^2 a_k^2$, что означает [112] его решениями

являются решения уравнения

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi_k^2} - \lambda^2 a_k^2 \xi_k \theta = C_{3,k}^*, \quad (2.6)$$

где $C_{3,k}^* = \text{const}$.

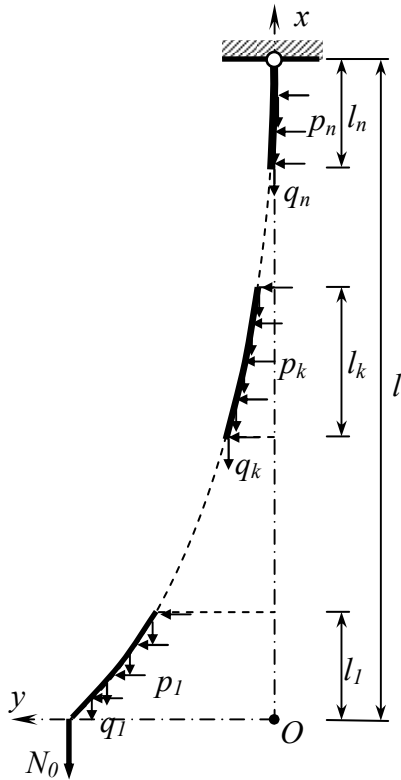


Рисунок 2.2. Схема продольно-поперечного изгиба растянутой стержневой системы

Общее решение уравнения (2.6) с помощью замены $z_k = \frac{2}{3}\lambda a_k \xi_k^{3/2}$, получено в работе [221]

$$\theta(z_k) = C_{1,k}^* z_k^{1/3} I_{1/3}(z_k) + C_{2,k}^* z_k^{1/3} I_{-1/3}(z_k) - C_{3,k}^* z_k^{1/3} g_{0,1/3}(z_k), \quad (2.7)$$

где $I_{\pm 1/3}(z)$ – модифицированные функции Бесселя,

$$g_{\mu,\nu}(z) = z^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)}$$

- модифицированная функция Ломмеля [221], а $\Gamma(z)$ - гамма функция.

С учетом частного решения $\theta_u(z_k) = -p_k / q_k$ общее решение уравнения (2.4) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = C_{1,k}^* z_k^{1/3} I_{1/3}(z_k) + C_{2,k}^* z_k^{1/3} I_{-1/3}(z_k) - C_{3,k}^* z_k^{1/3} g_{0,1/3}(z_k) - \frac{p}{q_k}$$

Если теперь перейти к дифференцированию по z_k , то получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz_k} = & \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{q_n l}{\lambda^{2/3} a_k^{2/3} q_k} \left(C_{1,k}^* I_{1/3}(z_k) + C_{2,k}^* I_{-1/3}(z_k) - C_{3,k}^* g_{0,1/3}(z_k) \right) - \\ & - \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{q_n l p_k}{\lambda^{2/3} a_k^{2/3} q_k^2 z_k^{1/3}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интегрируя выражение (2.8), получаем перемещение сечения k -го участка стержневой системы

$$y(z_k) = l \left(C_{1,k} \bar{I}_{1/3}(z_k) + C_{2,k} \bar{I}_{-1/3}(z_k) + C_{3,k} \bar{g}_{0,1/3}(z_k) + C_{4,k} - \left(\frac{3z_k}{2\lambda a_k} \right)^{2/3} \frac{q_n p_k}{q_k^2} \right) \quad (2.9)$$

где $\bar{I}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z I_{\pm 1/3}(z) dz$; $\bar{g}_{0,1/3}(z) = \int_0^z g_{0,1/3}(z) dz$.

С учетом формул для производных функций Бесселя и Ломмеля получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_k}{q_n} \left(\frac{3\lambda^2 a_k^2 z_k}{2} \right)^{1/3} \left(C_{1,k} I_{1/3}(z_k) + C_{2,k} I_{-1/3}(z_k) + C_{3,k} g_{0,1/3}(z_k) \right) - \frac{p}{q_k}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q_k^2}{q_n^2 l} \left(\frac{3\lambda^2 a_k^2 z_k}{2} \right)^{2/3} \left(C_{1,k} I_{-2/3}(z_k) + C_{2,k} I_{2/3}(z_k) - \frac{2}{3} C_{3,k} g_{-1,-2/3}(z_k) \right), \quad (2.11)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{3q_k^3 \lambda^2 a_k^2 z_k}{2q_n^3 l^2} \left(C_{1,k} I_{1/3}(z_k) + C_{2,k} I_{-1/3}(z_k) + \frac{8}{9} C_{3,k} g_{-2,1/3}(z_k) \right). \quad (2.12)$$

Соотношения (2.9)-(2.12) позволяют удовлетворить условиям состыковки участков стержневой системы

$$\begin{aligned} & C_{1,k} \bar{I}_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} \bar{I}_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k} \bar{g}_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{4,k} - \frac{q_n p \zeta_k}{q_k^2} = \\ & = C_{1,k+1} \bar{I}_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k+1} \bar{I}_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k+1} \bar{g}_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{4,k} - \frac{q_n p \zeta_k}{q_{k+1}^2}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & C_{1,k} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k} g_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{p q_n}{q_k^2 \lambda a_k \zeta_k^{1/2}} = \\ & = \frac{q_{k+1} a_{k+1}}{q_k a_k} \left(C_{1,k} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k} g_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{p q_n}{q_{k+1}^2 \lambda a_{k+1} \zeta_k^{1/2}} \right); \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} & C_{1,k} I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} I_{2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{2}{3} C_{3,k} g_{-1,-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) = \\ & = C_{1,k+1} I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k+1} I_{2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{2}{3} C_{3,k+1} g_{-1,-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right); \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & C_{1,k} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + \frac{8}{9} C_{3,k} g_{-2,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) = \\ & = \frac{q_{k+1} a_{k+1}}{q_k a_k} \left(C_{1,k+1} I_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k+1} I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + \frac{8}{9} C_{3,k+1} g_{-2,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\zeta_k = \frac{N_0}{q_n l} + \frac{1}{q_n l} \sum_{i=1}^k q_i l_i$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Граничные условия имеют вид

$$L_1 y|_{z=2/3\lambda a_1 \zeta_0^{3/2}} = 0; L_2 y|_{z=2/3\lambda a_1 \zeta_0^{3/2}} = 0; L_3 y|_{z=2/3\lambda a_n \zeta_n^{3/2}} = 0; L_4 y|_{z=2/3\lambda a_n \zeta_n^{3/2}} = 0, \quad (2.17)$$

где $\zeta_0 = \frac{N_0}{q_n l}$, $\zeta_n = \frac{N_0}{q_n l} + \frac{1}{q_n l} \sum_{i=1}^n q_i l_i$, L_j ($j=1,2,3,4$) – линейные дифференциальные операторы не выше третьего порядка, которые определяются из условия закрепления концов стержневой системы.

Уравнения (2.13)-(2.17) представляют собой систему $4n$ линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных $C_{1,k}$, $C_{2,k}$, $C_{3,k}$, $C_{4,k}$.

Полученные решения могут быть использованы для моделирования НДС элементов бурильного оборудования в разных технологических ситуациях, включая аварийные ситуации.

2.2. Численно-аналитические решения задач изгиба и устойчивости сжатых стержней со ступенчатой неоднородностью физико-механических характеристик

Статический расчет сжатых стержневых систем и их устойчивость рассматривалась автором в статье [230]. В случае сжатия уравнение прогибов (2.2) для k -го участка рассматриваемой стержневой системы (рисунок 2.3) принимает вид

$$EJ_k \frac{d^4 y}{dx^4} + \left(N_0 + \sum_{i=1}^k q_i l_i + q_k \left(x - \sum_{i=1}^k l_i \right) \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + q_k \frac{dy}{dx} = p_k. \quad (2.18)$$

Аналогично предыдущему случаю в уравнении (2.18) проведем замены:

$$\frac{dy}{dx} = \theta, \quad \xi_k = \frac{N_0}{q_n l} + \frac{1}{q_n l} \sum_{i=1}^k q_i l_i + \frac{q_k}{q_n l} \left(x - \sum_{i=1}^k l_i \right). \text{ Тогда оно примет вид}$$

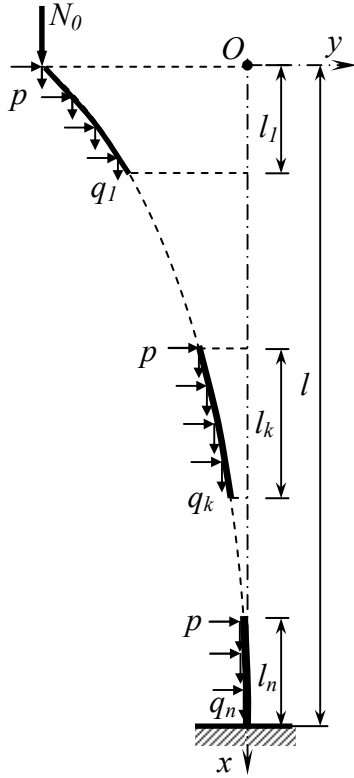


Рисунок 2.3. Схема продольно-поперечного изгиба сжатой стержневой системы

$$\frac{d^3\theta}{d\xi_k^3} + \lambda^2 a_k^2 \xi_k \frac{d^2\theta}{d\xi_k^2} + \lambda^2 a_k^2 \theta = \lambda^2 a_k^2 \frac{p_k}{q_k}. \quad (2.19)$$

$$\text{где } \lambda^2 = \frac{q_n l^3}{EJ_n}, \quad a_k^2 = \frac{q_n^2 EJ_n}{q_k^2 EJ_k}.$$

Ему соответствует однородное уравнение

$$\frac{d^3\theta}{d\xi_k^3} + \lambda^2 a_k^2 \xi_k \frac{d^2\theta}{d\xi_k^2} + \lambda^2 a_k^2 \theta = 0. \quad (2.20)$$

Для коэффициентов уравнения (2.20)

выполняется условие $\frac{\partial(\lambda^2 a_k^2 \xi_k)}{\partial \xi_k} = \lambda^2 a_k^2$, что означает

[112] его решениями являются решения уравнения

$$\frac{d^2\theta}{d\xi_k^2} + \lambda^2 a_k^2 \xi_k \theta = C_{3,k}^*, \quad (2.21)$$

где $C_{3,k}^* = \text{const}$.

Общее решение уравнения (2.6) с помощью замены $z_k = \frac{2}{3} \lambda a_k \xi_k^{3/2}$, получено в работе [221]

$$\theta(z_k) = C_{1,k}^* z_k^{1/3} J_{1/3}(z_k) + C_{2,k}^* z_k^{1/3} J_{-1/3}(z_k) + C_{3,k}^* z_k^{1/3} s_{0,1/3}(z_k), \quad (2.22)$$

где $J_{\pm 1/3}(z)$ – функции Бесселя,

$$s_{\mu,\nu}(z) = z^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)}$$

- функция Ломмеля [48], а $\Gamma(z)$ - гамма функция.

С учетом частного решения $\theta_u(z_k) = p_k / q_k$ общее решение уравнения (2.19) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = C_{1,k}^* z_k^{1/3} J_{1/3}(z_k) + C_{2,k}^* z_k^{1/3} J_{-1/3}(z_k) + C_{3,k}^* z_k^{1/3} s_{0,1/3}(z_k) + \frac{p}{q_k}$$

Если теперь перейти к дифференцированию по z_k , то получим

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz_k} = & \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{q_n l}{\lambda^{2/3} a_k^{2/3} q_k} \left(C_{1,k}^* J_{1/3}(z_k) + C_{2,k}^* J_{-1/3}(z_k) + C_{3,k}^* s_{0,1/3}(z_k) \right) + \\ & + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{q_n l p}{\lambda^{2/3} a_k^{2/3} q_k^2 z_k^{1/3}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Интегрируя выражение (2.23), получаем перемещение сечения k -го участка стержневой системы

$$y = l \left(C_{1,k} \bar{J}_{1/3}(z_k) + C_{2,k} \bar{J}_{-1/3}(z_k) + C_{3,k} \bar{s}_{0,1/3}(z_k) + C_{4,k} \right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \frac{q_n l p z_k^{2/3}}{\lambda^{2/3} a_k^{2/3} q_k^2}, \quad (2.24)$$

где $\bar{J}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z J_{\pm 1/3}(z) dz$; $\bar{s}_{0,1/3}(z) = \int_0^z s_{0,1/3}(z) dz$.

С учетом формул для производных функций Бесселя и Ломмеля получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_k}{q_n} \left(\frac{3\lambda^2 a_k^2 z_k}{2} \right)^{1/3} \left(C_{1,k} J_{1/3}(z_k) + C_{2,k} J_{-1/3}(z_k) + C_{3,k} s_{0,1/3}(z_k) \right) + \frac{p}{q_k}, \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{q_k^2}{q_n^2 l} \left(\frac{3\lambda^2 a_k^2 z_k}{2} \right)^{2/3} \left(C_{1,k} J_{-2/3}(z_k) - C_{2,k} J_{2/3}(z_k) - \frac{2}{3} C_{3,k} s_{-1,-2/3}(z_k) \right), \quad (2.26)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{3q_k^3 \lambda^2 a_k^2 z_k}{2q_n^3 l^2} \left(C_{1,k} J_{1/3}(z_k) + C_{2,k} J_{-1/3}(z_k) - \frac{8}{9} C_{3,k} s_{-2,1/3}(z_k) \right). \quad (2.27)$$

Соотношения (2.24)-(2.27) позволяют удовлетворить условиям состыковки участков стержневой системы

$$C_{1,k} \bar{J}_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} \bar{J}_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k} \bar{s}_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{4,k} + \frac{q_n p \zeta_k}{q_k^2} =$$

$$= C_{1,k+1} \bar{J}_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k+1} \bar{J}_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k+1} \bar{s}_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{4,k} + \frac{q_n p \zeta_k}{q_{k+1}^2}; \quad (2.28)$$

$$C_{1,k} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k} s_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + \frac{p q_n}{q_k^2 \lambda a_k \zeta_k^{1/2}} =$$

$$= \frac{q_{k+1} a_{k+1}}{q_k a_k} \left(C_{1,k} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{3,k} s_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + \frac{p q_n}{q_{k+1}^2 \lambda a_{k+1} \zeta_k^{1/2}} \right); \quad (2.29)$$

$$C_{1,k} J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) - C_{2,k} J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{2}{3} C_{3,k} s_{-1,-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) =$$

$$= C_{1,k+1} J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) - C_{2,k+1} J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{2}{3} C_{3,k+1} s_{-1,-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right); \quad (2.30)$$

$$C_{1,k} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{8}{9} C_{3,k} s_{-2,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_k \zeta_k^{3/2} \right) =$$

$$= \frac{q_{k+1} a_{k+1}}{q_k a_k} \left(C_{1,k+1} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) + C_{2,k+1} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) - \frac{8}{9} C_{3,k+1} s_{-2,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_{k+1} \zeta_k^{3/2} \right) \right); \quad (2.31)$$

где $\zeta_k = \frac{N_0}{q_n l} + \frac{1}{q_n l} \sum_{i=1}^k q_i l_i$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Граничные условия имеют вид

$$L_1 y|_{z=2/3 \lambda a_1 \zeta_0^{3/2}} = 0; L_2 y|_{z=2/3 \lambda a_1 \zeta_0^{3/2}} = 0; L_3 y|_{z=2/3 \lambda a_n \zeta_n^{3/2}} = 0; L_4 y|_{z=2/3 \lambda a_n \zeta_n^{3/2}} = 0, \quad (2.32)$$

где $\zeta_0 = \frac{N_0}{q_n l}$, $\zeta_n = \frac{N_0}{q_n l} + \frac{1}{q_n l} \sum_{i=1}^n q_i l_i$, L_j ($j = 1, 2, 3, 4$) – линейные дифференциальные операторы не выше третьего порядка, которые определяются из условия закрепления концов стержневой системы.

Уравнения (2.28)-(2.32) представляют собой систему $4n$ линейных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных $C_{1,k}$, $C_{2,k}$, $C_{3,k}$, $C_{4,k}$.

Полученные решения можно использовать для моделирования НДС и устойчивости в стержневых системах со ступенчато-переменными физико-механическими характеристиками, так и с непрерывно-изменяемыми.

Рассмотрим задачу устойчивости весоных стержней с непрерывно изменяемым сечением (рисунок 2.4). Нет универсальных подходов, основанных на аналитических методах расчета, для исследования устойчивости таких стержней, за исключением некоторых частных случаев [80].

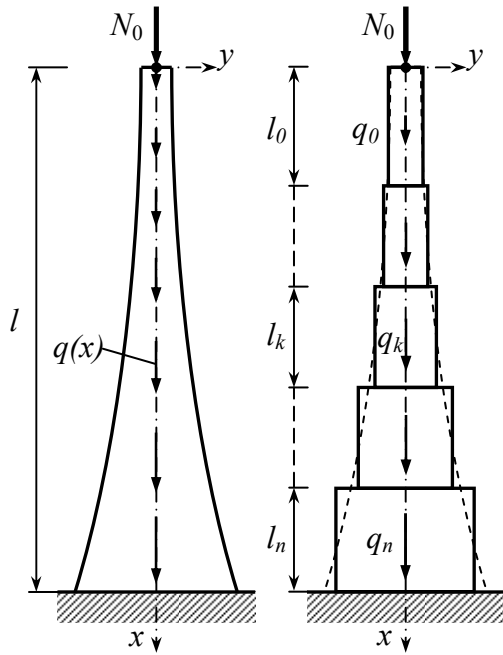


Рисунок 2.4. Расчетная схема стержня с непрерывно изменяемым сечением.

За основу возьмем модель усеченного стержня, изгибная жесткость и интенсивность распределенной продольной нагрузки которого описываются степенными зависимостями от продольной координаты x :

$$EJ = EJ_n \left(\frac{x/l + \chi}{1 + \chi} \right)^{m+2};$$

$$q = \gamma F_n \left(\frac{x/l + \chi}{1 + \chi} \right)^m, \quad (2.33)$$

где $\chi = \frac{h_1}{h_2 - h_1}$, h_1 и h_2 — радиусы инерции верхнего и нижнего сечений (для стержней конического очертания), E — модуль упругости, F_n и J_n — площадь и осевой момент инерции поперечного сечения основания стержня, γ — удельный вес, l — длина стержня, показатель степени m зависит от геометрии конструкции. Величину продольной нагрузки на верхнем конце стержня возьмем равной весу усеченной части стержня

$$N_0 = \frac{\gamma F_n l \chi^{m+1}}{(m+1)(1+\chi)^m}. \quad (2.34)$$

Аппроксимируем форму рассматриваемой конструкции стержневой системой, состоящей из n участков (рисунок 2.4), параметры каждого участка, с учетом зависимостей (2.33), определим следующим образом:

$$l_k = \frac{l}{n}; \quad q_k = \gamma F_n \left(\frac{k - v + \chi n}{n + \chi n} \right)^m; \quad EJ_k = EJ_n \left(\frac{k - v + \chi n}{n + \chi n} \right)^{m+2}, \quad (2.35)$$

где v – параметр, определяющий сечение в пределах участка по которому устанавливаются интенсивность продольной нагрузки и жесткость участка ($0 \leq v \leq 1$).

Для решения поставленной задачи применим условия состыковки участков системы (2.28)-(2.31) для случая $p = 0$, с учетом полученных зависимостей (2.34), (2.35), используем следующие обозначения величин

$$\zeta_k = \frac{\chi^{m+1}}{(m+1)(1+\chi)^m} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left(\frac{i - v + \chi n}{n + \chi n} \right)^m, \quad a_k = \left(\frac{n + \chi n}{k - v + \chi n} \right)^{3/2m+1}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\gamma F_n l^3}{EJ_n}},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Для консольного стержня (рисунок 2.4) из граничных условий получим уравнения

$$C_{3,1} = 0; \quad (2.36)$$

$$C_{1,1} J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_1 \zeta_0^{3/2} \right) - C_{2,1} J_{2/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_1 \zeta_0^{3/2} \right) = 0; \quad (2.37)$$

$$C_{1,n} \bar{J}_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_n \zeta_n^{3/2} \right) + C_{2,n} \bar{J}_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_n \zeta_n^{3/2} \right) + C_{3,n} \bar{s}_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_n \zeta_n^{3/2} \right) + C_{4,n} = 0; \quad (2.38)$$

$$C_{1,n} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_n \zeta_n^{3/2} \right) + C_{2,n} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_n \zeta_n^{3/2} \right) + C_{3,n} s_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} \lambda a_n \zeta_n^{3/2} \right) = 0, \quad (2.39)$$

$$\text{где } \zeta_0 = \frac{\chi^{m+1}}{(m+1)(1+\chi)^m}, \quad \zeta_n = \frac{\chi^{m+1}}{(m+1)(1+\chi)^m} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i - \nu + \chi n}{n + \chi n} \right)^m.$$

Численно решая совместно системы однородных уравнений состыковки участков (2.28)-(2.31) с уравнениями граничных условий (2.36)-(2.39), определяется относительная величина веса $\tilde{q} = \lambda^2 = \frac{\gamma F_n l^3}{E J_n}$.

В качестве примера рассмотрим стержень, моделирующий конструкции решетчатых башен ($m=0$) с величиной относительного поперечного размера $\chi=1$ (отношение поперечных размеров оснований $h_1:h_2=1:2$), жесткость участков будем определять по их среднему сечению ($\nu=0,5$). Аналитическое решение [249] дает относительную величину веса $\tilde{q}=1,336$ из рассматриваемой модели для разных значений n получим:

$$n=2 - \tilde{q}=1,269; \quad n=3 - \tilde{q}=1,304; \quad n=4 - \tilde{q}=1,318; \quad n=5 - \tilde{q}=1,324.$$

Таким образом, для $n=5$ различие не превышает 1%. Если возьмем $N_0=0$, то можем определить относительную величину критического веса – $\tilde{q}_{кр}=6,007$, для решетчатых башен аналитическое решение рассмотрено в работе [235] и искомая величина составляет для принятых параметров конструкции – $\tilde{q}_{кр}=6,072$, т.е. расхождение составит порядка 1%. Если взять конструкцию с параметром $\chi=0,01$ ($h_1:h_2 \approx 1:100$) и применить такой же подход к построению модели, то получим необходимое число участков ступенчатой колонны $n=14$, а относительная величина критического веса – $\tilde{q}_{кр}=3,72$, из аналитического решения для остроконечной конструкции критический вес составит $\tilde{q}_{кр}=3,67$ [80].

2.3. Анализ модели изгиба и устойчивости стержней с продольной квадратичной неоднородностью изгибной жесткости

Рассматривается математическая модель упругого весомого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости длиной l , стержень с такими параметрами, в частности, используется в качестве модели решетчатых башен [55, 80, 209, 216]. На стержень действует продольная сила N_0 , $p(x)$ – интенсивность поперечной нагрузки, $q = \text{const}$ – интенсивность продольной нагрузки. В качестве примера взят линейный закон изменения интенсивности $p(x) = p_1(1 - x/l) + p_0$ (рисунок 2.5). Введем следующие обозначения $h = ax + h_1$ – радиус инерции произвольного сечения, где h_1 – радиус инерции верхнего сечения, а радиус инерции нижнего сечения обозначим h_2 , $a = (h_2 - h_1)/l$, F – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости.

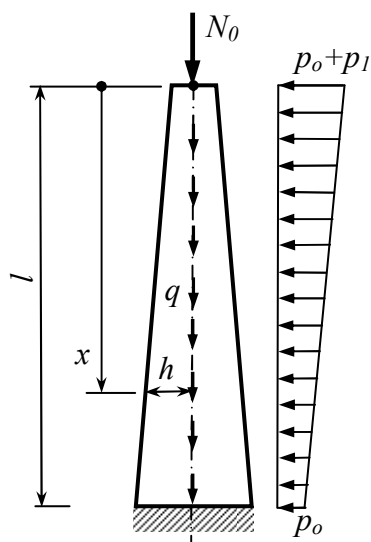


Рисунок 2.5. Расчетная схема весомого стержня с переменной изгибной жесткостью

Уравнения равновесия элемента конструкции

$$EF(ax + h_1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x);$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) - (N_0 + qx) \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dQ}{dx} = p(x). \quad (2.40)$$

С учетом введенных обозначений, а также зависимостей (2.40) уравнение относительно прогибов (2.2) получим в виде

$$\begin{aligned}
& EF(ax + h_1)^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + 4EFa(ax + h_1) \frac{d^3 y}{dx^3} + \\
& + (2EFa^2 + N_0 + qx) \frac{d^2 y}{dx^2} + q \frac{dy}{dx} = p_1 \frac{h_2 - (ax + h_1)}{h_2 - h_1} + p_0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Уравнение (2.41) представим в виде

$$\left(EF \frac{d}{dx} \left((ax + h_1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + (N_0 + qx) \frac{dy}{dx} \right)'_x = p_1 \frac{h_2 - (ax + h_1)}{h_2 - h_1} + p_0. \tag{2.42}$$

Интегрируем выражение (2.42)

$$\begin{aligned}
& EF(ax + h_1)^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2EFa(ax + h_1) \frac{d^2 y}{dx^2} + (N_0 + qx) \frac{dy}{dx} = \\
& = p_1 \frac{2h_2(ax + h_1) - (ax + h_1)^2}{2a(h_2 - h_1)} + p_0 \frac{ax + h_1}{a} + C_3 \frac{EFa^2}{4},
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Для уравнения (2.43) выполним замену переменных $z = \lambda \sqrt{\frac{ax + h_1}{al}}$, где

$\lambda = 2\sqrt{\frac{ql}{EFa^2}}$; $\theta(z) = y'_x(z)$. Тогда оно примет вид

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{d\theta}{dz} + \left(1 + \frac{1 - v^2}{z^2} \right) \theta = \frac{2p_1 l}{EFa^2 \lambda^4} (2(1 + k)\lambda^2 - z^2) + \frac{4p_0 l}{EFa^2 \lambda^2} + \frac{C_3}{z^2}, \tag{2.44}$$

где $v = \sqrt{1 - \frac{4N_0}{EFa^2} + \frac{4ql}{EFa^2} k}$, $k = \frac{h_1}{al}$ или $\frac{h_1}{h_2} = \frac{k}{k + 1}$, то есть k определяет соотношение размеров оснований.

Следует отметить, что для уравнения (2.44) принято условие $\frac{4N_0}{EFa^2} < 1 + \frac{4ql}{EFa^2}k$. Это соответствует случаю растягивающей силы N_0 или

Неоднородному уравнению (2.44) соответствует однородное

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{d\theta}{dz} + \left(1 + \frac{1-v^2}{z^2}\right)\theta = 0. \quad (2.45)$$

Его решение известно [112]

$$\theta(z) = \frac{C_1 J_v(z)}{z} + \frac{C_2 J_{-v}(z)}{z}, \quad (2.46)$$

где $J_v(z)$ – функции Бесселя.

Общее решение неоднородного уравнения (2.44) найдем методом вариации произвольных постоянных.

Вронскиан фундаментальной системы функций: $\varphi_1(z) = \frac{J_v(z)}{z}$, $\varphi_2(z) = \frac{J_{-v}(z)}{z}$ $W(J_v, J_{-v}) = -\frac{2 \sin v\pi}{\pi z}$ [48], тогда $W(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{2 \sin v\pi}{\pi z^3}$, $W \neq 0$, так как v – не целое число в общем случае.

После применения метода вариации произвольных постоянных общее решение уравнения (2.44) примет вид

$$\begin{aligned} \theta(z) = & \frac{C_1 J_v(z)}{z} + \frac{C_2 J_{-v}(z)}{z} + \frac{C_3 s_{0,v}(z)}{z} + \frac{4p_0 l}{EFa^2 \lambda^2} \frac{s_{2,v}(z)}{z} + \\ & + \frac{4p_1 l}{EFa^2 \lambda^2} (1+k) \frac{s_{2,v}(z)}{z} - \frac{2p_1 l}{EFa^2 \lambda^4} \frac{s_{4,v}(z)}{z}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где

$$\begin{aligned}
s_{\mu, \nu}(z) &= \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \left(J_{\nu} \int_0^z z^{\mu} J_{-\nu}(z) dz - J_{-\nu} \int_0^z z^{\mu} J_{\nu}(z) dz \right) = \\
&= z^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)}
\end{aligned}$$

- функция Ломмеля [48], а $\Gamma(\zeta)$ - гамма функция.

Учитывая, что $z = \lambda \sqrt{\frac{ax + h_1}{al}}$ и интегрируя выражение (2.47), приходим к уравнению изогнутой оси стержня

$$\begin{aligned}
y(z) &= \frac{2l}{\lambda^2} C_1 \bar{J}_{\nu}(z) + \frac{2l}{\lambda^2} C_2 \bar{J}_{-\nu}(z) + \frac{2l}{\lambda^2} C_3 \bar{s}_{0,\nu}(z) + \frac{2l}{\lambda^2} C_4 + \\
&+ \frac{8p_0 l^2}{EFa^2 \lambda^4} \bar{s}_{2,\nu}(z) + \frac{8p_1 l^2}{EFa^2 \lambda^4} (1+k) \bar{s}_{2,\nu}(z) - \frac{4p_1 l^2}{EFa^2 \lambda^6} \bar{s}_{4,\nu}(z),
\end{aligned} \tag{2.48}$$

где $\bar{J}_{\pm \nu}(z) = \int_0^z J_{\pm \nu}(z) dz$; $\bar{s}_{\mu, \nu}(z) = \int_0^z s_{\mu, \nu}(z) dz$.

Из формулы (2.48), используя рекуррентные соотношения для функций Бесселя и Ломмеля [48], можно определить производные $y''_{xx}(z)$ и $y'''_{xxx}(z)$:

$$\begin{aligned}
y''_{xx}(z) &= \frac{\lambda^2}{2l} \left(C_1 \left(\frac{\nu-1}{z^3} J_{\nu}(z) - \frac{1}{z^2} J_{\nu+1}(z) \right) - C_2 \left(\frac{\nu+1}{z^3} J_{-\nu}(z) + \frac{1}{z^2} J_{-\nu+1}(z) \right) + \right. \\
&+ C_3 \left(\frac{\nu-1}{z^3} s_{0,\nu}(z) - \frac{\nu+1}{z^2} s_{-1,\nu+1}(z) \right) + \frac{4p_0 l}{EFa^2 \lambda^2} \left(\frac{\nu-1}{z^3} s_{2,\nu}(z) - \frac{\nu-1}{z^2} s_{1,\nu+1}(z) \right) + \\
&\left. + \frac{4p_1 l}{EFa^2 \lambda^2} (1+k) \left(\frac{\nu-1}{z^3} s_{2,\nu}(z) - \frac{\nu-1}{z^2} s_{1,\nu+1}(z) \right) - \frac{2p_1 l}{EFa^2 \lambda^4} \left(\frac{\nu-1}{z^3} s_{4,\nu}(z) - \frac{\nu-3}{z^2} s_{3,\nu+1}(z) \right) \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'''_{xxx}(z) = & \frac{\lambda^4}{4l^2} \left(C_1 \left(\left(\frac{v^2 - 4v + 3}{z^5} - \frac{1}{z^3} \right) J_v(z) + \frac{4}{z^4} J_{v+1}(z) \right) + \right. \\
& + C_2 \left(\left(\frac{v^2 + 4v + 3}{z^5} - \frac{1}{z^3} \right) J_{-v}(z) + \frac{4}{z^4} J_{-v+1}(z) \right) + \\
& + C_3 \left(\frac{v^2 - 4v + 3}{z^5} s_{0,v}(z) + \frac{4(v+1)}{z^4} s_{-1,v+1}(z) + \frac{1-v^2}{z^3} s_{-2,v}(z) \right) + \\
& + \frac{4p_0 l}{EFa^2 \lambda^2} \left(\frac{v^2 - 4v + 3}{z^5} s_{2,v}(z) + \frac{4(v-1)}{z^4} s_{1,v+1}(z) + \frac{1-v^2}{z^3} s_{0,v}(z) \right) + \\
& + \frac{4p_1 l}{EFa^2 \lambda^2} (1+k) \left(\frac{v^2 - 4v + 3}{z^5} s_{2,v}(z) + \frac{4(v-1)}{z^4} s_{1,v+1}(z) + \frac{1-v^2}{z^3} s_{0,v}(z) \right) - \\
& \left. - \frac{2p_1 l}{EFa^2 \lambda^4} \left(\frac{v^2 - 4v + 3}{z^5} s_{4,v}(z) + \frac{4(v-3)}{z^4} s_{3,v+1}(z) + \frac{9-v^2}{z^3} s_{2,v}(z) \right) \right).
\end{aligned}$$

После их определения находим выражение для моментов

$$\begin{aligned}
M(z) = & C_1 \frac{EFla^2}{2\lambda^2} (z(v-1)J_v(z) - z^2 J_{v+1}(z)) - \\
& - C_2 \frac{EFla^2}{2\lambda^2} (z(v+1)J_{-v}(z) + z^2 J_{-v+1}(z)) + \\
& + C_3 \frac{EFla^2}{2\lambda^2} (z(v-1)s_{0,v}(z) - z^2(v+1)s_{-1,v+1}(z)) + \\
& + \frac{2p_0 l^2}{\lambda^4} (z(v-1)s_{2,v}(z) - z^2(v-1)s_{1,v+1}(z)) + \\
& + \frac{2p_0 l^2 z^4}{\lambda^4} (1+k) (z(v-1)s_{2,v}(z) - z^2(v-1)s_{1,v+1}(z)) - \\
& - \frac{p_1 l^2}{\lambda^6} (z(v-1)s_{4,v}(z) - z^2(v-3)s_{3,v+1}(z)).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

и поперечных сил

$$Q_y(z) = \frac{p_1 l z^2}{2\lambda^4} (2(1+k)\lambda^2 - z^2) + \frac{p_0 l z^2}{\lambda^2} + C_3 \frac{EFa^2}{4}. \tag{2.50}$$

По зависимостям (2.47-2.50) можно выполнить расчеты на жесткость и прочность, где постоянные интегрирования C_{1-4} определяются из граничных условий закрепления участков конструкции.

Оценим влияние продольных нагрузок на величину поперечной деформации и изгибающего момента, решение данной задачи представлено в статье автора [351]. С этой целью рассмотрим две модели (рисунок 2.6). Введем для этих моделей безразмерные величины:

$\tilde{M}_{\max} = \frac{2}{pl^2} M_{\max}$ – безразмерный момент в

основании стержня; $\tilde{y}_{\max} = \frac{8Efa^2}{pl^2} y_{\max}$ – безразмерный прогиб вершины стержня;

$\tilde{q} = \frac{ql}{Efa^2}$ – безразмерный вес конструкции; $\tilde{N} = \frac{N_0}{Efa^2}$ – безразмерная продольная сила.

Из зависимостей (1-3) для модели (1) получаем:

$$\tilde{M}_{1,\max} = 1; \quad \tilde{y}_{1,\max} = \frac{2 - 12k^2 - 6k}{k + 1} + 12k^2 \ln \frac{k + 1}{k}.$$

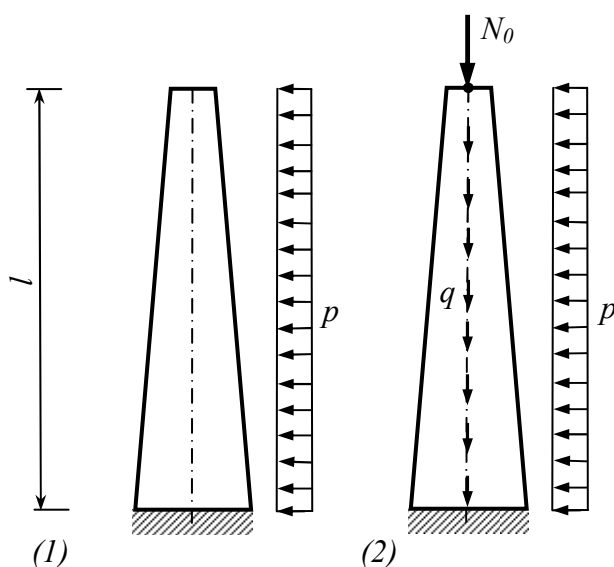


Рисунок 2.6. Расчетные модели конструкции решетчатой башни:

1 – модель без учета продольной нагрузки;

2 – модель с учетом продольной нагрузки.

Для модели (2) выражения для $\tilde{M}_{2,\max}$ и $\tilde{y}_{2,\max}$ получим из зависимостей (2.48) и (2.49) с учетом $p_0 = p$, $p_1 = 0$. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий

$$\begin{cases} y(\lambda\sqrt{k+1})|_{x=l} = 0 \\ y'(\lambda\sqrt{k+1})|_{x=l} = 0 \\ M(\lambda\sqrt{k})|_{x=0} = 0 \\ Q(\lambda\sqrt{k})|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

На рисунках 2.7-2.9 представлены результаты

численных исследований системы (2.51).

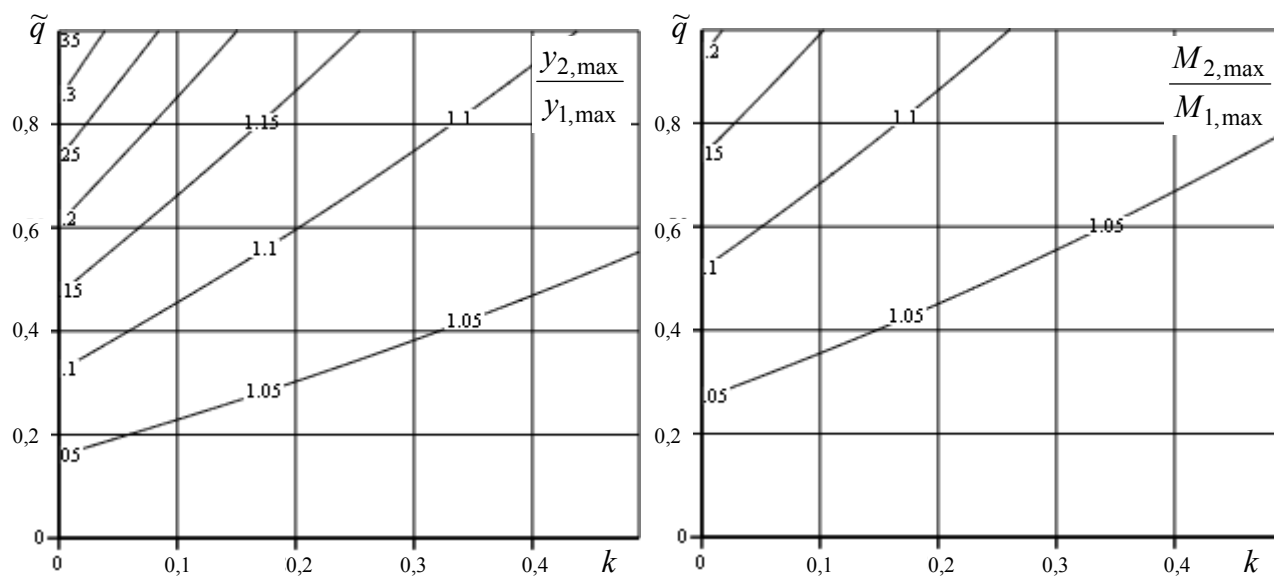


Рисунок 2.7. Отношения прогибов и изгибающих моментов для моделей при $\tilde{N} = 0$

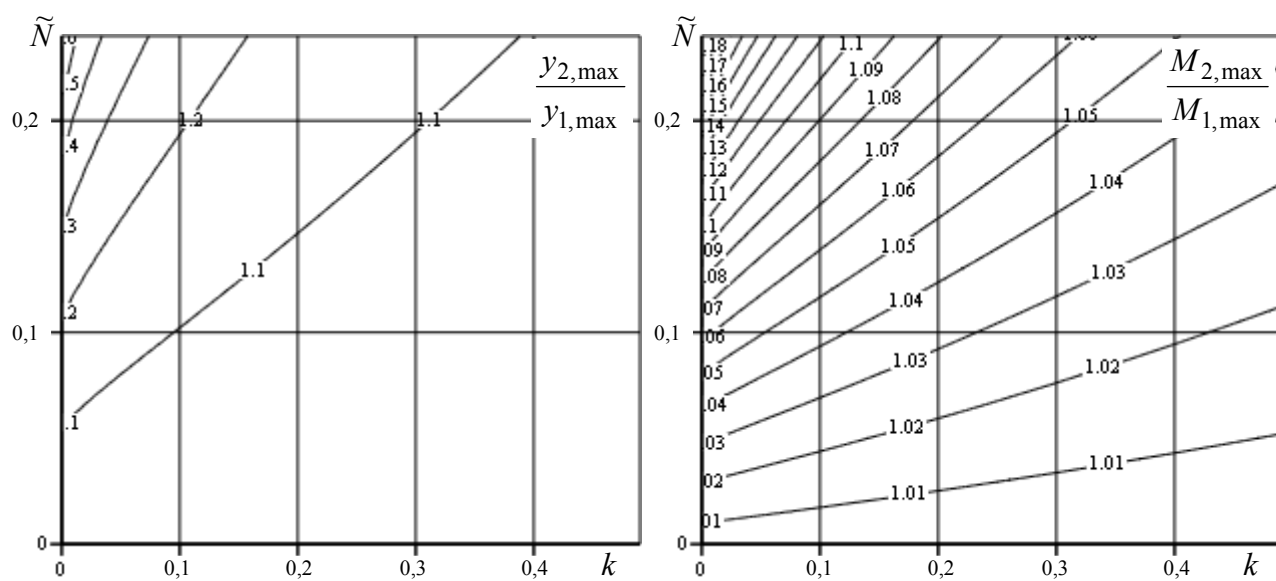


Рисунок 2.8. Отношения прогибов и изгибающих моментов моделей при $\tilde{q} = 10^{-3}$

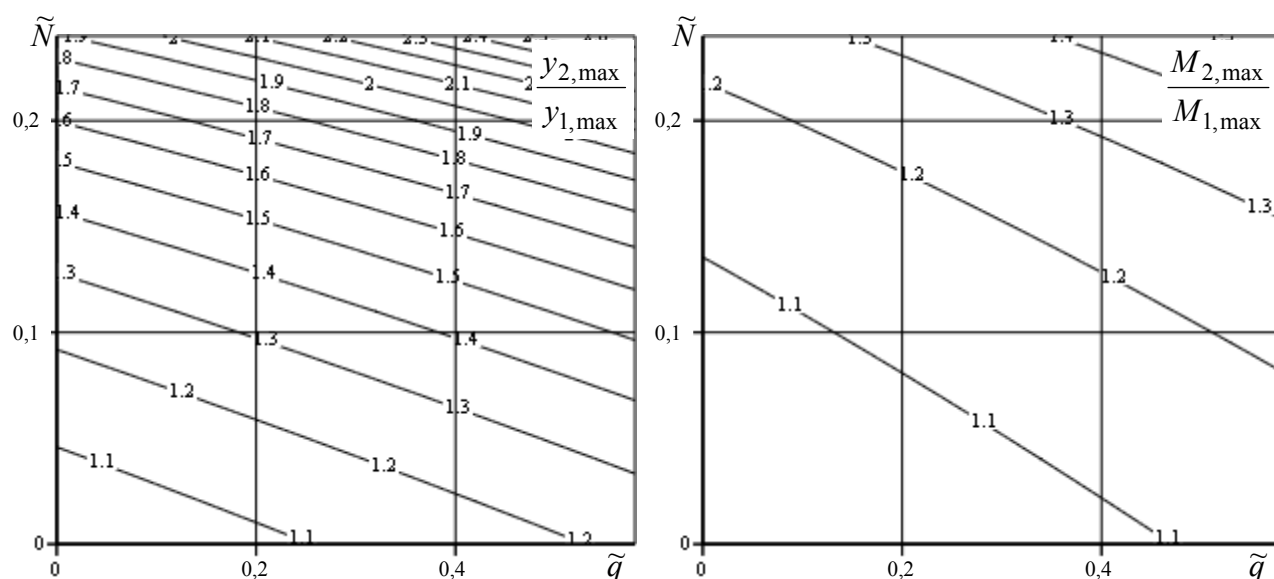


Рисунок 2.9. Отношения прогибов и изгибающих моментов моделей при $k = 10^{-2}$

На основании представленных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Влияние продольных нагрузок с увеличением параметра k на величину прогибов и изгибающих моментов существенно убывает (рисунок 2.7; рисунок 2.8);

2. Определены предельные значения нагрузок для остроконечного стержня ($k = 0,01$), при которых их влияние на НДС конструкции не превышает 5%, что видно из графиков рисунок 2.9:

- $\tilde{q} < 0,1$ и $\tilde{N} < 0,02$ при определении максимального прогиба;
- $\tilde{q} < 0,25$ и $\tilde{N} < 0,1$ при определении максимального момента.

Например, для буровой башенной вышки, которая представляет пространственную стержневую конструкцию в виде квадратной усеченной пирамиды, имеет следующие параметры: высота вышки 53,3 м, ширина нижнего основания 10 м, верхнего 2 м ($h_1 = 1$ м; $h_2 = 5$ м; $k = 0,25$; $a = 0,075$), площадь поперечного сечения $351,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, вес вышки 400 кН ($\tilde{q} = 1,01 \cdot 10^{-2}$), вес

оборудования 3,2 МН ($\tilde{N} = 8,09 \cdot 10^{-2}$). Для нее отношения прогибов и моментов составят $y_{2,\max} / y_{1,\max} = 1,045$; $M_{2,\max} / M_{1,\max} = 1,022$, то есть погрешность использования упрощенного метода расчета по модели (1) при определении прогиба составит 4,5%, а момента в основании 2,2%.

Из графиков рисунки 2.7-2.9 следует, что в общем случае продольные нагрузки оказывают влияние на значения расчетных параметров. Таким образом, при исследовании напряженно-деформированного состояния рассматриваемых конструкций, следует использовать предложенную модель, или на ее основании обосновать принятые допущения в расчетных схемах.

Данную модель можно использовать для исследования напряженно-деформированного состояния конструкции, решения задач устойчивости от собственного веса и для математического описания элементов в программных комплексах объектного моделирования.

2.3.1. Исследование устойчивости от действия собственного веса стержней с продольной квадратичной неоднородностью изгибной жесткости

Остановимся на конструкциях решетчатых башен (буровые вышки, башни теле-радиосвязи, стойки ветрогенераторов и т.д.) (рисунок 2.10), так как в данном случае основной составляющей продольной нагрузки является вес самой конструкции. Даная задача рассмотрена в статье [235].

Распределенный вес стержня находится из зависимости

$$q = \gamma(F_l \cos \beta + F_d \sin \alpha),$$

где γ – удельный вес материала, F_l и F_d – площадь поперечного сечения стоек (поясов) и раскосов соответственно. С учетом, что для реальных конструкций F_l , F_d и β – постоянные или ступенчато-переменные

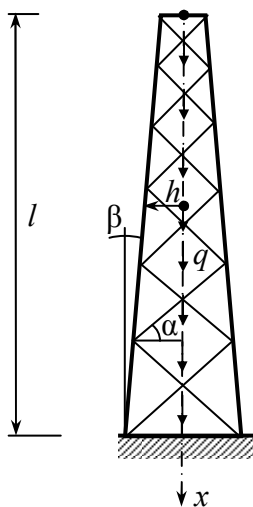


Рисунок 2.10. Расчетная схема весомого стержня переменной жесткости

величины, а угол α лежит в диапазоне от 40 до 50 град., то $q = \text{const}$ для всей длины стержня или его участка.

Для удобства используются следующие обозначения:

$EJ(x) = EJ_2 \left((1-k) \frac{x}{l} + k \right)^2$ – изгибная жесткость, $k = \frac{h_1}{h_2}$, EJ_2 – изгибная жесткость основания стержня, h_1 и h_2 – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений соответственно; $\tilde{q} = \frac{ql^3}{EJ_2}$ – безразмерная интенсивность продольной нагрузки.

С учетом того, что функции J_v и J_{-v} являются линейно-зависимыми для целого индекса v , для задач устойчивости целесообразно решение уравнения (2.44) представить в виде

$$\theta(z) = C_1 \frac{J_v(z)}{z} + C_2 \frac{Y_v(z)}{z} + C_3 \frac{s_{0,v}(z)}{z}, \quad (2.52)$$

где $Y_v(z)$ – функция Бесселя второго рода, $v = \sqrt{1 + \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3}}$

$$z = 2\sqrt{\tilde{q} \left(\frac{1}{(1-k)^2} \frac{x}{l} + \frac{k}{(1-k)^3} \right)}.$$

Соответственно выражения для прогибов изгибающих моментов и поперечных сил будут

$$y(z) = \frac{1}{2} l \frac{(1-k)^2}{\tilde{q}} (C_1 \bar{J}_v(z) + C_2 \bar{Y}_v(z) + C_3 \bar{s}_{0,v}(z) + C_4), \quad (2.53)$$

где $\bar{Y}_v(z) = \int_0^z Y_v(z) dz$;

$$M(z) = \frac{1}{8} \frac{EJ_2}{l} \frac{(1-k)^4}{\tilde{q}} \left(C_1 \left((v-1)zJ_v(z) - z^2 J_{v+1}(z) \right) + C_2 \left((v-1)zY_v(z) - z^2 Y_{v+1}(z) \right) + C_3 \left((v-1)zs_{0,v} - (v+1)z^2 s_{-1,v+1} \right) \right), \quad (2.54)$$

$$Q_y(z) = \frac{1}{4} \frac{EJ_2}{l^2} (1-k)^2 C_3; \quad (2.55)$$

Рассмотрим потерю устойчивости и проанализируем влияние геометрических параметров конструкции на величину критического веса для случая консольного закрепления стержня (наиболее распространенный для конструкций башенного типа). В этом случае граничные условия на защемленном и свободном концах принимают вид

$$y\left(\sqrt{\frac{v^2-1}{k}}\right) = 0; \quad \theta\left(\sqrt{\frac{v^2-1}{k}}\right) = 0; \quad M(\sqrt{v^2-1}) = 0; \quad (2.56)$$

$$Q(\sqrt{v^2-1}) = 0. \quad (2.57)$$

Из равенства (2.57) получаем $C_3 = 0$, а из условий (2.56) приходим к уравнению устойчивости

$$\begin{aligned} & Y_v\left(\sqrt{\frac{v^2-1}{k}}\right) \left((v-1)J_v(\sqrt{v^2-1}) - \sqrt{v^2-1}J_{v+1}(\sqrt{v^2-1}) \right) - \\ & - J_v\left(\sqrt{\frac{v^2-1}{k}}\right) \left((v-1)Y_v(\sqrt{v^2-1}) - \sqrt{v^2-1}Y_{v+1}(\sqrt{v^2-1}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

На графике (рисунке 2.12 а)) представлены численные расчеты критического веса $\tilde{q}_{kp} = (v^2-1) \frac{(1-k)^3}{4k}$ уравнения (2.58) для различных значений параметра k . Штрихпунктирными линиями показаны известные значения безразмерной величины критического веса [80]: верхняя линия (7.84) соответствует стержню постоянного сечения, нижняя (3.67) – остроконечному стержню.

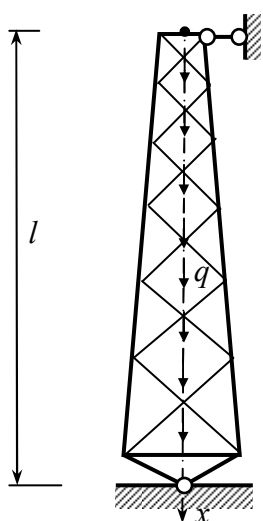


Рисунок 2.11. Расчетная схема шарнирно-опертого весомого стержня

Рассмотрим потерю устойчивости и проанализируем влияние геометрических параметров конструкции на величину критического веса для случая шарнирного опирания торцов конструкции (рисунок 2.11). В этом случае граничные условия на защемленном и свободном концах принимают вид

$$\begin{aligned} y\left(\sqrt{\frac{v^2-1}{k}}\right) &= 0; \quad M\left(\sqrt{\frac{v^2-1}{k}}\right) = 0; \\ y(\sqrt{v^2-1}) &= 0; \quad M(\sqrt{v^2-1}) = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

На графике (рисунке 2.12 б)) представлены численные расчеты критического веса $\tilde{q}_{кр}$ системы уравнений (2.59) для различных значений параметра k . Штрихпунктирной линией показано известное значение безразмерной величины критического веса (18.12) соответствует стержню постоянного сечения [270].

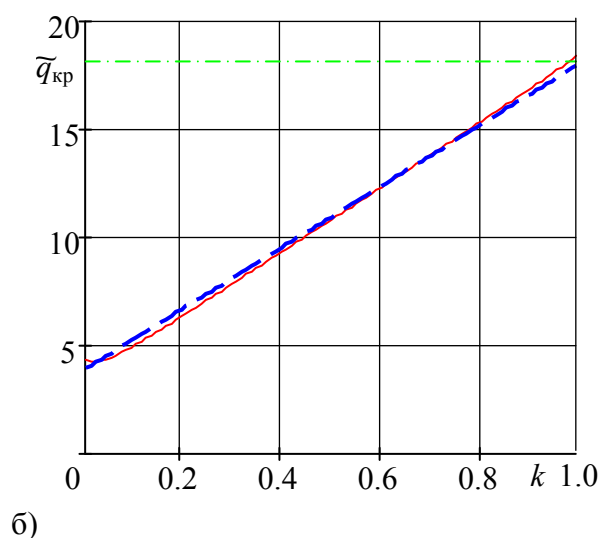
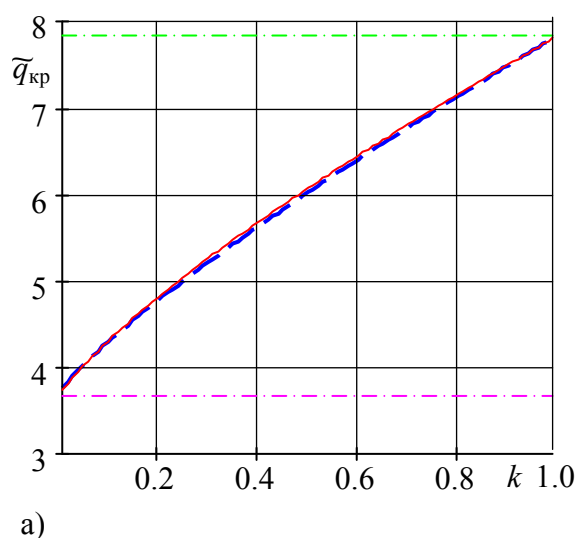


Рисунок 2.12. Зависимости критического веса – $\tilde{q}_{кр}$ от параметра поперечного размера – k : а) консольной конструкции; б) шарнирно-опертой конструкции

Для инженерного расчета критического веса кривые на графиках (рисунок 2.12) аппроксимируем зависимостью вида

$$\tilde{q}_{кр}(k) = ak^c + b. \quad (2.60)$$

Значения параметра b находим из известного значения для конструкции остроконечной формы [80]:

- для консольной конструкции $b = 3.67$;
- для шарнирно-опертой конструкции $b = 3.81$.

Параметр a находим из известного значения для однородного стержня ($k = 1$) [270]:

- для консольной конструкции $a = 7.84 - 3.67 = 4.17$;
- для шарнирно-опертой конструкции $a = 18.12 - 3.81 = 14.31$.

Показатель степени c определяется методом наименьших квадратов:

- для консольной конструкции $c = 0.826$;
- для шарнирно-опертой конструкции $c \approx 1$.

Таким образом, аппроксимирующие зависимости примут вид:

- для консольной конструкции

$$\tilde{q}_{кр}(k) = 4.17k^{0.826} + 3.67; \quad (2.61)$$

- для шарнирно-опертой конструкции

$$\tilde{q}_{кр}(k) = 14.31k + 3.81. \quad (2.62)$$

Зависимости (2.61) и (2.62) показаны на соответствующих графиках (рисунок 2.12) пунктирными линиями.

2.3.2. Исследование устойчивости стержней с продольной квадратичной неоднородностью изгибной жесткости при сжатии локальными силами по торцам

Следует отметить, что для уравнения (2.44) принято условие

$$\frac{4N_0 l^2}{EJ_2(1-k)^2} < 1 + \frac{4ql^3 k}{EJ_2(1-k)^3}. \quad (2.63)$$

Рассмотрим случай, когда условие (2.63) не выполняется, т.е.

$$\frac{4\tilde{N}}{(1-k)^2} > 1 + \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3}$$

где $\tilde{N} = \frac{N_0 l^2}{EJ_2}$ – безразмерная продольная сила. В этом случае уравнение (2.44)

при отсутствии поперечной нагрузки ($p(x) = 0$) примет вид

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{d\theta}{dz} + \left(1 + \frac{1+v^2}{z^2}\right)\theta = \frac{C_3}{z^2}, \quad (2.64)$$

а его решением будет [48]

$$\theta(z) = \frac{C_1^* J_{iv}(z)}{z} + \frac{C_2^* J_{-iv}(z)}{z} + \frac{C_3 s_{0,iv}(z)}{z}. \quad (2.65)$$

где

$$s_{\mu,iv}(z) = z^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2}}{\prod_{j=0}^m ((\mu + 2j + 1)^2 + v^2)}$$

- вещественная функция; $J_{\pm iv}(z)$ – функции Бесселя мнимого индекса [48].

Функции Бесселя мнимого индекса являются комплексными. Представим их в виде ряда [48]

$$J_{\pm iv}(z) = \frac{z^{\pm iv}}{2^{\pm iv} \Gamma(\pm iv + 1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \prod_{j=0}^m (\pm iv + m)}. \quad (2.66)$$

Выражение (2.66) приводятся к виду

$$J_{iv}(z) = \frac{1}{2^{iv} \Gamma(iv + 1)} (R_v(z) + iW_v(z)),$$

$$J_{-iv}(z) = \frac{1}{2^{-iv} \Gamma(-iv + 1)} (R_v(z) - iW_v(z)).$$

где $R_v(z)$ и $W_v(z)$ – вещественные функции:

$$R_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \cos\left(v \ln z - \sum_{j=0}^m \arctan \frac{v}{j}\right)}{m! \prod_{j=1}^m \sqrt{j^2 + v^2}};$$

$$W_v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \sin\left(v \ln z - \sum_{j=0}^m \arctan \frac{v}{j}\right)}{m! \prod_{j=1}^m \sqrt{j^2 + v^2}}. \quad (2.67)$$

Таким образом, с использованием функций (2.67) решением уравнения (2.64) будет

$$\theta(z) = \frac{C_1 R_v(z)}{z} + \frac{C_2 W_v(z)}{z} + \frac{C_3 s_{0,iv}(z)}{z}. \quad (2.68)$$

Выражения для прогибов изгибающих моментов и поперечных представим в виде:

$$y(z) = \frac{1}{2} l \frac{(1-k)^2}{\tilde{q}} (C_1 \bar{R}_v(z) + C_2 \bar{W}_v(z) + C_3 \bar{s}_{0,iv}(z) + C_4); \quad (2.69)$$

$$M(z) = \frac{1}{8} \frac{EJ_2}{l} \frac{(1-k)^4}{\tilde{q}} (C_1 R'_v(z) + C_2 W'_v(z) + C_3 s'_{0,iv}(z)); \quad (2.70)$$

$$Q_y(z) = \frac{1}{4} \frac{EJ_2}{l^2} (1-k)^2 C_3, \quad (2.71)$$

здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{R}_v(z) &= \int_0^z R_v(\zeta) d\zeta; \quad \bar{W}_v(z) = \int_0^z W_v(\zeta) d\zeta; \quad \bar{s}_{0,iv}(z) = \int_0^z s_{0,iv}(\zeta) d\zeta; \\ R'_v(z) &= z \frac{d}{dz} \left(\frac{R_v(z)}{z} \right); \quad W'_v(z) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{W_v(z)}{z} \right); \quad s'_{0,iv}(z) = z \frac{d}{dz} \left(\frac{s_{0,iv}(z)}{z} \right). \end{aligned}$$

Исследуем влияние распределенной продольной нагрузки на величину сосредоточенной критической силы для консольного стержня. В этом случае в соответствии с граничными условиями (2.56), (2.57) приходим к двум уравнениям устойчивости:

$$\text{— при условии } \frac{4\tilde{N}}{(1-k)^2} > 1 + \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3}$$

$$R_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}}{(1-k)^3}} \right) W'_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} \right) - W_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}}{(1-k)^3}} \right) R'_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} \right) = 0, \quad (2.72)$$

$$\text{где } v = \sqrt{\frac{4\tilde{N}}{(1-k)^2} - 1 - \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3}};$$

$$\text{— при условии } \frac{4\tilde{N}}{(1-k)^2} < 1 + \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3}$$

$$\begin{aligned}
& Y_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}}{(1-k)^3}} \right) \left((v-1) J_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} \right) - 2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} J_{v+1} \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} \right) \right) - \\
& - J_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}}{(1-k)^3}} \right) \left((v-1) Y_v \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} \right) - 2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} Y_{v+1} \left(2 \sqrt{\frac{\tilde{q}k}{(1-k)^3}} \right) \right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.73}$$

где $v = \sqrt{1 + \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3} - \frac{4\tilde{N}}{(1-k)^2}}$.

Критическая сила определяется из решения уравнений (2.72) и (2.73) относительно параметра v

$$\tilde{N}_{кр} = \frac{(1-k)^2}{4} \left(1 + \frac{4\tilde{q}k}{(1-k)^3} \pm v^2 \right).$$

На графиках рисунок 2.13 представлены результаты численных исследования уравнений (2.72) и (2.73) при изменении веса конструкции в пределах $0 < \tilde{q} < \tilde{q}_{кр}$, где $\tilde{q}_{кр}$ – критический вес (2.61) для конструкций с параметрами $k = 0.1$ и $k = 0.5$. Из графиков видно, что зависимость величины $\tilde{N}_{кр}$ от $\tilde{q}$ является практически линейной и с точностью достаточной для инженерных расчетов может быть представлена уравнением

$$\tilde{N}_{кр} = \tilde{N}_{0кр} \left(1 - \frac{\tilde{q}}{\tilde{q}_{кр}} \right), \tag{2.74}$$

где $\tilde{N}_{0кр}$ – критическая сила для невесомого стержня, $\tilde{q}_{кр}$ – критический вес. На рисунок 2.13 линейные аппроксимации (2.74) показаны пунктирными линиями. В частном случае, если подставить параметры, соответствующие стержню постоянного сечения, получим

$$\tilde{N}_{кр} = \tilde{N}_{0кр} - 0.315\tilde{q},$$

что практически соответствует значению коэффициента учета веса для консольного стержня постоянного сечения, полученного в работе [55] с использованием метода Бубнова – Галеркина.

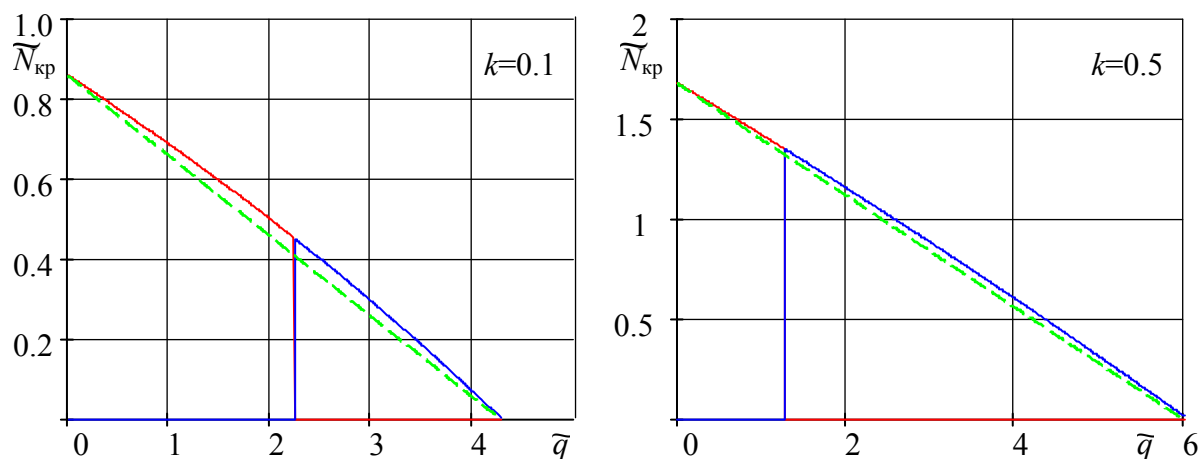


Рисунок 2.13. Зависимость относительной величины критической силы от веса

2.4. Исследование закономерностей для характеристик устойчивости весовых стержней со степенной неоднородностью физико-механических свойств

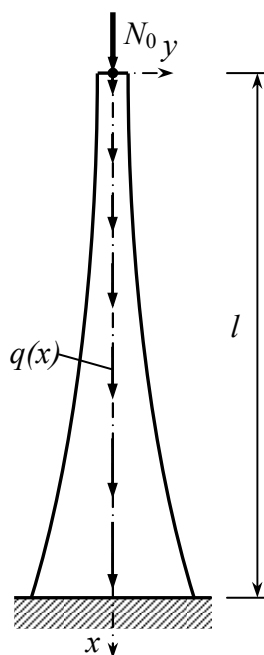


Рисунок 2.14. Расчетная схема весового стержня с непрерывно изменяемым сечением.

Проблема устойчивости весовых стержней с непрерывно-изменяемым сечением рассмотрена автором в статье [249].

Рассматриваются стержни изгибная жесткость и интенсивность распределенной продольной нагрузки, которых описываются степенными зависимостями от продольной координаты x :

$$EJ = EJ_2 \left(\frac{z}{1+k} \right)^{m+2}; \quad q = \gamma F_2 \left(\frac{z}{1+k} \right)^m \quad (2.75)$$

где $z = \frac{x}{l} + k$, $k = \frac{h_1}{h_2 - h_1}$, E – модуль упругости, F_2

и J_2 – площадь поперечного сечения и момент инерции основания стержня, γ – удельный вес, h_1 и h_2 – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений, l – длина стержня (рисунок 2.14), показатель степени m зависит от геометрии конструкции.

Для принятых параметров стержня к уравнение прогибов (2.2) примет вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \left(N_0 + \int_0^x q(x) dx \right) \frac{dy}{dx} \right) = 0. \quad (2.76)$$

Для уравнения (2.76) выполним замену $\theta = \frac{dy}{dx}$. Перейдя к переменной z ($k \leq z \leq k+1$), интегрируя, получим

$$\begin{aligned} & z^{m+2} \frac{d^2 \theta}{dz^2} + (m+2) z^{m+1} \frac{d\theta}{dz} + \\ & + \frac{l^2 (1+k)^{m+2}}{EJ_2} \left(N_0 - \frac{\gamma F_2 l}{(m+1)(1+k)^m} k^{m+1} + \frac{\gamma F_2 l}{(m+1)(1+k)^m} z^{m+1} \right) \theta = \bar{C}_3, \end{aligned} \quad (2.77)$$

где, $\bar{C}_3$ - произвольная постоянная.

Решение уравнения (2.77) с ненулевыми значениями сосредоточенной и распределенной нагрузки в аналитическом виде известно лишь для стержней, моделирующих конструкции решетчатых башен ($m = 0$).

Рассмотрим частную задачу устойчивости весоного стержня под действием сосредоточенной нагрузки равной весу усеченной части

$$N_0 = \frac{\gamma F_2 l}{(m+1)(1+k)^m} k^{m+1}.$$

В этом случае выполнив замену $\zeta = \sqrt{z}$, уравнение (2.77) можно привести к виду

$$\zeta^2 \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + (2m+3) \zeta \frac{d\theta}{d\zeta} + \lambda^2 \zeta^2 \theta = \bar{C}_3 \zeta^{-2m}, \quad (2.78)$$

$$\text{где } \lambda^2 = \frac{4\gamma F_2 l^3 (1+k)^2}{E J_2 (m+1)}.$$

Уравнению (2.78) соответствует однородное уравнение, решение которого известно [112]

$$\bar{\theta}(\zeta) = C_1 \zeta^{-m-1} J_{m+1}(\lambda \zeta) + C_2 \zeta^{-m-1} Y_{m+1}(\lambda \zeta), \quad (2.79)$$

где $J_{m+1}(z)$, $Y_{m+1}(z)$ – функции Бесселя.

Частное решение уравнения (2.78) находится методом вариации постоянных. Будем искать решение в виде

$$\tilde{\theta}(\zeta) = \zeta^{-m-1} J_{m+1}(\lambda \zeta) \varphi_1(\zeta) + \zeta^{-m-1} Y_{m+1}(\lambda \zeta) \varphi_2(\zeta),$$

где $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ определяются из уравнений

$$\begin{cases} \zeta^{-m-1} J_{m+1}(\lambda \zeta) \varphi_1'(\zeta) + \zeta^{-m-1} Y_{m+1}(\lambda \zeta) \varphi_2'(\zeta) = 0; \\ \lambda \zeta^{-m-1} J_{m+2}(\lambda \zeta) \varphi_1'(\zeta) + \lambda \zeta^{-m-1} Y_{m+2}(\lambda \zeta) \varphi_2'(\zeta) = -\bar{C}_3 \zeta^{-2m-2}, \end{cases} \quad (2.80)$$

Найдя частное решение из системы уравнений (2.80), приходим к общему решению уравнения (2.78)

$$\theta(\zeta) = C_1 \zeta^{-m-1} J_{m+1}(\lambda \zeta) + C_2 \zeta^{-m-1} Y_{m+1}(\lambda \zeta) + C_3 \zeta^{-2m-2}. \quad (2.81)$$

Интегрируя по длине, находим уравнение прогибов для случая $m \neq 0$

$$y(\zeta) = -\frac{2l}{\lambda} \left(C_1 \zeta^{-m} J_m(\lambda \zeta) + C_2 \zeta^{-m} Y_m(\lambda \zeta) + C_3 \frac{\lambda}{2m} \zeta^{-2m} + C_4 \right). \quad (2.82)$$

При $m = 0$, уравнение прогибов будет

$$y(\zeta) = -\frac{2l}{\lambda} \left(C_1 J_0(\lambda\zeta) + C_2 Y_0(\lambda\zeta) - C_3 \frac{\lambda}{2} \ln \zeta + C_4 \right). \quad (2.83)$$

Из зависимостей (2.1) получаем уравнения для изгибающих моментов и поперечных сил

$$M(\zeta) = -\frac{EJ_2}{2l} \frac{\lambda}{(1+k)^{m+2}} \left(C_1 \zeta^{m+2} J_{m+2}(\lambda\zeta) + C_2 \zeta^{m+2} Y_{m+2}(\lambda\zeta) + 2 \frac{m+1}{\lambda} C_3 \right); \quad (2.84)$$

$$Q_y(\zeta) = \frac{EJ_2}{4l^2} \frac{\lambda^2}{(1+k)^{m+2}} C_3. \quad (2.85)$$

Полученные зависимости (2.81)-(2.85) позволяют рассматривать произвольные случаи закрепления стержня.

Несмотря на то, что рассматриваемая схема относится к весьма специфическому случаю загрузки конструкций, ее можно использовать, как для проверки адекватности моделей на основе энергетических и численных методов, так и для оценки приближенных методов расчета.

В работе [235] исследована устойчивость конструкций решетчатых башен с использованием математической модели на основе аналитического решения уравнения (2.76). Для нахождения критической нагрузки приложенной к верхнему торцу весомого стержня предложена зависимость на основе линейной аппроксимации расчетных значений (2.74). Аналогичная зависимость предложена в работе [250] на основании исследования устойчивости консольных конических труб с использованием принципа возможных перемещений.

Из зависимости (2.74) можно получить выражение для нахождения критического веса в безразмерных величинах

$$\tilde{q}_{кр} = \frac{\tilde{N}_{кр}}{\tilde{N}_{кр} - \tilde{N}_0} \tilde{q}, \quad (2.86)$$

где $\tilde{N}_{кр} = \frac{N_{кр} l^2}{EJ_2}$ – безразмерная критическая сила, найденная для невесомого стержня, устойчивость некоторых конструкций консольных стержней рассмотрена в работе [248]; $\tilde{N}_0 = \frac{\tilde{q} k^{m+1}}{(m+1)(1+k)^m}$, $\tilde{q} = \frac{\gamma F_2 l^3}{EJ_2}$ – определяются из решения задачи устойчивости исследуемой модели для соответствующих граничных условий. Следует отметить, что при значении $k = 0$ зависимость (2.86) дает точное значение критического веса [80].

Рассмотрим случаи консольного закрепления стержней (рисунок 2.14), моделирующих конструкции решетчатых башен ($m = 0$) и конструкции многогранных гнутых стоек, которые представляют собой конические трубы ($m = 1$). В этом случае граничные условия на защемленном и свободном концах имеют вид

$$y(\sqrt{k+1})\Big|_{x=l} = 0; \quad \theta(\sqrt{k+1})\Big|_{x=l} = 0; \quad M(\sqrt{k})\Big|_{x=0} = 0; \quad (2.87)$$

$$Q_y(\sqrt{k})\Big|_{x=0} = 0. \quad (2.88)$$

Из равенства (2.88) получаем $C_3 = 0$, а из условий (2.87) приходим к уравнению устойчивости

$$J_{m+2}(\lambda\sqrt{k})Y_{m+1}(\lambda\sqrt{k+1}) + Y_{m+2}(\lambda\sqrt{k})J_{m+1}(\lambda\sqrt{k+1}) = 0. \quad (2.89)$$

Из численного решения уравнения (2.89) находим расчетные значения $\tilde{N}_0$, $\tilde{q}$ для разных параметров стержней. На графике (рисунок 2.15 а)) представлена зависимость относительной величины критического веса $\tilde{q}_{кр}$, найденного по формуле (2.86), от параметра k для случая $m = 0$. Пунктиром показана зависимость, полученная на основе аналитической модели (2.58). На графике (рисунок 2.15 б)) представлена аналогичная зависимость для стержней с параметром $m = 1$, в этом случае пунктиром показана кривая, построенная на основе энергетического метода, использованного в работе [250].

Штрихпунктирной линией на обоих графиках обозначено известное значение критического веса для стержней постоянной жесткости ($\tilde{q}_{кр} = 7,834$ [270]).

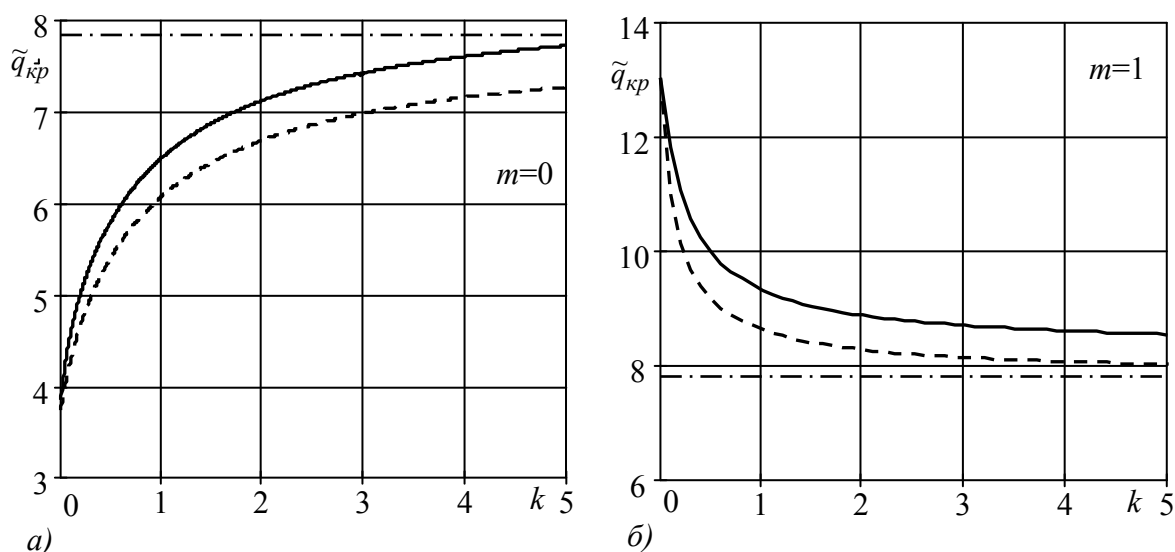


Рисунок 2.15. Зависимость относительной величины критического веса от параметра поперечного размера k :

- а) для конструкций решетчатых башен;
б) для конструкций конических трубчатых стоек

Сравнение результатов расчетов приближенного метода с точным (рисунок 2.15 а)) показывает, что максимальная погрешность расхождения значений критического веса не превышает 8%. Аналогичное сравнение с энергетическим методом (рисунок 2.15 б)) показывает погрешность менее 10%.

Очевидно, что достаточно значительная погрешность, которую дает приближенный метод, основанный на линейной аппроксимации (2.86), не позволяет его использовать для непосредственного решения прикладных задач устойчивости. Тем не менее, приближенное значение критического веса, которое определяется при помощи рассмотренной модели для произвольных условий закрепления стержня, можно использовать для обоснования упрощений расчетных схем стержней с переменной жесткостью.

2.5. Выводы

1. На основе аналитического решения уравнения изгиба в функциях Бесселя и Ломмеля и в их модифицированной форме, получены расчетные зависимости для определения параметров НДС упругих стержневых систем со ступенчатой неоднородностью физико-механических свойств при их продольно-поперечном изгибе, с учетом действия как локальных, так и распределенных нагрузок.

2. Разработан алгоритм определения критических нагрузок для стержней с произвольной конфигурацией изгибной жесткости и интенсивностью продольной нагрузки, путем их аппроксимации стержневой системой со ступенчатой неоднородностью характеристик.

3. Получены решения в замкнутой форме для случаев продольно-поперечного изгиба вращаемого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости от продольной координаты. Выполнена оценка влияния продольных нагрузок на параметры НДС стержня при изгибе, а также проведено исследование его устойчивости для некоторых условий закрепления.

4. Исследованы закономерности характеристик устойчивости вращаемых стержней с произвольной степенной неоднородностью физико-механических свойств в частных условиях его нагружения.

РАЗДЕЛ 3

Численно-аналитические приемы исследования неклассических моделей изгиба и устойчивости невесомых стержней

Под невесомым понимается такой стержень, для которого интенсивность продольной нагрузки равна нулю, т.е. для всей длины или участка стержня выполняется условие $N_x(x) = \text{const}$. Такого вида модели являются достаточно распространенными в инженерной практике, сюда относятся, как стержни горизонтального расположения, так и различные упрощенные модели, когда распределенные силы не учитывают или заменяют сосредоточенными.

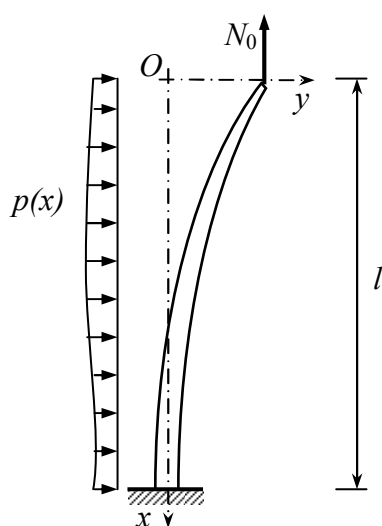


Рисунок 3.1. Схема продольно-поперечного изгиба невесомой стержневой конструкции

Рассматривается упругий стержень длиной l , на который действует продольная сила N_0 и поперечная нагрузка интенсивностью $p(x)$ (рисунок 3.1). Из условий равновесия элемента такого стержня следует система уравнений

$$EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x); \quad \frac{dM}{dx} = Q_y(x) \pm N_0 \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dQ_y}{dx} = p(x), \quad (3.1)$$

где $y(x)$ - уравнение изогнутой оси стержня, $EJ(x)$ - изгибная жесткость стержня, $M(x)$ - изгибающий момент, $Q_y(x)$ - проекция перерезывающей силы на поперечную ось. Знак минус во втором уравнении (3.1) соответствует состоянию сжатия, а плюс – растяжения.

Система уравнений (3.1) приводится к уравнению прогибов $y(x, t)$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(EJ(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \mp N_0 \frac{dy}{dx} \right) = p(x). \quad (3.2)$$

Знак минус в уравнении (3.2) соответствует состоянию растяжения, а плюс – сжатия.

В общем случае уравнение (3.2) представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами.

Для разнообразного класса конструкций (решетчатые башни, стержни и трубы разных очертаний) изгибная жесткость описывается степенной зависимостью от продольной координаты x :

$$EJ = EJ_2 z^m; \quad z = (1 - k) \frac{x}{l} + k, \quad k = \sqrt[m]{\frac{EJ_1}{EJ_2}}, \quad (3.3)$$

где EJ_1, EJ_2 – изгибные жесткости торцевых сечений стержня, l – длина стержня, показатель степени m определяется геометрией конструкции, для некоторых значений m задачи устойчивости отдельных видов закрепления рассмотрены в работе [80]. Примеры стержневых конструкций со степенной осевой неоднородностью изгибной жесткости представлены на рисунке 3.2.

В соответствии с принятыми обозначениями (3.3), выполнив замену $\theta = \frac{dy}{dx}$ и перейдя к переменной z , интегрируя уравнение (3.2), получим

$$z^m \frac{d^2 \theta}{dz^2} + m z^{m-1} \frac{d\theta}{dz} \mp \frac{N_0 l^2}{EJ_2 (1 - k)^2} \theta = \frac{l^3}{EJ_2 (1 - k)^3} \int p(z) dz + \bar{C}_3, \quad (3.4)$$

где, $\bar{C}_3$ – произвольная постоянная.

Рассмотрим решение уравнения (3.4) для разных случаев действия нагрузок и видов конструкций отдельно.

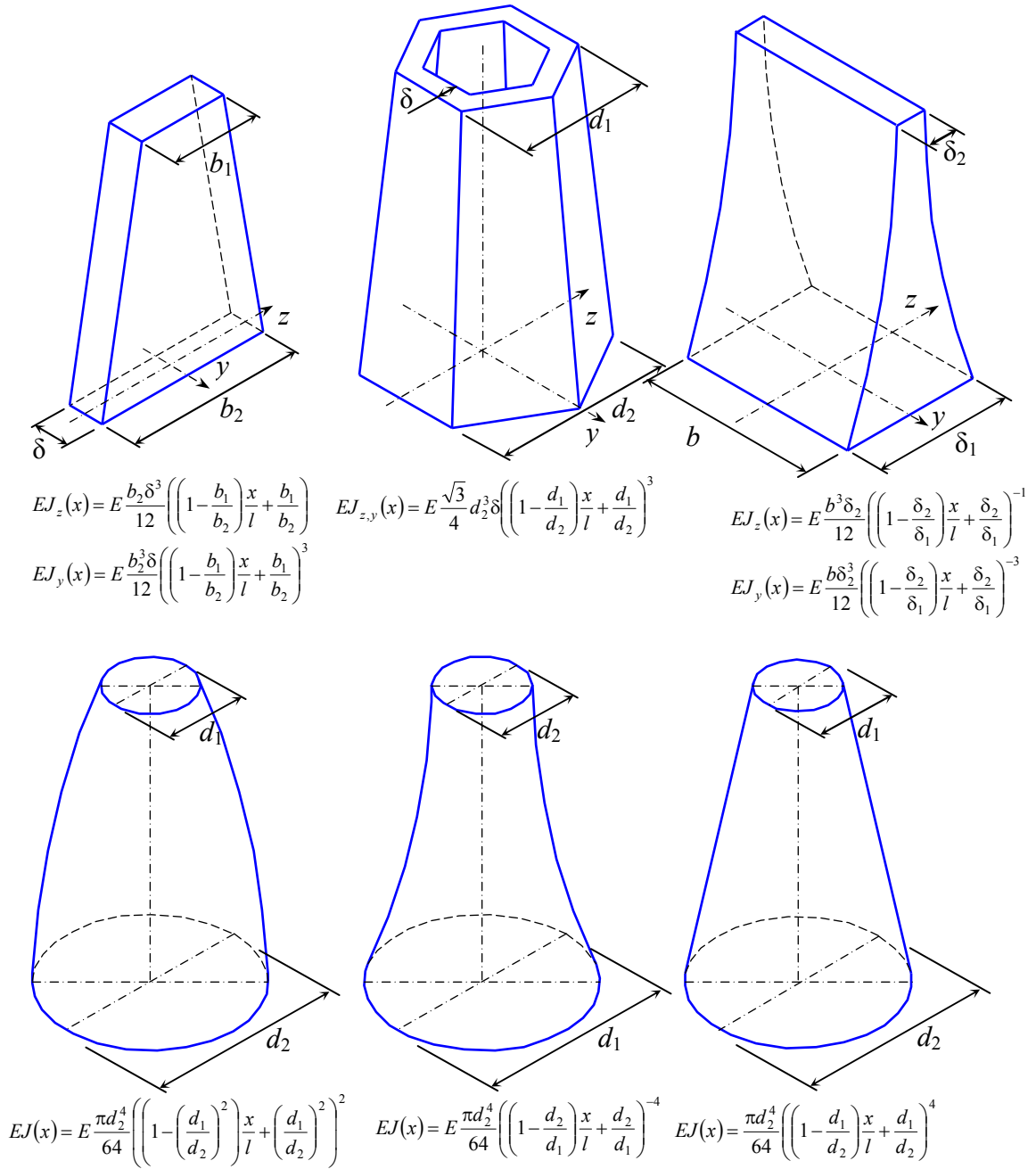


Рисунок 3.2. Примеры стержневых конструкций со степенной осевой неоднородностью изгибной жесткости.

3.1. Методика анализа моделей изгиба растянутых стержней со степенной неоднородностью геометрических характеристик

Рассматриваются конструкции растянутые силой N_0 с произвольной степенной неоднородностью изгибной жесткости, за исключением случая, когда

$m = 2$. Ограничимся условием действия только локальных нагрузок, т.е. $p(z) \equiv 0$.

В этом случае уравнение (3.4) примет вид

$$z^m \frac{d^2\theta}{dz^2} + mz^{m-1} \frac{d\theta}{dz} - \frac{N_0 l^2}{EJ_2(1-k)^2} \theta = \bar{C}_3. \quad (3.5)$$

Выполнив замену переменных в уравнении (3.5) $\zeta = z^{\frac{1}{2(1-\nu)}}$, $\nu = \frac{1-m}{2-m}$, оно приводится к виду

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{1-2\nu}{\zeta} \frac{d\theta}{d\zeta} - \lambda^2 \theta = 4(1-\nu)^2 \bar{C}_3, \quad (3.6)$$

$$\text{здесь } \lambda^2 = \frac{4N_0(1-\nu)^2 l^2}{EJ_2(1-k)^2}.$$

Уравнению (3.6) соответствует однородное уравнение, решение которого известно [112], а частным решением неоднородного уравнения, очевидно, является константа. Таким образом, общее решение находится в виде

$$\theta(\zeta) = C_1 \zeta^\nu I_\nu(\lambda \zeta) + C_2 \zeta^\nu K_\nu(\lambda \zeta) + C_3, \quad (3.7)$$

где $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя.

Интегрируя зависимость (3.7) по длине, приходим к выражению прогибов

$$y(\zeta) = \frac{2l(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \left(C_1 \zeta^{1-\nu} I_{\nu-1}(\lambda \zeta) - C_2 \zeta^{1-\nu} K_{\nu-1}(\lambda \zeta) + C_3 \frac{\lambda}{2(1-\nu)} \zeta^{2-2\nu} + C_4 \right). \quad (3.8)$$

Взяв производную по длине зависимости (3.7), приходим к выражению изгибающих моментов

$$M(\zeta) = \frac{EJ_2(1-k)}{2l(1-\nu)} \zeta^{1-2\nu} \frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{EJ_2\lambda(1-k)}{2l(1-\nu)} (C_1 \zeta^{1-\nu} I_{\nu-1}(\lambda\zeta) - C_2 \zeta^{1-\nu} K_{\nu-1}(\lambda\zeta)). \quad (3.9)$$

С учетом соотношений (3.1) выражение для проекции поперечных сил получим в виде

$$Q_y(\zeta) = \frac{(1-k)}{2l(1-\nu)} \zeta^{2\nu-1} \frac{d}{d\zeta} M(\zeta) - \frac{EJ_2\lambda^2(1-k)^2}{4l^2(1-\nu)^2} \theta(\zeta) = -\frac{EJ_2\lambda^2(1-k)^2}{4l^2(1-\nu)^2} C_3. \quad (3.10)$$

Для упрощения процесса получения расчетных зависимостей в инженерной практике широкое распространение нашел метод начальных параметров [276], основная идея которого заключена в поиске решений соответствующих граничных задач через силовые и деформационные параметры, заданные в начальной точке отсчета, вместо использования произвольных постоянных. Применим аналогичный подход для рассматриваемой задачи, т.е. выразим постоянные интегрирования в выражениях (3.8) – (3.10) через начальные условия при $\zeta = \zeta_0 = k^{\frac{1}{2(1-\nu)}}$, а именно продольное перемещение начального сечения ($x = 0$) – y_0 ; угол поворота – θ_0 ; изгибающий момент – M_0 и поперечную силу – P_0

$$\begin{aligned} \frac{2l(1-\nu)}{\lambda(1-k)} (C_1 \zeta_0^{1-\nu} I_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) - C_2 \zeta_0^{1-\nu} K_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) + C_3 \frac{\lambda}{2(1-\nu)} \zeta_0^{2-2\nu} + C_4) &= y_0; \\ C_1 \zeta_0^\nu I_\nu(\lambda\zeta_0) + C_2 \zeta_0^\nu K_\nu(\lambda\zeta_0) + C_3 &= \theta_0; \\ \frac{EJ_2\lambda(1-k)}{2l(1-\nu)} (C_1 \zeta_0^{1-\nu} I_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) - C_2 \zeta_0^{1-\nu} K_{\nu-1}(\lambda\zeta_0)) &= M_0; \\ -\frac{EJ_2\lambda^2(1-k)^2}{4l^2(1-\nu)^2} C_3 &= P_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из последнего выражения (3.11) определяем C_3

$$C_3 = -P_0 \frac{4l^2(1-\nu)^2}{EJ_2\lambda^2(1-k)^2}.$$

Из второго и третьего соотношения (3.11) находим C_1 и C_2

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(\left(\theta_0 + P_0 \frac{4l^2(1-\nu)^2}{EJ_2\lambda^2(1-k)^2} \right) \zeta_0^{-\nu} K_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) + M_0 \frac{2l(1-\nu)}{EJ_2\lambda(1-k)} \zeta_0^{\nu-1} K_{\nu}(\lambda\zeta_0) \right) \times \\ &\quad \times (I_{\nu}(\lambda\zeta_0) K_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) + I_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) K_{\nu}(\lambda\zeta_0))^{-1}; \\ C_2 &= \left(\left(\theta_0 + P_0 \frac{4l^2(1-\nu)^2}{EJ_2\lambda^2(1-k)^2} \right) \zeta_0^{-\nu} I_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) - M_0 \frac{2l(1-\nu)}{EJ_2\lambda(1-k)} \zeta_0^{\nu-1} I_{\nu}(\lambda\zeta_0) \right) \times \\ &\quad \times (I_{\nu}(\lambda\zeta_0) K_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) + I_{\nu-1}(\lambda\zeta_0) K_{\nu}(\lambda\zeta_0))^{-1}; \end{aligned}$$

Из первого выражения (3.11) с учетом известного соотношения для функций Бесселя [48]

$$I_{\nu}(z)K_{\nu+1}(z) + K_{\nu}(z)I_{\nu+1}(z) = \frac{1}{z}, \quad (3.12)$$

получим

$$C_4 = y_0 \frac{\lambda(1-k)}{2l(1-\nu)} - M_0 \frac{2l(1-\nu)}{EJ_2\lambda(1-k)} + P_0 \frac{2l^2(1-\nu)}{EJ_2\lambda(1-k)^2} \zeta_0^{2-2\nu}.$$

Используя найденные зависимости произвольных постоянных в выражениях (3.7) – (3.10), соответствующие им выражения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил примут вид:

$$y(\zeta) = y_0 + \theta_0 l \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} A_\lambda(\zeta) - \frac{M_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^2 (1 - B_\lambda(\zeta)) - \frac{P_0 l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{2(1-\nu)} (\zeta^{2-2\nu} - \zeta_0^{2-2\nu}) - A_\lambda(\zeta) \right); \quad (3.13)$$

$$\theta(\zeta) = \theta_0 C_\lambda(\zeta) + \frac{M_0 l}{EJ_2} \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} D_\lambda(\zeta) - \frac{P_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^2 (1 - C_\lambda(\zeta)); \quad (3.14)$$

$$M(\zeta) = \frac{\theta_0 EJ_2}{l} \frac{\lambda(1-k)}{2(1-\nu)} A_\lambda(\zeta) + M_0 B_\lambda(\zeta) + P_0 l \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} A_\lambda(\zeta); \quad (3.15)$$

$$Q(\zeta) = \frac{\theta_0 EJ_2}{l^2} \left(\frac{\lambda(1-k)}{2(1-\nu)} \right)^2 C_\lambda(\zeta) + \frac{M_0}{l} \frac{\lambda(1-k)}{2(1-\nu)} D_\lambda(\zeta) + P_0 C_\lambda(\zeta), \quad (3.16)$$

здесь введены следующие обозначения для функций:

$$\begin{aligned} A_\lambda(\zeta) &= \lambda \zeta_0^{1-\nu} \zeta^{1-\nu} (I_{\nu-1}(\lambda \zeta) K_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) - K_{\nu-1}(\lambda \zeta) I_{\nu-1}(\lambda \zeta_0)); \\ B_\lambda(\zeta) &= \lambda \zeta_0^\nu \zeta^{1-\nu} (I_{\nu-1}(\lambda \zeta) K_\nu(\lambda \zeta_0) + K_{\nu-1}(\lambda \zeta) I_\nu(\lambda \zeta_0)); \\ C_\lambda(\zeta) &= \lambda \zeta_0^{1-\nu} \zeta^\nu (I_\nu(\lambda \zeta) K_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) + K_\nu(\lambda \zeta) I_{\nu-1}(\lambda \zeta_0)); \\ D_\lambda(\zeta) &= \lambda \zeta_0^\nu \zeta^\nu (I_\nu(\lambda \zeta) K_\nu(\lambda \zeta_0) - K_\nu(\lambda \zeta) I_\nu(\lambda \zeta_0)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для наглядности, графики функций (3.17) при значениях $\nu = 0$, $\zeta_0 = 0,316$,

$\lambda = 1$ представлены на рисунке 3.3. С учетом соотношения (3.12) частными значениями функций (3.17) будут

$$\begin{aligned} B_\lambda(\zeta_0) &= C_\lambda(\zeta_0) = 1; \\ A_\lambda(\zeta_0) &= D_\lambda(\zeta_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

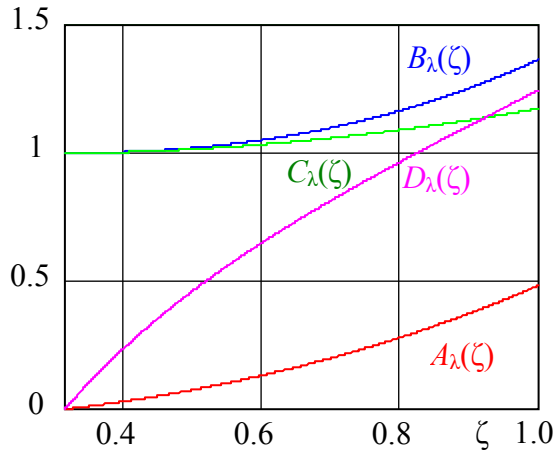


Рисунок 3.3. Графики функций (3.16) для значений $\nu = 0$; $\zeta_0 = 0,316$; $\lambda = 1$.

Также для функций (3.17) можно получить соотношения, следующие из свойств функций Бесселя [48]:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta} A_\lambda(\zeta) &= \lambda \zeta^{1-2\nu} C_\lambda(\zeta); \quad \frac{d}{d\zeta} B_\lambda(\zeta) = \lambda \zeta^{1-2\nu} D_\lambda(\zeta); \\ \frac{d}{d\zeta} C_\lambda(\zeta) &= \lambda \zeta^{2\nu-1} A_\lambda(\zeta); \quad \frac{d}{d\zeta} D_\lambda(\zeta) = \lambda \zeta^{2\nu-1} B_\lambda(\zeta).\end{aligned}\quad (3.19)$$

Зависимости (3.16) – (3.16) позволяют исследовать НДС конструкций с осевой неоднородностью изгибной жесткости, испытывающих растяжение при действии сосредоточенных нагрузок. Примером такой конструкции является рессорный механизм качания кристаллизатора машины непрерывного литья заготовок. Алгоритм расчета механизма на продольно-поперечный изгиб рассмотрен автором в статье [213].

3.2. Численно-аналитические исследования задач изгиба и устойчивости сжатых стержней со степенной неоднородностью геометрических характеристик

Рассматриваются конструкции сжатые силой N_0 с произвольной степенной неоднородностью изгибной жесткости, за исключением случая, когда $m = 2$. Как и в предыдущем случае ограничимся условием действия только локальных нагрузок ($p(z) \equiv 0$). В этом случае уравнение (3.4) примет вид

$$z^m \frac{d^2\theta}{dz^2} + mz^{m-1} \frac{d\theta}{dz} + \frac{N_0 l^2}{EJ_2(1-k)^2} \theta = \bar{C}_3. \quad (3.20)$$

Выполнив замену переменных в уравнении (3.5) $\zeta = z^{\frac{1}{2(1-\nu)}}$, $\nu = \frac{1-m}{2-m}$, оно приводится к виду

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{1-2\nu}{\zeta} \frac{d\theta}{d\zeta} + \lambda^2 \theta = 4(1-\nu)^2 \bar{C}_3, \quad (3.21)$$

$$\text{здесь } \lambda^2 = \frac{4N_0(1-\nu)^2 l^2}{EJ_2(1-k)^2}.$$

Уравнению (3.21) соответствует однородное уравнение, решение которого известно [112], а частным решением неоднородного уравнения, очевидно, является константа. Таким образом, общее решение находится в виде

$$\theta(\zeta) = C_1 \zeta^\nu J_\nu(\lambda \zeta) + C_2 \zeta^\nu Y_\nu(\lambda \zeta) + C_3, \quad (3.22)$$

где $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ – функции Бесселя.

Интегрируя зависимость (3.22) по длине, приходим к выражению прогибов

$$y(\zeta) = -\frac{2l(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \left(C_1 \zeta^{1-\nu} J_{\nu-1}(\lambda \zeta) + C_2 \zeta^{1-\nu} Y_{\nu-1}(\lambda \zeta) - C_3 \frac{\lambda}{2(1-\nu)} \zeta^{2-2\nu} + C_4 \right). \quad (3.23)$$

Взяв производную по длине зависимости (3.22), приходим к выражению изгибающих моментов

$$M(\zeta) = \frac{EJ_2(1-k)}{2l(1-\nu)} \zeta^{1-2\nu} \frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{EJ_2\lambda(1-k)}{2l(1-\nu)} \left(C_1 \zeta^{1-\nu} J_{\nu-1}(\lambda \zeta) + C_2 \zeta^{1-\nu} Y_{\nu-1}(\lambda \zeta) \right). \quad (3.24)$$

С учетом соотношений (3.1) выражение для проекции поперечных сил получим в виде

$$Q_y(\zeta) = \frac{(1-k)}{2l(1-\nu)} \zeta^{2\nu-1} \frac{d}{d\zeta} M(\zeta) + \frac{EJ_2\lambda^2(1-k)^2}{4l^2(1-\nu)^2} \theta(\zeta) = \frac{EJ_2\lambda^2(1-k)^2}{4l^2(1-\nu)^2} C_3. \quad (3.25)$$

Выразим постоянные интегрирования в выражениях (3.22) – (3.25) через начальные условия: продольное перемещение начального сечения ($x = 0$) – y_0 ; угол поворота – θ_0 ; изгибающий момент – M_0 и поперечную силу – P_0 :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2l(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \left(C_1 \zeta_0^{1-\nu} J_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) + C_2 \zeta_0^{1-\nu} Y_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) - C_3 \frac{\lambda}{2(1-\nu)} \zeta_0^{2-2\nu} + C_4 \right) = y_0; \\
 & C_1 \zeta_0^\nu J_\nu(\lambda \zeta_0) + C_2 \zeta_0^\nu Y_\nu(\lambda \zeta_0) + C_3 = \theta_0; \\
 & \frac{EJ_2 \lambda (1-k)}{2l(1-\nu)} \left(C_1 \zeta_0^{1-\nu} J_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) + C_2 \zeta_0^{1-\nu} Y_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) \right) = M_0; \\
 & \frac{EJ_2 \lambda^2 (1-k)^2}{4l^2 (1-\nu)^2} C_3 = P_0.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Из последнего выражения (3.26) определяем

$$C_3 = P_0 \frac{4l^2 (1-\nu)^2}{EJ_2 \lambda^2 (1-k)^2}.$$

Из второго и третьего соотношения (3.26) находим C_1 и C_2

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \left(\left(\theta_0 - P_0 \frac{4l^2 (1-\nu)^2}{EJ_2 \lambda^2 (1-k)^2} \right) \zeta_0^{-\nu} Y_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) - M_0 \frac{2l(1-\nu)}{EJ_2 \lambda (1-k)} \zeta_0^{\nu-1} Y_\nu(\lambda \zeta_0) \right) \times \\
 & \quad \times (J_\nu(\lambda \zeta_0) Y_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) - J_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) Y_\nu(\lambda \zeta_0))^{-1}; \\
 C_2 &= \left(- \left(\theta_0 - P_0 \frac{4l^2 (1-\nu)^2}{EJ_2 \lambda^2 (1-k)^2} \right) \zeta_0^{-\nu} J_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) + M_0 \frac{2l(1-\nu)}{EJ_2 \lambda (1-k)} \zeta_0^{\nu-1} J_\nu(\lambda \zeta_0) \right) \times \\
 & \quad \times (J_\nu(\lambda \zeta_0) Y_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) - J_{\nu-1}(\lambda \zeta_0) Y_\nu(\lambda \zeta_0))^{-1};
 \end{aligned}$$

Из первого выражения (3.26) с учетом известного соотношения для функций Бесселя [48]

$$J_v(z)Y_{v+1}(z) - Y_v(z)J_{v+1}(z) = -\frac{2}{\pi z}, \quad (3.27)$$

получим

$$C_4 = -y_0 \frac{\lambda(1-k)}{2l(1-v)} - M_0 \frac{2l(1-v)}{EJ_2\lambda(1-k)} + P_0 \frac{2l^2(1-v)}{EJ_2\lambda(1-k)^2} \zeta_0^{2-2v}.$$

Используя найденные зависимости произвольных постоянных в выражениях (3.22) – (3.25), соответствующие им выражения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил примут вид:

$$\begin{aligned} y(\zeta) = & y_0 - \theta_0 l \frac{2(1-v)}{\lambda(1-k)} \tilde{A}_\lambda(\zeta) + \frac{M_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-v)}{\lambda(1-k)} \right)^2 (1 - \tilde{B}_\lambda(\zeta)) + \\ & + \frac{P_0 l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-v)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{2(1-v)} (\zeta^{2-2v} - \zeta_0^{2-2v}) + \tilde{A}_\lambda(\zeta) \right); \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\theta(\zeta) = \theta_0 \tilde{C}_\lambda(\zeta) + \frac{M_0 l}{EJ_2} \frac{2(1-v)}{\lambda(1-k)} \tilde{D}_\lambda(\zeta) + \frac{P_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-v)}{\lambda(1-k)} \right)^2 (1 - \tilde{C}_\lambda(\zeta)); \quad (3.29)$$

$$M(\zeta) = \frac{\theta_0 EJ_2}{l} \frac{\lambda(1-k)}{2(1-v)} \tilde{A}_\lambda(\zeta) + M_0 \tilde{B}_\lambda(\zeta) - P_0 l \frac{2(1-v)}{\lambda(1-k)} \tilde{A}_\lambda(\zeta); \quad (3.30)$$

$$Q(\zeta) = -\frac{\theta_0 EJ_2}{l^2} \left(\frac{\lambda(1-k)}{2(1-v)} \right)^2 \tilde{C}_\lambda(\zeta) - \frac{M_0}{l} \frac{\lambda(1-k)}{2(1-v)} \tilde{D}_\lambda(\zeta) + P_0 \tilde{C}_\lambda(\zeta), \quad (3.31)$$

здесь введены следующие обозначения для функций:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\lambda(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \lambda \zeta_0^{1-v} \zeta^{1-v} (J_{v-1}(\lambda \zeta) Y_{v-1}(\lambda \zeta_0) - Y_{v-1}(\lambda \zeta) J_{v-1}(\lambda \zeta_0)); \\ \tilde{B}_\lambda(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \lambda \zeta_0^v \zeta^{1-v} (Y_{v-1}(\lambda \zeta) J_v(\lambda \zeta_0) - J_{v-1}(\lambda \zeta) Y_v(\lambda \zeta_0)); \\ \tilde{C}_\lambda(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \lambda \zeta_0^{1-v} \zeta^v (J_v(\lambda \zeta) Y_{v-1}(\lambda \zeta_0) - Y_v(\lambda \zeta) J_{v-1}(\lambda \zeta_0)); \\ \tilde{D}_\lambda(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \lambda \zeta_0^v \zeta^v (Y_v(\lambda \zeta) J_v(\lambda \zeta_0) - J_v(\lambda \zeta) Y_v(\lambda \zeta_0)), \end{aligned} \quad (3.32)$$

Для наглядности, графики функций (3.32) при значениях $\nu = 0$, $\zeta_0 = 0,316$, $\lambda = 1$ представлены на рисунке 3.4. С учетом соотношения (3.27) частными значениями функций (3.32) будут

$$\tilde{B}_\lambda(\zeta_0) = \tilde{C}_\lambda(\zeta_0) = 1; \quad \tilde{A}_\lambda(\zeta_0) = \tilde{D}_\lambda(\zeta_0) = 0. \quad (3.33)$$

Также для функций (3.32) можно получить соотношения, следующие из свойств функций Бесселя [48]:

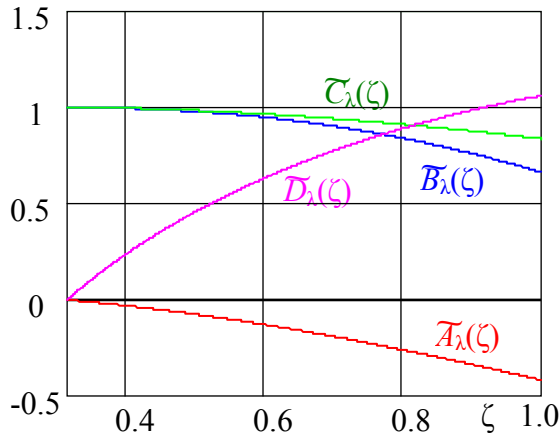


Рисунок 3.4. Графики функций (3.32) для значений $\nu = 0$; $\zeta_0 = 0.316$; $\lambda = 1$.

$$\frac{d}{d\zeta} \tilde{A}_\lambda(\zeta) = -\lambda \zeta^{1-2\nu} \tilde{C}_\lambda(\zeta);$$

$$\frac{d}{d\zeta} \tilde{B}_\lambda(\zeta) = -\lambda \zeta^{1-2\nu} \tilde{D}_\lambda(\zeta);$$

$$\frac{d}{d\zeta} \tilde{C}_\lambda(\zeta) = \lambda \zeta^{2\nu-1} \tilde{A}_\lambda(\zeta)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \tilde{D}_\lambda(\zeta) = \lambda \zeta^{2\nu-1} \tilde{B}_\lambda(\zeta). \quad (3.34)$$

Функции (3.32) использованы при рассмотрении задачи продольно-поперечного изгиба неоднородного стержня в статье [248].

Зависимости (3.28) – (3.31) позволяют проводить исследования НДС и устойчивости конструкций с осевой неоднородностью изгибной жесткости при произвольных условиях ее закрепления. Рассмотрим устойчивость конструкций для некоторых актуальных условий закрепления.

3.2.1. Исследование устойчивости консольных конструкций

Для стержня трапецеидального очертания (рисунок 3.5 а)) граничные условия будут:

$$M(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad Q_y(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad y(1)|_{x=l} = 0; \quad \theta(1)|_{x=l} = 0. \quad (3.35)$$

В соответствии с первыми двумя условиями (3.35) выражение для прогибов (3.28) будет иметь вид

$$y(\zeta) = y_0 - \theta_0 l \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \tilde{A}_\lambda(\zeta).$$

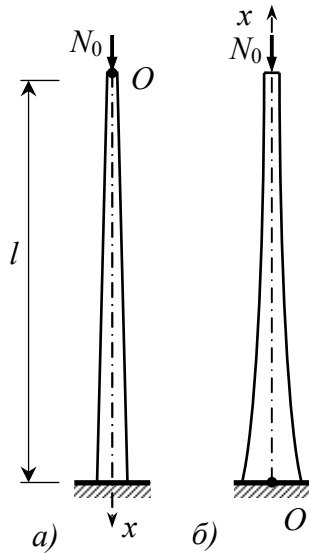


Рисунок 3.5. Расчетная схема консольного стержня:
а) трапецеидального очертания;
б) гиперболического очертания

Из четвертого граничного условия (3.35), получим уравнение устойчивости

$$\tilde{C}_\lambda(1) = 0. \quad (3.36)$$

Результаты численного исследования уравнения (3.36) представлены на рисунке 3.6 а), где представлены графики зависимостей относительной величины критической силы $\tilde{N}_{кр} = \frac{N_0 l^2}{EJ_2}$ от параметра

поперечного размера k для стержневых конструкций с параметрами: $m = 1$; $m = 3$; $m = 4$ (см. рисунок 3.2). Штрихпунктирной линией показано известное значение относительной величины критической силы однородного стержня $\tilde{N}_{кр} = \pi^2 / 4$ [192].

Для стержня гиперболического очертания (рисунок 3.5 б)) граничные условия будут:

$$y(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad \theta(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad M(1)|_{x=l} = 0; \quad (Q(1) + N_0 \theta(1))|_{x=l} = 0. \quad (3.37)$$

Из четвертого условия (3.37) следует $P_0 = 0$ и в соответствии с первыми двумя условиями (3.37) выражение для прогибов (3.28) будет иметь вид

$$y(\zeta) = \frac{M_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^2 (1 - \tilde{B}_\lambda(\zeta)).$$

Из третьего граничного условия (3.37), получим уравнение устойчивости

$$\tilde{B}_\lambda(1) = 0. \quad (3.38)$$

Результаты численного исследования уравнения (3.38) представлены на рисунке 3.6 б), где представлены графики зависимостей относительной величины критической силы $\tilde{N}_{кр} = \frac{N_0 l^2}{EJ_2}$ от параметра поперечного размера k для стержневых конструкций с параметрами: $m = -1$; $m = -3$; $m = -4$ (см. рисунок 3.2). Штрихпунктирной линией показано известное значение относительной величины критической силы однородного стержня $\tilde{N}_{кр} = \pi^2 / 4$ [192].

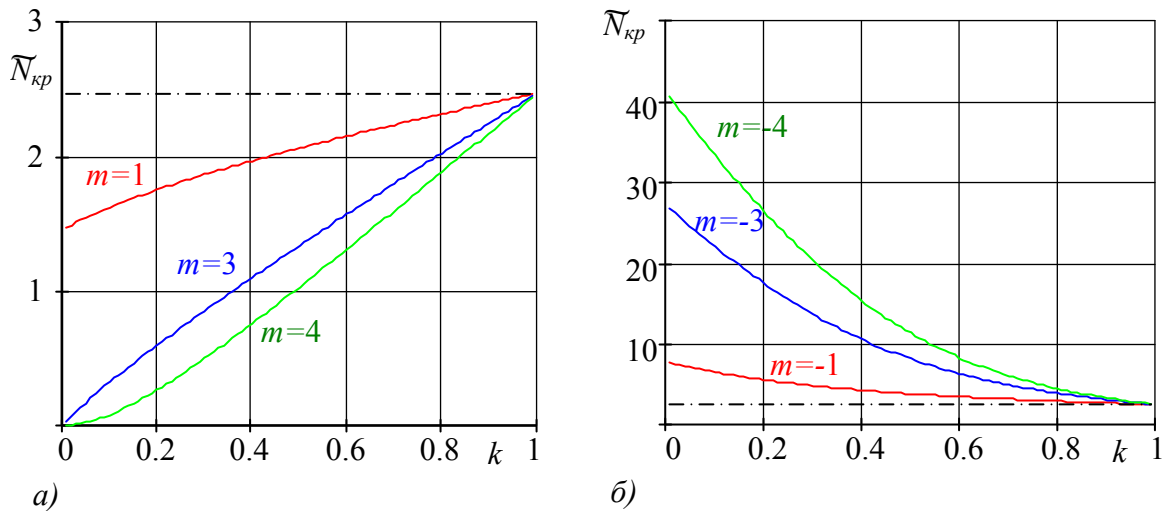


Рисунок 3.6. Зависимость критической нагрузки $\tilde{N}_{кр}$ от параметра поперечного размера k : а) стержней трапецидального очертания; б) стержней гиперболического очертания

3.2.2. Исследование устойчивости стержневой конструкций с шарнирными опорами на торцах

Для стержневых конструкций, как трапецеидального, так и гиперболического очертаний с шарнирными опорами по торцам (рисунок 3.7) граничные условия будут:

$$y(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad M(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad y(1)|_{x=l} = 0; \quad M(1)|_{x=l} = 0. \quad (3.39)$$

В соответствии с первыми двумя условиями (3.35) выражение для прогибов (3.28) будет иметь вид

$$y(\zeta) = -\theta_0 l \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \tilde{A}_\lambda(\zeta) + \frac{P_0 l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{2(1-\nu)} (\zeta^{2-2\nu} - \zeta_0^{2-2\nu}) + \tilde{A}_\lambda(\zeta) \right).$$

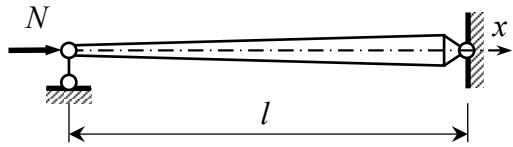


Рисунок 3.7. Расчетная схема шарнирно опертого стержня

Из третьего и четвертого граничных условий (3.39), получим уравнение устойчивости

$$\tilde{A}_\lambda(1) = 0. \quad (3.40)$$

Результаты численного исследования уравнения (3.40) представлены на рисунке 3.8, где представлены графики зависимостей относительной величины критической силы $\tilde{N}_{кр} = \frac{N_0 l^2}{EJ_2}$ от параметра поперечного размера k для стержневых конструкций с параметрами: $m = 1$; $m = 3$; $m = 4$; $m = -1$; $m = -3$; $m = -4$ (см. рисунок 3.2). Штрихпунктирной линией показано известное значение относительной величины критической силы однородного стержня $\tilde{N}_{кр} = \pi^2$ [192].

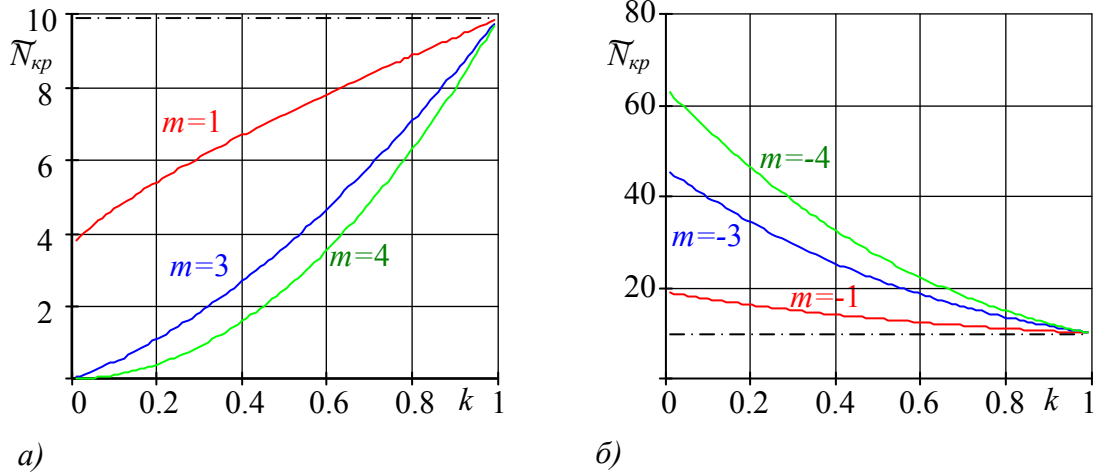


Рисунок 3.8. Зависимость критической нагрузки $N_{кр}$ от параметра поперечного размера k : а) стержней трапецидального очертания; б) стержней гиперболического очертания

3.2.3. Исследование устойчивости конструкций с заделкой и шарнирной опорой

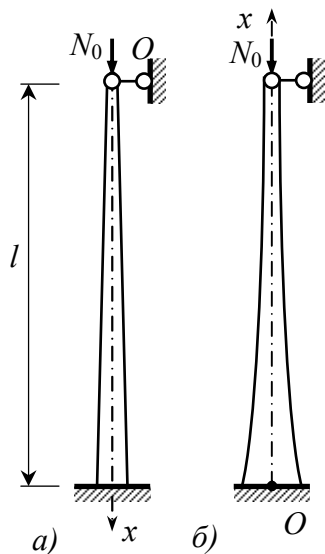


Рисунок 3.9. Расчетная схема стержня с заштыленным торцом и шарнирно опертм: а) трапецидального очертания; б) гиперболического очертания

Для стержня трапецидального очертания (рисунок 3.9 а)) граничные условия будут:

$$\begin{aligned} M(\zeta_0)|_{x=0} &= 0; \quad y(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \\ y(1)|_{x=l} &= 0; \quad \theta(1)|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

В соответствии с первыми двумя условиями (3.41) выражение для прогибов (3.28) будет иметь вид

$$\begin{aligned} y(\zeta) &= -\theta_0 l \frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \tilde{A}_\lambda(\zeta) + \\ &+ \frac{P_0 l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{2(1-\nu)} (\zeta^{2-2\nu} - \zeta_0^{2-2\nu}) + \tilde{A}_\lambda(\zeta) \right). \end{aligned}$$

Из третьего и четвертого граничных условий (3.41), получим уравнение устойчивости

$$\tilde{A}_\lambda(1) + \frac{\lambda}{2(1-\nu)}(1 - \zeta_0^{2-2\nu})\tilde{C}_\lambda(1) = 0. \quad (3.42)$$

Результаты численного исследования уравнения (3.42) представлены на рисунке 3.10 а), где представлены графики зависимостей относительной величины критической силы $\tilde{N}_{кр} = \frac{N_0 l^2}{EJ_2}$ от параметра поперечного размера k для стержневых конструкций с параметрами: $m = 1$; $m = 3$; $m = 4$ (см. рисунок 3.2). Штрихпунктирной линией показано известное значение относительной величины критической силы однородного стержня $\tilde{N}_{кр} = (\pi/0,699)^2$ [192].

Для стержня гиперболического очертания (рисунок 3.9 б)) граничные условия будут:

$$y(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad \theta(\zeta_0)|_{x=0} = 0; \quad M(1)|_{x=l} = 0; \quad y(1)|_{x=l} = 0. \quad (3.43)$$

В соответствии с первыми двумя условиями (3.43) выражение для прогибов (3.28) будет иметь вид

$$y(\zeta) = \frac{M_0 l^2}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^2 (1 - \tilde{B}_\lambda(\zeta)) + \frac{P_0 l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \left(\frac{\lambda}{2(1-\nu)} (\zeta^{2-2\nu} - \zeta_0^{2-2\nu}) + \tilde{A}_\lambda(\zeta) \right).$$

Из третьего и четвертого граничных условий (3.41), получим уравнение устойчивости

$$\tilde{A}_\lambda(1) + \frac{\lambda}{2(1-\nu)}(1 - \zeta_0^{2-2\nu})\tilde{B}_\lambda(1) = 0. \quad (3.44)$$

Результаты численного исследования уравнения (3.44) представлены на рисунке 3.10 б), где представлены графики зависимостей относительной величины критической силы $\tilde{N}_{кр} = \frac{N_0 l^2}{EJ_2}$ от параметра поперечного размера k для стержневых конструкций с параметрами: $m = -1$; $m = -3$; $m = -4$ (см. рисунок 3.2). Штрихпунктирной линией показано известное значение относительной величины критической силы однородного стержня $\tilde{N}_{кр} = (\pi/0,699)^2$ [192].

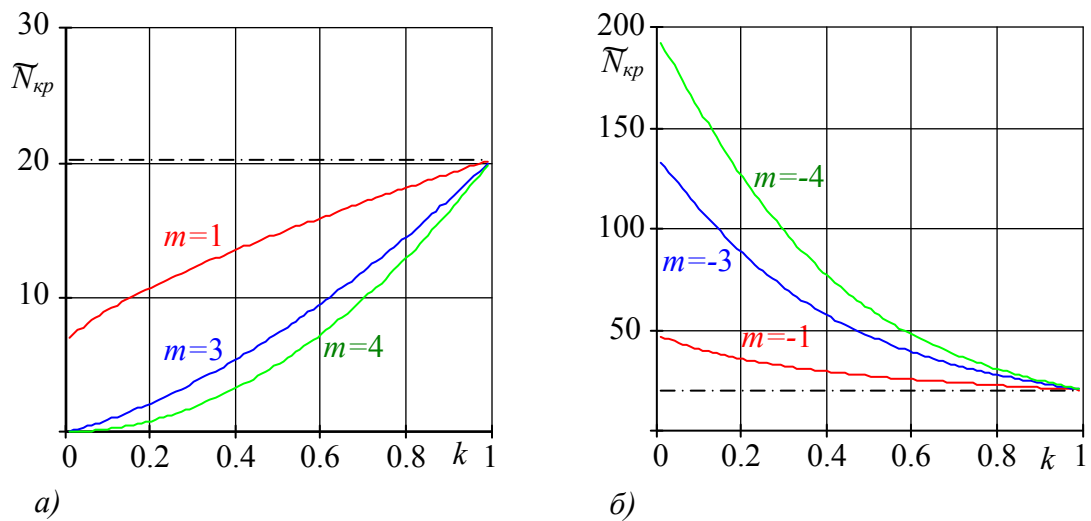


Рисунок 3.10. Зависимость критической нагрузки $\tilde{N}_{кр}$ от параметра поперечного размера k : а) стержней трапецидального очертания; б) стержней гиперболического очертания

3.3. Исследование проблемы изгиба растянутых стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости

Рассматривается стержень, изгибная жесткость которого описывается квадратичной зависимостью от продольной координаты x :

$$EJ = EJ_1 z^2; \quad z = (k-1) \frac{x}{l} + 1, \quad k = \sqrt{\frac{EJ_2}{EJ_1}}, \quad (3.45)$$

где EJ_1, EJ_2 – изгибные жесткости торцевых сечений стержня, l – длина стержня.

Для случая растяжения уравнение изгиба (3.2) приводится к виду

$$z^2 \frac{d^4 y}{dz^4} + 4z \frac{d^3 y}{dz^3} + \left(2 - \frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} \right) \frac{d^2 y}{dz^2} = 0. \quad (3.46)$$

Для уравнения (3.46) выполним замену $\frac{d^2 y}{dz^2} = u(z)$. Тогда оно примет вид

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + 4z \frac{du}{dz} + \left(2 - \frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} \right) u = 0. \quad (3.47)$$

Уравнение (3.47) является уравнением Эйлера [112] и, следовательно, используем замену $\xi = \ln z$. Получим уравнение с постоянными коэффициентами для нахождения функции $u(\xi)$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + 3 \frac{du}{d\xi} + \left(2 - \frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} \right) u = 0. \quad (3.48)$$

Находим корни характеристического уравнения (3.48)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm v, \text{ где } v = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1}}.$$

С учетом замены получаем общее решение уравнения (3.47)

$$y''_{xx}(z) = u(z) = z^{-3/2} (C_1 \cosh(v \ln z) + C_2 \sinh(v \ln z)). \quad (3.49)$$

Интегрируя дважды уравнение (3.49), определяем

$$y'_x(z) = \frac{l}{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)} \left(C_1 z^{-1/2} \left(v \sinh(v \ln z) + \frac{1}{2} \cosh(v \ln z) \right) + \right. \\ \left. + C_2 z^{-1/2} \left(v \cosh(v \ln z) + \frac{1}{2} \sinh(v \ln z) \right) + C_3 \right), \quad (3.50)$$

$$y(z) = \frac{l^2}{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)^2} \left(C_1 z^{1/2} \cosh(v \ln z) + C_2 z^{1/2} \sinh(v \ln z) + C_3 z + C_4 \right). \quad (3.51)$$

Чтобы удовлетворить любым граничным условиям, которые дают систему для определения произвольных постоянных: C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , определяем производную $\left(z^2 y''_{xx}(z)\right)'_x$

$$\left(z^2 y''_{xx}(z)\right)'_x = \frac{(k-1)}{l} z^{-1/2} \left(C_1 \left(v \sinh(v \ln z) + \frac{1}{2} \cosh(v \ln z) \right) + \right. \\ \left. + C_2 \left(v \cosh(v \ln z) + \frac{1}{2} \sinh(v \ln z) \right) \right), \quad (3.52)$$

С учетом соотношений (3.1) выразим произвольные постоянные через начальные параметры:

$$y(1) = \frac{l^2}{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)^2} (C_1 + C_3 + C_4) = y_0; \\ y'_x(1) = \frac{l}{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)} \left(\frac{1}{2} C_1 + v C_2 + C_3 \right) = \theta_0; \\ EJ_1 z^2 y''_{xx}(z) \Big|_{z=1} = EJ_1 C_1 = M_0; \\ \left(EJ_1 \left(z^2 y''_{xx}(z) \right)'_x - \left(v^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{EJ_1 (k-1)^2}{l^2} y'_x(z) \right) \Big|_{z=1} = -\frac{EJ_1 (k-1)}{l} C_3 = P_0, \quad (3.53)$$

Из последнего выражения (3.53) определяем

$$C_3 = -P_0 \frac{l}{EJ_1(k-1)}.$$

Из третьего соотношения (3.53) находим C_1

$$C_1 = \frac{M_0}{EJ_1};$$

Из второй и первой зависимости (3.53) определяем C_2 и C_4

$$C_2 = \theta_0 \frac{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)}{lv} - \frac{M_0}{2vEJ_1} + \frac{P_0 l}{vEJ_1(k-1)};$$

$$C_4 = y_0 \frac{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)^2}{l^2} - \frac{M_0}{EJ_1} + \frac{P_0 l}{EJ_1(k-1)};$$

Используя найденные зависимости произвольных постоянных в выражениях (3.49) – (3.52), соответствующие им выражения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил примут вид:

$$y(z) = y_0 + \frac{\theta_0 l}{v(k-1)} \sqrt{z} \sinh(v \ln z) -$$

$$- \frac{M_0 l^2}{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)^2 EJ_1} \left(1 + \frac{\sqrt{z}}{2v} \sinh(v \ln z) - \sqrt{z} \cosh(v \ln z) \right) + \quad (3.54)$$

$$+ \frac{P_0 l^3}{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)^3 EJ_1} \left(1 - z + \frac{\sqrt{z}}{v} \sinh(v \ln z) \right);$$

$$\begin{aligned} \theta(z) = & \frac{\theta_0}{\sqrt{z}} \left(\cosh(v \ln z) + \frac{1}{2v} \sinh(v \ln z) \right) + \frac{M_0 l}{v(k-1)^2 EJ_1} \frac{\sinh(v \ln z)}{\sqrt{z}} + \\ & + \frac{P_0 l^2}{\left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)^2 EJ_1} \left(\frac{\cosh(v \ln z)}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2v\sqrt{z}} \sinh(v \ln z) - 1 \right); \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} M(z) = & \frac{\theta_0 EJ_1 \left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)}{vl} \sqrt{z} \sinh(v \ln z) + \\ & + M_0 \sqrt{z} \left(\cosh(v \ln z) - \frac{1}{2v} \sinh(v \ln z) \right) + \frac{P_0 l}{v(k-1)} \sqrt{z} \sinh(v \ln z); \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} Q(z) = & \frac{\theta_0 EJ_1 \left(v^2 - \frac{1}{4}\right)(k-1)^2}{l^2} \left(\frac{\cosh(v \ln z)}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2v\sqrt{z}} \sinh(v \ln z) \right) + \\ & + \frac{M_0(k-1) \left(v^2 - \frac{1}{4}\right)}{lv} \frac{\sinh(v \ln z)}{\sqrt{z}} + P_0 \left(\frac{\cosh(v \ln z)}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2v\sqrt{z}} \sinh(v \ln z) \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Зависимости (3.54) – (3.57) позволяют исследовать НДС конструкций с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости, испытывающих, как растяжение, так и сжатие при условии $\frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} > -\frac{1}{4}$ от действия сосредоточенных нагрузок.

3.4. Анализ модели изгиба и устойчивости сжатых стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости

Методика интегрирования модели изгиба сжатых стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости представлена в работе [277]. Рассматривается стержень, изгибная жесткость которого описывается квадратичной зависимостью (3.45).

Для случая сжатия уравнение изгиба (3.2) приводится к виду

$$z^2 \frac{d^4 y}{dz^4} + 4z \frac{d^3 y}{dz^3} + \left(2 + \frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} \right) \frac{d^2 y}{dz^2} = 0. \quad (3.58)$$

Для уравнения (3.58) выполним замену $\frac{d^2 y}{dz^2} = u(z)$. Тогда оно примет вид

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + 4z \frac{du}{dz} + \left(2 + \frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} \right) u = 0. \quad (3.59)$$

Уравнение (3.59) является уравнением Эйлера [112] и, следовательно, используем замену $\xi = \ln z$. Получим уравнение с постоянными коэффициентами для нахождения функции $u(\xi)$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + 3 \frac{du}{d\xi} + \left(2 + \frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} \right) u = 0. \quad (3.60)$$

Находим корни характеристического уравнения (3.60)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i\nu, \text{ где } \nu = \sqrt{\frac{N_0 l^2}{(k-1)^2 EJ_1} - \frac{1}{4}}.$$

С учетом замены получаем общее решение уравнения (3.59)

$$y''_{xx}(z) = u(z) = z^{-3/2} (C_1 \cos(\nu \ln z) + C_2 \sin(\nu \ln z)). \quad (3.61)$$

Интегрируя дважды уравнение (3.61), определяем

$$y'_x(z) = \frac{l}{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)} \left(C_1 z^{-1/2} \left(v \sin(v \ln z) - \frac{1}{2} \cos(v \ln z) \right) - \right. \\ \left. - C_2 z^{-1/2} \left(v \cos(v \ln z) + \frac{1}{2} \sin(v \ln z) \right) + C_3 \right), \quad (3.62)$$

$$y(z) = -\frac{l^2}{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)^2} \left(C_1 z^{1/2} \cos(v \ln z) + C_2 z^{1/2} \sin(v \ln z) - C_3 z + C_4 \right). \quad (3.63)$$

Чтобы удовлетворить любым граничным условиям, которые дают систему для определения произвольных постоянных: C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , определяем производную $\left(z^2 y''_{xx}(z)\right)'_x$

$$\left(z^2 y''_{xx}(z)\right)'_x = \frac{(k-1)}{l} z^{-1/2} \left(C_1 \left(-v \sin(v \ln z) + \frac{1}{2} \cos(v \ln z) \right) + \right. \\ \left. + C_2 \left(v \cos(v \ln z) + \frac{1}{2} \sin(v \ln z) \right) \right), \quad (3.64)$$

С учетом соотношений (3.1) выразим произвольные постоянные через начальные параметры:

$$y(1) = -\frac{l^2}{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)^2} (C_1 - C_3 + C_4) = y_0; \\ y'_x(1) = \frac{l}{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)} \left(-\frac{1}{2} C_1 - v C_2 + C_3 \right) = \theta_0; \\ EJ_1 z^2 y''_{xx}(z) \Big|_{z=1} = EJ_1 C_1 = M_0; \\ \left(EJ_1 \left(z^2 y''_{xx}(z) \right)'_x + \left(v^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{EJ_1 (k-1)^2}{l^2} y'_x(z) \right) \Big|_{z=1} = \frac{EJ_1 (k-1)}{l} C_3 = P_0, \quad (3.65)$$

Из последнего выражения (3.65) определяем

$$C_3 = P_0 \frac{l}{EJ_1(k-1)}.$$

Из третьего соотношения (3.65) находим C_1

$$C_1 = \frac{M_0}{EJ_1};$$

Из второй и первой зависимости (3.53) определяем C_2 и C_4

$$C_2 = -\theta_0 \frac{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)}{lv} - \frac{M_0}{2vEJ_1} + \frac{P_0 l}{vEJ_1(k-1)};$$

$$C_4 = -y_0 \frac{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)^2}{l^2} - \frac{M_0}{EJ_1} + \frac{P_0 l}{EJ_1(k-1)};$$

Используя найденные зависимости произвольных постоянных в выражениях (3.61) – (3.64), соответствующие им выражения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил примут вид:

$$y(z) = y_0 + \frac{\theta_0 l}{v(k-1)} \sqrt{z} \sin(v \ln z) +$$

$$+ \frac{M_0 l^2}{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)^2 EJ_1} \left(1 + \frac{\sqrt{z}}{2v} \sin(v \ln z) - \sqrt{z} \cos(v \ln z) \right) - \quad (3.66)$$

$$- \frac{P_0 l^3}{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)^3 EJ_1} \left(1 - z + \frac{\sqrt{z}}{v} \sin(v \ln z) \right);$$

$$\theta(z) = \frac{\theta_0}{\sqrt{z}} \left(\cos(v \ln z) + \frac{1}{2v} \sin(v \ln z) \right) + \frac{M_0 l}{v(k-1)^2 E J_1} \frac{\sin(v \ln z)}{\sqrt{z}} - \frac{P_0 l^2}{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)^2 E J_1} \left(\frac{\cos(v \ln z)}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2v\sqrt{z}} \sin(v \ln z) - 1 \right); \quad (3.67)$$

$$M(z) = - \frac{\theta_0 E J_1 \left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)}{v l} \sqrt{z} \sin(v \ln z) + \quad (3.68)$$

$$+ M_0 \sqrt{z} \left(\cos(v \ln z) - \frac{1}{2v} \sin(v \ln z) \right) + \frac{P_0 l}{v(k-1)} \sqrt{z} \sin(v \ln z);$$

$$Q(z) = - \frac{\theta_0 E J_1 \left(v^2 + \frac{1}{4}\right)(k-1)^2}{l^2} \left(\frac{\cos(v \ln z)}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2v\sqrt{z}} \sin(v \ln z) \right) - \quad (3.69)$$

$$- \frac{M_0(k-1) \left(v^2 + \frac{1}{4}\right)}{l v} \frac{\sin(v \ln z)}{\sqrt{z}} + P_0 \left(\frac{\cos(v \ln z)}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2v\sqrt{z}} \sin(v \ln z) \right).$$

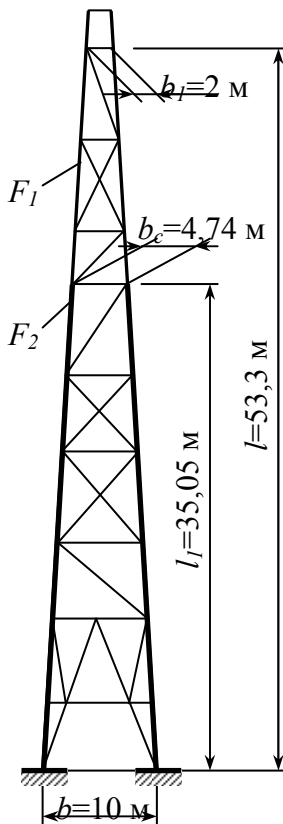


Рисунок 3.11.
Расчетная схема
буровой вышки

Аналогичные зависимости можно получить, если принять начало координат со стороны большей жесткости, в этом случае следует принять $k = \sqrt{\frac{E J_1}{E J_2}}$, а в выражениях (3.54) – (3.57) и (3.66) – (3.69) $E J_1$ надо заменить на $E J_2$.

Исследуем устойчивость на примере буровой башенной вышки ВБ-53-320. Вышка представляет пространственную ферменную стержневую конструкцию в виде квадратной усеченной пирамиды, и ее расчетная схема приведена на рисунке 3.11. Грузонесущие стойки нижней части вышки до отметки $l_1 = 35,05$ м изготовлены из труб $\varnothing 245 \times 12$ мм, выше этой отметки – трубы $\varnothing 194 \times 6$ мм, элементы решетки ферм изготовлены: пояса

– из труб 194×6 мм и 140×5 мм, диагональные тяги – из круглых стержней 24 и 30 мм.

Характеристики вышки: высота вышки $l=53,3$ м, ширина нижнего основания $b=10$ м, верхнего $b_l=2$ м, на стыке двух участков $b_c=4,74$ м ($h_1=1$ м; $h_2=5$ м; $h_c=2,37$ м – радиусы инерции граничных сечений), площадь поперечного сечения грузонесущих стоек верхнего участка $F_l=141,75$ см², нижнего участка $F_2=351,4$ см².

Приняв, начало координат со стороны свободного конца, учитывая, что изгибная жесткость в произвольном сечении будет $EJ = EFh^2$, то введя обозначения $a = \frac{h_2 - h_1}{l}$; $v = \sqrt{\frac{N_0}{EF_1 a^2} - \frac{1}{4}}$ и $v_1 = \sqrt{\left(v^2 + \frac{1}{4}\right) \frac{F_1}{F_2} - \frac{1}{4}}$, получим уравнения прогибов, углов поворота, моментов и поперечных сил для верхнего участка:

$$\begin{aligned} y_1(z) &= y_0 + \frac{\theta_0 h_1}{va} \sqrt{z} \sin(v \ln z); \\ \theta_1(z) &= \frac{\theta_0}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{2v} \sin(v \ln z) + \cos(v \ln z) \right); \\ M_1(z) &= - \frac{\theta_0 EF_1 a h_1 \left(\frac{1}{4} + v^2 \right)}{v} \sqrt{z} \sin(v \ln z); \\ Q_{1y}(z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Из выражений (3.70), подставив $z = \frac{h_c}{h_1}$, получим начальные параметры для нижнего участка, тогда уравнения прогибов и углов поворота на нижнем участке будут иметь вид

$$\begin{aligned}
y_2(z) = & y_0 + \theta_0 \left(\sqrt{\frac{h_1}{h_c}} \left(\left(\frac{1}{2\nu} \sin\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) + \cos\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) \right) \right) \frac{h_c}{a\nu_1} \sqrt{z} \sin(\nu_1 \ln z) - \right. \\
& \left. - \frac{F_1 h_1 \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right)}{\nu a F_2 \left(\frac{1}{4} + \nu_1^2 \right)} \sqrt{\frac{h_c}{h_1}} \sin\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) \left(1 - \sqrt{z} \cos(\nu_1 \ln z) + \frac{\sqrt{z}}{2\nu_1} \sin(\nu_1 \ln z) \right) \right); \\
\theta_2(z) = & \theta_0 \left(\sqrt{\frac{h_1}{h_c}} \left(\left(\frac{1}{2\nu} \sin\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) + \cos\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) \right) \right) \frac{1}{\sqrt{z}} \left(\frac{1}{2\nu_1} \sin(\nu_1 \ln z) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \cos(\nu_1 \ln z) \right) - \frac{F_1 \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right)}{\nu \nu_1 F_2} \sqrt{\frac{h_1}{h_c}} \sin\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \sin(\nu_1 \ln z) \right).
\end{aligned}$$

Из условий жесткого закрепления нижнего конца стержня получаем уравнение для определения параметра ν

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{1}{2\nu} \sin\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) + \cos\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) \right) \right) \left(\frac{1}{2\nu_1} \sin\left(\nu_1 \ln \frac{h_2}{h_c}\right) + \right. \\
& \left. + \cos\left(\nu_1 \ln \frac{h_2}{h_c}\right) \right) - \frac{F_1 \left(\frac{1}{4} + \nu^2 \right)}{\nu \nu_1 F_2} \sin\left(\nu \ln \frac{h_c}{h_1}\right) \sin\left(\nu_1 \ln \frac{h_2}{h_c}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Уравнение (3.71) решается численным методом, из его решения получаем значение первого корня $\nu = 1,647$, чему соответствует $N_{кр} = 47,29$ МН. При использовании упрощенной модели стержня с одним участком и усредненной площадью $F_{cp} = \frac{l_1}{l} F_2 + \frac{l-l_1}{l} F_1$ получаем значение первого корня $\nu = 1,218$, чему соответствует $N_{кр} = 54,6$ МН, что отличается от точного значения на 15,5%. Таким образом, подобные упрощения расчетной модели вносят значительную погрешность в результат расчета.

3.5. Исследование проблемы продольно-поперечного изгиба стержней с учетом распределенных нагрузок

Рассматривается изгиб стержня с произвольной степенной неоднородностью от действия продольной силы и распределенной поперечной нагрузки интенсивностью $p(x)$. Для этого требуется найти решение неоднородного уравнения (3.4). Для случая растяжения решение будем искать в виде

$$\tilde{u}(\zeta) = \zeta^\nu I_\nu(\lambda\zeta)\varphi_1(\zeta) + \zeta^\nu K_\nu(\lambda\zeta)\varphi_2(\zeta), \quad (3.72)$$

где $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \zeta^\nu I_\nu(\lambda\zeta)\varphi_1'(\zeta) + \zeta^\nu K_\nu(\lambda\zeta)\varphi_2'(\zeta) &= 0; \\ \lambda\zeta^\nu I_{\nu-1}(\lambda\zeta)\varphi_1'(\zeta) - \lambda\zeta^\nu K_{\nu-1}(\lambda\zeta)\varphi_2'(\zeta) &= \frac{l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-k} \right)^3 \int \zeta^{1-2\nu} p(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.73)$$

Рассмотрим случай, когда интенсивность поперечной нагрузки является степенной функцией ($p(\zeta) = p_\alpha \zeta^\alpha$) – наиболее распространенный в инженерной практике. Аналогичный подход к решению можно распространить так же на случай полиномиальной функции. Тогда с учетом решения системы (3.73) получим

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{p_\alpha l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-k} \right)^3 \frac{\zeta^\nu}{2(1-\nu)} \left(K_\nu(\lambda\zeta) \int \zeta^{\alpha+3-3\nu} I_\nu(\lambda\zeta) d\zeta - I_\nu(\lambda\zeta) \int \zeta^{\alpha+3-3\nu} K_\nu(\lambda\zeta) d\zeta \right) \quad (3.74)$$

Выражение (3.74) представим в виде

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{pl^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \frac{\lambda^{3\nu-1-\alpha}}{2(1-\nu)} \zeta^\nu g_{\alpha+3-3\nu,\nu}(\lambda\zeta), \quad (3.75)$$

где

$$g_{\mu, \nu}(z) = z^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)}$$

- модифицированная функция Ломмеля [221].

В случае сжатия решение неоднородного уравнения (3.4) ищется в виде

$$\tilde{u}(\zeta) = \zeta^{\nu} J_{\nu}(\lambda \zeta) \varphi_1(\zeta) + \zeta^{\nu} Y_{\nu}(\lambda \zeta) \varphi_2(\zeta), \quad (3.76)$$

где $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \zeta^{\nu} J_{\nu}(\lambda \zeta) \varphi_1'(\zeta) + \zeta^{\nu} Y_{\nu}(\lambda \zeta) \varphi_2'(\zeta) &= 0; \\ \lambda \zeta^{\nu} J_{\nu-1}(\lambda \zeta) \varphi_1'(\zeta) + \lambda \zeta^{\nu} Y_{\nu-1}(\lambda \zeta) \varphi_2'(\zeta) &= \frac{l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-k} \right)^3 \int \zeta^{1-2\nu} p(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.77)$$

Как и в предыдущем случае ограничимся рассмотрением интенсивности поперечной нагрузки со степенным законом изменения ($p(\zeta) = p_{\alpha} \zeta^{\alpha}$). Тогда с учетом решения системы (3.77) получим

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{p_{\alpha} l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{1-k} \right)^3 \frac{\pi \zeta^{\nu}}{4(1-\nu)} \left(Y_{\nu}(\lambda \zeta) \int \zeta^{\alpha+3-3\nu} J_{\nu}(\lambda \zeta) d\zeta - J_{\nu}(\lambda \zeta) \int \zeta^{\alpha+3-3\nu} Y_{\nu}(\lambda \zeta) d\zeta \right) \quad (3.78)$$

Выражение (3.78) представим в виде

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{p l^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \frac{\lambda^{3\nu-1-\alpha}}{2(1-\nu)} \zeta^{\nu} s_{\alpha+3-3\nu, \nu}(\lambda \zeta), \quad (3.79)$$

где

$$s_{\mu, \nu}(z) = z^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{2^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)}$$

- функция Ломмеля [48].

Следует отметить, что функция Ломмеля не определяется при $\mu + \nu$, $\mu - \nu$ – отрицательных нечетных значениях [48], т.е. в нашей задаче при отрицательном нечетном значении $\alpha + 3 - 2\nu$ или $\alpha + 3 - 4\nu$. Если учесть, что для большинства стержневых конструкций m принимает целые значения, т.е. $\nu = 0, 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$, то практический интерес представляют два случая $m = 3$ и $m = 4$ ($\nu = 2$ и $\nu = 3/2$ соответственно), под действием поперечной нагрузки постоянной интенсивности ($p(\zeta) = \text{const}$; $\alpha = 0$). Выполнив интегрирование по частям в выражении (3.78), частное решение представим в виде

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{pl^3}{EJ_2} \left(\frac{2(1-\nu)}{\lambda(1-k)} \right)^3 \frac{\lambda^{3\nu-1}}{2(1-\nu)} \zeta^{\nu} \bar{s}_{3-3\nu, \nu}(\lambda\zeta). \quad (3.80)$$

Для случая $m = 3$ ($\nu = 2$) будет

$$\begin{aligned} \bar{s}_{-3,2}(z) = & -\frac{1}{4} z^{-2} \ln z - \frac{1}{16} \ln z + \frac{1}{128} z^2 \left(\ln^2 z - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{8} \right) + \\ & + \frac{1}{128} z^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2}}{2^{2m+2} \Gamma(m+4) \Gamma(m+2)} \left(2 \ln^2 z - \right. \\ & - 2(\psi(m+4) + \psi(m+2) - 2\psi(1) - 1) \ln z + \frac{1}{4} + \\ & + \sum_{j=0}^m \left(\frac{\Gamma(j+3)}{\Gamma(j+4)} (\psi(j+4) + \psi(j+2) - 2\psi(1) - 1) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+2)} (\psi(j+3) + \psi(j+2) - 2\psi(1) - 1) \right) \right), \end{aligned} \quad (3.81)$$

введем также обозначение для функции

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{-4,1}(z) = & \frac{1}{8} z^{-3} + \frac{1}{16} z^{-1} \left(\ln z + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{64} z \ln^2 z + \\
& + \frac{1}{128} z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2}}{2^{2m+2} \Gamma(m+3) \Gamma(m+2)} \left(2 \ln^2 z - \right. \\
& \left. - 2(\psi(m+3) + \psi(m+2) - 2\psi(1) - 1) \ln z + \right. \\
& + \sum_{j=0}^m \left(\frac{\Gamma(j+2)}{\Gamma(j+3)} (\psi(j+3) + \psi(j+2) - 2\psi(1) - 1) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+2)} (\psi(j+3) + \psi(j+1) - 2\psi(1) - 1) \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Для случая $m = 4$ ($\nu = 3/2$) будет

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{-3/2,3/2}(z) = & -\frac{1}{2} z^{-1/2} + \frac{1}{4} z^{-1/2} \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2}}{2^{2m+2} \Gamma\left(m + \frac{5}{2}\right) \Gamma(m+1)} (2 \ln z - \\
& - \psi\left(m + \frac{5}{2}\right) - \psi(m+1) + \psi\left(\frac{3}{2}\right) + \psi(1));
\end{aligned} \tag{3.83}$$

введем также обозначение для функции

$$\begin{aligned}
\bar{s}_{-5/2,1/2}(z) = & \frac{1}{2} z^{-3/2} - \frac{1}{2} z^{1/2} \ln z + \frac{1}{8} z^{1/2} \sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+2}}{2^{2m+2} \Gamma\left(m + \frac{5}{2}\right) \Gamma(m+2)} \times \\
& \times \left(2 \ln z - \psi\left(m + \frac{5}{2}\right) - \psi(m+2) + \psi\left(\frac{3}{2}\right) + \psi(1) \right);
\end{aligned} \tag{3.84}$$

здесь $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ - логарифмическая производная от гамма функции [291].

Для функций (3.81) – (3.84) справедливы те же рекуррентные соотношения, что и для функций Ломмеля [48]

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \left(z^{\nu} \bar{s}_{\mu, \nu}(z) \right) &= (\mu + \nu - 1) z^{\nu} \bar{s}_{\mu-1, \nu-1}(z); \\ \frac{d}{dz} \left(z^{-\nu} \bar{s}_{\mu, \nu}(z) \right) &= (\mu - \nu - 1) z^{-\nu} \bar{s}_{\mu-1, \nu+1}(z); \\ \bar{s}_{\mu+2, \nu}(z) &= z^{\mu+1} - \left((\mu+1)^2 - \nu^2 \right) \bar{s}_{\mu, \nu}(z).\end{aligned}\quad (3.85)$$

Оценим влияние продольной силы на величину максимального прогиба и

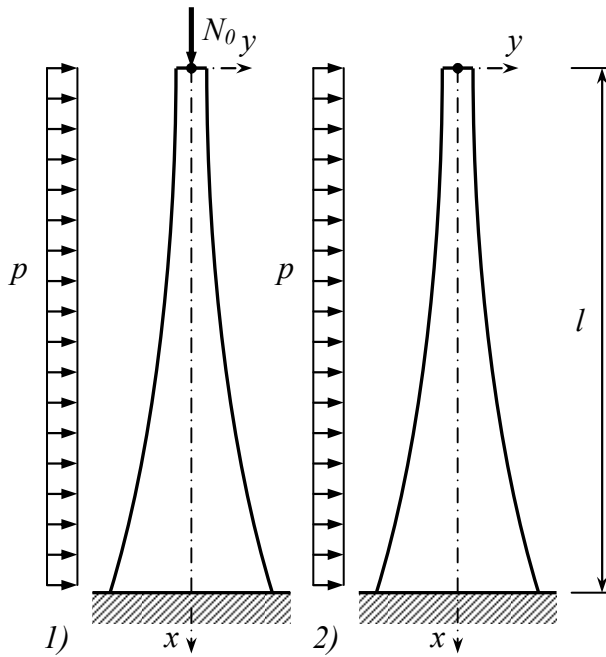


Рисунок 3.12. Расчетные схемы конструкций консольного типа:

- 1 – модель с учетом продольной нагрузки;
2 – модель без учета продольной нагрузки.

изгибающего момента в основании конструкций консольного типа от действия распределенной поперечной нагрузки постоянной интенсивности (рисунок 3.12).

Данная задача рассмотрена в статье [248]. Для этого рассмотрим две модели стержня в состоянии продольно-поперечного и поперечного изгиба. Введем следующие безразмерные

величины: $\tilde{M}_{\max} = \frac{M_{\max}}{pl^2}$ –

относительный момент;

$\tilde{y}_{\max} = \frac{EJ_2}{pl^4} y_{\max}$ – относительный прогиб вершины стержня; $\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{N_0 l^2}{EJ_2}}$ –

безразмерная продольная сила.

С учетом граничных условий закрепления консольного стержня и принятых ранее обозначений, максимальные величины прогибов и моментов для случая продольно-поперечного изгиба определяются зависимостями

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{1,\max} &= \frac{\lambda^{3\nu-1}}{\tilde{\lambda}^4} \left(\frac{\zeta_0^{1-\nu} s_{4-3\nu,\nu-1}(\lambda\zeta_0) - s_{4-3\nu,\nu-1}(\lambda)}{8(1-\nu)^2} + \right. \\ &+ \zeta_0^{1-\nu} s_{2-3\nu,\nu-1}(\lambda\zeta_0) \left(\frac{D_\lambda}{C_\lambda} A_\lambda - B_\lambda + 1 \right) + \frac{\lambda^{2-3\nu} \zeta_0^{2(1-\nu)}}{2(1-\nu)} \left(\frac{A_\lambda}{C_\lambda} + \frac{\lambda(1-\zeta_0^{2(1-\nu)})}{2(1-\nu)} \right) - \\ &\quad \left. - \frac{s_{3-3\nu,\nu}(\lambda\zeta_0)}{2(1-\nu)} \frac{A_\lambda}{C_\lambda} \right), \\ \tilde{M}_{1,\max} &= \frac{\lambda^{3\nu-1}}{\tilde{\lambda}^2} \left(s_{2-3\nu,\nu-1}(\lambda) + \zeta_0^{1-\nu} s_{2-3\nu,\nu-1}(\lambda\zeta_0) \left(\frac{D_\lambda}{C_\lambda} A_\lambda - B_\lambda \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^{2-3\nu} \zeta_0^{2(1-\nu)}}{2(1-\nu)} \frac{A_\lambda}{C_\lambda} - \frac{s_{3-3\nu,\nu}(\lambda\zeta_0)}{2(1-\nu)} \frac{A_\lambda}{C_\lambda} \right).\end{aligned}$$

При рассмотрении конструкций с параметрами $m = 3$ и $m = 4$ функции $s_{\mu,\nu}$ заменяются на $\bar{s}_{\mu,\nu}$.

Из системы уравнений (3.1), при $N_x = 0$, для поперечного изгиба для общего случая получаем выражения прогибов и моментов:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{2,\max} &= \frac{1-\nu}{2(1-k)^4 \nu(2-\nu)(3-2\nu)} \left(\nu(2-\nu) - 3\nu(3-2\nu) \zeta_0^{2(1-\nu)} + \right. \\ &+ 3\nu(2-\nu)(3-2\nu) \zeta_0^{4(1-\nu)} - (2-\nu)(3-2\nu) \zeta_0^{6(1-\nu)} + 6(1-\nu)^3 \zeta_0^{6-4\nu} \Big), \\ \tilde{M}_{2,\max} &= 1/2.\end{aligned}$$

Для случая $m = 1$ ($\nu = 0$) – выражения для прогибов будет

$$\tilde{y}_{2,\max} = \frac{1}{(1-k)^4} \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{4}k + \frac{3}{2}k^2 - \frac{11}{12}k^3 + k^3 \ln \sqrt{k} \right).$$

Для случая $m = 3$ ($\nu = 2$) – выражения для прогибов будет

$$\tilde{y}_{2,\max} = \frac{1}{(1-k)^4} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}k + \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{4}k^3 - 3k \ln \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

Для случая $m = 4$ ($\nu = 3/2$) – выражения для прогибов будет

$$\tilde{y}_{2,\max} = \frac{1}{(1-k)^4} \left(-\frac{11}{12} + \frac{3}{2}k - \frac{3}{4}k^2 + \frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{k} \right).$$

В качестве примера, рассмотрим влияние продольной нагрузки на значение прогибов и изгибающих моментов для некоторых параметров конструкций. Критические силы для стержней с относительным поперечным размером $k = 0,5$ будут: $m = 1 - \tilde{\lambda}_{кр} = 1,436$; $m = 3 - \tilde{\lambda}_{кр} = 1,156$; $m = 4 - \tilde{\lambda}_{кр} = 1,014$. На графиках (рисунок 3.13) показана зависимость относительных величин прогибов - $K_y = \tilde{y}_{1,\max} / \tilde{y}_{2,\max}$ и изгибающих моментов - $K_M = \tilde{M}_{1,\max} / \tilde{M}_{2,\max}$ от величины безразмерной продольной силы $\tilde{\lambda}$. Из графиков следует, что продольная нагрузка оказывает существенное влияние на величину прогибов и моментов, даже при величине силы значительно меньше критической. На графиках (рисунок 3.14) показано влияние относительного поперечного размера k на величины K_y и K_M . Из чего следует, что для стержней с большим соотношением размеров торцов, влияние продольной нагрузки на величину прогибов сохраняется значительным, но при этом изменение величины изгибающего момента в основании стержня от действия продольной силы становится несущественным.

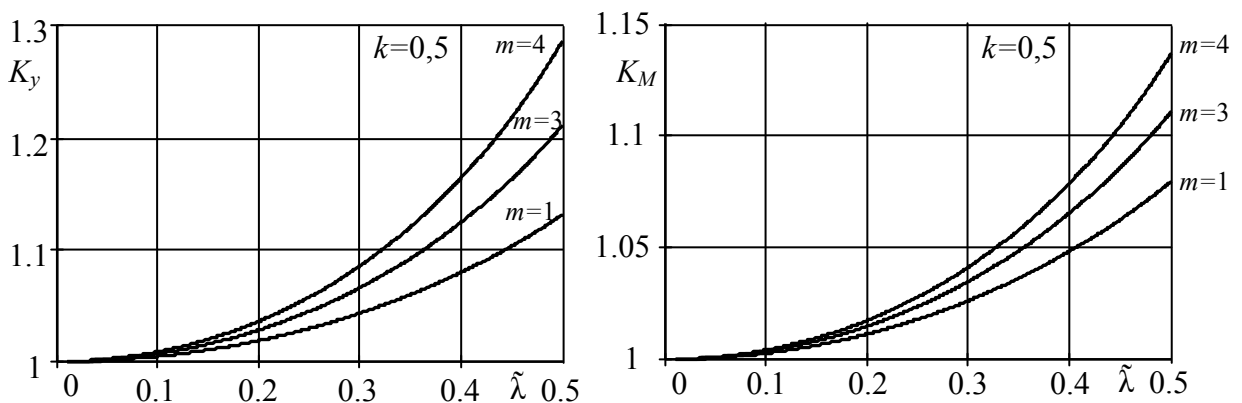


Рисунок 3.13. Зависимость величин прогибов и изгибающих моментов от величины продольной силы

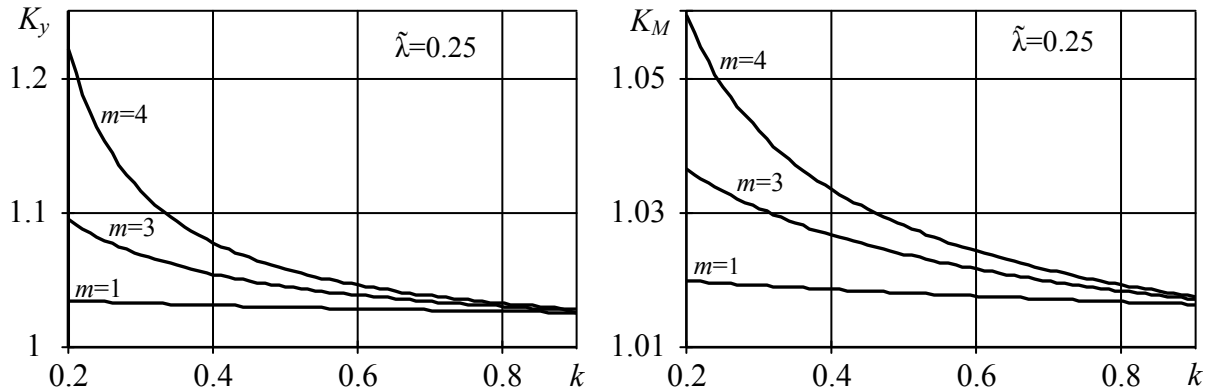


Рисунок 3.14. Зависимость величин прогибов и изгибающих моментов от параметра поперечного размера

Рассмотренную математическую модель можно непосредственно использовать при исследовании напряженно-деформированного состояния конструкций, или как описание элемента конструкции в программных комплексах объектного и имитационного моделирования.

3.6. Выводы

1. Получены новые точные решения задач продольно-поперечного изгиба стержневых конструкций с произвольной степенной неоднородностью изгибной жесткости для случаев растяжения и сжатия.

2. На основе известных соотношений для функций Бесселя введены специальные функции и исследованы их основные свойства. С применением этих функций выражения деформаций и усилий представлены методом начальных параметров.

3. Выполнены исследования устойчивости стержневых конструкций для основных условий закрепления.

4. Выполнен анализ моделей продольно-поперечного изгиба и устойчивости стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости.

5. С использованием функций Ломмеля и модифицированных функций Ломмеля получены частные решения задачи продольно-поперечного изгиба

стержневых конструкций с произвольной степенной неоднородностью изгибной жесткости для случаев растяжения и сжатия. Отдельно рассмотрены случаи действия нагрузки постоянной интенсивности на конструкции: клиновидного стержня и стержня пирамидальной или конической формы.

РАЗДЕЛ 4

Разработка численно-аналитических методов анализа динамики продольных и крутильных колебаний стержневых конструкций с осевой неоднородностью геометрических и механических свойств

4.1. Методика интегрирования уравнений динамики неоднородных стержней в рядах по собственным функциям

Общие положения и гипотезы теории продольных и крутильных колебаний имеют схожий характер, поэтому основные выводы уравнений рассмотрим для продольных колебаний с заменой на соответствующие аналоги величин для случая крутильных колебаний.

В соответствии с волновой теорией плоского удара Сен-Венана, уравнение деформаций сечений стержня приводится к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных [184, 204]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t), \quad (4.1)$$

где u – продольные перемещения поперечных сечений стержня; x – продольная координата; t – время; $EF(x)$ – жесткость сечения при растяжении-сжатии; E – модуль упругости первого рода; F – площадь поперечного сечения; $m(x)$ – линейная плотность; $p(x, t)$ – интенсивность продольной нагрузки.

Неоднородному уравнению (4.1) соответствует однородное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4.2)$$

Следуя методу Фурье решение уравнения (4.2) ищем в виде ряда собственных функций

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) w_n(t). \quad (4.3)$$

Подставляя решение (4.3) в уравнение (4.2) и разделив переменные, для n -го члена ряда, получим выражение

$$\frac{EF \cdot X_n'' + EF' \cdot X_n'}{mX_n} = \frac{\ddot{w}_n}{w_n} = -\omega_n^2,$$

здесь штрихом обозначена производная по координате, а точкой по времени, ω_n^2 – постоянная разделения. Таким образом, уравнение (4.2) разделяется на два однородных дифференциальных уравнения

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = 0; \quad (4.4)$$

$$X_n'' + \frac{EF'}{EF} X_n' + \frac{m}{EF} \omega_n^2 X_n = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.4) представляет собой уравнение гармонических колебаний, решение которого известно [184]

$$w_n(t) = A_n \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (4.6)$$

где ω_n – частота, A_n , μ_n – амплитуда и фаза n -й формы колебаний, определяются из начальных условий.

Уравнение (4.5), в общем случае, является уравнением с переменными коэффициентами, решение которого в аналитической форме может быть получено лишь для некоторых частных случаев соотношения механических и геометрических характеристик стержня [79, 191].

Остановимся подробно на стержнях со степенной осевой неоднородностью. В этом случае жесткость изменяется по степенному закону от координаты x ,

$$EF(x) = EF_2 \left((1-k) \frac{x}{l} + k \right)^\alpha,$$

l – длина стержня, $k = \sqrt[\alpha]{EF_1 / EF_2}$, EF_1 , EF_2 – жесткости торцевых сечений стержня, в случае $\alpha > 0$ будем принимать $EF_2 > EF_1$ и при $\alpha < 0$ – $EF_2 < EF_1$, α – показатель степени, принимает любое вещественное значение, для рассматриваемых объектов отношение линейной плотности к жесткости сечения должно быть величиной постоянной ($m(x)/EF(x) = 1/c^2 = const$). Под такое описание характеристик попадает широкий класс стержневидных тел со сложной геометрической формой, как например, сплошные и полые стержни пирамидального, конического, параболического, гиперболического и пр. очертаний (рисунок 4.1).

Введем переменную $z = (1-k)x/l + k$, ($k \leq z \leq 1$), тогда с учетом, что $EF = EF_2 z^\alpha$ уравнение (4.5) примет вид

$$z^\alpha X_n'' + \alpha z^{\alpha-1} X_n' + \lambda_n^2 z^\alpha X_n = 0; \lambda_n = \frac{\omega_n l}{(1-k)c}, \quad (4.7)$$

здесь штрихом обозначена производная по z .

Решение уравнения (4.7) находится в виде [112]

$$X_n(z) = z^\nu (C_1 J_\nu(\lambda_n z) + C_2 Y_\nu(\lambda_n z)), \quad (4.8)$$

где $\nu = \frac{1-\alpha}{2}$; C_1 , C_2 – произвольные постоянные; $J_\nu(\zeta)$, $Y_\nu(\zeta)$ – функции

Бесселя первого и второго рода.

Решение (4.8) подходит для любых параметров модели, за исключением $k=0$ – случай остроконечного стержня (спектральная задача для данного случая рассмотрена подробно в [79]), в случае, когда ν – не целое, решение уравнения (4.7) можно искать в виде

$$X_n(z) = z^\nu (C_1 J_\nu(\lambda_n z) + C_2 J_{-\nu}(\lambda_n z)). \quad (4.9)$$

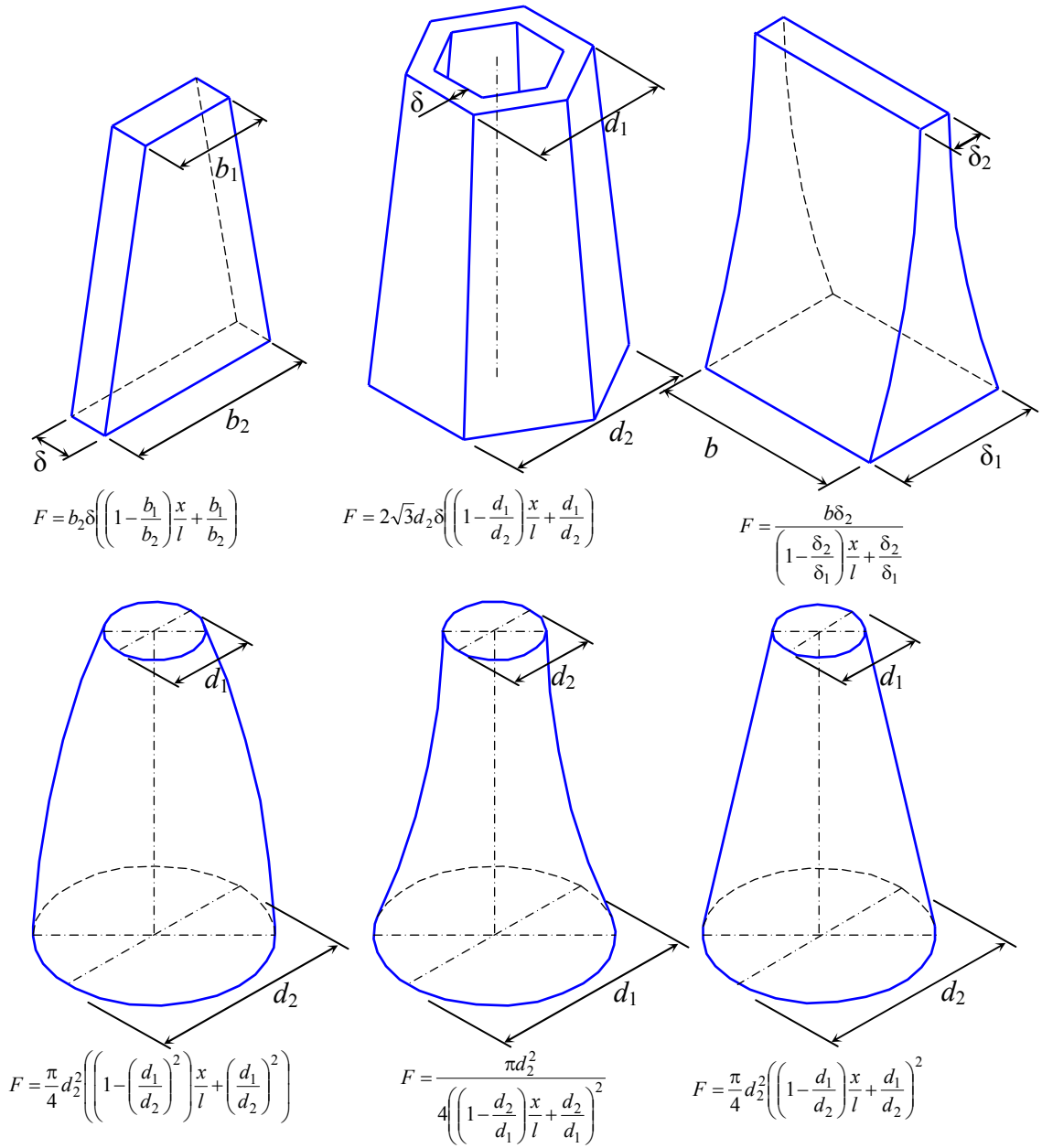


Рисунок 4.1. Примеры стержневидных тел, имеющих степенную зависимость осевой неоднородности геометрических характеристик.

Еще один частный случай связан со свойством функций Бесселя с полуцелым индексом ($\nu = \pm(n+1/2)$, $n \in \mathbb{N}_0$), в этом случае $J_{\pm\nu}$ может быть выражена конечным образом через алгебраические и тригонометрические функции [48]

$$\begin{aligned}
J_{n+\frac{1}{2}}(\zeta) &= \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin\left(\zeta - \frac{1}{2}\pi n\right) \sum_{r=0}^{\leq \frac{1}{2}n} \frac{(-1)^r (n+2r)!}{(2r)!(n-2r)!(2\zeta)^{2r}} + \right. \\
&\quad \left. + \cos\left(\zeta - \frac{1}{2}\pi n\right) \sum_{r=0}^{\leq \frac{1}{2}(n-1)} \frac{(-1)^r (n+2r+1)!}{(2r+1)!(n-2r-1)!(2\zeta)^{2r+1}} \right]; \\
J_{-n-\frac{1}{2}}(\zeta) &= \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(\zeta + \frac{1}{2}\pi n\right) \sum_{r=0}^{\leq \frac{1}{2}n} \frac{(-1)^r (n+2r)!}{(2r)!(n-2r)!(2\zeta)^{2r}} - \right. \\
&\quad \left. - \sin\left(\zeta + \frac{1}{2}\pi n\right) \sum_{r=0}^{\leq \frac{1}{2}(n-1)} \frac{(-1)^r (n+2r+1)!}{(2r+1)!(n-2r-1)!(2\zeta)^{2r+1}} \right].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Определение собственных функций (4.8, 4.9) для разных граничных задач будут рассмотрены подробно ниже на примерах.

Рассмотрим свойства собственных функций, для этого перепишем выражение (4.5) в следующем виде

$$(EFX'_n)' = -m\omega_n^2 X_n, \tag{4.11}$$

здесь, очевидно, что выражение справа определяет интенсивность сил инерции сечений для n -й формы колебаний. Используя аналогичное выражение (4.11) для m -й формы, а также с учетом того, что формы колебаний независимы друг от друга, в соответствии с теоремой о взаимности работ [117] получим

$$\omega_n^2 \int_0^l m(x) X_n(x) X_m(x) dx = \omega_m^2 \int_0^l m(x) X_n(x) X_m(x) dx,$$

откуда, исходя из того, что $\omega_m^2 \neq \omega_n^2$, то данное равенство выполнимо при условии

$$\int_0^l m(x) X_n(x) X_m(x) dx = 0.$$

Если помимо распределенных масс имеются сосредоточенные массы M_i в сечениях x_i , то, с учетом дополнительной работы локальных сил инерции, свойство ортогональности собственных функций получим в виде

$$\int_0^l m(x) X_n(x) X_m(x) dx + \sum M_i X_n(x_i) X_m(x_i) = 0,$$

или

$$\int_0^l \rho(x) X_n(x) X_m(x) dx = 0, \quad (4.12)$$

где $\rho(x) = m(x) + \sum \frac{M_i}{l} \delta(x - x_i)$ – весовая функция, $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака.

Свойство ортогональности собственных функций (4.12) используется для решения задач динамики, как на собственные, так и вынужденные колебания. Непосредственное определение квадрата нормы собственных функций для стержней с рассматриваемыми параметрами весьма затруднительно, поэтому поступим аналогично, как в работе [264]. Рассмотрим уравнение (4.7) для двух разных гармоник n и m

$$\left(z^\alpha X_n' \right)' = -\lambda_n^2 z^\alpha X_n; \quad \left(z^\alpha X_m' \right)' = -\lambda_m^2 z^\alpha X_m.$$

Умножим левое и правое уравнение на собственные функции X_m и X_n соответственно, вычитаем из первого уравнения второе и полученную разность интегрируем по переменной z

$$\left(\lambda_m^2 - \lambda_n^2 \right) \int_k^1 z^\alpha X_n(z) X_m(z) dz = \int_k^1 \left(\left(z^\alpha X_n' \right)' X_m - \left(z^\alpha X_m' \right)' X_n \right) dz.$$

Взяв интегралы по частям, получаем зависимость

$$\left(\lambda_m^2 - \lambda_n^2 \right) \int_k^1 z^\alpha X_n(z) X_m(z) dz = \left| \left(z^\alpha X_n' \right) X_m - \left(z^\alpha X_m' \right) X_n \right|_k^1. \quad (4.13)$$

С использованием выражения (4.13) можно выполнить проверку ортогональности собственных функций (4.12) при решении граничных задач. В

уравнении (4.13) перейдем к пределу $m \rightarrow n$, т.е. $\lambda_m = \lambda_n + \delta\lambda$, а

$X_m = X_n + \frac{\partial X_n}{\partial \lambda} \delta\lambda$, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$2\lambda_n \delta\lambda \int_k^1 z^\alpha X_n^2(z) dz = \left| \left(z^\alpha X_n' \right) \frac{\partial X_n}{\partial \lambda} \delta\lambda - \frac{\partial \left(z^\alpha X_n' \right)}{\partial \lambda} \delta\lambda X_n \right|_k^1,$$

отсюда, с учетом $\alpha = 1 - 2\nu$, выражение для квадрата нормы получим в виде

$$\Delta_n^2 = \int_k^1 z^{1-2\nu} X_n^2(z) dz = \frac{1}{2\lambda_n} \left| \left(z^{1-2\nu} X_n' \right) \frac{\partial X_n}{\partial \lambda} - \frac{\partial \left(z^{1-2\nu} X_n' \right)}{\partial \lambda} X_n \right|_k^1. \quad (4.14)$$

С использованием рекуррентных соотношений для функций Бесселя [48], найдем соответствующие производные для собственных функций (4.8)

$$\begin{aligned} X_n'(z) &= \lambda_n z^\nu (C_1 J_{\nu-1}(\lambda_n z) + C_2 Y_{\nu-1}(\lambda_n z)); \\ \frac{\partial X_n}{\partial \lambda} &= -\frac{\nu z^\nu}{\lambda_n} (C_1 J_\nu(\lambda_n z) + C_2 Y_\nu(\lambda_n z)) + \\ &+ z^{\nu+1} (C_1 J_{\nu-1}(\lambda_n z) + C_2 Y_{\nu-1}(\lambda_n z)) = -\frac{\nu}{\lambda_n} X_n + \frac{z}{\lambda_n} X_n'; \\ \frac{\partial \left(z^{1-2\nu} X_n' \right)}{\partial \lambda} &= z^{1-2\nu} \left(\frac{\partial X_n'}{\partial \lambda} \right)' = z^{1-2\nu} \left(\frac{1-\nu}{\lambda_n} X_n' + \frac{z}{\lambda_n} X_n'' \right). \end{aligned}$$

С учетом выражения для второй производной по z из уравнения (4.7)

$$z^{1-2\nu} X_n'' = -(1-2\nu)z^{-2\nu} X_n' - \lambda_n^2 z^{1-2\nu} X_n,$$

выражение для квадрата нормы в окончательном виде будет

$$\Delta_n^2 = \int_k^1 z^{1-2\nu} X_n^2(z) dz = \frac{1}{2} \left| z^{2-2\nu} X_n^2 + \frac{z^{2\nu}}{\lambda_n^2} \left(z^{1-2\nu} X_n' \right)^2 - \frac{2\nu}{\lambda_n^2} X_n \left(z^{1-2\nu} X_n' \right) \right|_k^1. \quad (4.15)$$

Не сложно заметить, что при $\alpha = 0$ ($\nu = 1/2$), зависимость (4.15) будет иметь схожий вид с известным в литературе выражением квадрата нормы для однородных стержней [264].

Если рассматриваемые стержни состоят из однородного материала плотностью γ ($m = \gamma F = \gamma F_2 z^\alpha$), то масса такого стержня будет, при $\alpha \neq -1$ ($\nu \neq 1$)

$$M_0 = \int_0^l m dx = \frac{\gamma F_2 l}{1-k} \int_k^1 z^{1-2\nu} dz = \frac{\gamma F_2 l (1-k^{2-2\nu})}{2(1-k)(1-\nu)},$$

тогда при наличии сосредоточенных инерционных нагрузок на торцах стержня, ортогональность собственных функций надо рассматривать с весом

$$\rho(z) = z^{1-2\nu} + \frac{1-k^{2-2\nu}}{2(1-\nu)} (\xi_1 \delta(z-k) + \xi_2 \delta(z-1)); \quad \xi_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{M_0}. \quad (4.16)$$

Для случая $\alpha = -1$ ($\nu = 1$) масса стержня будет

$$M_0 = \frac{\gamma F_2 l}{1-k} \int_k^1 z^{-1} dz = \frac{\gamma F_2 l}{(1-k)} \ln \frac{1}{k}.$$

Для случая вынужденных колебаний требуется найти решение неоднородного уравнения (4.1)

$$(z^{1-2\nu} u')' - \beta z^{1-2\nu} \ddot{u} = \frac{\beta}{\gamma F_2} p(z, t), \quad \beta = \frac{l^2}{c^2(1-k)^2}. \quad (4.17)$$

Решение уравнения (4.17) представим в виде ряда по собственным функциям (4.3). Подставив этот ряд в уравнение (4.17) и принимая во внимание соотношение $\lambda_n^2 = \beta \omega_n^2$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n) z^{1-2\nu} X_n = -\frac{p(z, t)}{\gamma F_2}. \quad (4.18)$$

Применив метод Фурье к уравнению (4.18), при учете свойства ортогональности собственных функций с весом, получим уравнение относительно коэффициентов w_n

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = -\frac{1-k}{\gamma F_2 l \Delta_n^2} \int_0^1 p(z, t) X_n(z) dz. \quad (4.19)$$

Рассмотрим использование разработанной методики расчета параметров НДС стержневидных конструкций при продольных колебаниях на некоторых примерах.

4.1.1. Применение методики при решении задачи об ударе конического стержня

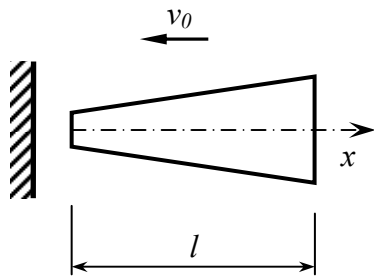


Рисунок 4.2. Удар конического стержня о жесткий ограничитель

Основные положения этой задачи изложены в работе [233].

В качестве математической модели рассматриваемого объекта примем упругий стержень конической формы длиной l (рисунок 4.2). Для изучения продольных колебаний $u(x, t)$, если выбрать начало отсчета со стороны меньшего основания, нужно решить задачу (4.2) с граничными условиями

$$u(0, t) = 0; \quad u'_x(l, t) = 0, \quad (4.20)$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = -v_0 e(x), \quad (4.21)$$

где v_0 – скорость удара, $e(x)$ – единичная функция.

Для конического стержня (рисунок 4.1) $F(x) = \frac{\pi}{4} \left((d_2 - d_1) \frac{x}{l} + d_1 \right)^2$, линейная плотность $m(x) = \gamma F(x)$, γ – плотность материала, или с учетом ранее принятых обозначений

$$F(z) = \frac{F_2}{(1+k)^2} z^2; \quad m(z) = \frac{\gamma F_2}{(1+k)^2} z^2; \quad z = \frac{x}{l} + k; \quad k = \frac{d_1}{d_2 - d_1}.$$

Для рассматриваемого случая уравнение (4.2) примет вид

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = \tilde{\gamma} z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{где } \tilde{\gamma} = \frac{\gamma l^2}{E}. \quad (4.22)$$

Из первого начального условия (4.21) следует, что фаза колебаний $\mu_n = 0$, тогда решение (4.3) будем искать в виде

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z) \sin \omega_n t, \quad (4.23)$$

где ω_n – частоты собственных колебаний.

Дифференциальный оператор уравнения (4.22) является самосопряженным и, следовательно, функции $X_n(z)$ будут ортогональны с весом $\rho(z) = z^2$ на промежутке $[k; k+1]$ [17].

Для определения собственных функций (4.23) получаем уравнение

$$z^2 X_n'' + 2z X_n' + \lambda_n^2 z^2 X_n = 0, \quad (4.24)$$

где $\lambda_n = \frac{\omega_n l}{c}$ – собственные значения частотного уравнения, $c = \sqrt{E/\gamma}$ – скорость волны продольных колебаний стержня.

Общее решение уравнения (4.24), учитывая $\alpha = 2$ ($\nu = -1/2$), в соответствии с (4.9) получим

$$X_n(z) = z^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 J_{\frac{1}{2}}(\lambda_n z) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(\lambda_n z) \right). \quad (4.25)$$

Используя зависимости (4.10) получим

$$J_{\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \zeta; \quad J_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \zeta,$$

тогда выражение для собственных функций (4.25) получим в виде

$$X_n(z) = C_1 \frac{\sin \lambda_n z}{z} + C_2 \frac{\cos \lambda_n z}{z}. \quad (4.26)$$

Если удовлетворить граничным условиям (4.20), то с учетом выражения для собственных функций (4.26) получим уравнение для нахождения собственных значений

$$\tan \lambda_n = \lambda_n (k + 1). \quad (4.27)$$

Тогда собственные функции можно представить в виде

$$X_n(z) = \frac{\sin \lambda_n z}{z} - \tan(\lambda_n (1 + k)) \frac{\cos \lambda_n z}{z} = \frac{\sin(\lambda_n (z - k))}{z \cos \lambda_n k}. \quad (4.28)$$

Оценим влияние параметра k на значения первого собственного числа частотного уравнения (4.27) λ_1 (первой собственной частоты $\omega_1 = \lambda_1 c / l$).

На графике рисунок 4.3 показана зависимость λ_1 от величины параметра относительного поперечного размера k , из графика следует, что при значении $k > 8$, что соответствует отношению размера большего к меньшему основанию менее, чем 9:8, значение первой собственной частоты будет отличаться от частоты, полученной для модели стержня постоянного сечения, не более чем на 5%. Учитывая, что k зависит только от размеров оснований и не зависит от длины, получаем соотношение размеров стержня, при котором в качестве расчетной модели можно принимать стержень постоянного сечения

$$l < \frac{d_1}{16 \tan \alpha},$$

где α – угол конусности. Так, например, для $\alpha = 1^\circ$ $l < 3,58d_1$, таким образом, даже для стержней с малой конусностью использование расчетной модели стержня постоянного сечения даст значительную погрешность.

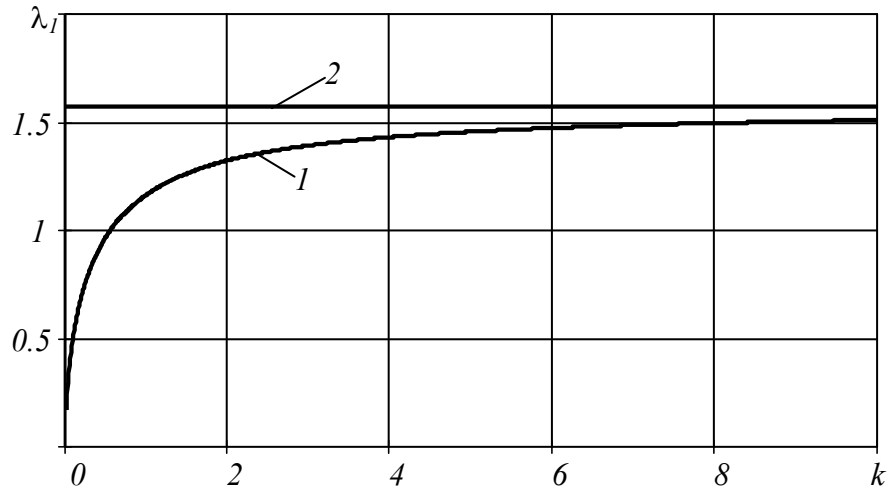


Рисунок 4.3. Зависимость λ_1 от величины параметра относительного поперечного размера k :

1 - для стержня переменного сечения;

2 – для стержня постоянного сечения ($\lambda_1 = 1,571$).

Определив производные для собственных функций (4.28)

$$X'_n(z) = \frac{\lambda_n z \cos(\lambda_n(z-k)) - \sin(\lambda_n(z-k))}{z^2 \cos \lambda_n k},$$

с учетом зависимости (4.15) получим выражение для квадрата нормы собственных функций с учетом веса ($\rho(z) = z^2$)

$$\Delta_n^2 = \frac{2\lambda_n - \sin 2\lambda_n}{4\lambda_n \cos^2 \lambda_n k}. \quad (4.29)$$

Если удовлетворить второму начальному условию (4.21), то в выражении (4.23) коэффициенты A_n примут вид

$$A_n = -\frac{v_0 l}{\lambda_n^3 \Delta_n^2 c \cos \lambda_n k} (\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k). \quad (4.30)$$

Решение (4.23) при значениях коэффициентов (4.30) определяет упругие перемещения конструкции

$$u(z, t) = -\frac{4v_0 l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{z \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \sin \lambda_n (z-k) \sin \omega_n t.$$

Напряжения будут определяться зависимостью

$$\begin{aligned} \sigma(z, t) = & -E \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{z^2 \lambda_n^2 (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \times \\ & \times (z \lambda_n \cos \lambda_n (z-k) - \sin \lambda_n (z-k)) \sin \omega_n t. \end{aligned}$$

А выражение для усилия в ударном сечении получим в виде

$$P(t) = -EF_1 \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\sin \lambda_n - \lambda_n (1+k) \cos \lambda_n + \lambda_n k)}{k \lambda_n (2\lambda_n - \sin 2\lambda_n)} \sin \omega_n t. \quad (4.31)$$

В качестве примера, рассмотрим формирование импульса при ударе конического бойка о жесткий ограничитель, исследования для которого были проведены в работе [15]. Масса бойка составляла 4,4 кг, диаметр ударного торца – $d_1=25$ мм, угол конусности – $\alpha=0,5^\circ$, длина – $l=720$ мм $\left(k = \frac{d_1}{2l \tan \alpha} = 1,989\right)$. На

рисунок 4.4 представлен график относительной величины усилия в ударном сечении $\tilde{P} = -\frac{P}{EF_1} \frac{c}{v_0}$ в зависимости от безразмерного времени $\tau = \frac{c}{l} t$.

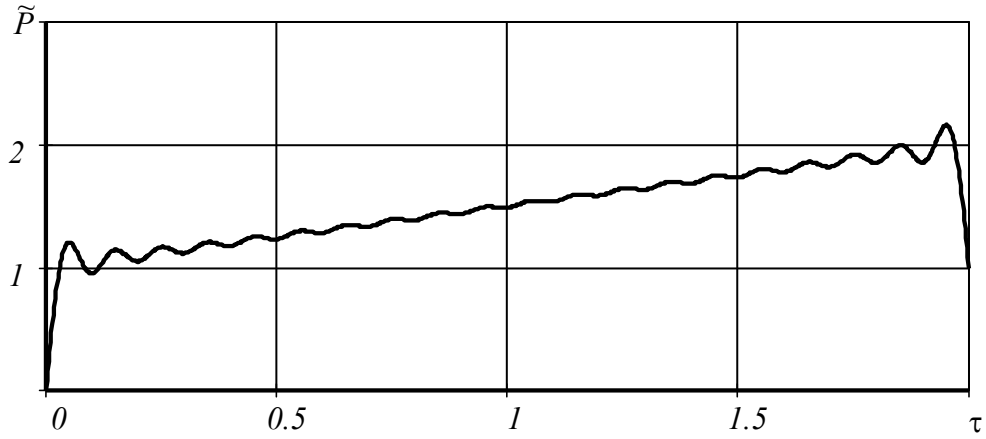


Рисунок 4.4. График изменения величины относительного усилия $\tilde{P}$.

Оценим характер взаимодействия стержня с преградой с позиции элементарной теории удара [12]

$$M\bar{v}_1 - M\bar{v}_0 = \bar{S}, \quad (4.32)$$

где $M\bar{v}_0$, $M\bar{v}_1$ - количество движения тела до и после соударения, $\bar{S}$ - импульс

реакции опоры. Для нашего случая $M = \frac{\gamma F_2 l}{(1+k)^2} \int_k^{k+1} z^2 dz = \gamma F_2 l \frac{1+3k+3k^2}{3(1+k)^2}$, или с

учетом $F_1 = \frac{F_2 k^2}{(1+k)^2}$, получим $M = \gamma F_1 l \frac{1+3k+3k^2}{3k^2}$. Ударный импульс

определяется, как импульс силы $P(t)$ (4.31) за промежуток времени контакта тела с опорой, т.е. до тех пор, пока $P(t)$ сохраняет знак с момента удара, при достижении нулевого значения происходит освобождение от связи. Для рассматриваемого примера, этот период времени составит $T = 2l/c$. Взяв проекции на ось x для равенства (4.32) получим зависимость для определения скорости после соударения

$$v_1 = \frac{1}{M} \int_0^{2l/c} P(t) dt - v_0.$$

С использованием ранее принятых обозначений, выражение для скорости получим в виде

$$v_1 = \left(\frac{3k^2}{1+3k+3k^2} \int_0^2 \tilde{P} d\tau - 1 \right) v_0. \quad (4.33)$$

Подставив в зависимость (4.33) значения параметров стержня из рассматриваемого примера: $k=1,989$ и $\int_0^2 \tilde{P} d\tau = 2,997$, окончательно получим

$$v_1 = 0,888v_0. \quad (4.34)$$

Так как в принятой модели (4.2) диссипативные силы не учитываются, то для абсолютно-упругого тела должно выполняться условие $v_1 = v_0$, не выполнение данного условия в равенстве (4.34), очевидно, не может быть объяснено погрешностью расчета, притом, что в пределе $k \rightarrow \infty$ и с учетом известного значения $\int_0^2 \tilde{P} d\tau = 2$ - для однородного стержня [343], равенство скоростей, очевидно, будет выполнено. Для выяснения причин потери кинетической энергии при ударе упругого стержня с осевой неоднородностью требуются детальные исследования механизма формирования волн деформаций при ударе.

4.1.2. Аналитическая методика моделирования динамических процессов при ударе гиперболического стержня

Результаты по данному исследованию представлены в статье [226]. В качестве математической модели объекта исследования принимаем упругий стержень гиперболической формы длиной l (рисунок 4.5). Диаметр внешнего контура в произвольном сечении такого стержня определяется зависимостью [160]

$$d(x) = \frac{d_0}{k - \frac{x}{l}(k-1)},$$

где $k = d_0 / D_0$, D_0, d_0 – соответственно диаметры большого и малого торцов.

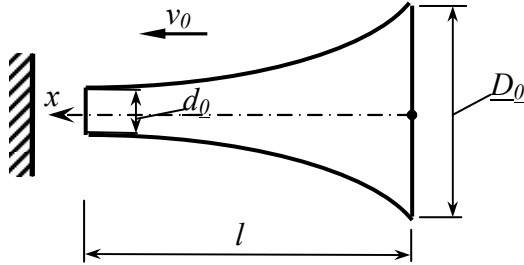


Рисунок 4.5. Схема удара гиперболического стержня о жесткий ограничитель.

Для исследования продольных колебаний $u(x, t)$ не обходимо решить задачу (4.2) с граничными условиями (4.20) и начальными условиями (4.21). Для рассматриваемого случая используем обозначения

$$F(z) = F_2 z^{-2}; \quad F_2 = \frac{\pi d_0^2}{4}; \quad z = (1-k)\frac{x}{l} + k.$$

Для случая свободных колебаний уравнение (4.2) примет вид

$$\frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{z^3} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tilde{\gamma}}{z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma l^2}{E(1-k)^2}. \quad (4.35)$$

Из первого начального условия выражение для перемещений будет аналогично (4.23). Дифференциальный оператор уравнения (4.2) является самосопряженным, таким образом функции $X_n(z)$ будут ортогональны с весом $\rho(z) = 1/z^2$ на отрезке $[k; 1]$ [17].

Для определения собственных значений задачи (4.35) получим уравнение

$$z^{-2} X_n'' - 2z^{-3} X_n' + \lambda_n^2 z^{-2} X_n = 0, \quad (4.36)$$

где $\lambda_n = \omega_n \sqrt{\tilde{\gamma}} = \frac{\omega_n l}{c(1-k)}$ – собственные значения.

Общее решение уравнения (4.36) для $\alpha = -2$ ($\nu = 3/2$) ищем в виде (4.9)

$$X_n(z) = z^{\frac{3}{2}} \left(C_1 J_{\frac{3}{2}}(\lambda_n z) + C_2 J_{-\frac{3}{2}}(\lambda_n z) \right), \quad (4.37)$$

Используя зависимости (4.10) получим

$$J_{\frac{3}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} - \cos \zeta\right); \quad J_{-\frac{3}{2}}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\cos \zeta}{\zeta} - \sin \zeta\right),$$

тогда выражение для собственных функций (4.37) получим в виде

$$X_n(z) = C_1(\sin \lambda_n z - \lambda_n z \cos \lambda_n z) + C_2(\cos \lambda_n z + \lambda_n z \sin \lambda_n z). \quad (4.38)$$

Если удовлетворить граничным условиям (4.20), то с учетом выражения для собственных функций (4.38) получим уравнение для нахождения собственных значений

$$\tan(\lambda_n(1-k)) = \lambda_n. \quad (4.39)$$

Тогда собственные функции можно представить в виде

$$\begin{aligned} X_n(z) &= \sin \lambda_n z - \lambda_n z \cos \lambda_n z - \tan \lambda_n k (\cos \lambda_n z + \lambda_n z \sin \lambda_n z) = \\ &= \frac{\sin(\lambda_n(z-k)) - \lambda_n z \cos(\lambda_n(z-k))}{\cos \lambda_n k}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Рассмотрим влияние параметра k на значение первого собственного числа частотного уравнения (4.39). Если ввести обозначение $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1(1-k)$, тогда первая собственная частота будет определяться зависимостью $\omega_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1 c}{l}$, которая аналогична уравнению для стержней постоянного сечения [264].

На графике рисунок 4.6 показана зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра относительного поперечного сечения k , на графике видим, что при значениях $k \rightarrow 1$, значение первой собственной частоты совпадает с частотой для сержня постоянного сечения $\lambda_1 = \pi/2 = 1,571$ [184]. Для приближенных методов расчета

на продольные колебания кривую 1 можно аппроксимировать, с достаточной точностью для технических расчетов, зависимостью

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\pi}{2} k^{0,45},$$

значение коэффициента в степени аргумента найдено при помощи встроенной процедуры программной среды MathCAD.

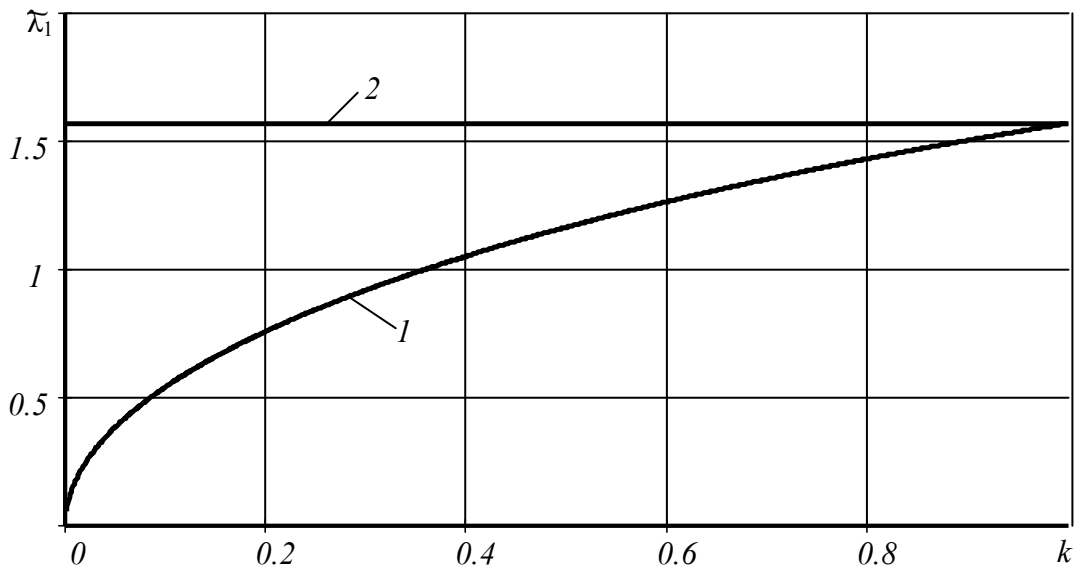


Рисунок 4.6. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от значения параметра относительного поперечного размера k :

- 1 – для стержня гиперболического очертания;
- 2 – для стержня цилиндрического очертания ($\lambda_1 = 1,571$).

Определив производные для собственных функций (4.40)

$$X'_n(z) = \frac{\lambda_n^2 z \sin(\lambda_n(z-k))}{\cos \lambda_n k},$$

с учетом зависимости (4.15) получим выражение для квадрата нормы собственных функций с учетом веса ($\rho(z) = 1/z^2$)

$$\Delta_n^2 = \frac{\lambda_n^2 (\sin^2(\lambda_n(1-k)) - k)}{2 \cos^2 \lambda_n k}. \quad (4.41)$$

Если удовлетворить второму начальному условию (4.21), тогда в выражении (4.23) коэффициенты A_n примут вид

$$A_n = -\frac{v_0 l \cos \lambda_n (1-k)}{c(1-k) \Delta_n^2 \cos \lambda_n k}. \quad (4.42)$$

Решение (4.23) при значениях коэффициентов (4.42) определяет упругие перемещения конструкции

$$u(z, t) = -\frac{v_0 l}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(\lambda_n (1-k))}{\lambda_n^2 (\sin^2(\lambda_n (1-k)) - k)} \times \\ \times (\sin(\lambda_n (z-k)) - \lambda_n z \cos(\lambda_n (z-k))) \sin \omega_n t.$$

Тогда напряжения будут определяться зависимостью

$$\sigma(z, t) = -E \frac{v_0 (1-k)}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(\lambda_n (1-k))}{\sin^2(\lambda_n (1-k)) - k} z \sin(\lambda_n (z-k)) \sin \omega_n t.$$

А выражение для усилия в ударном сечении получим в виде

$$P(t) = -EF_2 \frac{v_0 (1-k)}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\lambda_n (1-k)}{\sin^2 \lambda_n (1-k) - k} \sin \omega_n t. \quad (4.43)$$

Оценим эффективность гиперболического профиля относительно конического, сравнив усилия в ударном сечении для стержней с одинаковыми габаритами, то есть одинаковыми длиной и параметром соотношения торцов k . Для примера, возьмем параметры конических стержней для которых в работе [160] проведены расчеты с использованием метода Д'Аламбера. В качестве базовой модели был принят стержень с углом наклона конуса $\alpha = 0^\circ$, длиной $l=1$ м и диаметром ударного торца $d_0 = 0,025$ м, другие стержни имели

эквивалентный вес и углы наклона соответственно $0,5^\circ$; 1° ; 3° ; 6° и 9° . Для определения параметра k составим зависимости для массы стержня M и угла наклона конуса:

$$M = F_0 \gamma l_\alpha \frac{k^2 + k + 1}{3k^2} = F_0 \gamma l; \tan \alpha = d_0 \frac{1 - k}{2kl_\alpha},$$

где l_α – длина конического стержня, отсюда получаем формулу для нахождения k

$$k = \sqrt[3]{\frac{d_0}{6l \tan \alpha + d_0}}.$$

Таким образом, найдем для конусного стержня с углом наклона $\alpha = 6^\circ$ $k = 0.337$. На рисунке 4.7 представлен график относительной величины усилия

(4.43) в ударном сечении $\tilde{P} = -\frac{P}{EF_0} \frac{c}{v_0}$ в зависимости от безразмерного времени

$\tau = \frac{c}{l} t$. Из графика находим максимальное значение относительного усилия

$\tilde{P} = 3,9$, для конического стержня это значение составляет 4,88 [160], т.е. на 25% больше, но следует заметить, что масса гиперболического бойка будет на 43% меньше чем конического, что соответственно приведет к существенной экономии энергозатрат.

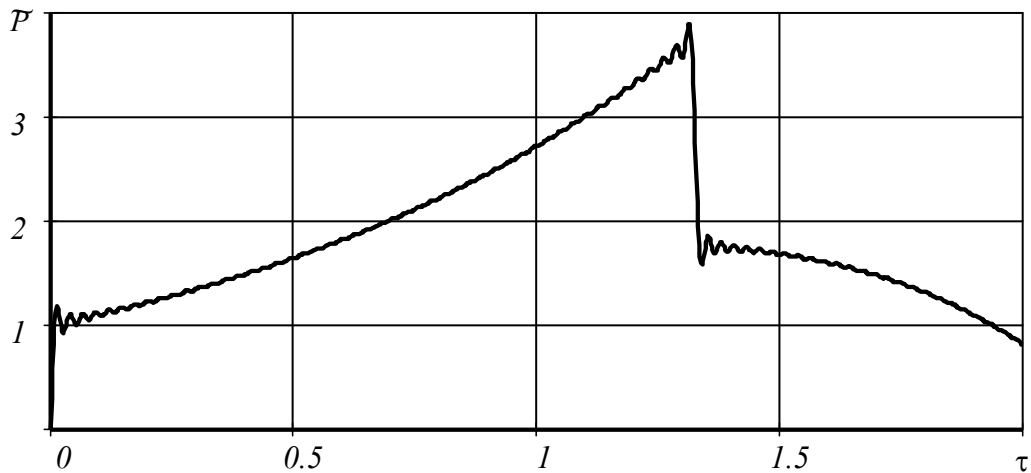
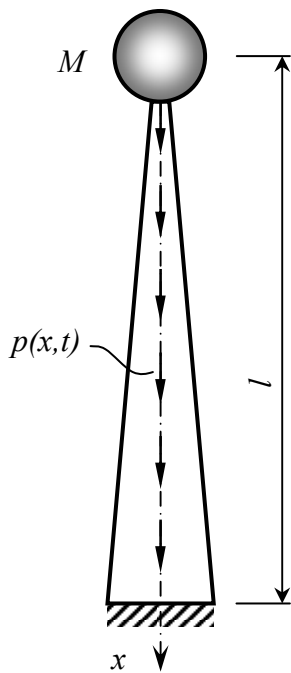


Рисунок 4.7. График изменения величины относительного усилия $\tilde{P}$.

4.1.3. Исследование неоднородной стержневой конструкции на собственные и вынужденные колебания при продольном ударе с учетом наличия сосредоточенной массы

Основные результаты исследования по данной задаче изложены в статье [352]. В качестве математической модели рассматриваемого объекта примем упругий полый стержень пирамидальной или конической формы длиной l (высота стойки) с массой M (масса оборудования) на верхнем конце (рисунок 4.8).

Для изучения продольных колебаний $u(x, t)$ такой системы, если выбрать



систему координат на верхнем конце стержня, нужно решить задачу (4.2) с граничными условиями

$$u(l, t) = 0; \quad M\ddot{u}(0, t) - EF(0)u'_x(0, t) = 0. \quad (4.44)$$

С начальными условиями

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = v_0 e(x), \quad (4.45)$$

где v_0 – скорость посадки конструкции.

Площадь поперечного сечения для полых конструкций пирамидальной (рисунок 4.1) и конической формы будет

$$F(x) = F_2 \left(\left(1 - \frac{d_1}{d_2} \right) \frac{x}{l} + \frac{d_1}{d_2} \right),$$

используем следующие обозначения

$$F(z) = \frac{F_2}{1+k} z; \quad m(z) = \frac{\gamma F_2}{1+k} z; \quad z = \frac{x}{l} + k; \quad k = \frac{d_1}{d_2 - d_1}.$$

Вначале рассмотрим случай свободных колебаний для рассматриваемых объектов уравнение (4.2) примет вид

Рисунок 4.8. Расчетная схема стойки с массой.

$$z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} = \tilde{\gamma} z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ где } \tilde{\gamma} = \frac{\gamma l^2}{E}. \quad (4.46)$$

Из первого начального условия (4.45) следует

$$u_1(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z) \sin \omega_n t, \quad (4.47)$$

где $u_1(z, t)$ – перемещения, вызванные сообщением системе скорости v_0 , A_n – произвольные постоянные, $X_n(z)$ – собственные функции соответствующих граничных задач, ω_n – частота собственных колебаний.

Дифференциальный оператор уравнения (4.46) является самосопряженным и, следовательно, функции $X_n(z)$ будут ортогональны с весом $\rho(z) = z$ на промежутке $[k; k+1]$ [17].

Для определения собственных функций задачи (4.46) получаем уравнение

$$zX_n'' + X_n + \lambda_n^2 zX_n = 0, \quad (4.48)$$

где $\lambda_n = \omega_n l / c$ – собственные значения.

Общее решение уравнения (4.48) находим в виде (4.8)

$$X_n(z) = C_1 J_0(\lambda_n z) + C_2 Y_0(\lambda_n z). \quad (4.49)$$

Если удовлетворить граничным условиям (4.44), то с учетом решения (4.49) получим уравнение для нахождения собственных значений

$$\begin{aligned} & \zeta \lambda_n \left(1 + \frac{1}{2k} \right) (Y_0(\lambda_n(1+k))J_0(\lambda_n k) - J_0(\lambda_n(1+k))Y_0(\lambda_n k)) + \\ & + (Y_1(\lambda_n k)J_0(\lambda_n(1+k)) - J_1(\lambda_n k)Y_0(\lambda_n(1+k))) = 0, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $\zeta = \frac{2M(1+k)}{\gamma F_2 l(1+2k)}$ - безразмерная масса.

Выражение для собственных функций представим в виде

$$X_n(z) = J_0(\lambda_n z) - \alpha_n Y_0(\lambda_n z), \quad \alpha_n = \frac{J_0(\lambda_n z_2)}{Y_0(\lambda_n z_2)}, \quad (4.51)$$

которые будут ортогональны с весом $\rho(z) = z + \zeta \frac{2+k}{2k} \delta(z-k)$, где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Оценим влияние безразмерных параметров k и ζ на значения первого собственного числа частотного уравнения (4.50) λ_1 (первой собственной частоты $\omega_1 = \lambda_1 c / l$).

На графике рисунок 4.9 показана зависимость λ_1 от величины параметра относительного поперечного размера k , при отсутствии сосредоточенной массы ($\zeta = 0$), 1 - для стержня переменного сечения; 2 – для стержня постоянного сечения ($\lambda_1 = 1,571$), из графика следует, что при значении $k > 4$, что соответствует соотношению размеров нижнего и верхнего оснований менее, чем 1,25:1, значение первой собственной частоты будет отличаться от частоты, полученной для модели стержня постоянного сечения, не более чем на 5%.

На графике рисунок 4.10 представлена зависимость λ_1 от коэффициента ζ , при $k = 4$ (1 – для весомого стержня; 2 – для невесомого стержня), из чего следует, что при $\zeta > 3$ первая собственная частота практически полностью определяется наличием сосредоточенной массы на свободном конце стержня, и может быть найдена из решения для одномассовой системы.

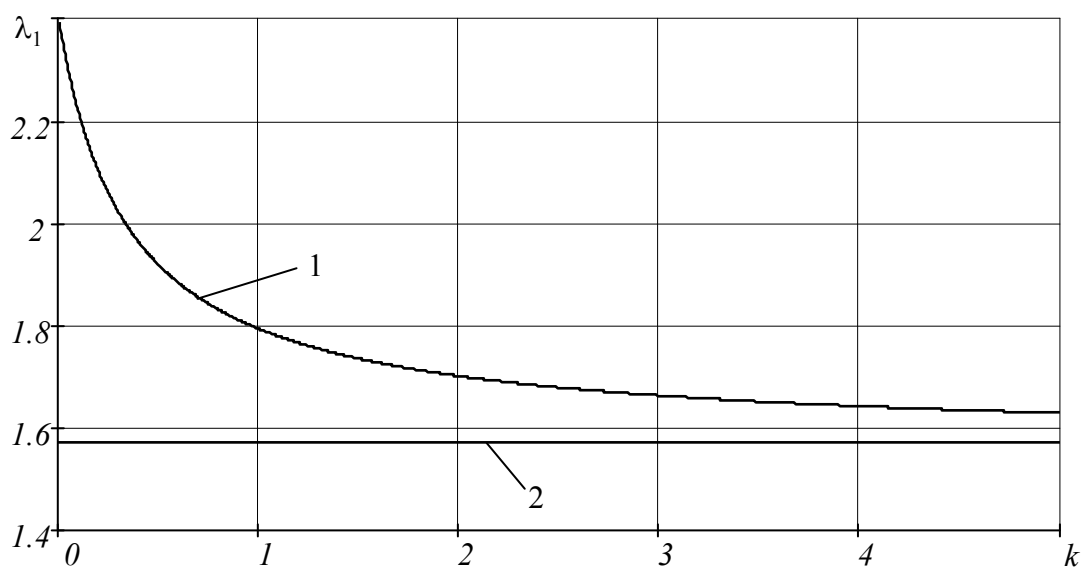


Рисунок 4.9. Зависимость первого собственного значения частотного уравнения от параметра относительного размера k .

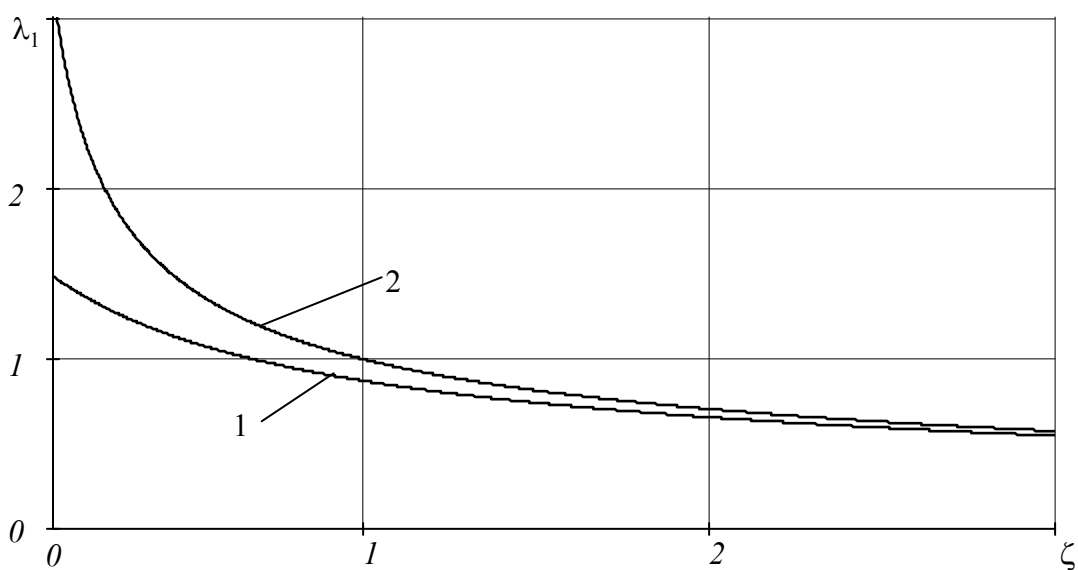


Рисунок 4.10. Зависимость первого собственного значения частотного уравнения от параметра относительной массы ζ .

Таким образом, если конструкция имеет параметры: $k > 4$ и $\zeta > 3$, то в качестве расчетной модели можно принимать невесомый стержень постоянного сечения с одной сосредоточенной массой.

На основании зависимости (4.15) квадрат нормы собственных функций с учетом веса будет определяться по формуле

$$\begin{aligned}\Delta_n^2 = & \frac{(k+1)^2}{2} \left((J_1(\lambda_n(k+1)) - \alpha_n Y_1(\lambda_n(k+1)))^2 + (J_0(\lambda_n(k+1)) - \alpha_n Y_0(\lambda_n(k+1)))^2 \right) - \\ & - \frac{k^2}{2} \left((J_1(\lambda_n k) - \alpha_n Y_1(\lambda_n k))^2 + (J_0(\lambda_n k) - \alpha_n Y_0(\lambda_n k))^2 \right) + \\ & + \zeta \frac{2+k}{2k} (J_0(\lambda_n k) - \alpha_n Y_0(\lambda_n k))^2.\end{aligned}\quad (4.52)$$

Если удовлетворить второму начальному условию (4.45), то в выражении (4.47) коэффициенты A_n примут вид

$$\begin{aligned}A_n = & \frac{v_0 \sqrt{\tilde{\gamma}}}{\lambda_n \Delta_n^2} \left(\frac{k+1}{\lambda_n} (J_1(\lambda_n(k+1)) - \alpha_n Y_1(\lambda_n(k+1))) - \frac{k}{\lambda_n} (J_1(\lambda_n k) - \alpha_n Y_1(\lambda_n k)) \right) + \\ & + \zeta \frac{2+k}{2k} (J_0(\lambda_n k) - \alpha_n Y_0(\lambda_n k)).\end{aligned}\quad (4.53)$$

Решение (4.47) при значениях коэффициентов (4.53) определяет упругие перемещения конструкции, при условии $p(x,t)=0$.

Кроме этого необходимо учесть решение на внезапное приложение веса конструкции, т.е. при $p(z,t) = \gamma g F_2 z / (1+k)$, g – ускорение свободного падения. Для этого требуется найти решение $u_2(z,t)$ неоднородного уравнения (4.17), которое для рассматриваемого случая примет вид

$$zu_2'' + u_2' - \tilde{\gamma} z \ddot{u}_2 = \beta z, \quad (4.54)$$

где $\beta = \frac{l^2 g}{c^2}$, с однородными начальными условиями $u_2(z,0) = \dot{u}_2(z,0) = 0$.

Решение уравнения (4.46) представим в виде ряда по собственным функциям (4.3). Если выражение (4.3) подставить в уравнение (4.54) и применить метод Фурье с учетом, что собственные функции ортогональны с весом, то для определения коэффициентов $w_n(t)$ получим уравнение

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = -\frac{A_n \lambda_n \beta c^3}{v_0 l^3}. \quad (4.55)$$

Решение уравнения (4.55) имеет вид

$$w_n(t) = -\frac{A_n \beta c}{\lambda_n v_0 l} (1 - \cos \omega_n t).$$

Тогда уравнение перемещений сечений стержня будет определяться зависимостью

$$u(z, t) = u_1(z, t) + u_2(z, t).$$

Введя обозначения: $\sigma_0 = \gamma g l (1 + \zeta) \frac{1 + 2k}{2(1 + k)}$ - напряжения от статической нагрузки в основании стержня;

$$B_n = \frac{k+1}{\lambda_n} (J_1(\lambda_n(k+1)) - \alpha_n Y_1(\lambda_n(k+1))) - \frac{k}{\lambda_n} (J_1(\lambda_n k) - \alpha_n Y_1(\lambda_n k)) + \\ + \zeta \frac{2+k}{2k} (J_0(\lambda_n k) - \alpha_n Y_0(\lambda_n k));$$

получаем соответственно зависимости для определения напряжений от скорости и от внезапного приложения нагрузки:

$$\sigma_1(z, t) = E \frac{v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Delta_n^2} (J_1(\lambda_n z) - \alpha_n Y_1(\lambda_n z)) \sin \omega_n t, \quad (4.56)$$

$$\sigma_2(z, t) = \sigma_0 \frac{2(1+k)}{(1+2k)(1+\zeta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda_n \Delta_n^2} (J_1(\lambda_n z) - \alpha_n Y_1(\lambda_n z)) (\cos \omega_n t - 1).$$

Представленный график безразмерных напряжений (4.56) $\tilde{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{E} \frac{c}{v_0}$ в

основании колонны от безразмерного времени $\tau = \frac{c}{4l} t$, которые возникают от внезапного приложения скорости, для случая $\zeta=0$, $k=1$, (рисунок 4.11) имеет существенное отличие от зависимости, полученной для стержней постоянного сечения [343], и характеризуется наличием экстремума в момент, когда напряжения меняют знак. На рисунок 4.12 представлен график изменения

безразмерных напряжений $\tilde{\sigma}_1$ по длине стержня, для случая $\zeta=0$, $k=1$, из которого следует, что в отличие от стержней постоянной жесткости, опасное сечение находится не в основании, а его положение определяется геометрическими параметрами конструкции и наличием сосредоточенной массы на конце.

Для случая внезапного приложения нагрузки, при отсутствии сосредоточенной массы, опасное сечение, как и для стержня постоянной жесткости, будет в основании опоры, при этом динамический коэффициент в зависимости от параметров конструкции будет принимать значения $1.83 \div 2$.

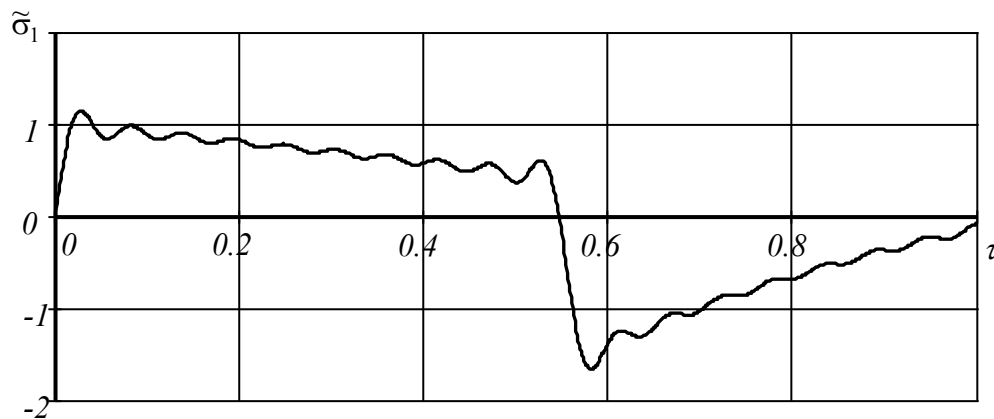


Рисунок 4.11. График изменения относительных напряжений в основании стойки от безразмерного времени.

Для случая внезапного приложения нагрузки, при отсутствии сосредоточенной массы, опасное сечение, как и для стержня постоянной жесткости, будет в основании опоры, при этом динамический коэффициент в зависимости от параметров конструкции будет принимать значения $1.83 \div 2$.

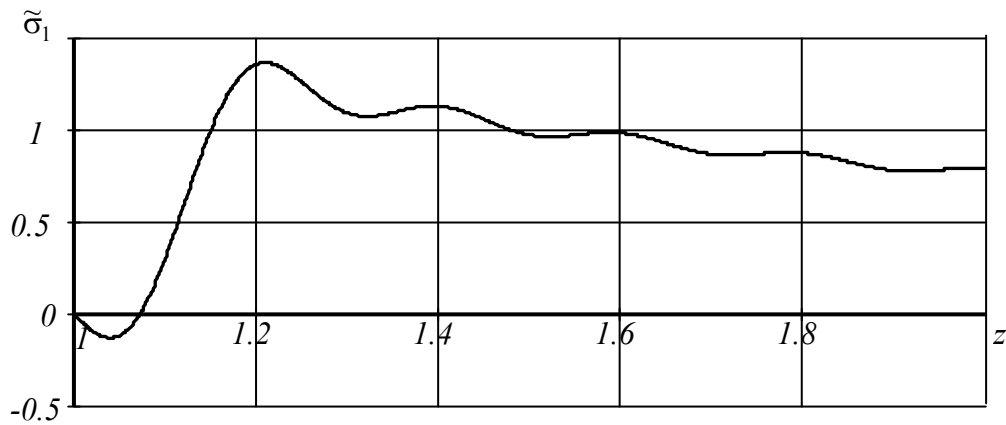


Рисунок 4.12. Эпюра относительных напряжений по длине стойки для момента времени $\tau=0,2$.

Как видно из рассмотренных примеров, получение расчетных зависимостей НДС стержней с непосредственным использованием решений (1.8, 1.9) является удобным только для относительно простых расчетных схем и объектов, для которых решение может быть представлено в элементарных функциях. В случае усложнения расчетной схемы, например при учете локализованных инерционных нагрузок, ступенчатом изменении осевой неоднородности и пр., а также построении решений на основе функций Бесселя, расчетные зависимости становятся весьма громоздкими, что снижает эффективность применения метода Фурье к решению данных задач.

4.2. Развитие и применение метода начальных параметров применительно к проблемам динамики продольных и крутильных колебаний неоднородных стержней

Для упрощения процесса получения расчетных зависимостей в инженерной практике широкое распространение нашел метод начальных параметров [276], основная идея которого заключена в поиске решений соответствующих граничных задач через силовые и деформационные параметры, заданные в начальной точке отсчета, вместо использования произвольных постоянных. Применим аналогичный подход для рассматриваемой задачи, т.е. выразим

постоянные интегрирования (4.8) через начальные условия при $z = k$, а именно продольное перемещение сечения при $x = 0$ для произвольной формы – u_{0n} и продольное усилие нулевого сечения для произвольной формы – N_{0n}

$$X_n(k) = k^\nu (C_1 J_\nu(\lambda_n k) + C_2 Y_\nu(\lambda_n k)) = u_{0n};$$

$$\frac{EF_2 k^{1-2\nu} (1-k)}{l} X'_n(k) = \frac{EF_2 \lambda_n k^{1-\nu} (1-k)}{l} (C_1 J_{\nu-1}(\lambda_n k) + C_2 Y_{\nu-1}(\lambda_n k)) = N_{0n}.$$

Из полученных соотношений находим произвольные постоянные C_1 и C_2

$$C_1 = \left(\frac{u_{0n}}{k^\nu} Y_{\nu-1}(\lambda_n k) - \frac{N_{0n} l}{EF_2 \lambda_n k^{1-\nu} (1-k)} Y_\nu(\lambda_n k) \right) \times$$

$$\times (J_\nu(\lambda_n k) Y_{\nu-1}(\lambda_n k) - J_{\nu-1}(\lambda_n k) Y_\nu(\lambda_n k))^{-1};$$

$$C_2 = \left(-\frac{u_{0n}}{k^\nu} J_{\nu-1}(\lambda_n k) + \frac{N_{0n} l}{EF_2 \lambda_n k^{1-\nu} (1-k)} J_\nu(\lambda_n k) \right) \times$$

$$\times (J_\nu(\lambda_n k) Y_{\nu-1}(\lambda_n k) - J_{\nu-1}(\lambda_n k) Y_\nu(\lambda_n k))^{-1}.$$

С учетом рекуррентного соотношения для функций Бесселя [48]

$$J_\nu(\zeta) Y_{\nu+1}(\zeta) - Y_\nu(\zeta) J_{\nu+1}(\zeta) = -\frac{2}{\pi \zeta}, \quad (4.57)$$

зависимость продольных перемещений для произвольной формы получим в виде

$$u_n(z) = X_n(z) = z^\nu \left(u_{0n} k^{-\nu} A(\lambda_n z) + \frac{N_{0n} l}{EF_2 (1-k)} \frac{k^{\nu-1}}{\lambda_n} B(\lambda_n z) \right), \quad (4.58)$$

соответственно выражение для усилий будет

$$N_n(z) = \frac{EF_2 (1-k)}{l} z^{1-2\nu} X'_n(z) =$$

$$= z^{1-\nu} \left(u_{0n} \frac{EF_2 (1-k)}{l} k^{-\nu} \lambda_n C(\lambda_n z) + N_{0n} k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \right), \quad (4.59)$$

здесь введены следующие обозначения для функций:

$$\begin{aligned}
A(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_v(\zeta) Y_{v-1}(\zeta_0) - Y_v(\zeta) J_{v-1}(\zeta_0)); \\
B(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_v(\zeta) J_v(\zeta_0) - J_v(\zeta) Y_v(\zeta_0)); \\
C(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \zeta_0 (J_{v-1}(\zeta) Y_{v-1}(\zeta_0) - Y_{v-1}(\zeta) J_{v-1}(\zeta_0)); \\
D(\zeta) &= \frac{\pi}{2} \zeta_0 (Y_{v-1}(\zeta) J_v(\zeta_0) - J_{v-1}(\zeta) Y_v(\zeta_0)),
\end{aligned} \tag{4.60}$$

здесь ζ_0 – значение аргумента в начальной точке отсчета

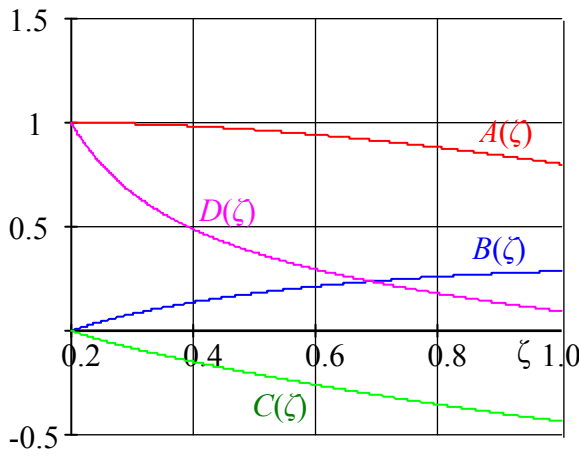


Рисунок 4.13. Графики функций (4.60) для значений $\nu = 0$; $\zeta_0 = 0.2$.

Для наглядности, графики функций (4.60) при значениях $\nu = 0$, $\zeta_0 = 0.2$ представлены на рисунке 4.13. С учетом зависимости (4.57) определим частные значения функций (4.60)

$$A(\zeta_0) = D(\zeta_0) = 1; B(\zeta_0) = C(\zeta_0) = 0. \tag{4.61}$$

Также для функций (4.60) можно получить соотношения, следующие из

свойств функций Бесселя [48]:

$$(z^\nu A(\lambda_n z))' = \lambda_n z^\nu C(\lambda_n z); (z^\nu B(\lambda_n z))' = \lambda_n z^\nu D(\lambda_n z), \tag{4.62}$$

штрихом обозначена производная по z , а с учетом уравнения (4.7), получим

$$\begin{aligned}
(z^\nu C(\lambda_n z))'_z &= (2\nu - 1)z^{\nu-1}C(\lambda_n z) - \lambda_n z^\nu A(\lambda_n z); \\
(z^\nu D(\lambda_n z))'_z &= (2\nu - 1)z^{\nu-1}D(\lambda_n z) - \lambda_n z^\nu B(\lambda_n z).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Подставляя выражение (4.58) в решение (4.3) получим зависимость для определения продольных перемещений

$$u(z, t) = z^v \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} k^{-v} A(\lambda_n z) + \frac{N_{0n} l}{EF_2(1-k)} \frac{k^{v-1}}{\lambda_n} B(\lambda_n z) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (4.64)$$

а с учетом (4.59) выражение для продольных усилий получим в виде

$$N(z, t) = z^{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} \frac{EF_2(1-k)}{l} k^{-v} \lambda_n C(\lambda_n z) + N_{0n} k^{v-1} D(\lambda_n z) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n). \quad (4.65)$$

Квадрат нормы собственных функций определяется зависимостью (4.15).

Рассмотрим примеры построения математических моделей НДС стержней для разных видов динамического воздействия на основе метода начальных параметров.

4.2.1. Применение метода начальных параметров к исследованию динамических процессов при продольном ударе неоднородного стержня

Результаты исследований по данной задаче представлены в статье [344]. Рассмотрим схему удара массы M по верхнему торцу стержня, при этом масса некоторое время удерживается стержнем, а нижний его конец жестко ограничен (рисунок 4.14), такая схема может моделировать напряженно-деформированное состояние в волноводах силовых импульсных систем или в сваях в процессе их забивки. Для данного примера используем следующие обозначения

$$m = \gamma F; \quad F = F_2 z^\alpha; \quad z = (1-k) \frac{x}{l} + k, \quad k = \frac{h_1}{h_2} \quad (0 < k < 1),$$

где γ – плотность материала, F_2 – площадь поперечного сечения большего основания стержня, h_1 и h_2 – параметры поперечных размеров верхнего и нижнего сечений, определяются геометрией сечения стержня (для конических конструкций – радиусы сечений), показатель степени α зависит от конфигурации

стержня (рисунок 4.1), в задаче для удобства вместо α будем использовать параметр $\nu = (1 - \alpha)/2$.

Для принятой схемы, перемещение нижнего торца будет $u_0 = 0$, граничное

условие на втором конце стержня

$$N(l, t) = -M\ddot{u}(l, t), \quad (4.66)$$

начальные условия

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = -v_0 e(x - l), \quad (4.67)$$

где $e(x)$ – единичная функция.

Для рассматриваемых граничных условий выражение перемещений и продольных усилий для произвольной формы в соответствии с (4.58, 4.59) будут

$$u_n(z) = \frac{N_0 l}{EF_2(1-k)} X_n = \frac{N_0 l}{EF_2(1-k)} \frac{k^{\nu-1}}{\lambda_n} z^\nu B(\lambda_n z);$$

$$N_n(z) = N_0 z^{1-2\nu} X'_n = N_0 z^{1-\nu} k^{\nu-1} D(\lambda_n z).$$

И граничного условия (4.66) получаем уравнение для

нахождения собственных значений

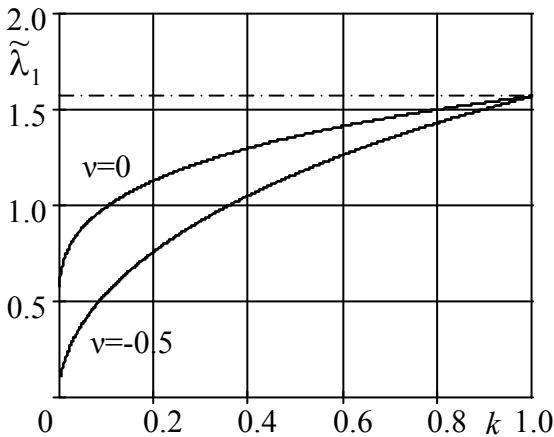


Рисунок 4.14. Схема продольного удара стержня сложной конфигурации.

$$D(\lambda_n) - \zeta \frac{1 - k^{2-2\nu}}{2(1-\nu)} \lambda_n B(\lambda_n) = 0, \quad (4.68)$$

здесь $\zeta = M / M_0$, M_0 – масса стержня.

С учетом того, что в некоторых приближенных методах динамического расчета [266, 117] используется значение первой собственной частоты, оценим влияние параметра k на значения первого собственного числа уравнения (4.68)

Рисунок 4.15. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра относительного поперечного размера k .

$$\omega_1 = \tilde{\lambda}_1 c / l, \quad \tilde{\lambda}_n = \lambda_n (1 - k),$$

аналогичным образом определяются частоты стержней постоянного сечения [192]. Численные исследования зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра k для стержней клиновидной формы ($\nu=0$) и конической формы ($\nu=-0,5$), без учета сосредоточенной массы ($\zeta = 0$), представлены на рисунке 4.15. Из графика видно, что для случая $k \approx 1$ величина $\tilde{\lambda}_1$ совпадает с известным значением $\tilde{\lambda}_1 = \pi / 2 \approx 1,571$ [192] (обозначено штрихпунктиром на графике рисунок 4.15).

С учетом наличия сосредоточенной массы на верхнем торце стержня (рисунок 4.14), собственные функции будут ортогональны с весом (4.16) $\rho(z) = z^{1-2\nu} + \zeta \frac{1-k^{2-2\nu}}{2(1-\nu)} \delta(z-1)$, где $\delta(z)$ – дельта функция Дирака. Тогда из соотношения (4.15) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2\lambda_n^2} \left(\left(1 + \zeta \frac{1-k^{2-2\nu}}{2(1-\nu)} \left(\zeta \frac{1-k^{2-2\nu}}{2(1-\nu)} \lambda_n^2 - 2\nu + 2 \right) \right) k^{2-2\nu} B^2(\lambda_n) - k^{2\nu} \right).$$

Вначале найдем перемещения и усилия от сообщения скорости. Из первого начального условия (4.67) следует

$$u_\nu(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n X_n(z) \sin \omega_n t. \quad (4.69)$$

Если удовлетворить второму начальному условию (4.67), то в выражении (4.69) коэффициенты Φ_n примут вид

$$\Phi_n = -\frac{\nu_0 l}{c} \zeta \frac{(1-k^{2-2\nu}) k^{\nu-1} B(\lambda_n)}{4(1-\nu)(1-k) \lambda_n^2 \Delta_n^2},$$

Зависимости для перемещений, усилий и напряжений получим в виде

$$\begin{aligned}
u_v(z, t) &= -\frac{v_0 l}{c} \zeta \frac{(1-k^{2-2v})k^{2v-2}}{4(1-v)(1-k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\lambda_n)}{\lambda_n^3 \Delta_n^2} z^v B(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \\
N_v(z, t) &= -\frac{v_0}{c} E F_2 \zeta \frac{(1-k^{2-2v})k^{2v-2}}{4(1-v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\lambda_n)}{\lambda_n^2 \Delta_n^2} z^{1-v} D(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \\
\sigma_v(z, t) &= -\frac{v_0}{c} E \zeta \frac{(1-k^{2-2v})k^{2v-2}}{4(1-v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\lambda_n)}{\lambda_n^2 \Delta_n^2} z^v D(\lambda_n z) \sin \omega_n t. \quad (4.70)
\end{aligned}$$

С учетом внезапного приложения веса Mg уравнение (4.19) получаем в виде

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = -\frac{Mg(1-k)}{\gamma F_2 l \Delta_n^2} X_n(1),$$

а его решение:

$$w_n(t) = -\frac{Mgl}{(1-k)EF_2} \frac{k^{v-1} B(\lambda_n)}{\Delta_n^2 \lambda_n^3} (1 - \cos \omega_n t).$$

Таким образом, в окончательном виде получим уравнения перемещений, усилий и напряжений от приложения нагрузки

– для стержней клиновидной формы ($v=0$)

$$u_p(z, t) = u_2 \frac{k^{2v-2}}{\ln k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\lambda_n)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} z^v B(\lambda_n z) (1 - \cos \omega_n t); \quad u_2 = -\frac{Mgl}{(1-k)EF_2} \ln k; \quad (4.71)$$

– для прочих случаев $v \neq 0$

$$u_p(z, t) = -u_2 \frac{2vk^{2v-2}}{(1-k^{2v})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\lambda_n)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} z^v B(\lambda_n z) (1 - \cos \omega_n t); \quad u_2 = \frac{Mgl(1-k^{2v})}{2v(1-k)EF_2}; \quad (4.72)$$

$$N_p(z, t) = -Mgk^{2v-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\lambda_n)}{\Delta_n^2 \lambda_n^3} z^{1-v} D(\lambda_n z) (1 - \cos \omega_n t);$$

$$\sigma_p(z, t) = -\frac{Mg}{F_2} k^{2v-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\lambda_n)}{\Delta_n^2 \lambda_n^3} z^v D(\lambda_n z) (1 - \cos \omega_n t). \quad (4.73)$$

Введем обозначения для безразмерных величин:

$\tau = \frac{t}{l} \sqrt{\frac{E}{\gamma}}$ – безразмерное время, $\tilde{\sigma}_v(z, t) = \frac{\sigma_v(z, t)c}{v_0 E}$; $\tilde{\sigma}_p(z, t) = \frac{\sigma_p(z, t)F_2}{Mg}$ –
 относительные напряжения (4.70, 473), $\tilde{u}_p(z, t) = \frac{u_p(z, t)}{u_2}$ – относительное
 перемещение (4.71, 4.72).

На рисунке 4.16 показаны зависимости напряжений $\tilde{\sigma}_v$ от времени τ , вызванных сообщением верхнему торцу стержня скорости от падающего груза ($\zeta = 0,5$) в ударном торце ($z = 1$) и на нижнем конце ($z = k$), для стержней клиновидной ($v = 0$) и конической ($v = -0,5$) формы, с отношением размеров верхнего и нижнего сечений соответственно: $k = 0,8$ и $k = 0,2$. Анализ усилий и напряжений для различных параметров схемы показал, что для стержней с уменьшением величины относительного поперечного размера k напряжения на нижнем торце увеличиваются, но не пропорционально уменьшению площади поперечного сечения, а в меньшей степени, т.е. усилие убывает. Таким образом, для волноводов силовых импульсных систем целесообразно использовать стержни постоянного сечения с заострением только в зоне рабочей части, применение стержней с убывающим сечением приведет к снижению эффективности передачи силового импульса в рабочую зону.

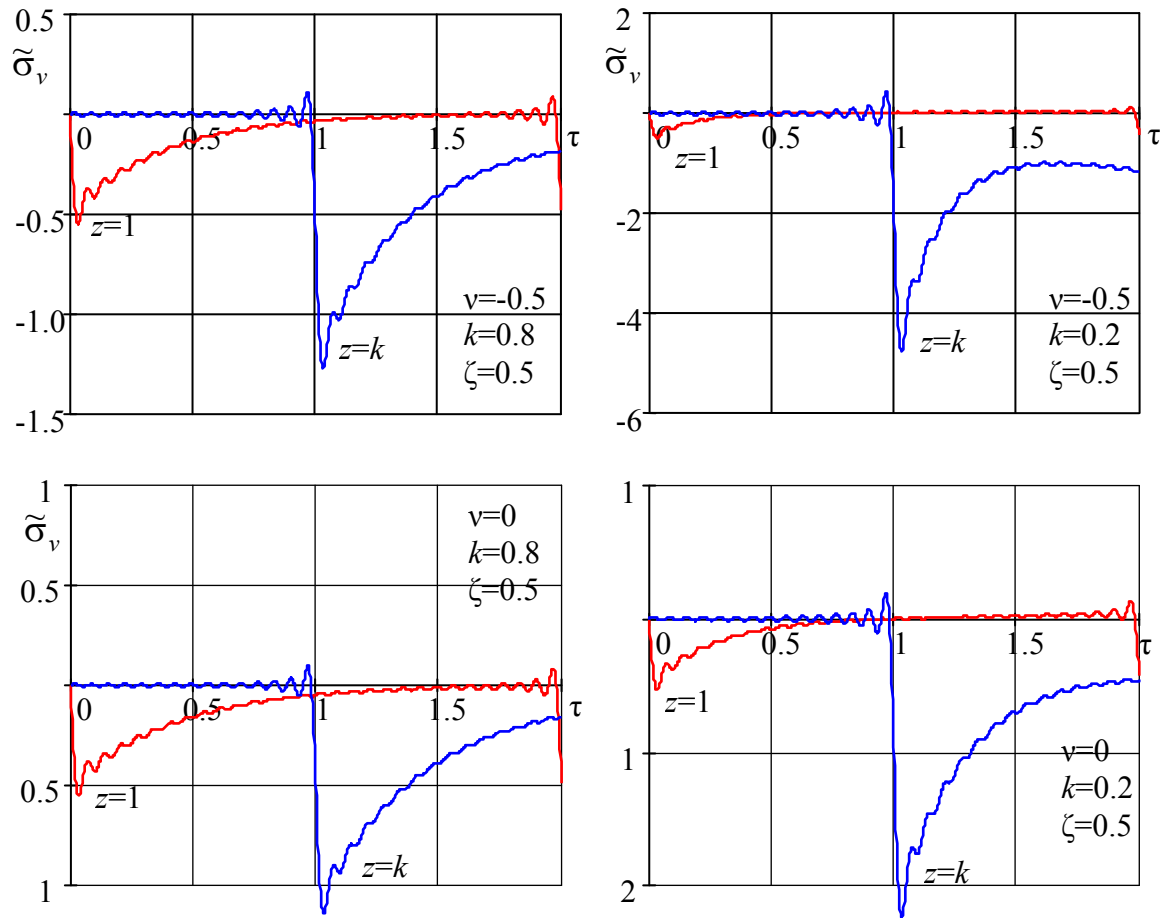


Рисунок 4.16. Относительная величина напряжений в торцевых сечениях стержней разных конфигураций от сообщения скорости.

На рисунке 4.17. представлены относительные перемещения $\tilde{u}_p$ и напряжения $\tilde{\sigma}_p$ в зависимости от времени τ , вызванные внезапным приложением к верхнему торцу стержня веса, падающей массы, для стержней клиновидной ($v = 0$) и конической ($v = -0,5$) формы, с отношением радиусов верхнего и нижнего сечений $k = 0,8$. Исследование показало, что разные параметры схемы не значительно влияют на значения максимальных относительных перемещений и усилий, напряжения в нижнем сечении увеличиваются практически пропорционально уменьшению площади сечения. Т.е. в системах, когда передача нагрузки осуществляет в основном за счет приложения силы, а не скорости, конфигурация волновода практически не будет влиять на эффективность передачи силового импульса.

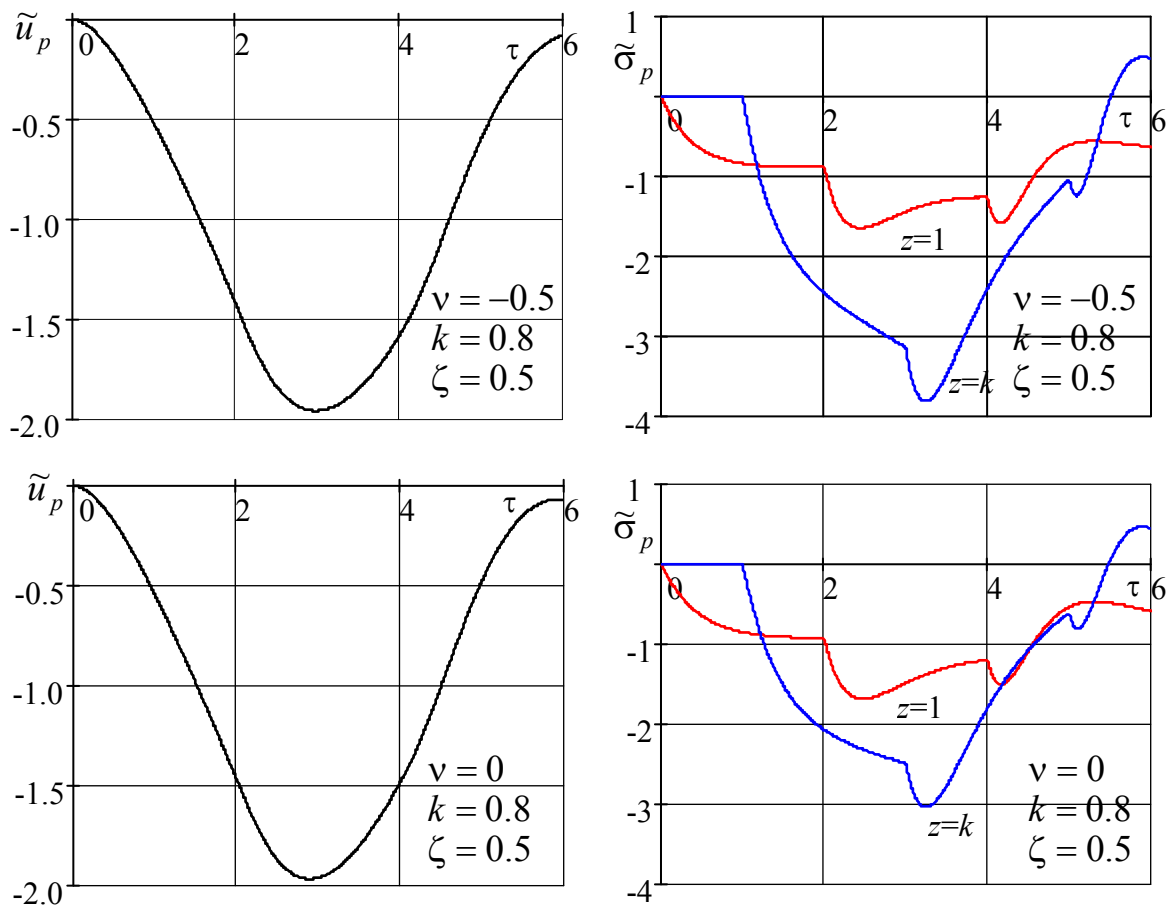


Рисунок 4.17. Относительные величины перемещений и напряжений в торцевых сечениях стержней разных конфигураций от внезапного приложения нагрузки.

4.2.2. Моделирование динамических процессов в конструкциях с осевой неоднородностью геометрических характеристик при крутильных колебаниях

Рассмотрим стержень длиной l на верхнем конце, которого находится локальная инерционная нагрузка с моментом инерции J_M , а нижний его конец жестко ограничен (рисунок 4.18). Рассмотрим случай внезапного нагружения стержня моментом M в верхнем сечении. Такая схема, в частности, может моделировать напряженно-деформированное состояние в конструкциях опор линий электропередач, возникающее в результате аварийной ситуации. Для случая крутильных колебаний в уравнении (4.1) продольное перемещение u заменяем углом поворота φ , продольную жесткость $EF(x)$ – крутильной $GJ_x(x)$,

линейную плотность $m(x)$ – моментом инерции единицы длины стержня $J_m(x)$, соответственно в правой части уравнения вместо интенсивности продольной нагрузки следует принять интенсивность крутящих моментов $p(x, t)$, тогда уравнение (4.1) примет вид [239]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_x(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - J_m(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (4.74)$$

Введем следующие обозначения для определения параметров конструкции

$$GJ_x = GJ_{x2} z^\alpha; \quad J_m = \gamma J_{x2} z^\alpha; \quad z = (1-k) \frac{x}{l} + k, \quad k = \sqrt[\alpha]{\frac{GJ_{x1}}{GJ_{x2}}} \quad (0 < k < 1),$$

где J_{x2} – момент инерции площади большего основания стержня; γ – плотность материала, показатель степени α зависит от конфигурации конструкции, в задаче для удобства вместо α будем использовать параметр $\nu = (1 - \alpha)/2$.

Для исследования параметров НДС конструкции необходимо решить граничную задачу (4.74)

$$M(0, t) - J_M \ddot{\varphi}(0, t) = 0; \quad \varphi(l, t) = 0, \quad (4.75)$$

с однородными начальными условиями

$$\varphi(x, 0) = 0; \quad \dot{\varphi}(x, 0) = 0. \quad (4.76)$$

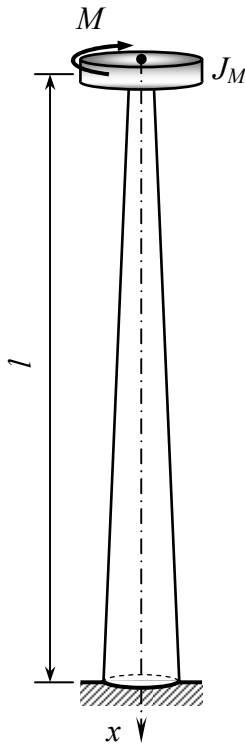


Рисунок 4.18.
Расчетная схема
стержневидной
конструкции с осевой
неоднородностью
крутильной жесткости

Решение уравнения (4.74) ищем в виде ряда (4.3). Собственные функции определим, используя метод начальных параметров (4.58, 4.59), тогда с учетом первого граничного условия (4.75) получим выражения углов поворота и крутящих моментов для произвольной гармоника

$$\varphi_n(z) = \varphi_{0n} \Phi_n = \varphi_{0n} z^\nu \left(k^{-\nu} A(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} B(\lambda_n z) \right); \quad (4.77)$$

$$M_n(z) = \varphi_{0n} G J_{x2} \frac{\lambda_n (1-k)}{l} z^{1-\nu} \left(k^{-\nu} C(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \right),$$

здесь $\xi = \frac{J_M(1-k)}{\gamma J_{x2} l}$ – относительный момент инерции, $\lambda_n = \frac{\omega_n l}{(1-k)c}$ – собственные

значения частотного уравнения, ω_n – собственные частоты, $c = \sqrt{G/\gamma}$ – скорость распространения крутильных волн в стержне [87].

Из второго граничного условия (4.75) получаем уравнение для нахождения собственных значений

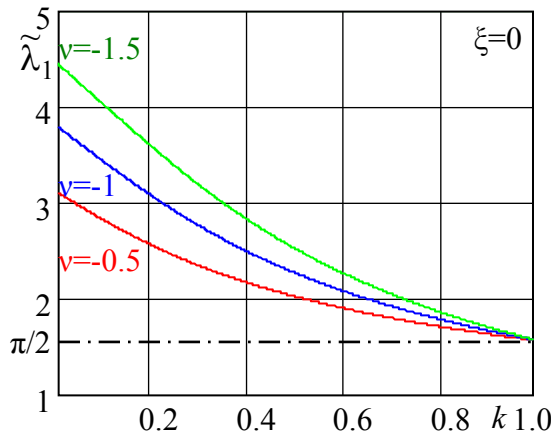


Рисунок 4.19. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра относительного поперечного размера k

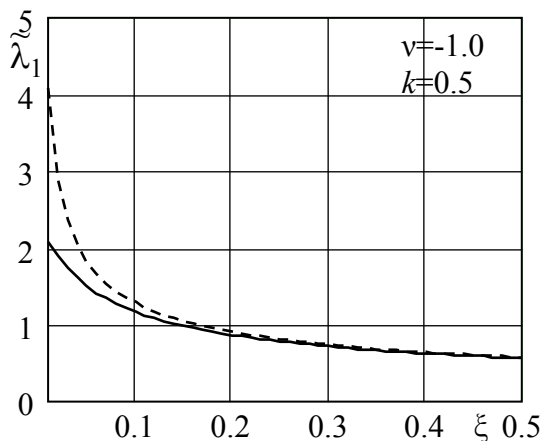


Рисунок 4.20. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от относительного момента инерции ξ

$$A(\lambda_n) - \xi \lambda_n k^{2\nu-1} B(\lambda_n) = 0. \quad (4.78)$$

Оценим влияние параметра k на значения первого собственного числа уравнения (4.68)

$$\omega_1 = \tilde{\lambda}_1 c / l, \quad \tilde{\lambda}_n = \lambda_n (1-k),$$

аналогичным образом определяются частоты для стержней постоянного сечения [192]. Численные исследования

зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра k для пирамидальной каркасной конструкции ($\nu = -0,5$), конического полого ($\nu = -1,0$) и сплошного ($\nu = -1,5$) стержней, без учета сосредоточенной массы ($\xi = 0$), представлены на рисунке 4.19. Из графика видно, что для случая $k \approx 1$ величина $\tilde{\lambda}_1$

совпадает с известным значением $\tilde{\lambda}_1 = \pi/2 \approx 1,571$ [192] (обозначено

штрихпунктирном на графике рисунок 4.19).

На графике рисунок 4.20 представлена зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины локальной инерционной нагрузки ξ , для параметров стержня $\nu = -1$; $k = 0,5$, пунктиром показана зависимость для упрощенной модели конструкции с одной степенью свободы [264, 117]

$$\lambda = \frac{\omega l}{c} = \sqrt{\frac{2\nu(1-k)^2}{\xi(1-k^{2\nu})}}. \quad (4.79)$$

Анализ результатов расчета собственных чисел для разных параметров (ν , k , ξ) показал, что различие значений величины λ по зависимости (4.79) и первого корня уравнения (4.78) – λ_1 наиболее существенно для стержней имеющих относительный поперечный размер $k = 0,4 \div 0,8$, при этом для рассматриваемых объектов различие не превышает 5% при значениях $\xi > 0,5$.

С учетом наличия инерционной нагрузки на верхнем торце стержня (рисунок 4.18), собственные функции будут ортогональны с весом $\rho(z) = z^{1-2\nu} + \xi \delta(z-k)$, где $\delta(z)$ – дельта функция Дирака. Тогда из соотношения (4.15) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2} \left(k^{-\nu} C(\lambda_n) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n) \right)^2 - \frac{\xi}{2} \left(\xi \lambda_n^2 k^{2\nu} + 2\nu - 2 \right) - \frac{k^{2-2\nu}}{2}.$$

Для случая внезапного приложения момента M в сечении $z = k$ требуется найти общее решение уравнения, которое в соответствии с (4.19) будет иметь вид

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = - \frac{M(1-k)}{\gamma J_{x2} l \Delta_n^2} \Phi_n(k). \quad (4.79)$$

С учетом начальных условий (4.76) общее решение уравнения (4.79) будет

$$w_n(t) = - \frac{Ml}{(1-k)GJ_{x2} \Delta_n^2 \lambda_n^2} (1 - \cos \omega_n t).$$

Таким образом, в окончательном виде получим уравнения углов поворота и крутящих моментов:

$$\varphi(z, t) = -\varphi_0 \frac{2\nu z^\nu}{1 - k^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n^2} \left(k^{-\nu} A(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} B(\lambda_n z) \right) (1 - \cos \omega_n t);$$

$$M(z, t) = -Mz^{1-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n} \left(k^{-\nu} C(\lambda_n z) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n z) \right) (1 - \cos \omega_n t),$$

где $\varphi_0 = \frac{Ml(1 - k^{2\nu})}{2\nu GJ_{x2}(1 - k)}$ – статический угол закручивания моментом M .

Введем обозначения для безразмерного времени $\tau = \frac{c}{l}t$, тогда выражения для динамических коэффициентов угла закручивания верхнего торца стержня K_φ и крутящего момента в заделке K_M получим в виде

$$K_\varphi(\tau) = -\frac{2\nu k^\nu}{1 - k^{2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n^2} \left(k^{-\nu} A(\lambda_n k) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} B(\lambda_n k) \right) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n \tau); \quad (4.80)$$

$$K_M(\tau) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n} \left(k^{-\nu} C(\lambda_n) - \xi \lambda_n k^{\nu-1} D(\lambda_n) \right) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n \tau). \quad (4.81)$$

На рисунке 4.21 представлены графики зависимостей (4.80) и (4.81) из которых видим, что характер поведения и максимальные значения динамических коэффициентов при отсутствии инерционного момента ($\xi = 0$) существенно отличаются от известных решений аналогичной задачи для вала однородной структуры [264] для которого максимальные значения коэффициентов равны 2-м. При значениях параметров конструкции: $\nu = -1$, $k = 0,5$ численно из выражений (4.80), (4.81) получим $K_{\varphi \max} = 1,47$, $K_{M \max} = 5,84$.

На рисунке 4.22 представлены графики динамических коэффициентов (4.80), (4.81) при наличии локальной инерционной нагрузки для параметров конструкции: $\nu = -1$, $k = 0,5$, $\xi = 0,2$, пунктиром показаны динамические коэффициенты для невесомого упругого стержня с одной степенью свободы, полученные известным способом [117]

$$\bar{K}_\varphi(\tau) = -(1 - \cos \lambda \tau); \quad \bar{K}_M(\tau) = 1 - \xi \lambda^2 \frac{1 - k^{2\nu}}{2\nu(1 - k)^2} \cos \lambda \tau.$$

Из графиков (рисунок 4.22) видим, что упрощенная модель дает достаточную точность расчета при наличии определенной величины локальной инерционной нагрузки. При этом очевидно, что метод приведения масс не отражает реальную картину динамического процесса, в случае отсутствия сосредоточенных инерционных нагрузок.

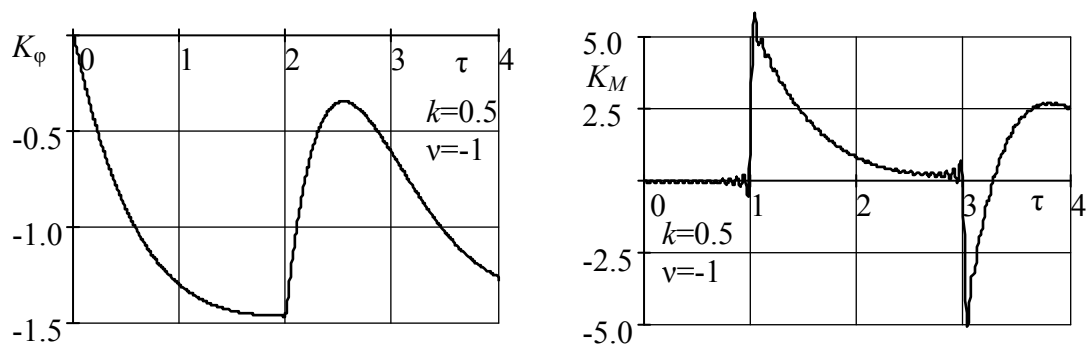


Рисунок 4.21. Зависимость динамических коэффициентов угла закручивания свободного конца стержня и момента в заделке от безразмерного времени при отсутствии инерционного момента ($\xi=0$)

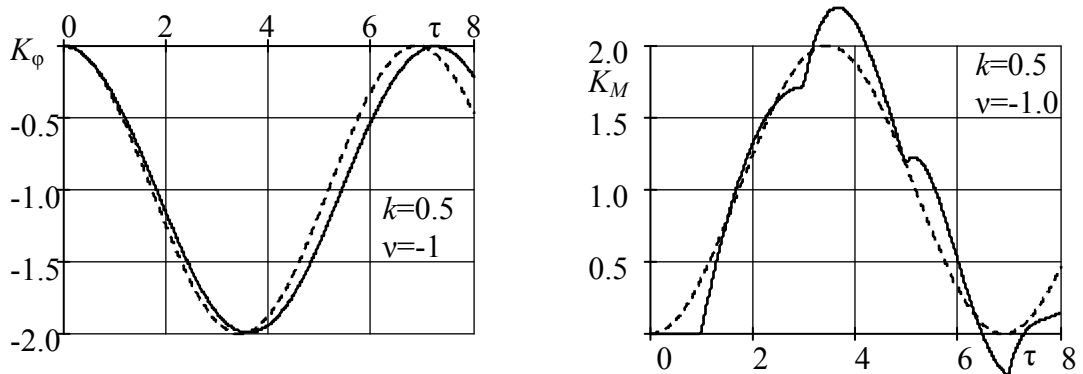


Рисунок 4.22. Зависимость динамических коэффициентов угла закручивания свободного конца стержня и момента в заделке от безразмерного времени при наличии инерционного момента ($\xi=0.2$)

Полученные решения можно использовать непосредственно для исследования параметров НДС некоторых конструкций, а также для проверки адекватности тестовых примеров в программных комплексах имитационного

моделирования или для обоснования выбора упрощенных моделей и методов расчета.

4.3. Получение и применение асимптотических представлений для собственных функций граничных задач динамики неоднородных стержней

При решении задач динамики методом Фурье ключевым этапом является определение спектра собственных частот путем численного решения частотного уравнения соответствующей граничной задачи. Используя представление функций Бесселя в виде ряда по возрастающим степеням [48], реализация поиска нескольких первых корней частотных уравнений не представляет труда в любой программной среде. Однако нахождение последующих корней может стать проблематичным вследствие ухудшения сходимости ряда для больших значений аргумента. Решить данную проблему, а также разработать алгоритм численного решения частотного уравнения можно используя асимптотическое разложение собственных функций.

Известные асимптотические разложения функций Бесселя имеют вид [48]:

$$\begin{aligned}
 J_\nu(z) &\approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m)}{(2z)^{2m}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}} \right); \\
 Y_\nu(z) &\approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m)}{(2z)^{2m}} + \right. \\
 &\quad \left. + \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}} \right),
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

где начальные члены разложения определяются следующим образом

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (v, 2m)}{(2z)^{2m}} = 1 - \frac{(4v^2 - 1^2)(4v^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} +$$

$$+ \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 3^2)(4v^2 - 5^2)(4v^2 - 7^2)}{4!(8z)^4} - \dots;$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (v, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}} = \frac{4v^2 - 1}{1!8z} - \frac{(4v^2 - 1)(4v^2 - 3^2)(4v^2 - 5^2)}{3!(8z)^3} + \dots$$

С учетом того, что речь идет о больших значениях аргумента, подставив выражения (4.82) в зависимости (4.60) и отбросив члены ряда, которые содержат в знаменателе аргумент второй степени и выше, получим первые члены асимптотического разложения функций (4.60)

$$A(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\cos(\zeta - \zeta_0) + \sin(\zeta - \zeta_0) \left(\frac{4(v-1)^2 - 1}{8\zeta_0} - \frac{4v^2 - 1}{8\zeta} \right) \right);$$

$$B(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\sin(\zeta - \zeta_0) - \cos(\zeta - \zeta_0) \frac{4v^2 - 1}{8\zeta\zeta_0} (\zeta - \zeta_0) \right);$$

$$C(\zeta) = -\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\sin(\zeta - \zeta_0) - \cos(\zeta - \zeta_0) \frac{4(v-1)^2 - 1}{8\zeta\zeta_0} (\zeta - \zeta_0) \right);$$

$$D(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \left(\cos(\zeta - \zeta_0) + \sin(\zeta - \zeta_0) \left(\frac{4v^2 - 1}{8\zeta_0} - \frac{4(v-1)^2 - 1}{8\zeta} \right) \right). \quad (4.83)$$

Рассмотрим основные виды граничных условий.

4.3.1. Асимптотика собственных функций для стержня со свободными концами

Граничные условия для данного случая имеют вид:

$$N(k, t)|_{x=0} = 0; \quad N(1, t)|_{x=l} = 0. \quad (4.84)$$

В этом случае в соответствии с (4.58) собственная функция будет иметь вид

$$X_n(z) = u_{0n} z^v k^{-v} A(\lambda_n z). \quad (4.85)$$

Из второго граничного условия (4.84) следует частотное уравнение

$$C(\lambda_n) = 0. \quad (4.86)$$

Подставив выражение функции $C(\zeta)$ из (4.83) в уравнение (4.86), и введя замену $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n(1-k) \left(\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\gamma}} \right)$, получим

$$\tilde{\lambda}_n \tan \tilde{\lambda}_n = \frac{4(v-1)^2 - 1}{8k} (1-k)^2. \quad (4.87)$$

Из формулы (4.87) следует структура собственных значений рассматриваемой граничной задачи при больших n

$$\tilde{\lambda}_n = \alpha_n + \pi n, \quad (4.88)$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если подставить выражение (4.88) в формулу (4.87) и учесть, что $\tan \alpha_n \approx \alpha_n$, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка относительно α_n получаем асимптотическую формулу

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\pi n)^2 + \frac{4(v-1)^2 - 1}{2k} (1-k)^2} + \pi n \right). \quad (4.89)$$

Следует отметить, что для однородного стержня с такими же граничными условиями собственные значения $\tilde{\lambda}_n = \pi n$ [79].

В таблице 4.1. приведены результаты расчета собственных значений, полученные из численного решения точного уравнения (4.86) и по асимптотической формуле (4.89) для стержней с различными геометрическими параметрами

Таблица 4.1.

Собственные значения первых форм колебаний свободного стержня

Форма очертания стержня	Отношение торцевых размеров, k	Расчетная зависимость	Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$, для соответствующего номера формы				
			1	2	3	4	5
Цилиндрический ($\nu = 1/2$)	1	$\tilde{\lambda}_n = \pi n$	3,142	6,283	9,425	12,57	15,71
Гиперболический ($\nu = 3/2$)	$0 \div 1$	(4.86)	3,142	6,283	9,425	12,57	15,71
		(4.89)	3,142	6,283	9,425	12,57	15,71
Клиновидный ($\nu = 0$)	0,01	(4.86)	3,795	6,949	10,01	13,2	16,33
		(4.89)	7,833	9,97	12,39	15,01	17,78
	0,1	(4.86)	3,547	6,598	9,674	12,77	15,88
		(4.89)	3,917	6,734	9,737	12,8	15,9
	0,5	(4.86)	3,197	6,312	9,444	12,58	15,72
		(4.89)	3,2	6,313	9,445	12,58	15,72
Конический ($\nu = -1/2$)	0,01	(4.86)	4,449	7,648	10,8	13,93	17,05
		(4.89)	11,6	13,53	15,68	18,01	20,49
	0,1	(4.86)	4,07	7,062	10,07	13,1	16,16
		(4.89)	4,822	7,381	10,22	13,18	16,21
	0,5	(4.86)	3,286	6,361	9,477	12,61	15,74
		(4.89)	3,293	3,362	9,478	12,61	15,74

На графике рисунок 4.23 показаны три первых собственных формы продольных деформаций (4.85) и соответствующих им усилий для стержня клиновидной формы ($\nu = 0$) с отношением площадей торцевых сечений $k = 0,1$, сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (4.60), пунктирными линиями показана их асимптотика (4.83).

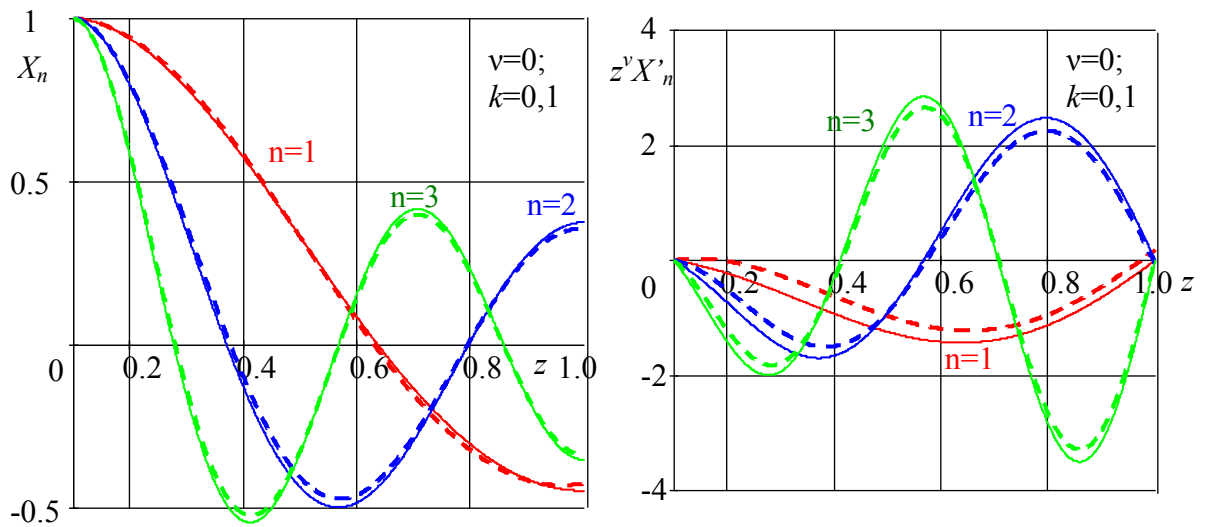


Рисунок 4.23. Первые три собственные формы продольных деформаций и усилий клиновидного стержня со свободными концами

4.3.2. Асимптотика собственных функций для стержня с жестко-закрепленными концами

Граничные условия для данного случая имеют вид:

$$u(k, t)|_{x=0} = 0; \quad u(1, t)|_{x=l} = 0. \quad (4.90)$$

В этом случае в соответствии с (4.58) собственная функция будет иметь вид

$$X_n(z) = \frac{N_{0n} l}{EF_2} \frac{k^{v-1}}{\lambda_n (1-k)} z^v B(\lambda_n z). \quad (4.91)$$

Из второго граничного условия (4.90) следует частотное уравнение

$$B(\lambda_n) = 0. \quad (4.92)$$

Подставив выражение функции $B(\zeta)$ из (4.83) в уравнение (4.92), и введя замену $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n(1-k) \left(\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\gamma}} \right)$, получим

$$\tilde{\lambda}_n \tan \tilde{\lambda}_n = \frac{4\nu^2 - 1}{8k} (1-k)^2. \quad (4.93)$$

Аналогично предыдущему случаю получим асимптотическую формулу

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{(\pi n)^2 + \frac{4\nu^2 - 1}{2k} (1-k)^2} + \pi n \right). \quad (4.94)$$

Для однородного стержня с такими же граничными условиями собственные значения $\tilde{\lambda}_n = \pi n$ [79].

В таблице 4.2. приведены результаты расчета собственных значений, полученные из численного решения точного уравнения (4.92) и по асимптотической формуле (4.94) для стержней с различными геометрическими параметрами.

На графике рисунок 4.24 показаны три первых собственных формы продольных деформаций (4.91) и соответствующих им усилий для стержня клиновидной формы ($\nu = 0$) с отношением площадей торцевых сечений $k = 0,1$, сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (4.60), пунктирными линиями показана их асимптотика (4.83).

Собственные значения первых форм колебаний жестко зашечленного
стержня по краям

Форма очертания стержня	Отношение торцевых размеров, k	Расчетная зависимость	Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$, для соответствующего номера формы				
			1	2	3	4	5
Цилиндрический ($\nu = 1/2$)	1	$\tilde{\lambda}_n = \pi n$	3,142	6,283	9,425	12,57	15,71
Гиперболический ($\nu = 3/2$)	0,01	(4.92)	4,449	7,648	10,8	13,93	17,05
		(4.94)	11,6	13,53	15,68	18,01	20,49
	0,1	(4.92)	4,07	7,062	10,06	13,1	16,16
		(4.94)	4,822	7,381	10,22	13,18	16,21
	0,5	(4.92)	3,286	6,36	9,477	12,61	15,74
		(4.94)	3,293	6,362	9,478	12,61	15,74
Клиновидный ($\nu = 0$)	0,01	(4.92)	2,773	5,951	9,122	12,29	15,45
		(4.94)	-	-	7,868	11,5	14,89
	0,1	(4.92)	2,983	6,172	9,34	12,5	15,65
		(4.94)	2,777	6,118	9,316	12,49	15,64
	0,5	(4.92)	3,123	6,273	9,418	12,56	15,7
		(4.94)	3,122	6,273	9,418	12,56	15,7
Конический ($\nu = -1/2$)	0 ÷ 1	(4.92)	3,142	6,283	9,425	12,57	15,71
		(4.94)	3,142	6,283	9,425	12,57	15,71

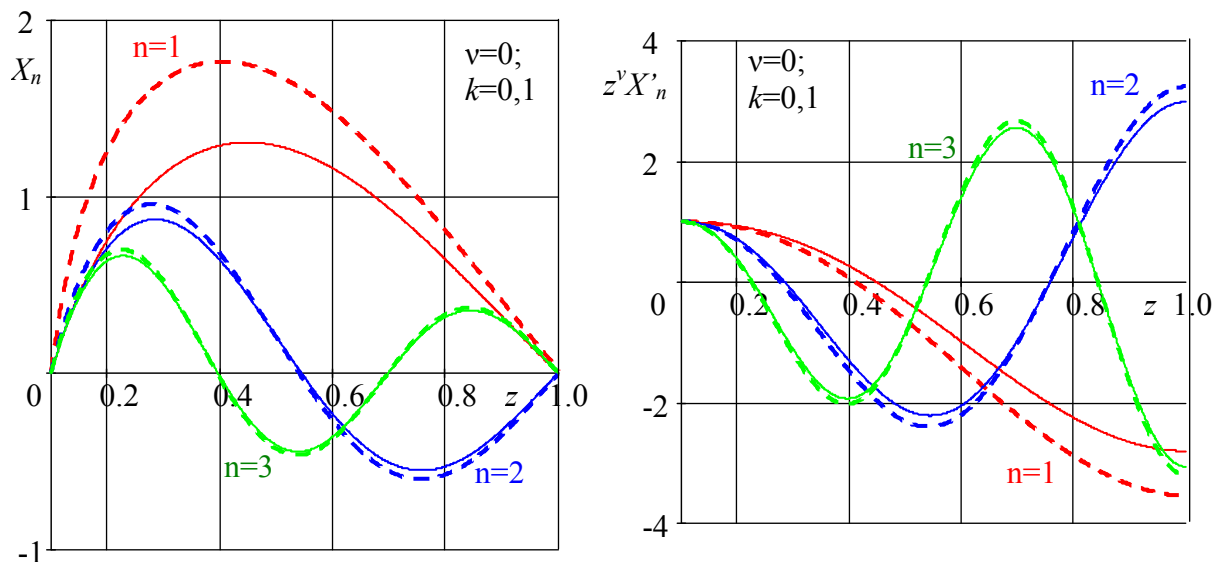


Рисунок 4.24. Первые три собственные формы продольных деформаций и усилий клиновидного стержня с зашечленными концами

4.3.3. Асимптотика собственных функций для стержня ограниченного по малому основанию

Граничные условия для данного случая имеют вид:

$$u(k, t)|_{x=0} = 0; \quad N(1, t)|_{x=l} = 0. \quad (4.95)$$

В этом случае в соответствии с (4.58) собственная функция будет иметь вид (4.91), а частотное уравнение из второго граничного условия (4.95) будет

$$D(\lambda_n) = 0. \quad (4.96)$$

Подставив выражение функции $D(\zeta)$ из (4.83) в уравнение (4.96) с заменой

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n(1-k) \left(\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\gamma}} \right), \text{ получим}$$

$$\frac{\tan \tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n} = - \frac{8k}{(4v^2 - 1 - (4(v-1)^2 - 1)k)(1-k)}. \quad (4.97)$$

Из формулы (4.97) следует структура собственных значений рассматриваемой граничной задачи при больших n

$$\tilde{\lambda}_n = \alpha_n + \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad (4.98)$$

где $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если подставить выражение (4.98) в формулу (4.97) и учесть, что $\tan \alpha_n \approx \alpha_n$, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка относительно α_n получаем асимптотическую формулу

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2} (2n-1) \right)^2 + \left(4v^2 - 1 - \left(4(v-1)^2 - 1 \right) k \right) \frac{(1-k)}{2k}} + \frac{\pi}{2} (2n-1) \right). \quad (4.99)$$

Для однородного стержня с аналогичными граничными условиями собственные значения $\tilde{\lambda}_n = \frac{\pi}{2} (2n-1)$ [266].

В таблице 4.3. приведены результаты расчета собственных значений, полученные из численного решения точного уравнения (4.96) и по асимптотической формуле (4.99) для стержней с различными геометрическими параметрами

Таблица 4.3.

Собственные значения первых форм колебаний стержня защемленного по меньшему основанию, при $v < 1/2$, по большему основанию, при $v > 1/2$

Форма очертания стержня	Отношение торцевых размеров, k	Расчетная зависимость	Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$, для соответствующего номера формы				
			1	2	3	4	5
Цилиндрический ($v = 1/2$)	1	$\tilde{\lambda}_n = \frac{\pi}{2} (2n-1)$	1,571	4,712	7,854	11	14,14
Гиперболический ($v = 3/2$)	0,01	(4.96)	3,11	6,22	9,331	12,44	15,55
		(4.99)	10,77	12,58	14,62	16,87	19,27
	0,1	(4.96)	2,836	5,717	8,659	11,65	14,69
		(4.99)	3,877	6,171	8,869	11,76	14,75
	0,5	(4.96)	2,029	4,913	7,979	11,09	14,21
		(4.99)	2,057	4,916	7,979	11,09	14,21
Клиновидный ($v = 0$)	0,01	(4.86)	0,71	4,247	7,471	10,66	13,83
		(4.89)	-	-	5,563	9,679	13,17
	0,1	(4.86)	0,992	4,481	7,699	10,88	14,04
		(4.89)	-	4,378	7,663	10,86	14,03
	0,5	(4.86)	1,361	4,646	7,814	10,97	14,12
		(4.89)	1,337	4,645	7,814	10,97	14,12
Конический ($v = -1/2$)	0,01	(4.86)	0,173	4,496	7,727	10,91	14,07
		(4.89)	-	4,492	7,726	10,91	14,07
	0,1	(4.86)	0,542	4,516	7,738	10,91	14,07
		(4.89)	-	4,513	7,738	10,91	14,07
	0,5	(4.86)	1,166	4,604	7,79	10,95	14,1
		(4.89)	1,127	4,604	7,79	10,95	14,1

На графике рисунок 4.25 показаны три первых собственных формы продольных деформаций (4.91) и соответствующих им усилий для стержня клиновидной формы ($\nu = 0$) с отношением площадей торцевых сечений $k = 0,1$, сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (4.60), пунктирными линиями показана их асимптотика (4.83).

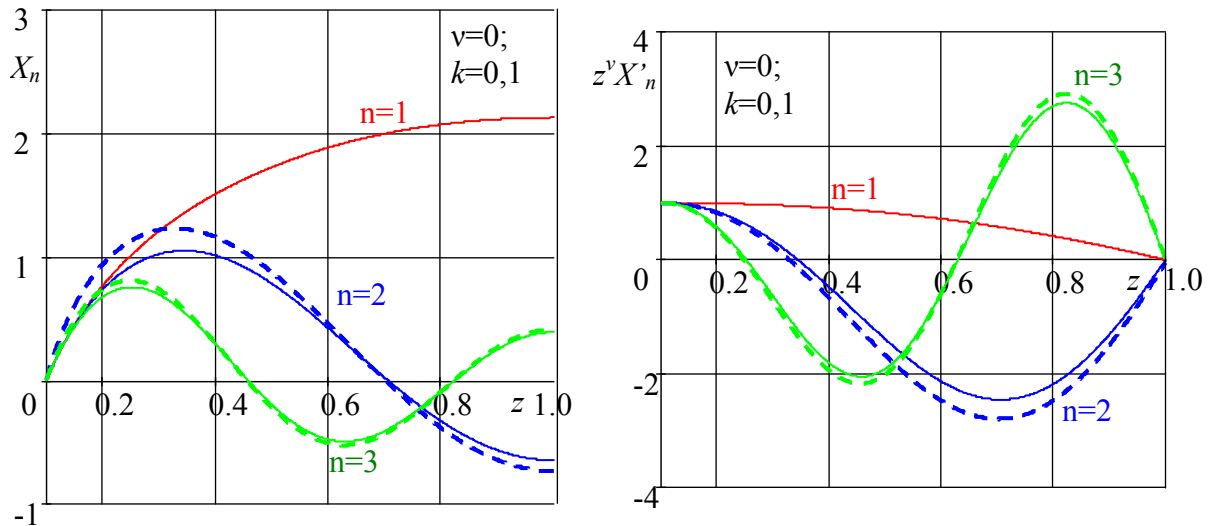


Рисунок 4.25. Первые три собственные формы продольных деформаций и усилий клиновидного стержня с защемленным малым основанием

4.3.4. Асимптотика собственных функций для стержня ограниченного по большому основанию

Граничные условия для данного случая имеют вид:

$$N(k, t)|_{x=0} = 0; \quad u(1, t)|_{x=l} = 0. \quad (4.100)$$

В этом случае в соответствии с (4.58) собственная функция будет иметь вид (4.85), а частотное уравнение из второго граничного условия (4.100) будет

$$A(\lambda_n) = 0. \quad (4.101)$$

Подставив выражение функции $A(\zeta)$ из (4.83) в уравнение (4.101) с заменой

$$\tilde{\lambda}_n = \lambda_n(1-k) \left(\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n}{l} \sqrt{\frac{E}{\gamma}} \right), \text{ получим}$$

$$\frac{\tan \tilde{\lambda}_n}{\tilde{\lambda}_n} = - \frac{8k}{\left(4(v-1)^2 - 1 - (4v^2 - 1)k\right)(1-k)}. \quad (4.102)$$

Аналогично предыдущему случаю получаем асимптотическую формулу

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)\right)^2 + \left(4(v-1)^2 - 1 - (4v^2 - 1)k\right)\frac{(1-k)}{2k}} + \frac{\pi}{2}(2n-1) \right). \quad (4.103)$$

Для однородного стержня с аналогичными граничными условиями собственные значения $\tilde{\lambda}_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$ [266].

В таблице 4.4. приведены результаты расчета собственных значений, полученные из численного решения точного уравнения (4.101) и по асимптотической формуле (4.103) для стержней с различными геометрическими параметрами.

На графике рисунок 4.26 показаны три первых собственных формы продольных деформаций (4.85) и соответствующих им усилий для стержня клиновидной формы ($v=0$) с отношением площадей торцевых сечений $k=0,1$, сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (4.60), пунктирными линиями показана их асимптотика (4.83).

Таблица 4.4.

Собственные значения первых форм колебаний стержня защемленного по
большому основанию при $\nu < 1/2$, по меньшему основанию при $\nu > 1/2$

Форма очертания стержня	Отношение торцевых размеров, k	Расчетная зависимость	Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$, для соответствующего номера формы				
			1	2	3	4	5
Цилиндрический ($\nu = 1/2$)	1	$\tilde{\lambda}_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$	1,571	4,712	7,854	11	14,14
Гиперболический ($\nu = 3/2$)	0,01	(4.101)	0,173	4,496	7,727	10,91	14,07
		(4.103)	-	4,492	7,726	10,91	14,07
	0,1	(4.101)	0,542	4,516	7,738	10,91	14,07
		(4.103)	-	4,513	7,738	10,91	14,07
	0,5	(4.101)	1,166	4,604	7,79	10,95	14,1
		(4.103)	1,127	4,604	7,79	10,95	14,1
Клиновидный ($\nu = 0$)	0,01	(4.101)	2,381	5,467	8,573	11,68	14,8
		(4.103)	6,939	8,898	11,18	13,71	16,41
	0,1	(4.101)	2,203	5,153	8,186	11,26	14,35
		(4.103)	2,811	5,363	8,275	11,3	14,38
	0,5	(4.101)	1,794	4,802	7,909	11,04	14,17
		(4.103)	1,812	4,803	7,909	11,04	14,17
Конический ($\nu = -1/2$)	0,01	(4.101)	3,11	6,22	9,331	12,44	15,55
		(4.103)	10,77	12,58	14,62	16,87	19,27
	0,1	(4.101)	2,836	5,717	8,659	11,65	14,69
		(4.103)	3,877	6,171	8,869	11,76	14,75
	0,5	(4.101)	2,029	4,913	7,979	11,09	14,21
		(4.103)	2,057	4,916	7,979	11,09	14,21

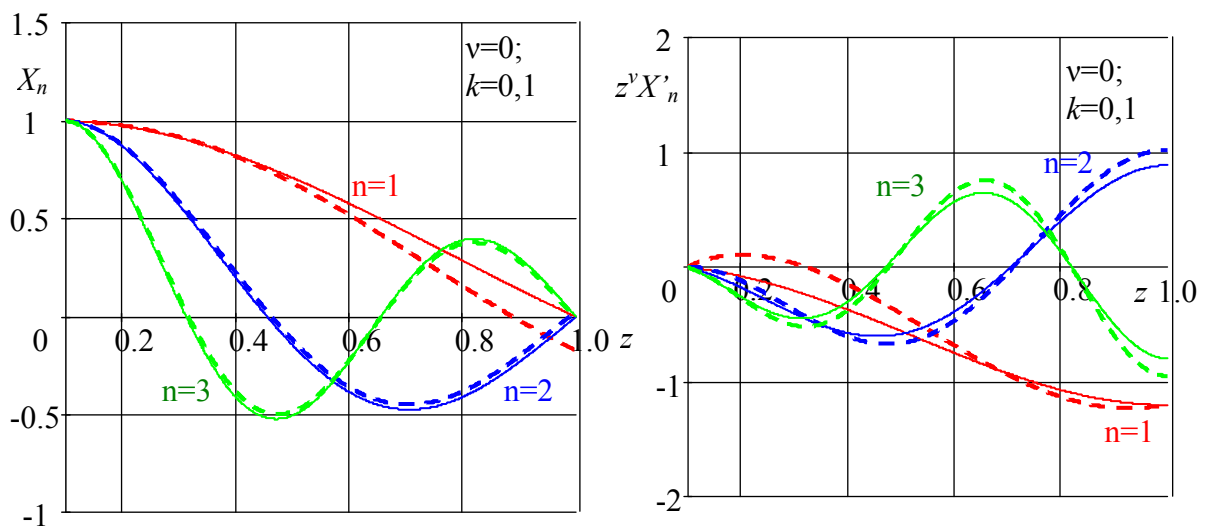


Рисунок 4.26. Первые три собственные формы продольных деформаций и усилий клиновидного стержня с защемленным большим основанием

Из анализа результатов расчетов, представленных в таблицах 4.1 – 4.4, следует, что асимптотические зависимости (4.89;4.94;4.99;4.103) дают удовлетворительный результат (с погрешностью менее 5%) для нахождения собственных частот колебаний начиная с 3-го номера и выше, для стержневидных тел с параметром относительного поперечного размера $k = 0,1 \div 1$. Также из графиков (рисунки 4.23-4.26) видим, что асимптотические разложения собственных функций (4.83) можно использовать для аппроксимации собственных форм в приближенных решениях. Оценка влияния конструктивных параметров k и α на значения собственных частот стержня показывает, что геометрическая форма стержня влияет на частоты существенно лишь в пределах двух первых форм, а для более высоких, влияние α сохраняется лишь для малых значений параметра k , т.е. для конструкций близких к остроконечной форме. Исходя из этого, целесообразно рассмотреть возможность упрощения математической модели (4.1) для разработки методики динамического расчета стержней с произвольным видом геометрической и механической неоднородности, когда ее проявление не значительно.

4.4. Разработка специализированной методики усреднения переменных коэффициентов в уравнениях продольных и крутильных колебаний произвольно-неоднородных стержней

В работе [184] представлены различные методы приведения уравнений колебаний упругих систем к уравнениям с постоянными коэффициентами. Одним из таких методов является метод усреднения переменных коэффициентов. Такой метод был, например, использован в задаче устойчивости буровых колон [227], а также при нахождении собственных значений для краевых спектральных задач четвертого порядка [1].

Рассмотрим однородное уравнение (4.5), которое представим в виде

$$X_n'' + \frac{EF'}{EF} X_n' + \frac{\omega_n^2}{c^2} X_n = 0, \quad (4.104)$$

где $c = \sqrt{EF/m} = \text{const}$ – скорость продольных (крутильных) волн деформаций.

Для уравнения (4.104) выполним замену переменной $z = x/l$ ($0 \leq z \leq 1$), и перейдя к дифференцированию по z , получим

$$X_n'' + \frac{EF'}{EF} X_n' + \lambda_n^2 X_n = 0; \quad \lambda_n = \omega_n l / c. \quad (4.105)$$

Уравнение (4.105) является уравнением с переменным коэффициентом. Усредним переменный коэффициент

$$2\eta = - \int_0^1 \frac{EF'(z)}{EF(z)} dz = \ln \bar{k},$$

где $\bar{k} = \frac{EF(0)}{EF(1)} = \frac{EF_1}{EF_2}$ ($0 \leq \bar{k} \leq 1$) – отношение жесткости поперечного сечения

меньшего торца к жесткости большего, т.е. начало отсчета будем полагать со стороны сечения с наименьшей жесткостью, а пределах стержня или рассматриваемого участка изменение жесткости будет монотонным.

Тогда уравнение (4.105) представим уравнением с постоянными коэффициентами

$$X_n'' - 2\eta X_n' + \lambda_n^2 X_n = 0. \quad (4.106)$$

Общее решение уравнения (4.106) имеет вид [112]

$$X_n(z) = e^{\eta z} (C_1 \cos \beta_n z + C_2 \sin \beta_n z), \quad (4.107)$$

где $\beta_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}$.

Следует отметить, что при $\bar{k} = 1$ ($\alpha = 0$), уравнение (4.106) будет соответствовать уравнению для стержня постоянного сечения, а зависимость (4.107) будет его точным решением.

Для удобства рассмотрения граничных задач выразим постоянные интегрирования (4.107) через начальные условия при $z = 0$, а именно продольное перемещение для произвольной формы – u_{0n} и продольное усилие нулевого сечения для произвольной формы – N_{0n}

$$X_n(0) = C_1 = u_{0n};$$

$$\frac{EF_2\bar{k}}{l} X'_n(0) = \frac{EF_2\bar{k}}{l} (\eta C_1 + \beta C_2) = N_{0n}.$$

Из полученных соотношений, определив произвольные постоянные C_1 и C_2 , получим выражение для продольных перемещений произвольной формы

$$u_n(z) = X_n(z) = e^{\eta z} \left(u_{0n} \left(\cos \beta_n z - \frac{\eta}{\beta_n} \sin \beta_n z \right) + \frac{N_{0n} l}{\beta_n \bar{k} EF_2} \sin \beta_n z \right); \quad (4.108)$$

соответственно выражение для усилий будет

$$N_n(z) = \frac{EF(z)}{l} X'_n(z) =$$

$$= e^{\eta z} \left(-u_{0n} \frac{EF(z)}{l} \beta_n \left(1 + \frac{\eta^2}{\beta_n^2} \right) \sin \beta_n z + N_{0n} \frac{EF(z)}{\bar{k} EF_2} \left(\frac{\eta}{\beta_n} \sin \beta_n z + \cos \beta_n z \right) \right). \quad (4.109)$$

Подставляя выражение (4.108) в решение (4.3) получим зависимость для определения продольных перемещений

$$u(z, t) = e^{\eta z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_{0n} \left(\cos \beta_n z - \frac{\eta}{\beta_n} \sin \beta_n z \right) + \frac{N_{0n} l}{\beta_n \bar{k} EF_2} \sin \beta_n z \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (4.110)$$

а с учетом (4.109) выражение для продольных усилий получим в виде

$$N(z, t) = e^{\eta z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-u_{0n} \frac{EF(z)}{l} \beta_n \left(1 + \frac{\eta^2}{\beta_n^2} \right) \sin \beta_n z + N_{0n} \frac{EF(z)}{kEF_2} \left(\frac{\eta}{\beta_n} \sin \beta_n z + \cos \beta_n z \right) \right) \times (4.111) \\ \times \sin(\omega_n t + \mu_n).$$

Рассмотрим свойства собственных функций (4.107). Так как решение получено для упрощенной модели, то собственные функции с различными индексами в общем случае не будут ортогональны. Покажем, что собственные функции для большинства граничных задач будут ортогональны с функцией $\Phi(z) = e^{-2\eta z}$. Рассмотрим уравнения (4.106) для двух разных гармоник n и m :

$$X_n'' - 2\eta X_n' + \lambda_n^2 X_n = 0;$$

$$X_m'' - 2\eta X_m' + \lambda_m^2 X_m = 0.$$

Умножим верхнее и нижнее уравнение на функции ΦX_m и ΦX_n соответственно.

Так как для функции $\Phi(z)$ выполняется условие

$$\Phi'(z) = -2\eta \Phi(z),$$

то получим

$$(\Phi X_n')' X_m = -\lambda_n^2 \Phi X_n X_m;$$

$$(\Phi X_m')' X_n = -\lambda_m^2 \Phi X_m X_n.$$

Вычтем из первого уравнения второе и полученную разность проинтегрируем по переменной z

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^1 \Phi X_n X_m dz = \int_0^1 ((\Phi X_n')' X_m - (\Phi X_m')' X_n) dz.$$

Взяв интегралы по частям, получаем зависимость

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^1 \Phi X_n X_m dz = \Phi |X_n' X_m - X_m' X_n|_0^1.$$

или с учетом $\lambda_n^2 = \beta_n^2 + \eta^2$

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^1 \Phi X_n X_m dz = \Phi \left| X_n' X_m - X_m' X_n \right|_0^1. \quad (4.112)$$

На основе выражения (4.112) определяется свойство ортогональности собственных функций (4.108) при решении соответствующей граничной задачи. В уравнении (4.112) перейдем к пределу $m \rightarrow n$, т.е. $\beta_m = \beta_n + \delta\beta$, а $X_m = X_n + \frac{\partial X_n}{\partial \beta} \delta\beta$, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$2\beta_n \delta\beta \int_0^1 \Phi X_n^2(z) dz = \Phi \left| X_n' \frac{\partial X_n}{\partial \beta} \delta\beta - \frac{\partial X_n'}{\partial \beta} \delta\beta X_n \right|_0^1,$$

отсюда выражение для квадрата нормы получим в виде

$$\Delta_n^2 = \int_0^1 \Phi X_n^2(z) dz = \frac{\Phi}{2\beta_n} \left| X_n' \frac{\partial X_n}{\partial \beta} - \frac{\partial X_n'}{\partial \beta} X_n \right|_0^1. \quad (4.113)$$

Определив частные производные, получим выражение для квадрата нормы в окончательном виде

$$\Delta_n^2 = \frac{\Phi}{2\beta_n^2} \left((\beta_n^2 + \eta^2) z + \eta \right) X_n^2 + z (X_n')^2 - (2\eta z + 1) X_n' X_n \Big|_0^1. \quad (4.114)$$

Не сложно заметить, что в частности, при $\eta = 0$, зависимость (4.114) совпадает с известным в литературе выражением квадрата нормы для однородных стержней [264].

В качестве примера рассмотрим задачу об ударе стержня переменного сечения о жесткий ограничитель [225], аналогичную примерам 4.1, 4.2. Для этого решим граничную задачу (4.2) с условиями закрепления

$$u(0, t) = 0, \quad N(l, t) = 0, \quad (4.115)$$

и начальными условиями

$$u(x,0)=0, \dot{u}(x,0)=-v_0 e(x), \quad (4.116)$$

Из первого граничного условия (4.115) получаем выражение для собственных функций (4.108)

$$X_n(z) = e^{\eta z} \sin \beta_n z. \quad (4.117)$$

Из второго условия (4.115) получим уравнение для определения собственных значений

$$\tan \beta_n = -\frac{\beta_n}{\eta}, \text{ или } \tan \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4} \ln^2 \bar{k}} = -\frac{2\sqrt{\lambda_n^2 - \frac{1}{4} \ln^2 \bar{k}}}{\ln \bar{k}}. \quad (4.118)$$

Из зависимости (4.118) видно, что при $\beta_n \rightarrow 0$ $\eta \rightarrow (-1)$, таким образом, получаем наименьшее значение параметра $k_{\min} = 1/e^2$, для которого можно определить собственные значения из уравнения (4.118).

На графиках рис. 4.27 показаны зависимости первых двух собственных значений от параметра $\bar{k}$. Пунктирная линия отображает соответствующие зависимости, построенные на основании аналитических решений для стержней конической и гиперболической форм (4.96; 4.101). Из полученных зависимостей определяем наибольшее расхождение между значениями первого собственного числа, найденных из аналитического решения и по методу усреднения, в точке $\bar{k}_{\min}$ составит 1,3%, для второго, как и для всех последующих, расхождение не будет превышать 1%. Таким образом, на основании сравнения собственных значений (собственных частот) следует вывод о том, что предложенная модель, с достаточной точностью, может использоваться для практических расчетов стержней переменного сечения, у которых отношение жесткостей торцевых сечений

$$\frac{EF_1}{EF_2} > \frac{1}{e^2}.$$

Уравнение собственных продольных колебаний с учетом первого начального условия (4.116) будет иметь вид

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(z) \sin \omega_n t, \quad (4.119)$$

где A_n – произвольные постоянные.

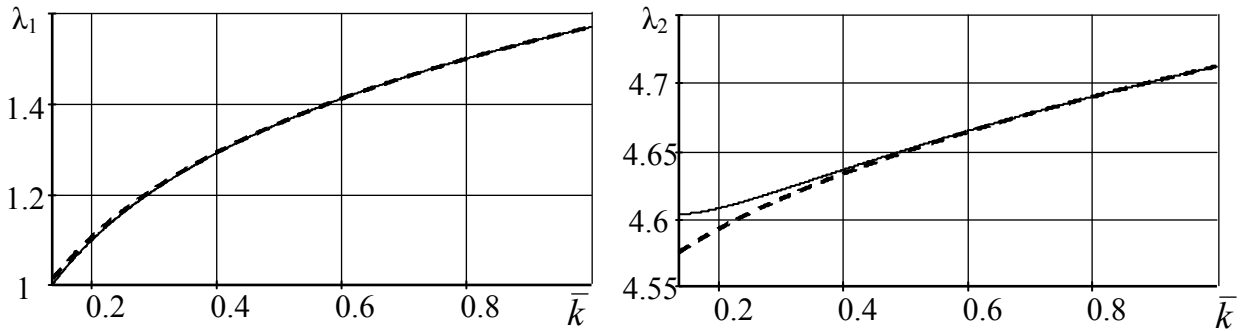


Рис. 4.27. Зависимость λ_n от величины параметра $\bar{k}$

Для нахождения коэффициентов A_n используем свойство ортогональности собственных функций с функцией $\Phi(z) = e^{-2\eta z}$ (4.112)

$$\int_0^1 \Phi X_n X_m dz = \int_0^1 \sin \beta_n z \sin \beta_m z dz = \frac{\cos \beta_n \cos \beta_m}{\beta_n^2 - \beta_m^2} (\beta_m \tan \beta_n - \beta_n \tan \beta_m), \quad (4.120)$$

так, как $\beta_n \neq \beta_m$, подставив в уравнение (4.120) зависимость (4.118), получим

$$\int_0^1 \Phi X_n X_m dz = \frac{\cos \beta_n \cos \beta_m}{\eta(\beta_n^2 - \beta_m^2)} (\beta_m \beta_n - \beta_n \beta_m) = 0.$$

Из второго начального условия (4.116) следует уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n X_n(z) = -v_0 e(z). \quad (4.121)$$

Умножим обе части равенства (4.121) на ΦX_n и проинтегрируем на участке $[0; 1]$, тогда с учетом свойства ортогональности получим

$$A_n \omega_n \Delta_n^2 = -v_0 \int_0^1 \Phi X_n dz,$$

откуда, с учетом выражения для квадрата нормы (4.114) находим произвольные постоянные

$$A_n = -\frac{v_0}{\omega_n \Delta_n^2} \int_0^1 \Phi X_n dz = -\frac{4v_0 l (\lambda_n^2 - \eta^2)}{c \sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}))}. \quad (4.122)$$

Подставив выражение (4.122) в уравнение (4.119), получим зависимость для определения продольных перемещений сечений стержня

$$u(z, t) = -\frac{4v_0 l}{c} e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 - \eta^2) \sin(z \sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2})}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}))} \sin \omega_n t. \quad (4.123)$$

Выражение для напряжений будет иметь вид

$$\sigma(z, t) = -E \frac{4v_0}{c} e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 - \eta^2) \left(\eta \sin(z \sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}) + \sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2} \cos(z \sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}) \right)}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}))} \sin \omega_n t.$$

Усилие в ударном торце определяется зависимостью

$$P(t) = -EF_1 \frac{4v_0}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(\lambda_n^2 - \eta^2)^3}}{\sqrt{\lambda_n^3} (2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2} - \sin(2\sqrt{\lambda_n^2 - \eta^2}))} \sin \omega_n t. \quad (4.124)$$

В работе [160] представлены результаты исследований, выполненные на основе аппроксимации конической поверхности стержней последовательно сопряженными цилиндрическими участками с применением метода Д'Аламбера. В качестве базовой модели был принят стержень постоянного сечения диаметром $d_0 = 0,025$ м и длиной $l = 1$ м, конические стержни, по отношению к базовому, имели такой же диаметр ударного торца и массу, а углы уклона ϕ , составляли:

$0,5^\circ$; 1° ; 3° ; 6° и 9° . Сравним результаты расчета по зависимости (4.124) с представленными в литературе [160]. Определим расчетное значение параметра $\bar{k}$ для конических стержней по формуле

$$\bar{k}(\varphi) = \sqrt[3]{\left(\frac{d_0}{6l \tan \varphi + d_0}\right)^2},$$

откуда находим: $\bar{k}(0,5) = 0,471$; $\bar{k}(1) = 0,334$; $\bar{k}(3) = 0,176$; $\bar{k}(6) = 0,113$; $\bar{k}(9) = 0,087$. По полученным значениям видим, что для стержней с уклоном 6° и 9° рассматриваемый метод не применим, так как соответствующие значения $\bar{k}$ меньше предельного $\bar{k}_{\min} = 1/e^2 \approx 0,135$.

На рис. 4.28 представлены графики безразмерной величины усилия в ударном сечении $\tilde{P} = -\frac{P}{4EF_1} \frac{c}{v_0}$ и безразмерного перемещения свободного конца

стержня $\tilde{u} = -\frac{u}{4l} \frac{c}{v_0}$ в зависимости от безразмерного времени $\tau = tc/l$ для

конических стержней с различным углом уклона φ . Пунктирными линиями показаны соответствующие зависимости, полученные из аналитического решения (см. пример 4.1). Графики перемещений построены для промежутка времени, за который усилие не меняет знак (случай неудерживающей связи). Как видим из графиков результаты упрощенного расчета по деформациям практически полностью совпадают с аналитическим решением. Максимальное усилие для стержня с уклоном $\varphi=3^\circ$ составляет $\tilde{P}_{\max} = 3,896$ из точного решения и $\tilde{P}_{\max} = 3,576$ из упрощенного, т.е. расхождение около 8%, при этом следует отметить, что для данной модели результат расчета по методу Д'Аламбера [160] составил $\tilde{P}_{\max} = 3,632$.

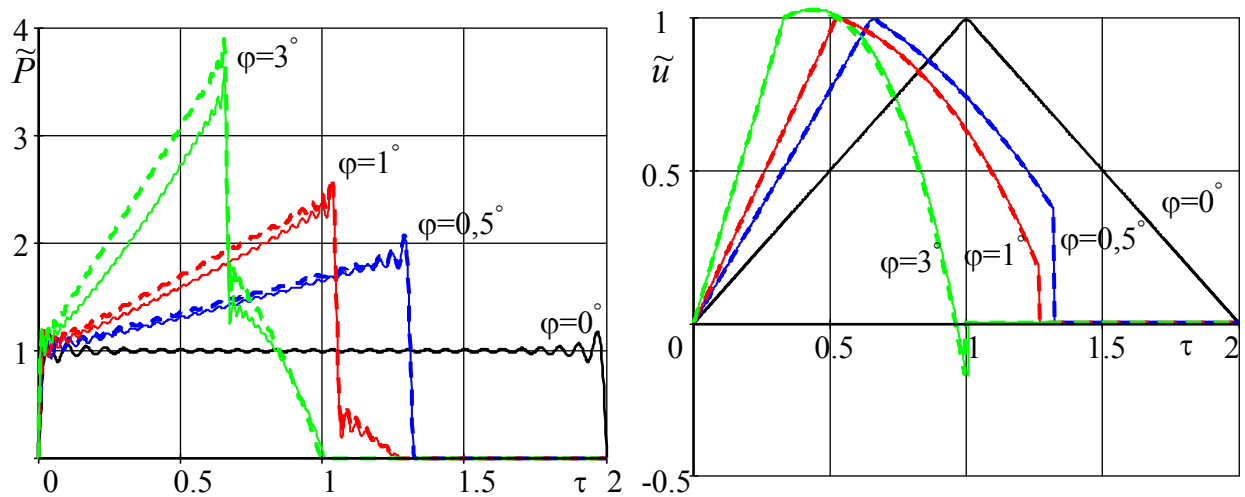


Рис. 4.28. Зависимости усилия в ударном торце $\tilde{P}$ и перемещения свободного конца $\tilde{u}$ от безразмерного времени τ

На основании полученных результатов, можно сделать вывод, что метод усреднения переменных коэффициентов дает достаточную точность для технических расчетов в моделях продольного удара стержней с произвольной осевой неоднородностью, особенно для тех случаев, когда отсутствует аналитическое решение. При этом он ограничен предельной величиной соотношения жесткостей поперечных сечений, а также условием монотонности ее изменения в пределах длины стержня или участка. Учитывая, что полученные расчетные формулы не зависят от формы сечения и очертания стержня, то данный метод, с достаточной точностью для инженерных решений, дает обоснование выбора шага (участок длины стержня, в пределах которого отношение жесткостей сечений составляет более чем $1/e^2$) для аппроксимации сложных поверхностей участками конической или другой формы, для которой известно аналитическое решение.

4.5. Выводы

1. На основе метода Фурье разработан единый подход для решения граничных задач продольных и крутильных колебаний стержней с произвольной степенной неоднородностью механических и геометрических свойств, в

частности при наличии инерционных локальных нагрузок, когда собственные функции не ортогональны.

2. С целью снижения трудоемкости получения расчетных зависимостей, а также для краткости их вида, были введены специальные функции и исследованы их основные свойства. Найдены асимптотические разложения этих функций и получены на их основе зависимости, для определения собственных частот начиная с третьей формы колебаний и выше для основных условий закрепления.

3. С использованием специальных функций разработана методика решения граничных задач методом начальных параметров, что позволило унифицировать алгоритм решения для стержневидных объектов с любым видом степенной неоднородности геометрических и механических характеристик.

4. Для динамического расчета стержней с произвольным видом осевой неоднородности на продольные и крутильные колебания и удар выполнено упрощение математической модели путем усреднения переменных коэффициентов. Разработана методика приближенного расчета на основе метода Фурье, которая дает достаточную точность для инженерного расчета, когда физико-механическая неоднородность имеет незначительное проявление.

РАЗДЕЛ 5

Разработка методики анализа моделей изгибных колебаний конструкций с осевой неоднородностью геометрических и механических свойств

5.1. Методика интегрирования уравнения динамического изгиба неоднородных балок

В соответствии с теорией изгиба Эйлера – Бернулли, уравнение деформаций сечений балки без учета сил сопротивления движению приводится к неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка в частных производных [264, 304, 215, 239, 192, 184, 194, 38]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = p(x, t), \quad (5.1)$$

где y – поперечные перемещения упругой линии балки; x – продольная координата; t – время; $EJ(x)$ – изгибная жесткость; E – модуль упругости первого рода; J – осевой момент инерции поперечного сечения в плоскости изгиба; $m(x)$ – линейная плотность; $p(x, t)$ – интенсивность поперечной нагрузки.

Неоднородному уравнению (5.1) соответствует однородное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (5.2)$$

Следуя методу Фурье решение уравнения (5.2) ищем в виде ряда собственных функций

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x) w_n(t). \quad (5.3)$$

Подставляя решение (5.3) в уравнение (5.2) и разделив переменные, для n -го члена ряда, получим выражение

$$\frac{EJ \cdot Z_n'''' + 2EJ' \cdot Z_n''' + EJ'' \cdot Z_n''}{mZ_n} = -\frac{\ddot{w}_n}{w_n} = \omega_n^2,$$

здесь штрихом обозначена производная по координате, а точкой по времени, ω_n^2 – постоянная разделения. Таким образом, уравнение (5.2) разделяется на два однородных дифференциальных уравнения

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = 0; \quad (5.4)$$

$$Z_n'''' + 2\frac{EJ'}{EJ} Z_n''' + \frac{EJ''}{EJ} Z_n'' - \frac{m}{EJ} \omega_n^2 Z_n = 0. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.4) представляет собой уравнение гармонических колебаний, решение которого известно [215]

$$w_n(t) = A_n \sin(\omega_n t + \mu_n), \quad (5.6)$$

где ω_n – частота, A_n , μ_n – амплитуда и фаза n -й формы колебаний, определяются из начальных условий.

Уравнение (5.5), в общем случае, является уравнением с переменными коэффициентами, решение которого в аналитической форме может быть получено лишь для некоторых частных случаев соотношения механических и геометрических характеристик стержня [79, 78, 167, 301, 320, 340, 331, 305, 338, 308, 307, 296, 358, 345, 302].

Остановимся подробно на стержнях, для которых отношение изгибной жесткости и линейной плотности определяется квадратичной зависимостью от продольной координаты. В этом случае выражения для линейной плотности и изгибной жесткости можно представить в виде:

$$m = \gamma F_2 z^v; \quad EJ = EJ_2 z^{v+2},$$

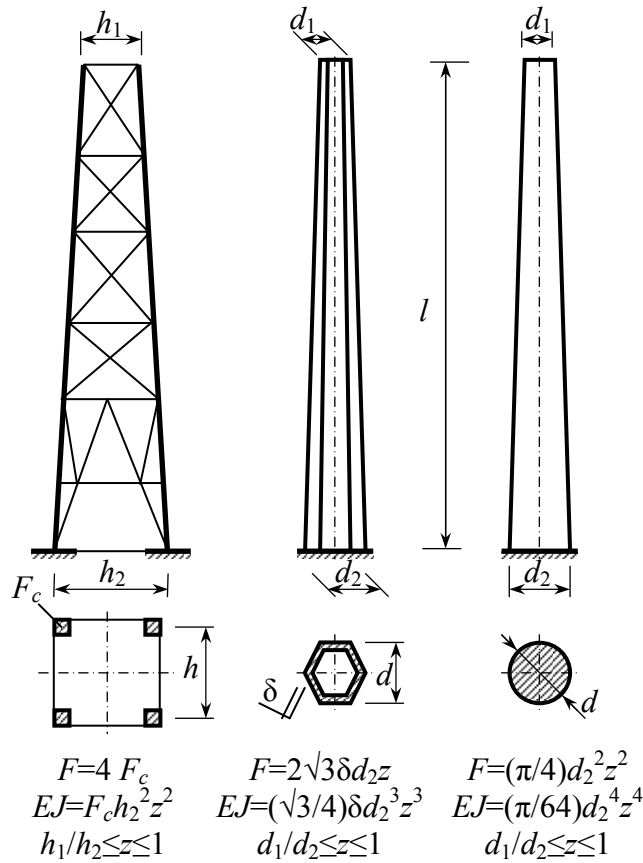


Рисунок 5.1. – Примеры стержневидных конструкций с осевой неоднородностью геометрических характеристик.

$$z = (1-k)\frac{x}{l} + k, \quad k = \frac{h_1}{h_2},$$

где γ – плотность, F_2 и J_2 – площадь поперечного сечения и момент инерции основания стержня, h_1 и h_2 – радиусы инерций верхнего и нижнего сечений, l – длина стержня, показатель степени $\nu = 0, 1, 2, \dots$ зависит от геометрии конструкции (рисунок 5.1). Под такое описание характеристик попадает большинство стержневидных конструкций пирамидального и конического очертаний (рисунок 5.1).

С учетом принятых обозначений уравнение (5.5) примет вид

$$z^{\nu+2} Z_n'''' + 2(\nu+2) z^{\nu+1} Z_n''' + (\nu+2)(\nu+1) Z_n'' - \frac{\lambda_n^4}{16} z^\nu Z_n = 0; \quad (5.7)$$

$$\lambda_n^2 = \frac{4\omega_n l^2}{(1-k)^2} \sqrt{\frac{\gamma F_2}{EJ_2}},$$

здесь штрихом обозначена производная по z .

Решение уравнения (5.7) находится в виде [112]

$$Z_n(z) = z^{-\nu/2} (C_1 J_\nu(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 Y_\nu(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 I_\nu(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 K_\nu(\lambda_n \sqrt{z})), \quad (5.8)$$

где $C_{1,2,3,4}$ – произвольные постоянные; $J_\nu(\zeta)$, $Y_\nu(\zeta)$ – функции Бесселя, $I_\nu(\zeta)$, $K_\nu(\zeta)$ – модифицированные функции Бесселя.

Решение (5.8) подходит для любых параметров модели, за исключением $k=0$ – случай остrokонечного стержня (спектральная задача для консольного стержня рассмотрена в [79]).

Рассмотрим свойства собственных функций, для этого перепишем выражение (5.5) в следующем виде

$$(EJZ_n'')'' = m\omega_n^2 Z_n, \quad (5.9)$$

здесь, очевидно, что выражение справа определяет интенсивность сил инерции сечений для n -й формы колебаний. Используя аналогичное выражение (5.9) для m -й формы, а также с учетом того, что формы колебаний независимы друг от друга, в соответствии с теоремой о взаимности работ [117] получим

$$\omega_n^2 \int_0^l m(x) Z_n(x) Z_m(x) dx = \omega_m^2 \int_0^l m(x) Z_n(x) Z_m(x) dx,$$

откуда, исходя из того, что $\omega_m^2 \neq \omega_n^2$, то данное равенство выполнимо при условии

$$\int_0^l m(x) Z_n(x) Z_m(x) dx = 0.$$

Если помимо распределенных масс имеются локальные инерционные нагрузки: сосредоточенные массы M_i , или инерционная моментная нагрузка J_{Mj} , то, с учетом их дополнительной работы, свойство ортогональности собственных функций получим в виде

$$\int_0^l m(x) Z_n(x) Z_m(x) dx + \sum M_i Z_n(x_i) Z_m(x_i) + \sum J_{Mj} Z_n'(x_j) Z_m'(x_j) = 0. \quad (5.10)$$

Свойство ортогональности собственных функций (5.10) используется для решения задач динамики, как на собственные, так и вынужденные колебания. Непосредственное определение квадрата нормы собственных функций для стержней с рассматриваемыми параметрами весьма затруднительно, поэтому поступим аналогично, как в работе [264]. Рассмотрим уравнение (5.7) для двух разных гармоник n и m

$$\left(z^{v+2}Z_n''\right)'' = \frac{\lambda_n^4}{16}z^vZ_n; \quad \left(z^{v+2}Z_m''\right)'' = \frac{\lambda_m^4}{16}z^vZ_m.$$

Умножим левое и правое уравнение на собственные функции Z_m и Z_n соответственно, вычитаем из первого уравнения второе и полученную разность интегрируем по переменной z

$$\frac{1}{16}(\lambda_n^4 - \lambda_m^4) \int_k^1 z^v Z_n(z) Z_m(z) dz = \int_k^1 \left(\left(z^{v+2}Z_n''\right)'' Z_m - \left(z^{v+2}Z_m''\right)'' Z_n \right) dz.$$

Взяв интегралы по частям, получаем зависимость

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(\lambda_n^4 - \lambda_m^4) \int_k^1 z^v Z_n(z) Z_m(z) dz = \\ & = \left\{ \left(z^{v+2}Z_n''\right)' Z_m - \left(z^{v+2}Z_m''\right)' Z_n - z^{v+2}Z_n'' Z_m' + z^{v+2}Z_m'' Z_n' \right\} \Big|_k^1. \end{aligned} \quad (5.11)$$

С использованием выражения (5.11) можно выполнить проверку ортогональности собственных функций (5.10) при решении граничных задач. В уравнении (5.11) перейдем к пределу $m \rightarrow n$, т.е. $\lambda_m = \lambda_n + \delta\lambda$, а $Z_m = Z_n + \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda} \delta\lambda$, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\frac{1}{4}\lambda_n^3 \int_k^1 z^v Z_n^2(z) dz = \left(Z_n \frac{\partial(z^{v+2}Z_n'')}{\partial \lambda_n} - (z^{v+2}Z_n'')' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} + z^{v+2}Z_n'' \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial(z^{v+2}Z_n'')}{\partial \lambda_n} \right) \Big|_k^1,$$

отсюда, выражение для квадрата нормы получим в виде

$$\begin{aligned} \Delta_n^2 &= \int_k^1 z^v Z_n^2(z) dz = \\ &= \frac{4}{\lambda_n^3} \left(Z_n \frac{\partial(z^{v+2}Z_n'')}{\partial \lambda_n} - (z^{v+2}Z_n'')' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} + z^{v+2}Z_n'' \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial(z^{v+2}Z_n'')}{\partial \lambda_n} \right) \Big|_k^1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

С использованием рекуррентных соотношений для функций Бесселя [48], найдем соответствующие производные для собственных функций (5.8)

$$\begin{aligned}
 Z'_n(z) &= -\frac{\lambda_n}{2} z^{-(v+1)/2} \left(C_1 J_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 Y_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) - C_3 I_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 K_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) \right); \\
 \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda} &= \frac{v}{\lambda_n} z^{-v/2} \left(C_1 J_v(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 Y_v(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 I_v(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 K_v(\lambda_n \sqrt{z}) \right) - \\
 &\quad - z^{(1-v)/2} \left(C_1 J_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 Y_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) - C_3 I_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 K_{v+1}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) = \\
 &\quad = \frac{v}{\lambda_n} Z_n + \frac{2z}{\lambda_n} Z'_n; \\
 \frac{\partial Z'_n}{\partial \lambda} &= \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \lambda} \right)' = \frac{2+v}{\lambda_n} Z'_n + \frac{2z^{-v-1}}{\lambda_n} (z^{v+2} Z''_n); \\
 \frac{\partial (z^{v+2} Z''_n)}{\partial \lambda} &= z^{v+2} \left(\frac{\partial Z'_n}{\partial \lambda} \right)' = -\frac{v}{\lambda_n} (z^{v+2} Z''_n) + \frac{2z}{\lambda_n} (z^{v+2} Z''_n)'; \\
 \frac{\partial (z^{v+2} Z''_n)'}{\partial \lambda} &= \left(\frac{\partial (z^{v+2} Z''_n)}{\partial \lambda} \right)' = \frac{2-v}{\lambda_n} (z^{v+2} Z''_n)' + \frac{2z}{\lambda_n} (z^{v+2} Z''_n)''.
 \end{aligned}$$

Из выражения (5.7) следует

$$(z^{v+2} Z''_n)'' = \frac{\lambda_n^4}{16} z^v Z_n,$$

таким образом, выражение для квадрата нормы в окончательном виде будет

$$\begin{aligned}
 \Delta_n^2 &= \left(\frac{1}{2} z^{v+1} Z_n^2 + 8 \frac{v+1}{\lambda_n^4} Z'_n (z^{v+2} Z''_n) + \frac{8}{\lambda_n^4} z^{-v-1} (z^{v+2} Z''_n)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 8 \frac{v-1}{\lambda_n^4} Z_n (z^{v+2} Z''_n)' - \frac{16}{\lambda_n^4} z Z'_n (z^{v+2} Z''_n)' \right) \Big|_k^1.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Если рассматриваемые стержни состоят из однородного материала плотностью γ ($m = \gamma F = \gamma F_2 z^v$), то масса такого стержня будет

$$M_0 = \int_0^l m dx = \frac{\gamma F_2 l}{1-k} \int_k^1 z^v dz = \frac{\gamma F_2 l (1-k^{v+1})}{(1-k)(1+v)},$$

тогда, при наличии в сечениях стержня z_i сосредоточенных масс собственные функции будут ортогональны с весом

$$\rho(z) = z^\nu + \frac{1-k^{\nu+1}}{\nu+1} \sum \xi_i \delta(z-z_i), \quad \xi_i = \frac{M_i}{M_0}, \quad (5.14)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, M_i – сосредоточенные массы.

При наличии локальных инерционных моментов J_M , собственные функции не ортогональны с весом, в этом случае следует исходить из ортогональности функции Z_n с функцией $\bar{Z}_m$ (5.10), которая будет иметь вид

$$\bar{Z}_m(z) = z^\nu Z_m(z) - \frac{1}{3}(1-k)^3 \sum \psi_i Z'_m(z_i) \delta'(z-z_i); \quad \psi_i = 3 \frac{J_{Mi}}{m_2 l^3}, \quad (5.15)$$

где $\delta'(z)$ – производная дельта-функции Дирака, J_{Mi} – сосредоточенные моменты инерции масс, $m_2 l^3 / 3$ – условный момент инерции массы стержня.

Для случая вынужденных колебаний требуется найти решение неоднородного уравнения (5.1)

$$\left(z^{\nu+2} y'' \right)'' + \beta z^\nu \ddot{y} = \frac{\beta}{\gamma F_2} p(z, t), \quad \beta = \frac{\gamma F_2 l^4}{(1-k)^4 E J_2}. \quad (5.16)$$

Решение уравнения (5.16) представим в виде ряда по собственным функциям (5.3). Подставив этот ряд в уравнение (5.16) и принимая во внимание соотношение $\frac{1}{16} \lambda_n^4 = \beta \omega_n^2$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n \right) z^\nu Z_n = \frac{p(z, t)}{\gamma F_2}. \quad (5.17)$$

Применив метод Фурье к уравнению (5.17), при учете свойства ортогональности собственных функций с весом, получим уравнение относительно коэффициентов w_n

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = \frac{1}{\gamma F_2 \Delta_n^2} \int_k^1 p(z, t) Z_n(z) dz. \quad (5.18)$$

Рассмотрим применение методики расчета параметров НДС стержневидных конструкций на конкретных примерах.

5.1.1. Применение методики к задаче о вынужденных колебаниях стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости

В качестве примера рассмотрим опору линии электропередач (рисунок 5.2). Распределенная масса и поперечная жесткость определяются из зависимостей

$$m = \gamma(F_l \cos \beta + F_d \sin \alpha), \quad c_y = EF_l h^2,$$

где F_l и F_d – площадь поперечного сечения стоек (поясов) и раскосов

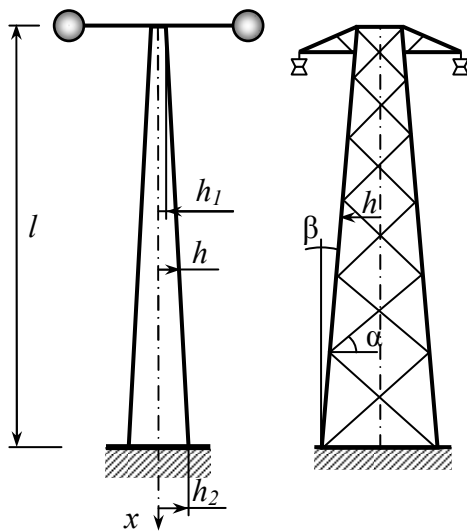


Рисунок 5.2. Расчетная схема опоры линии электропередач.

соответственно. Для реальных конструкций F_l , F_d и β – постоянные или ступенчато-переменные величины, угол α лежит в диапазоне от 40 до 50 град. (рисунок. 5.1). Таким образом, для рассматриваемой конструкции или ее части получим $\nu = 0$. Обоснование использования балочных моделей для динамических исследований фермовых конструкций рассмотрено в статье [273].

На верхнем конце стержня учитываем инерционную нагрузку от массы гирлянд изоляторов и проводов, вызванную поворотом верхнего сечения с моментом инерции J_M (рисунок 5.2).

Следует отметить, что в данном случае не учитывается инерционное влияние проводов при поперечном смещении верхнего конца стержня, такая схема моделирует шарнирное соединение провода с конструкцией башни.

Граничные условия в соответствии с принятой схемой (рисунок 5.2) имеют вид

$$y(l, t) = 0; \quad y'(l, t) = 0; \quad Q(0, t) = 0; \quad (5.19)$$

$$M(0, t) - J_M \ddot{y}'(0, t) = 0. \quad (5.20)$$

Удовлетворив граничным условиям (5.19), выражение для собственных функций (5.8) получим в виде

$$Z_n(z) = \pi \left(J_0(\lambda_n \sqrt{z}) (Y_0(\lambda_n) - \alpha_n Y_1(\lambda_n)) - Y_0(\lambda_n \sqrt{z}) (J_0(\lambda_n) - \alpha_n J_1(\lambda_n)) \right) + \\ + 2 \left(I_0(\lambda_n \sqrt{z}) (K_0(\lambda_n) - \alpha_n K_1(\lambda_n)) - K_0(\lambda_n \sqrt{z}) (I_0(\lambda_n) + \alpha_n I_1(\lambda_n)) \right), \quad (5.21)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi \left(J_1(\lambda_n \sqrt{k}) Y_0(\lambda_n) - Y_1(\lambda_n \sqrt{k}) J_0(\lambda_n) \right) + 2 \left(I_1(\lambda_n \sqrt{k}) K_0(\lambda_n) + K_1(\lambda_n \sqrt{k}) I_0(\lambda_n) \right)}{\pi \left(J_1(\lambda_n \sqrt{k}) Y_1(\lambda_n) - Y_1(\lambda_n \sqrt{k}) J_1(\lambda_n) \right) + 2 \left(I_1(\lambda_n \sqrt{k}) K_1(\lambda_n) - K_1(\lambda_n \sqrt{k}) I_1(\lambda_n) \right)}.$$

Для составления выражений углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил определим производные от собственных функций (5.21)

$$Z'(z) = \frac{\lambda_n}{2\sqrt{z}} \left(\pi \left(-J_1(\lambda_n \sqrt{z}) (Y_0(\lambda_n) - \alpha_n Y_1(\lambda_n)) + Y_1(\lambda_n \sqrt{z}) (J_0(\lambda_n) - \alpha_n J_1(\lambda_n)) \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(I_1(\lambda_n \sqrt{z}) (K_0(\lambda_n) - \alpha_n K_1(\lambda_n)) + K_1(\lambda_n \sqrt{z}) (I_0(\lambda_n) + \alpha_n I_1(\lambda_n)) \right) \right); \\ z^2 Z''(z) = \frac{\lambda_n \sqrt{z}}{2} \left(\pi \left(\left(J_1(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{\lambda_n \sqrt{z}}{2} J_0(\lambda_n \sqrt{z}) \right) (Y_0(\lambda_n) - \alpha_n Y_1(\lambda_n)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(Y_1(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{\lambda_n \sqrt{z}}{2} Y_0(\lambda_n \sqrt{z}) \right) (J_0(\lambda_n) - \alpha_n J_1(\lambda_n)) \right) - \right. \\ \left. - 2 \left(\left(I_1(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{\lambda_n \sqrt{z}}{2} I_0(\lambda_n \sqrt{z}) \right) (K_0(\lambda_n) - \alpha_n K_1(\lambda_n)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(K_1(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{\lambda_n \sqrt{z}}{2} K_0(\lambda_n \sqrt{z}) \right) (I_0(\lambda_n) + \alpha_n I_1(\lambda_n)) \right) \right);$$

$$\begin{aligned} (z^2 Z''(z))' = & \frac{\lambda_n^3 \sqrt{z}}{8} \left(\pi (J_1(\lambda_n \sqrt{z}) (Y_0(\lambda_n) - \alpha_n Y_1(\lambda_n)) - Y_1(\lambda_n \sqrt{z}) (J_0(\lambda_n) - \alpha_n J_1(\lambda_n))) + \right. \\ & \left. + 2 (I_1(\lambda_n \sqrt{z}) (K_0(\lambda_n) - \alpha_n K_1(\lambda_n)) + K_1(\lambda_n \sqrt{z}) (I_0(\lambda_n) + \alpha_n I_1(\lambda_n))) \right) \end{aligned}$$

Из условия (5.20) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$k^2 Z''_n(k) + \frac{1}{3} \lambda_n^4 \zeta (1-k)^3 Z'_n(k) = 0; \quad \zeta = 3 \frac{J_M}{m l^3} \quad (5.22)$$

где ζ – безразмерный момент инерции.

С учетом того, что во многих упрощенных методах динамического расчета используется значение первой собственной частоты, оценим влияние безразмерных параметров k и ζ на значения первого собственного числа уравнения (5.22)

$$\omega_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J_2}{m}}, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2} (1-k).$$

Аналогичным образом определяются частоты стержней постоянной жесткости [184, 239]. Численные исследования зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от разных значений параметров конструкции из уравнения (5.22) представлены на рисунке 5.3. Штриховой кривой показана зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра k при отсутствии инерционной нагрузки ($\zeta = 0$). Видно, что $\tilde{\lambda}_1 = 1.875$ при $k = 1$ (это соответствует собственному значению для консольной балки постоянной жесткости [117]). Сплошными кривыми показаны зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от параметра ζ (на практике $\zeta < 0.1$) при разных значениях коэффициента k .

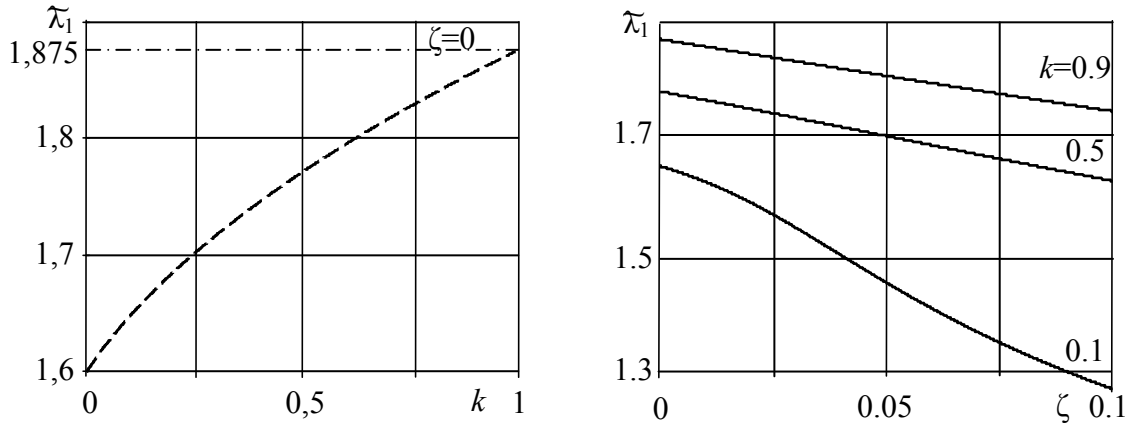


Рисунок 5.3. Зависимости собственного значения частотного уравнения $\tilde{\lambda}_1$ от параметров конструкции k и ζ .

С учетом наличия момента инерции на верхнем торце стержня (рисунок 5.2), с учетом свойства собственных функций (5.10) для нашего случая получим

$$I(k) = \int_k^1 Z_n(z) Z_m(z) dz + \frac{1}{2} \zeta (1-k)^3 Z'_n(k) Z'_m(k) = 0. \quad (5.23)$$

С учетом свойства (5.23) квадрат нормы собственных функций (5.13) будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{8\alpha_n^2}{\lambda_n^2} - \frac{1}{2} k Z_n^2(k) + \frac{1}{2} \zeta (1-k)^3 \left(1 - \frac{1}{144} \lambda_n^4 \zeta \frac{(1-k)^3}{k} \right) (Z'_n(k))^2. \quad (5.24)$$

Теперь рассмотрим случай вынужденных колебаний, для этого требуется найти решение $y_2(z, t)$ неоднородного уравнения (5.16) с однородными начальными условиями

$$y_2(z, 0) = \dot{y}_2(z, 0) = 0.$$

При учете свойства ортогональности собственных функций (5.15), получим уравнение относительно коэффициентов w_n

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = \frac{1}{m\Delta_n^2} \int_0^1 p(z, t) \left(Z_n(z) + \frac{1}{3} \zeta(1-k)^3 Z'_n(k) \delta'(z-k) \right) dz, \quad (5.25)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Рассмотрим конкретный случай вынужденных колебаний: внезапное приложение момента M_0 на верхнем конце стержня (случай разрушения одной из траверс опоры линии электропередач). Тогда уравнение (5.25) будет иметь вид

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = M_0 \frac{(1-k)^2}{l^2 m \Delta_n^2} Z'_n(k), \quad (5.26)$$

а его решение

$$w_n(t) = 16\tilde{M}_0 \frac{Z'_n(k)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} (1 - \cos \omega_n t); \quad \tilde{M}_0 = \frac{M_0 l^2}{(1-k)^2 EJ_2}.$$

Уравнение перемещений сечений стержня определяется зависимостью

$$y(z, t) = 16\tilde{M}_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z'_n(k)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} Z_n(z) (1 - \cos \omega_n t). \quad (5.27)$$

Из соотношения (1.2) получаем уравнение для изгибающих моментов

$$M(z, t) = 16M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z'_n(k)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} z^2 Z''_n(z) (1 - \cos \omega_n t) \quad (5.28)$$

В случае статического действия момента M_0 уравнение изогнутой оси опоры будет

$$f(z) = \tilde{M}_0 (z - \ln z - 1)$$

Введем обозначение для безразмерного времени

$$\tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{m}}$$

Тогда выражения для динамических коэффициентов по прогибу и изгибающему моменту в основании опоры получим в виде

$$\begin{aligned} K_y(\tau) &= \frac{y(k, \tau)}{f(k)} = \frac{16(1-k)^4}{k - \ln k - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z'_n(k)}{\Delta_n^2 \tilde{\lambda}_n^4} Z_n(k) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n \tau) \\ K_M(\tau) &= \frac{M(1, \tau)}{M_0} = 16(1-k)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z'_n(k)}{\Delta_n^2 \tilde{\lambda}_n^4} Z''_n(1) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n \tau) \end{aligned} \quad (5.29)$$

На рисунке 5.4 показаны в зависимости от τ значения коэффициентов (5.29) для конструкции опоры с параметрами $k = 0.5$ и $\zeta = 0.01$. Максимальное значение верхней зависимости $K_y = 1.95$. Расчеты при разных значениях параметров k и ζ показали, что максимальное значение близко к двум, что характерно и для стержней постоянной жесткости [117]. Максимальное значение нижней зависимости $K_M = 4.2$, причем для разных комбинаций величин k и ζ оно может меняться в широких пределах. Результаты данного исследования представлены в статье [222]. Спектральный анализ для стержня моделирующего конструкцию буровой вышки рассмотрен в статье [228].

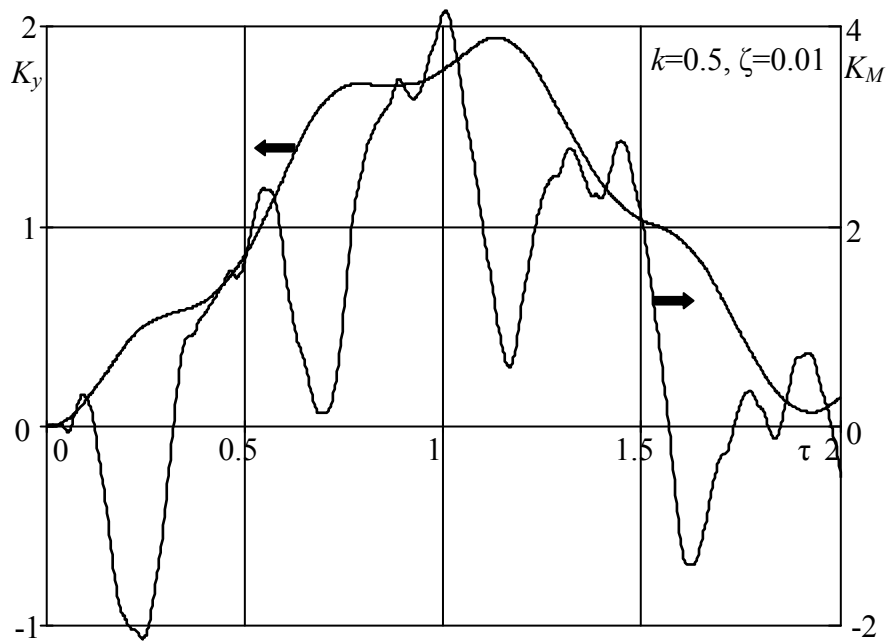


Рисунок 5.4. Динамические коэффициенты по прогибам свободного конца стержня и моментам в заделке.

5.1.2. Применение методики для исследования динамических процессов в стержне с переменной линейной плотностью и изгибной жесткостью при собственных колебаниях

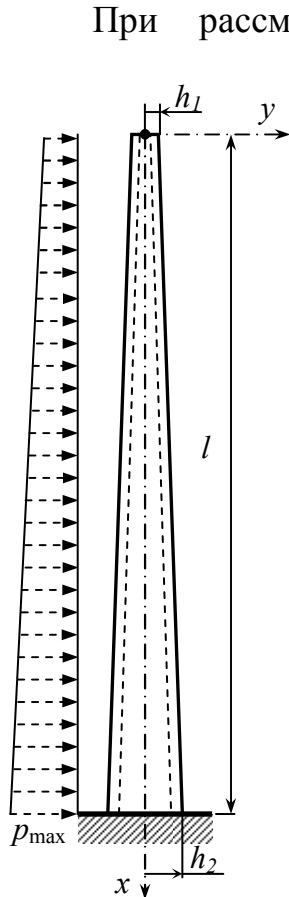


Рисунок 5.5.
Расчетная схема
конической опоры.

При рассмотрении свободных колебаний, для случая внезапного разгрузки системы, основная сложность состоит в приведении динамического уравнения изгиба к форме начального статического состояния. Подход к решению этой задачи, рассмотренный в литературе [264, 271, 266] представляет собой весьма трудоемкую процедуру непосредственного интегрирования уравнений изгиба. Так в статье [253] данный подход использован для динамического расчета однородной балки, моделирующей конструкции металлических мачт радиосвязи на оттяжках. Для рассматриваемого случая неоднородных стержней применение такого подхода, практически не реализуемо для специальных функций. Поиск альтернативного подхода к решению такой задачи рассмотрен в статье автора [229].

В качестве математической модели рассмотрим упругий стержень переменной изгибной жесткости $EJ = EJ_2 z^3$ с линейной плотностью $m = \gamma F_2 z$ и длиной l (рисунок 5.5). Для случая конической трубы уравнение изгибных колебаний (5.1) будет иметь вид

$$z^3 y'''' + 6z^2 y''' + 6zy'' = \frac{p(z, t)l^4}{EJ_2(1-k)^4} - \frac{\gamma F_2 l^4}{EJ_2(1-k)^4} z\ddot{y}.$$

Соответственно уравнение для собственных функций будет (5.8)

$$Z_n(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(C_1 J_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 Y_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 I_1(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 K_1(\lambda_n \sqrt{z}) \right). \quad (5.30)$$

Граничные условия в соответствии с принятой схемой (рисунок 5.5) имеют вид

$$y(l, t) = 0, \quad y'(l, t) = 0, \quad Q(0, t) = 0, \quad (5.31)$$

$$M(0, t) = 0. \quad (5.32)$$

Удовлетворив граничным условиям (2), выражение для собственных функций (1) получим в виде

$$Z_n(z) = \pi(J_1(\lambda_n \sqrt{z})(Y_1(\lambda_n) - \alpha_n Y_2(\lambda_n)) - Y_1(\lambda_n \sqrt{z})(J_1(\lambda_n) - \alpha_n J_2(\lambda_n))) + \\ + 2(I_1(\lambda_n \sqrt{z})(K_1(\lambda_n) - \alpha_n K_2(\lambda_n)) - K_1(\lambda_n \sqrt{z})(I_1(2\lambda_n) + \alpha_n I_2(2\lambda_n))), \quad (5.33)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\pi(J_2(\lambda_n \sqrt{k})Y_1(\lambda_n) - Y_2(\lambda_n \sqrt{k})J_1(\lambda_n)) + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{k})K_1(\lambda_n) + K_2(\lambda_n \sqrt{k})I_1(\lambda_n))}{\pi(J_2(\lambda_n \sqrt{k})Y_2(\lambda_n) - Y_2(\lambda_n \sqrt{k})J_2(\lambda_n)) + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{k})K_2(\lambda_n) - K_2(\lambda_n \sqrt{k})I_2(\lambda_n))}.$$

Найдем выражения для углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил. Определим производные от собственных функций (5.33):

$$Z'(z) = \frac{\lambda_n}{2z} \left(\pi(-J_2(\lambda_n \sqrt{z})(Y_1(\lambda_n) - \alpha Y_2(\lambda_n)) + Y_2(\lambda_n \sqrt{z})(J_1(\lambda_n) - \alpha J_2(\lambda_n))) + \right. \\ \left. + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{z})(K_1(\lambda_n) - \alpha K_2(\lambda_n)) + K_2(\lambda_n \sqrt{z})(I_1(\lambda_n) + \alpha I_2(\lambda_n))) \right) \\ z^3 Z''(z) = \frac{\lambda_n z}{4} \left(\pi((4J_2(\lambda_n \sqrt{z}) - \lambda_n \sqrt{z}J_1(\lambda_n \sqrt{z}))(Y_1(\lambda_n) - \alpha Y_2(\lambda_n)) - \right. \\ \left. - (4Y_2(\lambda_n \sqrt{z}) - \lambda_n \sqrt{z}Y_1(\lambda_n \sqrt{z}))(J_1(\lambda_n) - \alpha J_2(\lambda_n))) - \right. \\ \left. - 2((4I_2(\lambda_n \sqrt{z}) - \lambda_n \sqrt{z}I_1(\lambda_n \sqrt{z}))(K_1(\lambda_n) - \alpha K_2(\lambda_n)) + \right. \\ \left. + (4K_2(\lambda_n \sqrt{z}) + \lambda_n \sqrt{z}K_1(\lambda_n \sqrt{z}))(I_1(\lambda_n) + \alpha I_2(\lambda_n))) \right) \\ (z^3 Z''(z))' = \frac{\lambda_n^3 z}{8} \left(\pi(J_2(\lambda_n \sqrt{z})(Y_1(\lambda_n) - \alpha Y_2(\lambda_n)) - Y_2(\lambda_n \sqrt{z})(J_1(\lambda_n) - \alpha J_2(\lambda_n))) + \right. \\ \left. + 2(I_2(\lambda_n \sqrt{z})(K_1(\lambda_n) - \alpha K_2(\lambda_n)) + K_2(\lambda_n \sqrt{z})(I_1(\lambda_n) + \alpha I_2(\lambda_n))) \right)$$

Из условия (5.32) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$Z_n''(\lambda_n \sqrt{k}) = 0. \quad (5.34)$$

С учетом того, что во многих упрощенных методах динамического расчета используется значение первой собственной частоты, оценим влияние параметра k на значение первого собственного числа уравнения (5.34)

$$\omega_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}}, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2}(1-k).$$

Численные исследования зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от параметра относительного

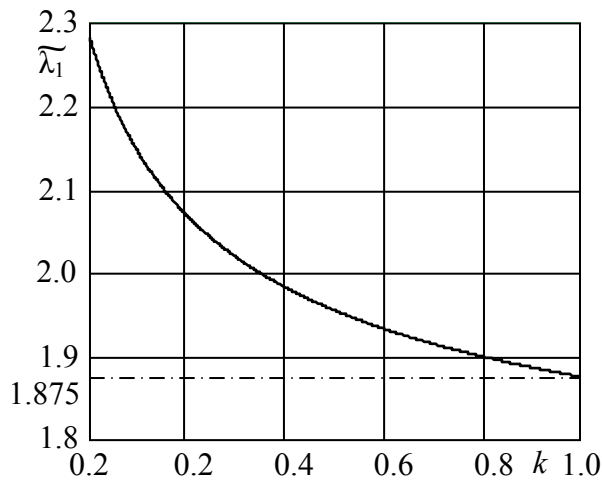


Рисунок 5.6. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от параметра относительного поперечного размера k .

поперечного размера k представлены на рисунке 5.6. Видно, что $\tilde{\lambda}_1 = 1.875$ при $k = 1$ (это соответствует собственному значению для консольной балки постоянной жесткости [192]).

Собственные функции будут ортогональны с весом (5.14) $\rho(z) = z$

$$\int_k^1 z Z_n(z) Z_m(z) dz = 0. \quad (5.35)$$

Из (5.13), принимая во внимание граничные условия (5.31), (5.32) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{8}{\lambda_n^4} Z_n''(1)^2 - \frac{k^2}{2} Z_n^2(k).$$

В процессе эксплуатации конструкции несущих опор подвергаются воздействию переменных и ударных нагрузок: нагрузки, связанные с работой оборудования, сейсмические возмущения, а также нагрузки, возникающие в процессе монтажных работ и при аварийных ситуациях. Одним из видов такого воздействия является ветровая нагрузка, которая носит импульсный характер, что приводит к чередованию собственных и вынужденных колебаний конструкции. Остановимся на случае собственных колебаний, вызванных отклонением

продольной оси распределенной нагрузкой интенсивностью $p(z) = p_{\max} z$ ($k \leq z \leq 1$), которая в начальный момент времени исчезает (рисунок 5.5). Для этого найдем решение $y(z, t)$ однородного уравнения (5.16) с начальными условиями

$$y(z, 0) = f(z); \quad \dot{y}(z, 0) = 0, \quad (5.36)$$

где

$$f(z) = \frac{p_2 l^4}{12(1-k)^4 E J_2} \left(\frac{2k^3}{z} + 6k^2 \ln z + 2(k^3 - 3k^2 - 1)z + z^2 + 1 - 4k^3 + 6k^2 \right) -$$

уравнение начальных прогибов.

Решение уравнения с учетом второго начального условия (5.36) получим в виде

$$y(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) \cos \omega_n t, \quad (5.37)$$

где A_n – коэффициенты разложения.

Постоянные A_n определим из первого начального условия (5.36)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n Z_n(z) = f(z). \quad (5.38)$$

Умножив обе части равенства (5.38) на $z Z_m(z)$ и проинтегрировав на участке $[k; 1]$, с учетом свойства (5.35) получим

$$A_n \Delta_n^2 = \int_k^1 z Z_n(z) f(z) dz. \quad (5.39)$$

Для определения интеграла из правой части равенства (5.39) учтем, что $zZ_n = \frac{16}{\lambda_n^4} (z^3 Z_n'')''$, интегрируя по частям, получим выражение для нахождения коэффициентов A_n

$$A_n = \frac{16}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} \left(f(z^3 Z_n'')' - f'(z^3 Z_n'') + (z^3 f'') Z_n' - (z^3 f'')' Z_n \right) \Big|_k^1 + \frac{16}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} \int_k^1 (z^3 f'')'' Z_n dz. \quad (5.40)$$

С учетом граничных условий (5.31), (5.32), а также, что

$$(z^3 f''(z))'' = \frac{p_2 l^4}{(1-k)^4 EJ_2} z$$

из уравнения (5.40) получим

$$A_n = \frac{256 p_2 l^4}{\Delta_n^2 \lambda_n^8 (1-k)^4 EJ_2} (z^3 Z_n'')' \Big|_{z=1}.$$

Продифференцировав уравнение прогибов (5.37), получаем выражение для изгибающих моментов

$$M(z, t) = \frac{(1-k)^2 EJ_2}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^3 Z_n''(z) \cos \omega_n t \quad (5.41)$$

При статическом действии нагрузки изгибающий момент определяется зависимостью

$$M_0(z) = \frac{pl^2}{6(1-k)^2} (z^3 - 3k^2 z + 2k^3)$$

Введем обозначение для безразмерного времени

$$\tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}}$$

Зависимости динамических коэффициентов по прогибу и изгибающему моменту в основании опоры для конструкции с параметром относительного поперечного размера $k = 0.5$, за период $\tau = 2$ представлены на графиках рисунок 5.7.

$$K_y(\tau) = \frac{y(k, \tau)}{f(k)}, \quad K_M(\tau) = \frac{M(1, \tau)}{M_0}. \quad (5.42)$$

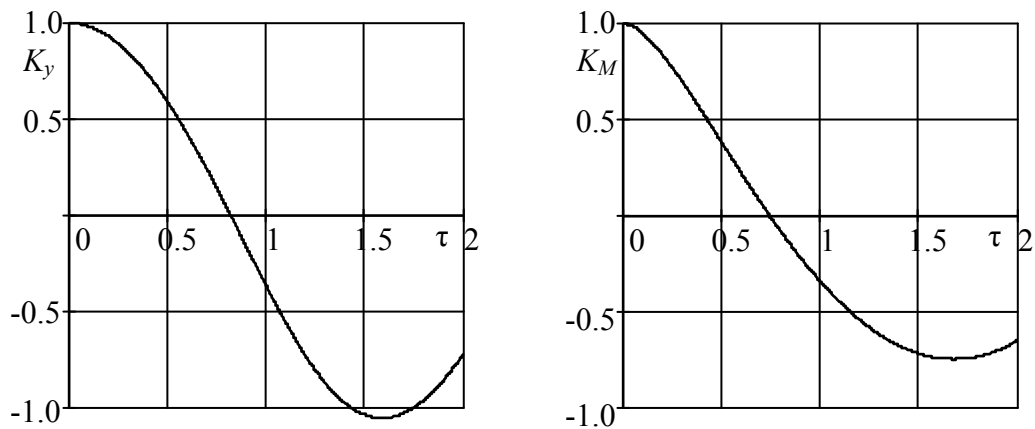


Рисунок 5.7. Изменение динамических коэффициентов в зависимости от безразмерного параметра времени τ .

На рисунке 5.7 показаны зависимости от τ значений коэффициентов (5.42) для конструкции с параметром относительного поперечного размера $k = 0.5$. Максимальное значение коэффициента по прогибам составило $K_y = 1.053$, а по изгибающим моментам $K_M = 1$. Расчеты при разных значениях параметра k показали, что динамический коэффициент по прогибам увеличивается для конструкций остроконечной формы. Используемый в данном примере подход к определению коэффициентов разложения, основанный на интегрировании по частям с учетом граничных условий, позволяет без труда их находить для случая сосредоточенных нагрузок и упрощает процесс интегрирования для произвольного вида нагрузки.

Как видим из рассмотренных примеров, получение расчетных зависимостей путем непосредственного определения произвольных постоянных через граничные условия приводит к весьма громоздким математическим выражениям,

даже для простых схем. Поэтому актуальным является рассмотрение вопроса об использовании метода начальных параметров для решения задачи динамики изгибных колебаний по примеру однородных балок в функциях Крылова.

5.2. Аналитические соотношения метода начальных параметров применительно к проблемам динамического изгиба балок с физико-механической осевой неоднородностью

Выражение произвольных постоянных в собственных функциях (5.8) через начальные параметры весьма затруднительно из-за громоздкости и трудоемкости математических преобразований. На основании рекуррентных соотношений для функций Бесселя и модифицированных функций Бесселя [48]

$$\begin{aligned} J_v(\zeta)Y_{v+1}(\zeta) - J_{v+1}(\zeta)Y_v(\zeta) &= -\frac{2}{\pi\zeta}; \\ I_v(\zeta)K_{v+1}(\zeta) + K_v(\zeta)I_{v+1}(\zeta) &= \frac{1}{\zeta}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

составим комбинации функций с учетом решения (5.8) и его производных, которые можно использовать аналогично функциям Крылова в задачах динамического изгиба однородных балок.

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= \frac{1}{4}\zeta_0(2(I_v(\zeta)K_{v+1}(\zeta_0) + K_v(\zeta)I_{v+1}(\zeta_0)) - \\ &\quad - \pi(J_v(\zeta)Y_{v+1}(\zeta_0) - Y_v(\zeta)J_{v+1}(\zeta_0))); \\ \tilde{A}(\zeta) &= \frac{1}{4}\zeta_0(2(I_{v+1}(\zeta)K_{v+1}(\zeta_0) - K_{v+1}(\zeta)I_{v+1}(\zeta_0)) + \\ &\quad + \pi(J_{v+1}(\zeta)Y_{v+1}(\zeta_0) - Y_{v+1}(\zeta)J_{v+1}(\zeta_0))); \\ B(\zeta) &= \frac{1}{4}\zeta_0(2(I_v(\zeta)K_{v+1}(\zeta_0) + K_v(\zeta)I_{v+1}(\zeta_0)) + \\ &\quad + \pi(J_v(\zeta)Y_{v+1}(\zeta_0) - Y_v(\zeta)J_{v+1}(\zeta_0))); \\ \tilde{B}(\zeta) &= \frac{1}{4}\zeta_0(2(I_{v+1}(\zeta)K_{v+1}(\zeta_0) - K_{v+1}(\zeta)I_{v+1}(\zeta_0)) - \\ &\quad - \pi(J_{v+1}(\zeta)Y_{v+1}(\zeta_0) - Y_{v+1}(\zeta)J_{v+1}(\zeta_0))); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\zeta) &= \frac{1}{4} \zeta_0 (2(I_v(\zeta)K_v(\zeta_0) - K_v(\zeta)I_v(\zeta_0)) - \\
&\quad - \pi(J_v(\zeta)Y_v(\zeta_0) - Y_v(\zeta)J_v(\zeta_0))); \\
\tilde{C}(\zeta) &= \frac{1}{4} \zeta_0 (2(I_{v+1}(\zeta)K_v(\zeta_0) + K_{v+1}(\zeta)I_v(\zeta_0)) + \\
&\quad + \pi(J_{v+1}(\zeta)Y_v(\zeta_0) - Y_{v+1}(\zeta)J_v(\zeta_0))); \\
D(\zeta) &= \frac{1}{4} \zeta_0 (2(I_v(\zeta)K_v(\zeta_0) - K_v(\zeta)I_v(\zeta_0)) + \\
&\quad + \pi(J_v(\zeta)Y_v(\zeta_0) - Y_v(\zeta)J_v(\zeta_0))); \\
\tilde{D}(\zeta) &= \frac{1}{4} \zeta_0 (2(I_{v+1}(\zeta)K_v(\zeta_0) + K_{v+1}(\zeta)I_v(\zeta_0)) - \\
&\quad - \pi(J_{v+1}(\zeta)Y_v(\zeta_0) - Y_{v+1}(\zeta)J_v(\zeta_0))),
\end{aligned} \tag{5.44}$$

здесь ζ_0 – значение аргумента в начальной точке отсчета.

Не сложно убедиться, что с учетом зависимостей (5.43), функции (5.44) в точке $\zeta = \zeta_0$ будут принимать следующие значения:

$$A(\zeta_0) = \tilde{C}(\zeta_0) = 1; B(\zeta_0) = C(\zeta_0) = D(\zeta_0) = \tilde{A}(\zeta_0) = \tilde{B}(\zeta_0) = \tilde{D}(\zeta_0) = 0. \tag{5.45}$$

Графическое изображение зависимостей (5.44) при значениях $v = 0$, $\zeta_0 = 1$ представлено на рисунке 5.8.

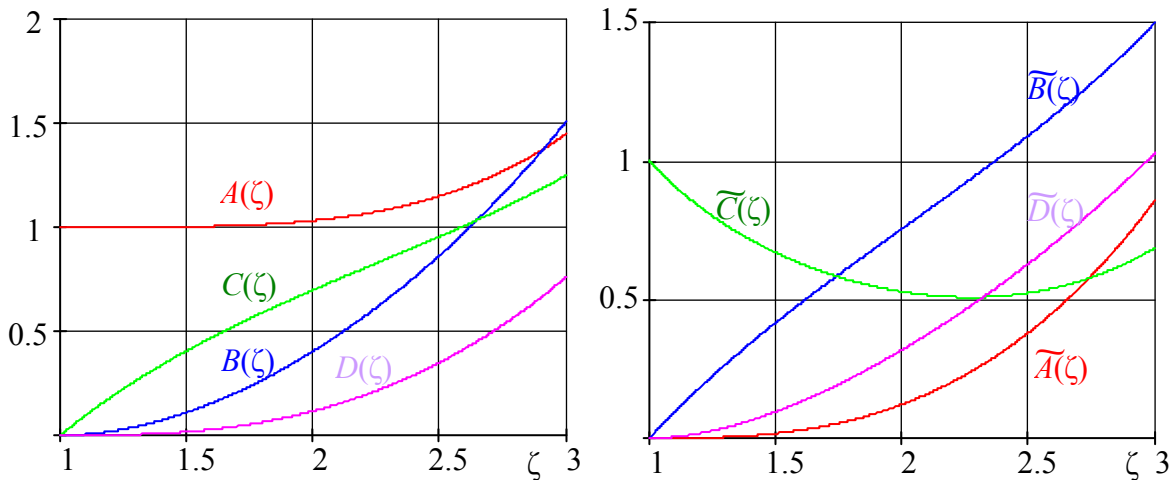


Рисунок 5.8. Графики функций (5.44) для значений $v = 0$; $\zeta_0 = 1$.

Для зависимостей (5.44) будут иметь место рекуррентные соотношения, следующие из свойств функций Бесселя [48]:

$$\begin{aligned} (\zeta^{-\nu} A(\zeta))' &= \zeta^{-\nu} \tilde{A}(\zeta); \quad (\zeta^{-\nu} B(\zeta))' = \zeta^{-\nu} \tilde{B}(\zeta); \\ (\zeta^{-\nu} C(\zeta))' &= \zeta^{-\nu} \tilde{C}(\zeta); \quad (\zeta^{-\nu} D(\zeta))' = \zeta^{-\nu} \tilde{D}(\zeta). \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} (\zeta^{-\nu-1} \tilde{A}(\zeta))' &= \zeta^{-\nu-1} B(\zeta) - 2(\nu+1)\zeta^{-\nu-2} \tilde{A}(\zeta); \\ (\zeta^{-\nu-1} \tilde{B}(\zeta))' &= \zeta^{-\nu-1} A(\zeta) - 2(\nu+1)\zeta^{-\nu-2} \tilde{B}(\zeta); \\ (\zeta^{-\nu-1} \tilde{C}(\zeta))' &= \zeta^{-\nu-1} D(\zeta) - 2(\nu+1)\zeta^{-\nu-2} \tilde{C}(\zeta); \\ (\zeta^{-\nu-1} \tilde{D}(\zeta))' &= \zeta^{-\nu-1} C(\zeta) - 2(\nu+1)\zeta^{-\nu-2} \tilde{D}(\zeta). \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} (\zeta^{\nu+1} \tilde{A}(\zeta))' &= \zeta^{\nu+1} B(\zeta); \quad (\zeta^{\nu+1} \tilde{B}(\zeta))' = \zeta^{\nu+1} A(\zeta); \\ (\zeta^{\nu+1} \tilde{C}(\zeta))' &= \zeta^{\nu+1} D(\zeta); \quad (\zeta^{\nu+1} \tilde{D}(\zeta))' = \zeta^{\nu+1} C(\zeta), \end{aligned} \quad (5.48)$$

штрихом обозначена производная по ζ .

На основе решения (5.3), принимая во внимание выражения (5.6) и (5.8), а также свойство введенных функций (5.45), выражение для динамических прогибов получим в виде

$$\begin{aligned}
y(z, t) = & z^{-\nu/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_0 k^{\nu/2} A(\lambda_n \sqrt{z}) + \right. \\
& + \frac{2l\theta_0}{\lambda_n(1-k)} k^{(\nu+1)/2} \left(C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \\
& + \frac{4l^2 M_0}{\lambda_n^2 (1-k)^2 EJ_2} k^{-(\nu+2)/2} B(\lambda_n \sqrt{z}) + \\
& \left. + \frac{8l^3 P_0}{\lambda_n^3 (1-k)^3 EJ_2} k^{-(\nu+1)/2} D(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n),
\end{aligned} \tag{5.49}$$

здесь y_0 , θ_0 , M_0 , P_0 – прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила соответственно в точке $x = 0$ ($z = k$).

Взяв производную по длине в выражении (5.49) с учетом аргумента функций (5.44) $\zeta = \lambda_n \sqrt{z}$, и соответственно $\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\lambda_n}{2\sqrt{z}}$, получим зависимость для углов поворота

$$\begin{aligned}
\theta(z, t) = & z^{-(\nu+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n(1-k)y_0}{2l} k^{\nu/2} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) + \right. \\
& + \theta_0 k^{(\nu+1)/2} \left(\tilde{C}(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \\
& + \frac{2lM_0}{\lambda_n(1-k)EJ_2} k^{-(\nu+2)/2} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) + \\
& \left. + \frac{4l^2 P_0}{\lambda_n^2 (1-k)^2 EJ_2} k^{-(\nu+1)/2} \tilde{D}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n).
\end{aligned} \tag{5.50}$$

С учетом (5.47) находим выражение динамических моментов

$$\begin{aligned}
M(z, t) = & z^{(v+2)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n^2 (1-k)^2 EJ_2 y_0}{4l^2} k^{v/2} \left(B(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{z}} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \right. \\
& + \frac{\lambda_n (1-k) EJ_2 \theta_0}{2l} k^{(v+1)/2} \left(D(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} A(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{z}} \left(\tilde{C}(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \right) \Bigg) + \\
& + M_0 k^{-(v+2)/2} \left(A(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{z}} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \\
& + \frac{2lP_0}{\lambda_n (1-k)} k^{-(v+1)/2} \left(C(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{z}} \tilde{D}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \Bigg) \sin(\omega_n t + \mu_n).
\end{aligned} \quad (5.51)$$

Аналогичным образом с учетом (5.48) получим зависимость для поперечных сил

$$\begin{aligned}
Q(z, t) = & z^{(v+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n^3 (1-k)^3 EJ_2 y_0}{8l^3} k^{v/2} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) + \right. \\
& + \frac{\lambda_n^2 (1-k)^2 EJ_2 \theta_0}{4l^2} k^{(v+1)/2} \left(\tilde{D}(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \\
& + \frac{\lambda_n (1-k) M_0}{2l} k^{-(v+2)/2} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) + \\
& + P_0 k^{-(v+1)/2} \tilde{C}(\lambda_n \sqrt{z}) \Bigg) \sin(\omega_n t + \mu_n).
\end{aligned} \quad (5.52)$$

Рассмотрим пример моделирования НДС в стержневидных конструкциях с

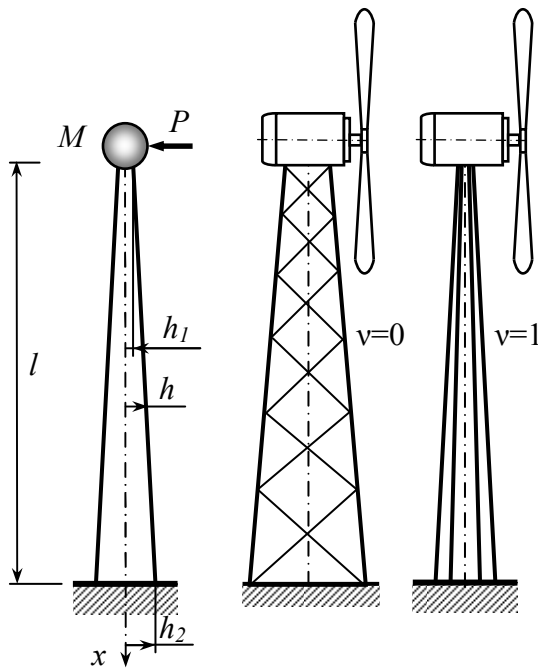


Рисунок 5.9. Расчетная схема конструкций переменной изгибной жесткости.

осевой неоднородностью изгибной жесткости и линейной плотности на основе предложенной методики. Данный пример представлен в статье [246].

Исследуем случай вынужденных колебаний от внезапного приложения силы P к сосредоточенной массе M , которая находится на свободном конце стержня длиной l (рисунок 5.9). В этом случае, начальные параметры будут:

$$M_0 = 0; P_0 = M\dot{y}(0, t).$$

Граничные условия на защемленном конце

стержня:

$$y(l, t) = 0; \quad y'(l, t) = 0. \quad (5.53)$$

Удовлетворив второму условию (5.53), выражение прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил (5.49-5.52), получим в виде

$$\begin{aligned} y(z, t) &= z^{-v/2} \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \left(k^{v/2} A(\lambda_n \sqrt{z}) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n \left(C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_n \xi \frac{1-k^{v+1}}{2(v+1)} k^{-(v+1)/2} D(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n); \\ \theta(z, t) &= z^{-(v-1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n (1-k) y_{0n}}{2l} \left(k^{v/2} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n \left(\tilde{C}(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_n \xi \frac{1-k^{v+1}}{2(v+1)} k^{-(v+1)/2} \tilde{D}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n); \\ M(z, t) &= z^{(v+2)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 (1-k)^2 EJ_2 y_{0n}}{4l^2} \left(k^{v/2} \left(B(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{z}} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n \left(D(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} A(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{z}} \left(\tilde{C}(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_n \xi \frac{1-k^{v+1}}{2(v+1)} k^{-(v+1)/2} \left(C(\lambda_n \sqrt{z}) - \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{z}} \tilde{D}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n); \\ Q(z, t) &= z^{(v+1)/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^3 (1-k)^3 EJ_2 y_{0n}}{8l^3} \left(k^{v/2} \tilde{B}(\lambda_n \sqrt{z}) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_n \left(\tilde{D}(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{A}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_n \xi \frac{1-k^{v+1}}{2(v+1)} k^{-(v+1)/2} \tilde{C}(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n); \\ \alpha_n &= \frac{\lambda_n}{2(v+1)k^{v/2}} \frac{2(v+1)k^{v+1/2} \tilde{A}(\lambda_n) + \lambda_n \xi (1-k^{v+1}) \tilde{D}(\lambda_n)}{\lambda_n \sqrt{k} \tilde{C}(\lambda_n) + 2(v+1) \tilde{B}(\lambda_n)}, \end{aligned}$$

здесь $\xi = M / M_0$, M_0 – масса стержня.

И первого граничного условия (5.53) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$k^{v/2} A(\lambda_n) + \lambda_n \xi \frac{1-k^{v+1}}{2(v+1)} k^{-(v+1)/2} D(\lambda_n) - \alpha_n \left(C(\lambda_n) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n) \right) = 0. \quad (5.54)$$

С учетом того, что во многих приближенных методах динамического расчета [117] используется значение первой собственной частоты, оценим влияние параметра k на значения первого собственного числа уравнения (5.54)

$$\omega_1 = \frac{\tilde{\lambda}_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}}, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{1}{2} \lambda_n (1-k),$$

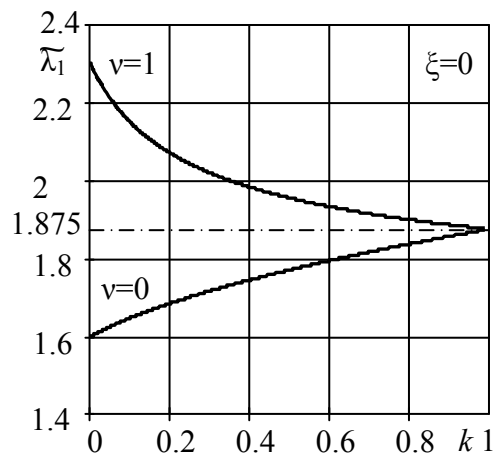


Рисунок 5.10. Зависимость $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра относительного поперечного размера k

аналогичным образом определяются частоты стержней постоянной жесткости [239].

Численные исследования зависимости $\tilde{\lambda}_1$ от величины параметра k , без учета сосредоточенной массы ($\xi = 0$), представлены на рисунке 5.10. Из графика видно, что для крайних случаев k величина $\tilde{\lambda}_1$ совпадает с известными значениями, так при $k = 1$ – $\tilde{\lambda}_1 = 1,875$, что соответствует собственному значению для консольной балки постоянной жесткости [192], а

при $k = 0$ – $\tilde{\lambda}_1 = 1,595$ для $v = 0$ и $\tilde{\lambda}_1 = 2,305$ для $v = 1$, данные значения получены при исследовании колебаний остроконечных конструкций [79].

С учетом наличия сосредоточенной массы на верхнем торце стержня (рисунок 5.9), собственные функции будут ортогональны с весом (5.14)

$$\rho(z) = z^v + \xi \frac{1-k^{v+1}}{v+1} \delta(z-k).$$

Тогда из соотношения (5.13) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{8}{\lambda_n^4} (Z_n''(1))^2 - \frac{k^{v+1}}{2} + \xi \frac{1-k^{v+1}}{2(v+1)} \left(v+1 - \alpha_n \lambda_n k^{(1-v)/2} \right).$$

С учетом внезапного приложения силы P уравнение (5.18) будет иметь вид

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = P \frac{1-k}{l \gamma F_2 \Delta_n^2},$$

а его решение

$$w_n(t) = \tilde{y}_0 \frac{16}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} (1 - \cos \omega_n t); \quad \tilde{y}_0 = \frac{Pl^3}{(1-k)^3 EJ_2}.$$

Таким образом, в окончательном виде получим уравнения прогибов и изгибающих моментов

$$y(z, t) = 16 \tilde{y}_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} Z_n(z) (1 - \cos \omega_n t); \quad (5.55)$$

$$M(z, t) = 16 \frac{Pl}{1-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} z^{v+2} Z_n''(z) (1 - \cos \omega_n t). \quad (5.56)$$

В случае статического приложения силы P , уравнения изогнутой оси стержней будут

$$f(z) = \tilde{y}_0 ((z+k) \ln z + (1-z)(1+k)), \text{ для } v=0;$$

$$f(z) = \tilde{y}_0 \left(\left(1 - \frac{k}{2} \right) z - 1 + k - \ln z - \frac{k}{2z} \right), \text{ для } v=1.$$

Введем обозначение для безразмерного времени

$$\tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}}.$$

Тогда выражения для динамических коэффициентов по максимальному прогибу и изгибающему моменту в заделке получим в виде

$$K_y(\tau) = \frac{y(k, \tau)}{f(k)} = \frac{16(1-k)^4}{2k \ln k + 1 - k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \tilde{\lambda}_n^4} (1 - \cos \tilde{\lambda}_n^2 \tau) \text{ для } \nu = 0; \quad (5.57)$$

$$K_y(\tau) = \frac{y(k, \tau)}{f(k)} = \frac{32(1-k)^4}{4k - k^2 - 3 - 2 \ln k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \tilde{\lambda}_n^4} (1 - \cos \tilde{\lambda}_n^2 \tau) \text{ для } \nu = 1; \quad (5.58)$$

$$K_M(\tau) = \frac{M(1, \tau)}{Pl} = 16(1-k)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n^2 \tilde{\lambda}_n^4} Z_n''(1) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n^2 \tau) \quad (5.59)$$

На рисунке 5.11 показаны зависимости от τ значений коэффициентов (5.57) и (5.59) для конструкции опоры с параметрами $k = 0.2$; $\xi = 0.1$; $\nu = 0$. Максимальные значения коэффициентов составляют: $K_y = 2$; $K_M = 2.27$. На рисунке 5.12 показаны зависимости от τ значений коэффициентов (5.58) и (5.59) для конструкции с параметрами $k = 0.2$; $\xi = 0.1$; $\nu = 1$. В этом случае максимальные значения: $K_y = 1.95$; $K_M = 2.45$. Расчеты при разных значениях параметров k и ξ показали, что максимальное значение коэффициента по прогибам для всех моделей конструкций близко к двум, что характерно и для стержней постоянной жесткости [117]. Максимальное значение коэффициента по изгибающим моментам в зависимости от комбинаций величин ν , k и ξ может меняться в широких пределах. Следует отметить, что в случае внезапного приложения момента на верхнем конце решетчатой конструкции (случай разрушения одной из траверс опоры линии электропередач) динамические коэффициенты составляют: $K_y = 1.95$; $K_M = 4.2$ [222].

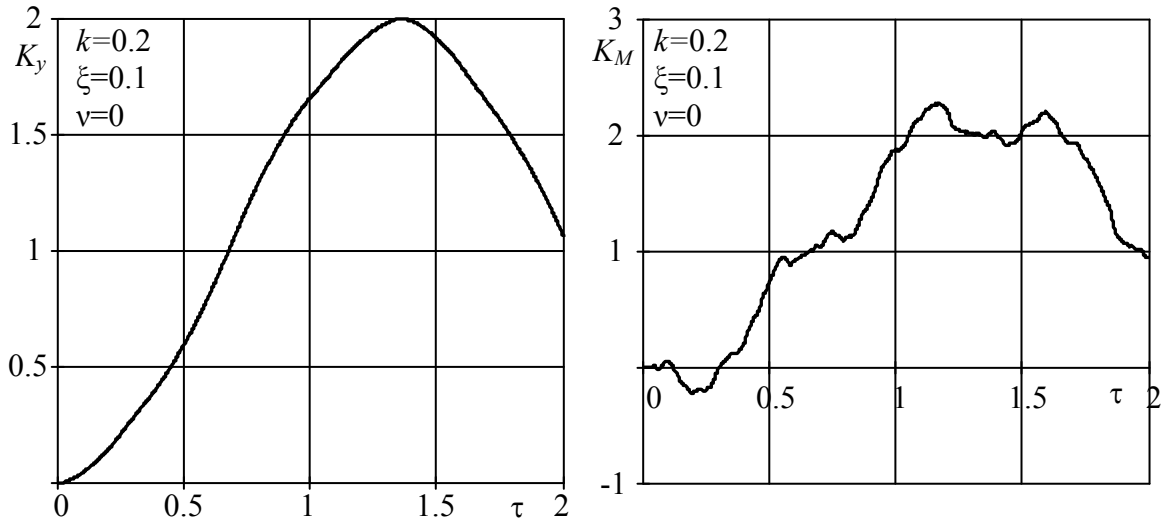


Рисунок 5.11. Динамические коэффициенты по максимальному прогибу и изгибающему моменту в заделке стержня, моделирующего конструкцию решетчатой башни.

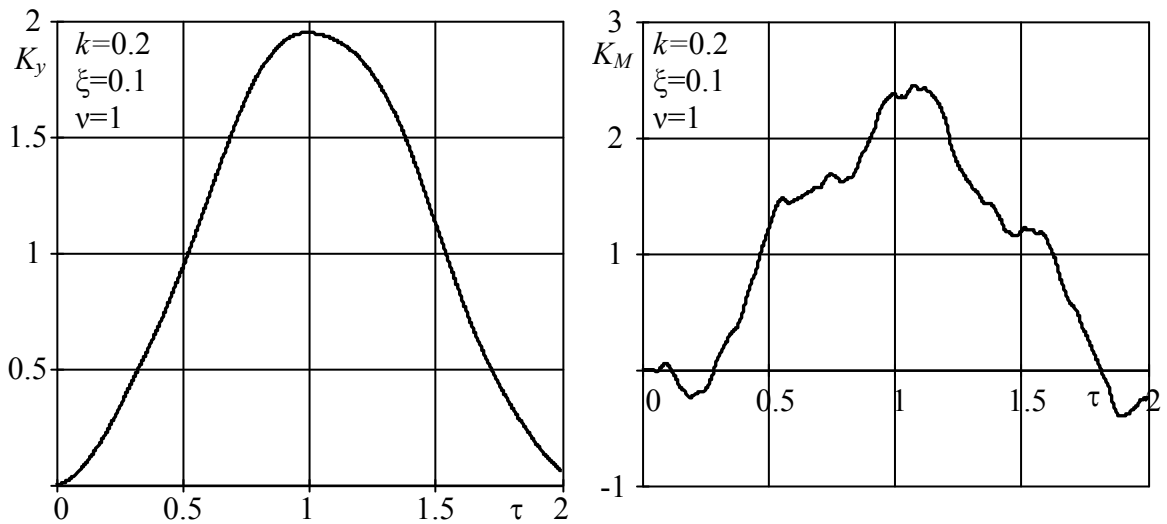


Рисунок 5.12. Динамические коэффициенты по максимальному прогибу и изгибающему моменту в заделке стержня, моделирующего конструкцию многогранной гнутой стойки.

5.3. Получение и применение асимптотических представлений для собственных функций граничных задач динамического изгиба балок с осевой неоднородностью геометрических характеристик

Для реализации численных алгоритмов определения собственных значений разных граничных задач (5.1) следует рассмотреть возможность использования

асимптотического разложения бесселевых функций, входящих в выражения (5.44).

Для функций мнимого аргумента асимптотические разложения известны [48]:

$$\begin{aligned}
 K_\nu(z) &\approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu, 2m)}{(2z)^m} \approx \\
 &\approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \dots\right); \\
 I_\nu(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m)}{(2z)^m}.
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

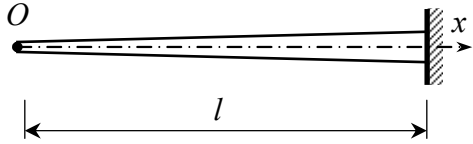
Ограничимся нулевыми членами рядов (4.82) и (5.60), тогда для функций (5.44) получим выражения

$$\begin{aligned}
 A(\zeta) = \tilde{C}(\zeta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\cosh(\zeta - \zeta_0) + \cos(\zeta - \zeta_0)); \\
 B(\zeta) = \tilde{D}(\zeta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\cosh(\zeta - \zeta_0) - \cos(\zeta - \zeta_0)); \\
 C(\zeta) = \tilde{B}(\zeta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\sinh(\zeta - \zeta_0) + \sin(\zeta - \zeta_0)); \\
 D(\zeta) = \tilde{A}(\zeta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} (\sinh(\zeta - \zeta_0) - \sin(\zeta - \zeta_0)).
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Рассмотрим асимптотические представления собственных функций для наиболее актуальных для технических задач видов граничных условий.

5.3.1. Асимптотика собственных функций консольного стержня

Для стержня рисунок 5.13 граничные условия будут:



$$\begin{aligned} M(k, t)|_{x=0} &= 0; \quad Q(k, t)|_{x=0} = 0; \\ y(1, t)|_{x=l} &= 0; \quad \theta(1, t)|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Рисунок 5.13. Расчетная схема консольного стержня

В соответствии с первыми двумя условиями (5.62) выражение для прогибов (5.49) будет иметь вид

$$\begin{aligned} y(z, t) &= z^{-\nu/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_0 k^{\nu/2} A(\lambda_n \sqrt{z}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2l\theta_0}{\lambda_n(1-k)} k^{(\nu+1)/2} \left(C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n). \end{aligned}$$

Удовлетворив четвертое граничное условие (5.62), получим выражение для собственных функций

$$\begin{aligned} Z_n(z) &= z^{-\nu/2} \left(-\frac{A(\lambda_n \sqrt{z})}{\tilde{A}(\lambda_n)} \left(\tilde{C}(\lambda_n) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n) \right) + \right. \\ &\quad \left. + C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Из третьего условия (5.62) следует частотное уравнение

$$\tilde{A}(\lambda_n)C(\lambda_n) - A(\lambda_n)\tilde{C}(\lambda_n) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} (\tilde{A}(\lambda_n)B(\lambda_n) - A(\lambda_n)\tilde{B}(\lambda_n)) = 0. \quad (5.64)$$

Подставив выражение функций из (5.61) в уравнение (5.64) получим

$$1 + \cos(\lambda_n(1 - \sqrt{k})) \cosh(\lambda_n(1 - \sqrt{k})) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} (\sin(\lambda_n(1 - \sqrt{k})) \cosh(\lambda_n(1 - \sqrt{k})) + \cos(\lambda_n(1 - \sqrt{k})) \sinh(\lambda_n(1 - \sqrt{k}))) = 0. \quad (5.65)$$

Не сложно заметить, что по структуре первая часть уравнения (5.65) аналогична частотному уравнению консольного однородного стержня [266].

В таблице 5.1. приведены результаты расчета собственных значений $\tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2}(1-k) \left(\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}} \right)$, полученные из численного решения точного уравнения (5.64) и из трансцендентного уравнения (5.65) для стержней с различными геометрическими параметрами. Собственные значения для однородно стержня взяты из справочника [192]

Таблица 5.1.

Собственные значения первых форм колебаний консольного стержня

Характеристики стержня	Отношение торцевых размеров, k	Расчетная зависимость	Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$, для соответствующего номера формы				
			1	2	3	4	5
Однородный $m = \text{const}$ $EJ = \text{const}$	1	-	1,875	4,694	7,855	11	14,14
$m = \text{const}$ $EJ(z) = EJ_2 z^2$ ($v = 0$)	0,01	(5.64)	1,604	3,196	4,83	6,488	8,162
		(5.65)	1,277	2,952	4,648	6,349	8,053
	0,1	(5.64)	1,646	3,465	5,431	7,439	9,469
		(5.65)	1,463	3,38	5,388	7,414	9,454
	0,5	(5.64)	1,77	4,144	6,788	9,446	12,11
		(5.65)	1,736	4,135	6,785	9,445	12,11
$m(z) = \gamma F_2 z$ $EJ(z) = EJ_2 z^3$ ($v = 1$)	0,01	(5.64)	2,284	3,869	5,452	7,05	8,665
		(5.65)	1,288	2,985	4,694	6,403	8,115
	0,1	(5.64)	2,152	3,864	5,73	7,676	9,664
		(5.65)	1,502	3,465	5,479	7,504	9,539
	0,5	(5.64)	1,955	4,28	6,875	9,511	12,17
		(5.65)	1,804	4,223	6,849	9,495	12,16
$m(z) = \gamma F_2 z^2$ $EJ(z) = EJ_2 z^4$ ($v = 2$)	0,01	(5.64)	2,923	4,553	6,142	7,722	9,305
		(5.65)	1,292	2,997	4,711	6,426	8,141
	0,1	(5.64)	2,684	4,322	6,093	7,969	9,908
		(5.65)	1,518	3,506	5,528	7,557	9,593
	0,5	(5.64)	2,151	4,421	6,97	9,582	12,22
		(5.65)	1,845	4,288	6,901	9,539	12,19

На графике рисунок 5.14 показаны три первых собственных формы прогибов (5.63) и соответствующих им изгибающих моментов для клиновидного стержня ($\nu=1$) с отношением радиусов инерций торцевых сечений $k=0,5$, сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (5.44), пунктирными линиями показана их асимптотика (5.61).

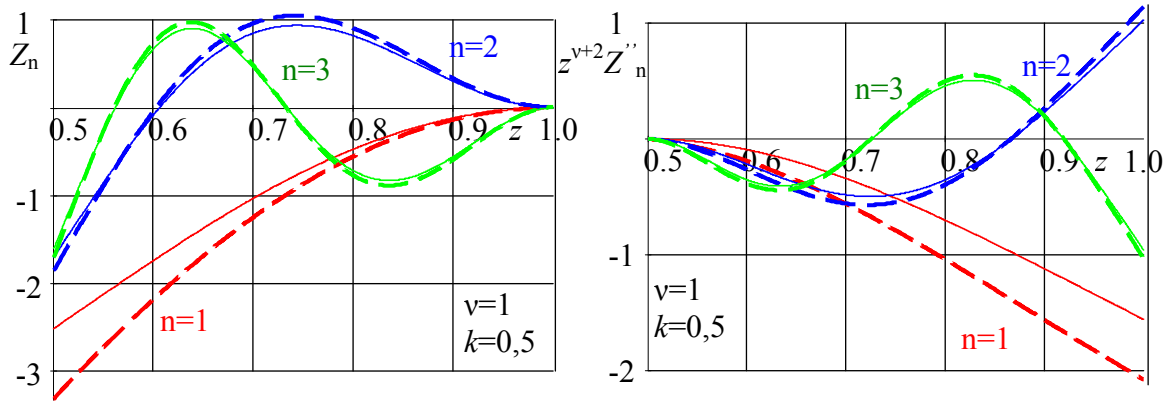
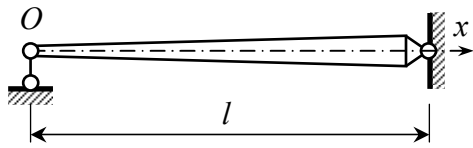


Рисунок 5.14. Первые три собственные формы продольных деформаций и изгибающих моментов консольного стержня

5.3.2. Асимптотика собственных функций стержня с шарнирными опорами по торцам

Для стержня рисунок 5.15 граничные условия будут:



$$\begin{aligned} y(k, t)|_{x=0} &= 0; \quad M(k, t)|_{x=0} = 0; \\ y(1, t)|_{x=l} &= 0; \quad M(1, t)|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Рисунок 5.15. Расчетная схема шарнирно опертого стержня

В соответствии с первыми двумя условиями (5.66) выражение для прогибов (5.49) будет иметь вид

$$\begin{aligned} y(z, t) = z^{-\nu/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2l\theta_0}{\lambda_n(1-k)} k^{(\nu+1)/2} \left(C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{8l^3 P_0}{\lambda_n^3 (1-k)^3 EJ_2} k^{-(\nu+1)/2} D(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \end{aligned}$$

Удовлетворив четвертое граничное условие (5.66), получим выражение для собственных функций

$$Z_n(z) = z^{-\nu/2} \left(-D(\lambda_n \sqrt{z}) \frac{D(\lambda_n) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} A(\lambda_n) - \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n} \left(\tilde{C}(\lambda_n) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n) \right)}{C(\lambda_n) - \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n} \tilde{D}(\lambda_n)} + \right. \\ \left. + C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right). \quad (5.67)$$

Из третьего условия (5.66) следует частотное уравнение

$$C^2(\lambda_n) - D^2(\lambda_n) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n} (\tilde{C}(\lambda_n) D(\lambda_n) - \tilde{D}(\lambda_n) C(\lambda_n)) + \\ + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} (B(\lambda_n) C(\lambda_n) - A(\lambda_n) D(\lambda_n)) + \\ + \frac{4(\nu+1)^2}{\lambda_n^2 \sqrt{k}} (D(\lambda_n) \tilde{B}(\lambda_n) - B(\lambda_n) \tilde{D}(\lambda_n)) = 0. \quad (5.68)$$

Подставив выражение функций из (5.61) в уравнение (5.68) получим

$$\sinh(\lambda_n (1 - \sqrt{k})) \sin(\lambda_n (1 - \sqrt{k})) + \\ + \frac{2(\nu+1)(1 - \sqrt{k})}{\lambda_n \sqrt{k}} (\cosh(\lambda_n (1 - \sqrt{k})) \sin(\lambda_n (1 - \sqrt{k})) - \sinh(\lambda_n (1 - \sqrt{k})) \cos(\lambda_n (1 - \sqrt{k}))) + \\ + \frac{2(\nu+1)^2}{\lambda_n^2 \sqrt{k}} (\cosh(\lambda_n (1 - \sqrt{k})) \cos(\lambda_n (1 - \sqrt{k})) - 1) = 0. \quad (5.69)$$

В таблице 5.2. приведены результаты расчета собственных значений $\tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2} (1 - k) \left(\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}} \right)$, полученные из численного решения точного уравнения (5.68) и из трансцендентного уравнения (5.69) для стержней с

различными геометрическими параметрами. Собственные значения для однородно стержня взяты из справочника [192]

Таблица 5.2.

Собственные значения первых форм колебаний шарнирно опертого стержня

Характеристики стержня	Отношение торцевых размеров, k	Расчетная зависимость	Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$, для соответствующего номера формы				
			1	2	3	4	5
Однородный $m = const$ $EJ = const$	1	-	3,142	6,283	9,425	12,57	15,71
$m = const$ $EJ(z) = EJ_2 z^2$ ($\nu = 0$)	0,01	(5.68)	1,842	3,628	5,345	7,058	8,772
		(5.69)	1,867	3,658	5,374	7,085	8,797
	0,1	(5.68)	2,113	4,204	6,261	8,319	10,38
		(5.69)	2,136	4,22	6,272	8,328	10,39
	0,5	(5.68)	2,687	5,372	8,052	10,73	13,41
		(5.69)	2,691	5,374	8,053	10,73	13,41
$m(z) = \gamma F_2 z$ $EJ(z) = EJ_2 z^3$ ($\nu = 1$)	0,01	(5.68)	1,498	3,694	5,46	7,188	8,906
		(5.69)	1,262	3,605	5,378	7,113	8,838
	0,1	(5.68)	1,972	4,257	6,325	8,381	10,44
		(5.69)	1,88	4,213	6,292	8,355	10,42
	0,5	(5.68)	2,669	5,381	8,061	10,74	13,42
		(5.69)	2,657	5,375	8,057	10,74	13,42
$m(z) = \gamma F_2 z^2$ $EJ(z) = EJ_2 z^4$ ($\nu = 2$)	0,01	(5.68)	0,975	3,985	5,758	7,474	9,176
		(5.69)	3,48	5,33	7,096	8,838	10,57
	0,1	(5.68)	1,746	4,37	6,442	8,488	10,53
		(5.69)	4,149	6,28	8,359	10,43	12,49
	0,5	(5.68)	2,638	5,396	8,076	10,75	13,43
		(5.69)	2,572	5,365	8,056	10,74	13,42

На графике рисунок 5.16 показаны три первых собственных формы прогибов (5.67) и соответствующих им изгибающих моментов для клиновидного стержня ($\nu = 1$) с отношением радиусов инерций торцевых сечений $k = 0,1$, сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (5.44), пунктирными линиями показана их асимптотика (5.61).

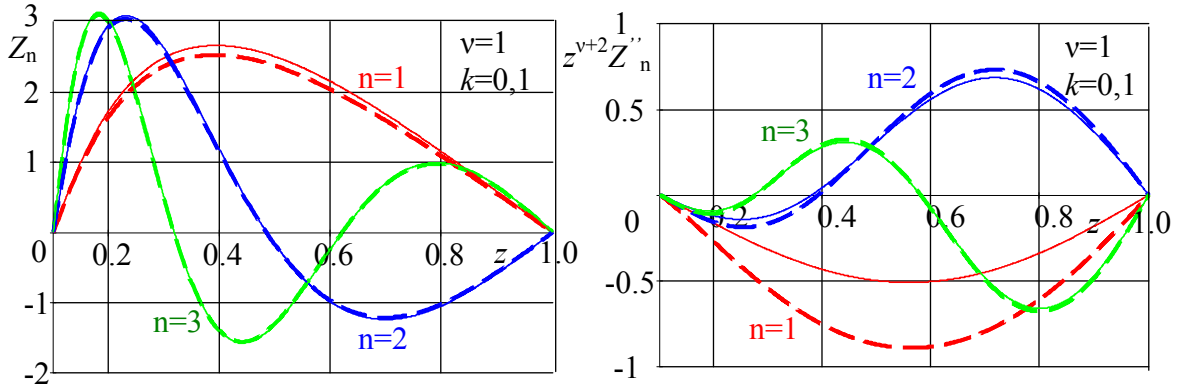
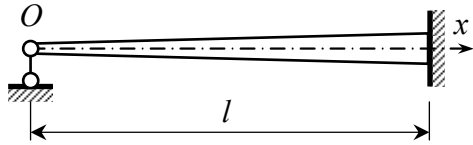


Рисунок 5.16. Первые три собственные формы продольных деформаций и изгибающих моментов шарнирно опертого стержня

5.3.3. Асимптотика собственных функций стержня с защемлением в основании и шарнирно опертым концом

Для стержня рисунок 5.17 граничные условия будут:



$$\begin{aligned} y(k, t)|_{x=0} &= 0; \quad M(k, t)|_{x=0} = 0; \\ y(1, t)|_{x=l} &= 0; \quad \theta(1, t)|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Рисунок 5.17. Расчетная схема стержня защемленного в основании и шарнирно опертым концом

В соответствии с первыми двумя условиями (5.70) выражение для прогибов (5.49) будет иметь вид

$$\begin{aligned} y(z, t) = z^{-v/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2l\theta_0}{\lambda_n(1-k)} k^{(v+1)/2} \left(C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(v+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right) + \right. \\ \left. + \frac{8l^3 P_0}{\lambda_n^3 (1-k)^3 EJ_2} k^{-(v+1)/2} D(\lambda_n \sqrt{z}) \right) \sin(\omega_n t + \mu_n), \end{aligned}$$

Удовлетворив четвертое граничное условие (5.70), получим выражение для собственных функций

$$Z_n(z) = z^{-\nu/2} \left(-D(\lambda_n \sqrt{z}) \frac{\tilde{C}(\lambda_n) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} \tilde{B}(\lambda_n)}{\tilde{D}(\lambda_n)} + C(\lambda_n \sqrt{z}) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} B(\lambda_n \sqrt{z}) \right). \quad (5.71)$$

Из третьего условия (5.70) следует частотное уравнение

$$C(\lambda_n) \tilde{D}(\lambda_n) - D(\lambda_n) \tilde{C}(\lambda_n) + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} (B(\lambda_n) \tilde{D}(\lambda_n) - D(\lambda_n) \tilde{B}(\lambda_n)) = 0. \quad (5.72)$$

Подставив выражение функций из (5.61) в уравнение (5.72) получим

$$\begin{aligned} & \cosh(\lambda_n(1-\sqrt{k})) \sin(\lambda_n(1-\sqrt{k})) - \sinh(\lambda_n(1-\sqrt{k})) \cos(\lambda_n(1-\sqrt{k})) + \\ & + \frac{2(\nu+1)}{\lambda_n \sqrt{k}} (1 - \cosh(\lambda_n(1-\sqrt{k})) \cos(\lambda_n(1-\sqrt{k}))) = 0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Не сложно заметить, что по структуре первая часть уравнения (5.73) соответствует частотному уравнению однородного стержня с аналогичными условиями закрепления [266].

В таблице 5.2. приведены результаты расчета собственных значений $\tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2}(1-k) \left(\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}} \right)$, полученные из численного решения точного уравнения (5.72) и из трансцендентного уравнения (5.73) для стержней с различными геометрическими параметрами. Собственные значения для однородно стержня взяты из справочника [192]

На графике рисунок 5.18 показаны три первых собственных формы прогибов (5.71) и соответствующих им изгибающих моментов для клиновидного стержня ($\nu=1$) с отношением радиусов инерций торцевых сечений $k=0,01$, сплошные линии соответствуют точным решениям в функциях Бесселя (5.44), пунктирными линиями показана их асимптотика (5.61).

Собственные значения первых форм колебаний шарнирно опертого стержня

Характеристики стержня	Отношение торцевых размеров, k	Расчетная зависимость	Собственные значения $\tilde{\lambda}_n$, для соответствующего номера формы				
			1	2	3	4	5
Однородный $m = const$ $EJ = const$	1	-	3,927	7,069	10,21	13,35	16,49
$m = const$ $EJ(z) = EJ_2 z^2$ ($\nu = 0$)	0,01	(5.72)	2,473	4,133	5,824	7,525	9,232
		(5.73)	2,492	4,161	5,852	7,551	9,256
	0,1	(5.72)	2,791	4,786	6,822	8,869	10,92
		(5.73)	2,806	4,8	6,832	8,877	10,93
	0,5	(5.72)	3,433	6,079	8,747	11,42	14,1
		(5.73)	3,435	6,08	8,748	11,42	14,1
$m(z) = \gamma F_2 z$ $EJ(z) = EJ_2 z^3$ ($\nu = 1$)	0,01	(5.72)	2,605	4,303	6	7,697	9,398
		(5.73)	2,539	4,224	5,923	7,626	9,333
	0,1	(5.72)	2,938	4,919	6,935	8,967	11,01
		(5.73)	2,897	4,884	6,906	8,943	10,99
	0,5	(5.72)	3,507	6,126	8,782	11,45	14,12
		(5.73)	3,5	6,121	8,778	11,45	14,12
$m(z) = \gamma F_2 z^2$ $EJ(z) = EJ_2 z^4$ ($\nu = 2$)	0,01	(5.72)	2,978	4,672	6,344	8,016	9,694
		(5.73)	2,558	4,251	5,957	7,664	9,374
	0,1	(5.72)	3,148	5,11	7,098	9,108	11,13
		(5.73)	2,947	4,937	6,959	8,992	11,03
	0,5	(5.72)	3,585	6,181	8,823	11,48	14,15
		(5.73)	3,553	6,158	8,806	11,47	14,14

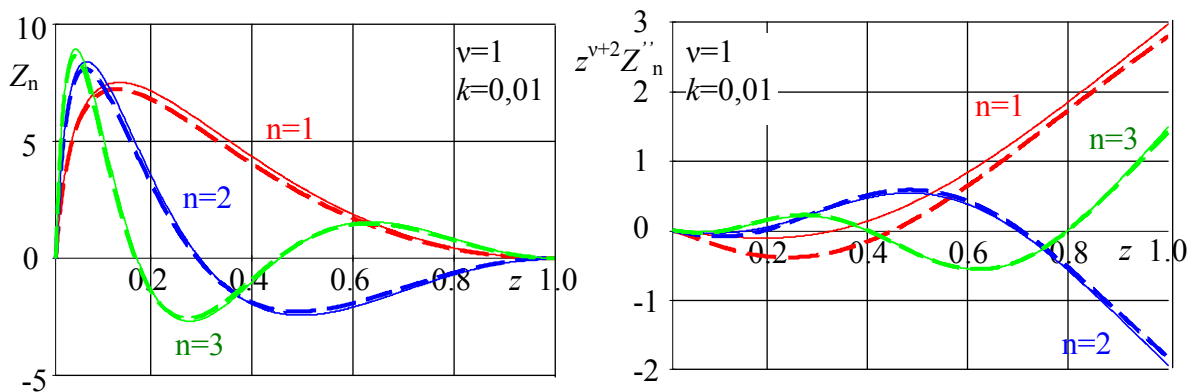


Рисунок 5.18. Первые три собственные формы продольных деформаций и изгибающих моментов стержня защемленного в основании и шарнирно опертым концом

Из анализа результатов расчетов, представленных в таблицах 5.1 – 5.3, следует, что асимптотические представления (5.61) функций (5.44) дают удовлетворительный результат (с погрешностью менее 5%) при определении

собственных частот колебаний начиная с 2-й формы и выше, для конструкций с величиной относительного радиуса инерции $k = 0,1 \div 1$ для рассмотренных граничных условий. Из графиков (рисунки 5.14, 5.16, 5.18) видно, что асимптотические разложения собственных функций (5.61) можно использовать для аппроксимации собственных форм в приближенных решениях. Оценка влияния конструктивных параметров k и ν стержневой системы на значения собственных частот стержня показывает, что наиболее существенным является влияние геометрической характеристики (k) по отношению к параметру определяющего интенсивность изменения линейной плотности и изгибной жесткости (ν). Таким образом, полученные результаты можно использовать для оценки собственных частот стержней с осевой неоднородностью физико-механических свойств отличных от рассмотренной модели.

5.4. Выводы

1. Разработан общий подход к решению математических моделей поперечных колебаний упругих стержней с переменной изгибной жесткостью и распределенной массой для разных случаев их сочетания на основе метода Фурье.
2. Выработан алгоритм расчета на различные виды динамических воздействий, в том числе с учетом наличия сосредоточенных инерционных нагрузок, когда собственные функции соответствующих граничных задач не ортогональны.
3. Для решения произвольного вида граничных задач введены специальные функции, которые являются обобщением функций Крылова применительно к задачам динамического изгиба балок с физико-механической осевой неоднородностью и исследованы их основные свойства.
4. Получена асимптотика специальных функций и выполнен анализ приближенных решений на примерах стержней с наиболее актуальными, для технических задач, условиями закреплений.

РАЗДЕЛ 6

Численно-аналитические исследования неклассической модели динамического изгиба балки с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости

В ряде технических задач является актуальной проблема учета влияния продольных нагрузок на характеристики изгибных колебаний. Решение такой задачи в замкнутой форме известно для балок однородной структуры [184]. Поиск аналитического решения задачи колебаний стержня с переменной структурой с учетом действия продольных нагрузок позволяет исследовать динамические характеристики целого ряда технических объектов, включая проблему динамической неустойчивости. На основе такой модели можно проводить верификацию результатов исследований, выполненных с использованием программных комплексов объектного и имитационного моделирования.

Рассматривается упругий стержень, у которого линейная плотность и изгибная жесткость определяются следующими зависимостями:

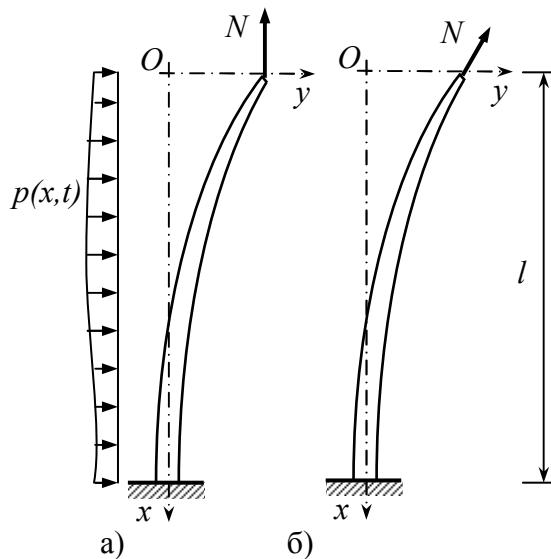


Рисунок 6.1. Расчетная схема изгиба стержня с учетом продольной нагрузки:

а) «мертвой» силы; б) следящей силы

$$m = \gamma F, \quad EJ = EJ_2 z^2;$$

$$z = (1 - k) \frac{x}{l} + k, \quad k = \frac{h_1}{h_2}, \quad (6.1)$$

здесь γ – плотность, E – модуль упругости, F – площадь поперечного сечения, J_2 – момент инерции основания стержня, h_1 и h_2 – радиусы инерции верхнего и нижнего сечений, l – длина стержня (рисунок 6.1).

Стержень с такими параметрами может моделировать конструкции буровых вышек, копров, решетчатых башен и пр.

Из условий равновесия элемента такого стержня для случая «мертвой» продольной силы (рисунок 6.1 а)) следует система уравнений

$$EJ_2 z^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M(x); \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q_y(x) \pm N \frac{\partial y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q_y}{\partial x} = p(x, t) - \gamma F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (6.2)$$

где $y(x, t)$ - уравнение изогнутой оси стержня, EJ_2 - жесткость стержня в основании, $M(x)$ - изгибающий момент, $Q_y(x)$ - проекция перерезывающей силы на поперечную ось, $p(x, t)$ - интенсивность поперечной нагрузки, N – продольное усилие. Знак минус во втором уравнении (6.2) соответствует состоянию сжатия, а плюс – растяжения.

Для случая следящей продольной силы (рисунок 6.1 б)) условия равновесия элемента будут

$$EJ_2 z^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M(x); \quad \frac{\partial M}{\partial x} = Q(x); \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = p(x, t) - \gamma F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \pm N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (6.3)$$

здесь $Q(x)$ - перерезывающая сила. Знак минус в третьем уравнении (6.3) соответствует состоянию сжатия, а плюс – растяжения.

Обе системы уравнений (6.2) и (6.3) приводят к уравнению относительно прогибов $y(x, t)$

$$z^2 \frac{d^4 y}{dz^4} + 4z \frac{d^3 y}{dz^3} + (2 \mp \tilde{N}) \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{pl^4}{(1-k)^4 EJ_2} - \frac{\gamma Fl^4}{(1-k)^4 EJ_2} \ddot{y}, \quad (6.4)$$

где $\tilde{N} = \frac{Nl^2}{(1-k)^2 EJ_2}$ - безразмерная продольная нагрузка. Знак минус в уравнении

(6.4) соответствует состоянию растяжения, а плюс – сжатия.

Рассмотрим общее решение однородного уравнения (6.4)

$$z^2 y'''' + 4zy''' + (2 \mp \tilde{N})y'' = -\frac{\gamma F l^4}{(1-k)^4 EJ_2} \ddot{y}, \quad (6.5)$$

Следуя методу Фурье решение уравнения (6.5) ищем в виде ряда собственных функций

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x) w_n(t). \quad (6.6)$$

Подставляя решение (6.6) в уравнение (6.5) и разделив переменные, для n -го члена ряда, получим выражение

$$\frac{z^2 Z_n'''' + 4zZ_n''' + (2 \mp \tilde{N})Z_n''}{\beta Z_n} = -\frac{\ddot{w}_n}{w_n} = \omega_n^2,$$

здесь штрихом обозначена производная по координате, а точкой по времени,

$\beta = \frac{\gamma F l^4}{(1-k)^4 EJ_2}$, ω_n^2 – постоянная разделения. Таким образом, уравнение (6.5)

разделяется на два однородных дифференциальных уравнения

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = 0; \quad (6.7)$$

$$z^2 Z_n'''' + 4zZ_n''' + (2 \mp \tilde{N})Z_n'' - \frac{\lambda_n^4}{16} Z_n = 0, \quad \lambda_n^4 = \frac{16\omega_n^2 l^4 \gamma F}{(1-k)^4 EJ_2}. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.7) представляет собой уравнение гармонических колебаний, решение которого известно [215]

$$w_n(t) = A_n \sin(\omega_n t + \mu_n),$$

где ω_n – частота, A_n , μ_n – амплитуда и фаза n -й формы колебаний, определяются из начальных условий.

Для уравнения (6.8) общее решение будем искать в виде функции $U(\xi)$, где $\xi = \lambda_n \sqrt{z}$. Тогда оно примет вид

$$\xi^4 U'''' + 2\xi^3 U''' \mp \eta^2 \xi^2 U'' \pm \eta^2 \xi U' - \xi^4 U = 0, \quad (6.9)$$

где верхние знаки соответствуют случаю растяжения ($\eta = \sqrt{1+4\tilde{N}}$ при условии $\tilde{N} > -0,25$), нижние – случаю сжатия ($\eta = \sqrt{4\tilde{N}-1}$ при условии $\tilde{N} > 0,25$). Рассмотрим эти случаи отдельно.

6.1. Аналитическая методика интегрирования уравнения динамического изгиба растянутой балки

Результаты исследований по рассматриваемой проблематике представлены в статье [223].

Для случая растянутой балки уравнение изгиба (6.9) приводится к виду

$$\xi^4 U'''' + 2\xi^3 U''' - \eta^2 \xi^2 U'' + \eta^2 \xi U' - \xi^4 U = 0, \quad (6.10)$$

где $\eta = \sqrt{1+4\tilde{N}}$, $\tilde{N} > -0,25$.

Решение уравнения (6.10) будем искать в виде ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m}. \quad (6.11)$$

Подставляя ряд (6.11) в уравнение (6.10) получим

$$L \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\alpha+m)(\alpha+m-2)((\alpha+m-1)^2 - \eta^2) \xi^{\alpha+m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m+4},$$

где $L = \xi^4 \frac{d^4}{d\xi^4} + 2\xi^3 \frac{d^3}{d\xi^3} - \eta^2 \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \eta^2 \xi \frac{d}{d\xi} - \xi^4$ – дифференциальный оператор.

Выражение справа будет равно первому члену ряда, а именно $c_0 \alpha (\alpha - 2) ((\alpha - 1)^2 - \eta^2) \xi^\alpha$. Коэффициенты c_m подберем таким образом, чтобы в обоих рядах справа коэффициенты при соответствующих степенях ξ были равны. В результате такого выбора получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(\alpha + 1)(\alpha - 1)(\alpha^2 - \eta^2) = 0 \\ c_2(\alpha + 2)\alpha((\alpha + 1)^2 - \eta^2) = 0 \\ c_3(\alpha + 3)(\alpha + 1)((\alpha + 2)^2 - \eta^2) = 0 \\ c_4(\alpha + 4)(\alpha + 2)((\alpha + 3)^2 - \eta^2) - c_0 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ c_m(\alpha + m)(\alpha + m - 2)((\alpha + m - 1)^2 - \eta^2) - c_{m-4} = 0 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad (6.12)$$

С учетом решения системы (6.12), получим

$$L \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m} = c_0 \alpha (\alpha - 2) ((\alpha - 1)^2 - \eta^2) \xi^\alpha.$$

Отсюда видно, что ряд (6.11) может стать решением уравнения (6.10) только при значениях $\alpha = 0; 2; 1 \pm \eta$. Таким образом, из системы (6.12) следует, что для всех α $c_m = 0$ при $m \neq 4j$, а c_{4m} выражается через c_0

$$c_{4m} = \frac{c_0}{\prod_{j=1}^{2m} (2j + \alpha) \prod_{j=1}^m ((4j + \alpha - 1)^2 - \eta^2)}.$$

Тогда система уравнений будет удовлетворена, если $\alpha = 0; 2; 1 \pm \eta$, и из (6.11) видно, что решением является функция

$$U_{\alpha}(\xi) = c_0 \xi^{\alpha} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{4m}}{\prod_{j=1}^{2m} (2j + \alpha) \prod_{j=1}^m ((4j + \alpha - 1)^2 - \eta^2)} \right). \quad (6.13)$$

Таким образом, подставляя в зависимость (6.13) ранее определенные значения α , получим четыре функции, которые являются линейно независимыми решениями уравнения (6.10), при условии не целого η . Решение (6.13) можно переписать в виде

$$U_{\alpha}(\xi) = \xi^{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{4m} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha - \eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha + \eta}{4} + \frac{3}{4}\right)}{2^{2m} \Gamma\left(2m + \frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha - \eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha + \eta}{4} + \frac{3}{4}\right)}, \quad (6.14)$$

где $\Gamma(z)$ - гамма функция.

Тогда общее решение уравнения (6.8) для собственных функций можно представить в виде

$$Z_n(z) = C_1 U_0(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 U_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 U_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 U_2(\lambda_n \sqrt{z}), \quad (6.15)$$

где

$$U_{\alpha}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi/2)^{4m+\alpha}}{2^{2m} \Gamma\left(2m + \frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha - \eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha + \eta}{4} + \frac{3}{4}\right)}. \quad (6.16)$$

Рассмотрим свойства собственных функций (6.15), для этого перепишем выражение (6.5) в следующем виде

$$(EJZ_n'')'' - \tilde{N}Z_n'' = m\omega_n^2 Z_n, \quad (6.17)$$

здесь, очевидно, что выражение справа определяет интенсивность сил инерции сечений для n -й формы колебаний. Используя аналогичное выражение (6.17) для m -й формы, а также с учетом того, что формы колебаний независимы друг от друга, в соответствии с теоремой о взаимности работ [117] получим

$$\omega_n^2 \int_0^l m(x) Z_n(x) Z_m(x) dx = \omega_m^2 \int_0^l m(x) Z_n(x) Z_m(x) dx,$$

откуда, исходя из того, что $\omega_m^2 \neq \omega_n^2$, то данное равенство выполнимо при условии

$$\int_0^l m(x) Z_n(x) Z_m(x) dx = 0.$$

Непосредственное определение квадрата нормы собственных функций для стержней с рассматриваемыми параметрами весьма затруднительно, поэтому поступим аналогично, как в работе [264]. Рассмотрим уравнение (6.17) для двух разных гармоник n и m

$$\left(z^2 Z_n''\right)'' - \frac{1}{4}(\eta^2 - 1)Z_n'' = \frac{\lambda_n^4}{16} Z_n; \quad \left(z^2 Z_m''\right)'' - \frac{1}{4}(\eta^2 - 1)Z_m'' = \frac{\lambda_m^4}{16} Z_m.$$

Умножим левое и правое уравнение на собственные функции Z_m и Z_n соответственно, вычитаем из первого уравнения второе и полученную разность интегрируем по переменной z

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(\lambda_n^4 - \lambda_m^4) \int_k^1 Z_n(z) Z_m(z) dz = \\ & = \int_k^1 \left(\left(z^2 Z_n''\right)'' Z_m - \left(z^2 Z_m''\right)'' Z_n - \frac{1}{4}(\eta^2 - 1)(Z_n'' Z_m - Z_m'' Z_n) \right) dz. \end{aligned}$$

Взяв интегралы по частям, получаем зависимость

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(\lambda_n^4 - \lambda_m^4) \int_k^1 Z_n(z) Z_m(z) dz = \\ & = \left(\left(z^2 Z_n''\right)' Z_m - \left(z^2 Z_m''\right)' Z_n - z^2 Z_n'' Z_m' + z^2 Z_m'' Z_n' - \frac{1}{4}(\eta^2 - 1)(Z_n' Z_m - Z_m' Z_n) \right) \Big|_k^1. \end{aligned} \quad (6.18)$$

С использованием выражения (6.18) выполняется проверка ортогональности собственных функций (6.15) при решении соответствующей граничной задачи (6.5). В уравнении (6.18) перейдем к пределу $m \rightarrow n$, т.е. $\lambda_m = \lambda_n + \delta\lambda$, а

$Z_m = Z_n + \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda} \delta\lambda$, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\frac{1}{4} \lambda_n^3 \int_k^1 Z_n^2(z) dz = \left(Z_n \frac{\partial(z^2 Z_n'')}{\partial \lambda_n} - (z^2 Z_n'')' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} + z^2 Z_n'' \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial(z^2 Z_n'')}{\partial \lambda_n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (\eta^2 - 1) \left(Z_n \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} \right) \right) \Big|_k^1,$$

отсюда, выражение для квадрата нормы получим в виде

$$\Delta_n^2 = \int_k^1 Z_n^2(z) dz = \frac{4}{\lambda_n^3} \left(Z_n \frac{\partial(z^2 Z_n'')}{\partial \lambda_n} - (z^2 Z_n'')' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} + z^2 Z_n'' \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial(z^2 Z_n'')}{\partial \lambda_n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (\eta^2 - 1) \left(Z_n \frac{\partial Z_n'}{\partial \lambda_n} - Z_n' \frac{\partial Z_n}{\partial \lambda_n} \right) \right) \Big|_k^1. \quad (6.19)$$

Найдем соответствующие производные для функций (6.16)

$$U'_\alpha(\lambda_n \sqrt{z}) = \frac{\lambda_n^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n \sqrt{z}/2)^{4m+\alpha-2}}{2^{2m} \Gamma\left(2m + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha-\eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha+\eta}{4} + \frac{3}{4}\right)}; \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} U_\alpha(\lambda_n \sqrt{z}) = \frac{2}{\lambda_n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n \sqrt{z}/2)^{4m+\alpha}}{2^{2m} \Gamma\left(2m + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha-\eta}{4} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(m + \frac{\alpha+\eta}{4} + \frac{3}{4}\right)} = \\ = \frac{2z}{\lambda_n} U'_\alpha(\lambda_n \sqrt{z}). \quad (6.20)$$

С учетом зависимости (6.20) выражения для частных производных собственной функции (6.15) получим в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_n}{\partial \lambda} &= \frac{2z}{\lambda_n} Z'_n; \quad \frac{\partial Z'_n}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \lambda} \right)' = \frac{2}{\lambda_n} Z'_n + \frac{2}{\lambda_n z} (z^2 Z''_n); \\ \frac{\partial (z^2 Z''_n)}{\partial \lambda} &= z^2 \left(\frac{\partial Z'_n}{\partial \lambda} \right)' = \frac{2z}{\lambda_n} (z^2 Z''_n)'; \\ \frac{\partial (z^2 Z''_n)'}{\partial \lambda} &= \left(\frac{\partial (z^2 Z''_n)'}{\partial \lambda} \right)' = \frac{2}{\lambda_n} (z^2 Z''_n)' + \frac{2z}{\lambda_n} (z^2 Z''_n)''.\end{aligned}$$

Из выражения (6.17) следует

$$(z^2 Z''_n)'' = \frac{\lambda_n^4}{16} Z_n + \frac{1}{4} (\eta^2 - 1) Z''_n,$$

таким образом, выражение для квадрата нормы в окончательном виде будет

$$\begin{aligned}\Delta_n^2 &= \left(\frac{z}{2} Z_n^2 + \frac{8}{\lambda_n^4} Z'_n (z^2 Z''_n) + \frac{8}{\lambda_n^4 z} (z^2 Z''_n)^2 + \frac{8}{\lambda_n^4} Z_n (z^2 Z''_n)' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16z}{\lambda_n^4} Z'_n (z^2 Z''_n)' - \frac{2}{\lambda_n^4} (\eta^2 - 1) (Z_n Z'_n - z Z_n'^2) \right) \Big|_k^1.\end{aligned}\quad (6.21)$$

Для случая вынужденных колебаний требуется найти решение неоднородного уравнения (6.4)

$$(z^2 y'')'' + \beta \ddot{y} = \frac{\beta}{\gamma F_2} p(z, t), \quad \beta = \frac{\gamma F_2 l^4}{(1-k)^4 E J_2}.\quad (6.22)$$

Решение уравнения (6.22) представим в виде ряда по собственным функциям (6.6). Подставив этот ряд в уравнение (6.22) и принимая во внимание соотношение $\frac{1}{16} \lambda_n^4 = \beta \omega_n^2$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n) Z_n = \frac{p(z, t)}{\gamma F_2}.\quad (6.23)$$

Применив метод Фурье к уравнению (6.23), при учете свойства ортогональности собственных функций, получим уравнение относительно коэффициентов w_n

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = \frac{1}{\gamma F_2 \Delta_n^2} \int_k^1 p(z, t) Z_n(z) dz. \quad (6.24)$$

6.2. Аналитическая методика интегрирования уравнения динамического изгиба сжатой балки

Для случая изгиба сжатой балки уравнение (6.9) приводится к виду

$$\xi^4 U'''' + 2\xi^3 U''' + \eta^2 \xi^2 U'' - \eta^2 \xi U' - \xi^4 U = 0, \quad (6.25)$$

где $\eta = \sqrt{4\tilde{N} - 1}$, $\tilde{N} > 0,25$.

Решение уравнения (6.25) ищется аналогично уравнению (6.10) в виде ряда (6.11). При подстановке ряда (6.11) в уравнение (6.25) получим

$$L \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (\alpha+m)(\alpha+m-2) \left((\alpha+m-1)^2 + \eta^2 \right) \xi^{\alpha+m} - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m+4},$$

где $L = \xi^4 \frac{d^4}{d\xi^4} + 2\xi^3 \frac{d^3}{d\xi^3} + \eta^2 \xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - \eta^2 \xi \frac{d}{d\xi} - \xi^4$ – дифференциальный оператор.

Коэффициенты c_m подбираются таким образом, чтобы в обоих рядах справа коэффициенты при соответствующих степенях ξ были равны. Таким образом, приходим к решению

$$L \sum_{m=0}^{\infty} c_m \xi^{\alpha+m} = c_0 \alpha (\alpha-2) \left((\alpha-1)^2 + \eta^2 \right) \xi^{\alpha}.$$

Отсюда видно, что ряд (6.11) может стать решением уравнения (6.25) только при значениях $\alpha = 0; 2; 1 \pm i\eta$. Таким образом, решением уравнения (6.25) является функция

$$U_{\alpha}(\xi) = \xi^{\alpha} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{4m}}{\prod_{j=1}^{2m} (2j + \alpha) \prod_{j=1}^m ((4j + \alpha - 1)^2 + \eta^2)} \right). \quad (6.26)$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$ функция (6.26) будет вещественной, а для значений $\alpha = 1 \pm i\eta$ – комплексной.

Выделим действительную и мнимую часть функции

$$U_{1 \pm i\eta}(\xi) = \xi^{1 \pm i\eta} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{4m}}{2^{4m} m! \prod_{j=1}^{2m} (2j + 1 \pm i\eta) \prod_{j=1}^m \left(j \pm i \frac{\eta}{2} \right)} \right). \quad (6.27)$$

Выражение (6.27) приводится к виду

$$U_{1 \pm i\eta}(\xi) = R(\xi) \pm iW(\xi),$$

где $R(\xi)$ и $W(\xi)$ – вещественные функции:

$$\begin{aligned} R(\xi) &= \xi \cos(\eta \ln \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{4m+1} \cos\left(\eta \ln \xi - \sum_{j=1}^{2m} \arctan\left(\frac{\eta}{2j+1}\right) - \sum_{j=1}^m \arctan\left(\frac{\eta}{2j}\right)\right)}{2^{4m} m! \prod_{j=1}^{2m} \sqrt{(2j+1)^2 + \eta^2} \prod_{j=1}^m \sqrt{j^2 + \frac{\eta^2}{4}}}; \\ W(\xi) &= \xi \sin(\eta \ln \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{4m+1} \sin\left(\eta \ln \xi - \sum_{j=1}^{2m} \arctan\left(\frac{\eta}{2j+1}\right) - \sum_{j=1}^m \arctan\left(\frac{\eta}{2j}\right)\right)}{2^{4m} m! \prod_{j=1}^{2m} \sqrt{(2j+1)^2 + \eta^2} \prod_{j=1}^m \sqrt{j^2 + \frac{\eta^2}{4}}}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

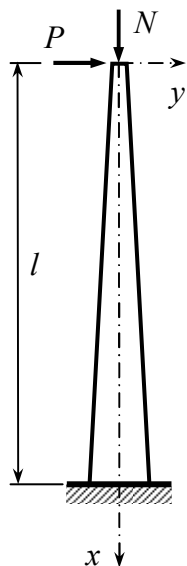
Таким образом, с использованием полученных решений (6.26) и (6.28) выражение для собственных функций сжатого стержня представляется в виде

$$Z_n(z) = C_1 U_0(\lambda_n \sqrt{z}) + C_2 R(\lambda_n \sqrt{z}) + C_3 W(\lambda_n \sqrt{z}) + C_4 U_2(\lambda_n \sqrt{z}). \quad (6.29)$$

Собственные функции (6.15) и (6.29) позволяют рассматривать любой вид граничных условий. На их основе могут быть разработаны математические модели динамического изгиба конструкций с продольной квадратичной неоднородностью изгибной жесткости и постоянной линейной плотностью с учетом влияния продольных сил.

6.3. Исследование стержневой конструкции на вынужденные изгибные колебания при учете наличия продольной нагрузки

Для оценки влияния продольных нагрузок на характеристики изгибных колебаний и параметры НДС рассмотрим задачу динамического изгиба консольного стержня длиной l растянутого (сжатого) продольной силой N при внезапном приложении поперечной нагрузки P (рисунок 6.2). Для этого решим граничную задачу (6.5) с условиями, которые для случая «мертвой» нагрузки имеют вид:



$$y(l, t) = 0; \quad y'(l, t) = 0; \quad M(0, t) = 0; \quad (6.30)$$

$$Q(0, t) - Ny'(0, t) = 0. \quad (6.31)$$

Рисунок 6.2.
Расчетная схема
стержня с
переменной
жесткостью

Исходя из удовлетворения условий (6.30) введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
A_n &= U_2(\lambda_n)U'_{1-\eta}(\lambda_n)U''_{1+\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - U_2(\lambda_n)U'_{1+\eta}(\lambda_n)U''_{1-\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - \\
&\quad - U_{1-\eta}(\lambda_n)U'_2(\lambda_n)U''_{1+\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) + U_{1-\eta}(\lambda_n)U'_{1+\eta}(\lambda_n)U''_2(\lambda_n\sqrt{k}) + \\
&\quad + U_{1+\eta}(\lambda_n)U'_2(\lambda_n)U''_{1-\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - U_{1+\eta}(\lambda_n)U'_{1-\eta}(\lambda_n)U''_2(\lambda_n\sqrt{k}); \\
B_n &= U_0(\lambda_n)U'_{1-\eta}(\lambda_n)U''_{1+\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)U'_{1+\eta}(\lambda_n)U''_{1-\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - \\
&\quad - U_{1-\eta}(\lambda_n)U'_0(\lambda_n)U''_{1+\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) + U_{1-\eta}(\lambda_n)U'_{1+\eta}(\lambda_n)U''_0(\lambda_n\sqrt{k}) + \\
&\quad + U_{1+\eta}(\lambda_n)U'_0(\lambda_n)U''_{1-\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - U_{1+\eta}(\lambda_n)U'_{1-\eta}(\lambda_n)U''_0(\lambda_n\sqrt{k}); \\
C_n &= U_0(\lambda_n)U'_2(\lambda_n)U''_{1+\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)U'_{1+\eta}(\lambda_n)U''_2(\lambda_n\sqrt{k}) - \\
&\quad - U_2(\lambda_n)U'_0(\lambda_n)U''_{1+\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) + U_2(\lambda_n)U'_{1+\eta}(\lambda_n)U''_0(\lambda_n\sqrt{k}) + \\
&\quad + U_{1+\eta}(\lambda_n)U'_0(\lambda_n)U''_2(\lambda_n\sqrt{k}) - U_{1+\eta}(\lambda_n)U'_2(\lambda_n)U''_0(\lambda_n\sqrt{k}); \\
D_n &= U_0(\lambda_n)U'_2(\lambda_n)U''_{1-\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)U'_{1-\eta}(\lambda_n)U''_2(\lambda_n\sqrt{k}) - \\
&\quad - U_2(\lambda_n)U'_0(\lambda_n)U''_{1-\eta}(\lambda_n\sqrt{k}) + U_2(\lambda_n)U'_{1-\eta}(\lambda_n)U''_0(\lambda_n\sqrt{k}) + \\
&\quad + U_{1-\eta}(\lambda_n)U'_0(\lambda_n)U''_2(\lambda_n\sqrt{k}) - U_{1-\eta}(\lambda_n)U'_2(\lambda_n)U''_0(\lambda_n\sqrt{k}),
\end{aligned}$$

здесь для краткости использованы следующие обозначения:

$$U'_\alpha = \frac{dU_\alpha}{dz}; \quad U''_\alpha = z^2 \frac{d^2U_\alpha}{dz^2}.$$

С учетом принятых обозначений выражение собственных функций (6.15) для консольного стержня получим в виде

$$Z_n(z) = A_n U_0(\lambda_n \sqrt{z}) - B_n U_{1-\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) + C_n U_{1+\eta}(\lambda_n \sqrt{z}) - D_n U_2(\lambda_n \sqrt{z}). \quad (6.32)$$

Определив производные от собственных функций (6.32), из условия (6.31) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$\left(z^2 Z_n''(\lambda_n \sqrt{z}) \right)' \Big|_{z=k} - \frac{1}{4} (\eta^2 - 1) Z_n'(\lambda_n \sqrt{k}) = 0. \quad (6.33)$$

Оценим влияние продольной нагрузки $\tilde{N}$ на значения первых собственных чисел уравнения (6.33) (собственных частот)

$$\omega_n = \frac{\tilde{\lambda}_n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F}}, \quad \tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{2} (1 - k),$$

аналогичным образом определяются частоты стержней постоянной жесткости [192].

На рисунке 6.3 представлены графики зависимостей трех первых собственных значений частотного уравнения (6.33) от величины безразмерной продольной нагрузки $\tilde{N}$ для стержня с отношением радиусов инерции торцевых сечений $k = 0,1$ и соответствующие им формы колебаний при величине продольной нагрузки $\tilde{N} = 1$. Штрихпунктирными линиями показаны собственные значения для конструкции без учета продольной нагрузки (таблица 5.1).

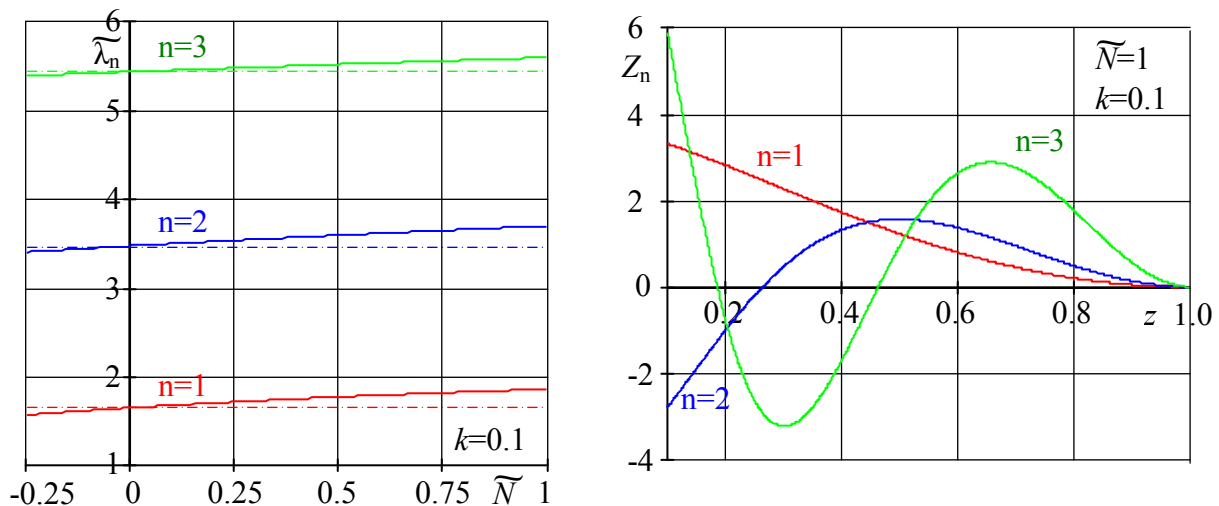


Рисунок 6.3. Зависимости собственных значений от величины безразмерной продольной нагрузки $\tilde{N}$ и графики соответствующих им форм колебаний

Для случая следящей силы граничное условие (6.31) принимает вид

$$Q(0, t) = 0,$$

а соответствующее ему частотное уравнение будет

$$\left(z^2 Z_n''(\lambda_n \sqrt{z}) \right)' \Big|_{z=k} = 0. \quad (6.34)$$

На графиках (рисунок 6.4) показана зависимость первых двух собственных значений уравнения (6.34) от относительной величины продольной нагрузки для стержня с отношением радиусов инерции торцевых сечений $k = 0,01$. Штрихпунктирными линиями показаны собственные значения для конструкции без учета продольной нагрузки (таблица 5.1).

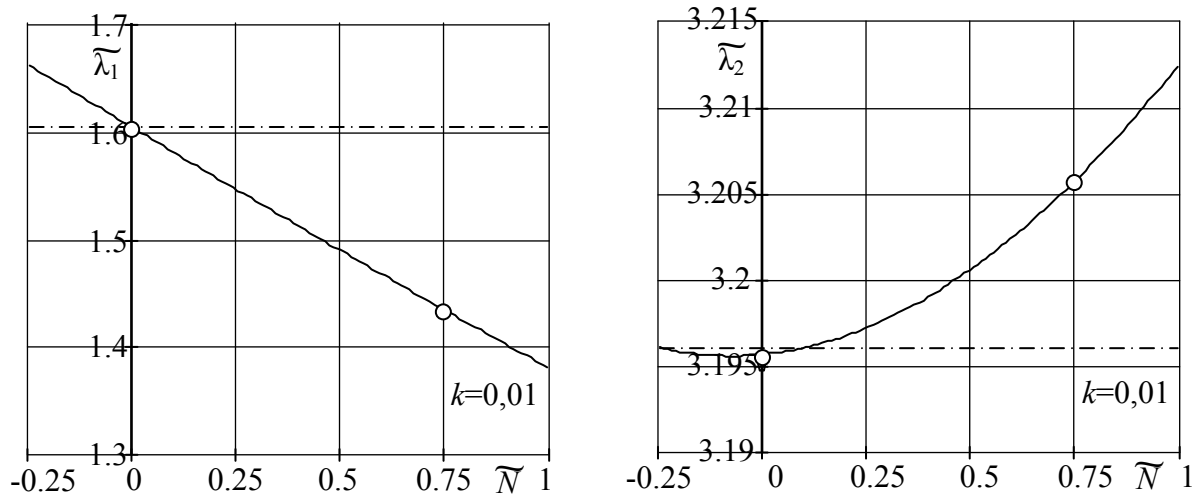


Рисунок 6.4. Зависимость первых двух собственных значений частотного уравнения от относительной величины следящей силы

Собственные функции рассматриваемой граничной задачи ортогональны. Из соотношения (6.21) квадрат нормы собственных функций будет определяться по формуле

$$\Delta_n^2 = \frac{8}{\lambda_n^4} (Z_n''(1))^2 - \frac{k}{2} Z_n^2(k) + \frac{2k}{\lambda_n^4} (\eta^2 - 1) (Z_n'(k))^2.$$

С учетом внезапного приложения силы P уравнение (6.24) будет иметь вид

$$\ddot{w}_n + \omega_n^2 w_n = P Z_n(k) \frac{1-k}{l \gamma F_2 \Delta_n^2},$$

а его решение

$$w_n(t) = \tilde{y}_0 \frac{16Z_n(k)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} (1 - \cos \omega_n t); \quad \tilde{y}_0 = \frac{Pl^3}{(1-k)^3 EJ_2}.$$

Таким образом, в окончательном виде получим уравнения прогибов и изгибающих моментов

$$y(z, t) = 16\tilde{y}_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(k)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} Z_n(z) (1 - \cos \omega_n t); \quad (6.35)$$

$$M(z, t) = 16 \frac{Pl}{1-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(k)}{\Delta_n^2 \lambda_n^4} z^2 Z_n''(z) (1 - \cos \omega_n t). \quad (6.36)$$

В случае статического приложения силы P , уравнения изогнутой оси стержня будет

$$f(z) = \tilde{y}_0 ((z+k) \ln z + (1-z)(1+k)).$$

Введем обозначение для безразмерного времени

$$\tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_2}{\gamma F_2}}.$$

Тогда выражения для динамических коэффициентов по максимальному прогибу и изгибающему моменту в заделке получим в виде

$$K_y(\tau) = \frac{y(k, \tau)}{f(k)} = \frac{16(1-k)^4}{2k \ln k + 1 - k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2(k)}{\Delta_n^2 \tilde{\lambda}_n^4} (1 - \cos \tilde{\lambda}_n^2 \tau); \quad (6.37)$$

$$K_M(\tau) = \frac{M(1, \tau)}{Pl} = 16(1-k)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(k)}{\Delta_n^2 \tilde{\lambda}_n^4} Z_n''(1) (1 - \cos \tilde{\lambda}_n^2 \tau). \quad (6.38)$$

На рисунке 6.5 показаны зависимости от τ значений коэффициентов (6.37) и (6.38) для конструкции с отношением радиусов инерции торцевых сечений $k = 0,01$ при действии растягивающей нагрузки $\tilde{N} = 0,2$. Максимальные значения коэффициентов в случае растяжения составляют: $K_y = 1,4$; $K_M = 2,77$. На рисунке 6.6 показаны зависимости от τ значений коэффициентов (6.37) и (6.38)

для сжатой конструкции ($\tilde{N} = -0,2$). В этом случае максимальные значения: $K_y = 2.89$; $K_M = 3.47$. Следует отметить, что при отсутствии продольных сил соответствующие динамические коэффициенты составят: $K_y = 1.82$; $K_M = 3.01$. Если учесть, что для рассматриваемых параметров объекта критическая продольная нагрузка составит $\tilde{N}_{кр} \approx 0.51$, то необходимо отметить существенное влияние продольной силы (значительно меньше критической) на параметры НДС неоднородного стержня при динамическом изгибе. Для стержней однородной структуры такое влияние следует учитывать при величине нагрузки близкой к критической [304].

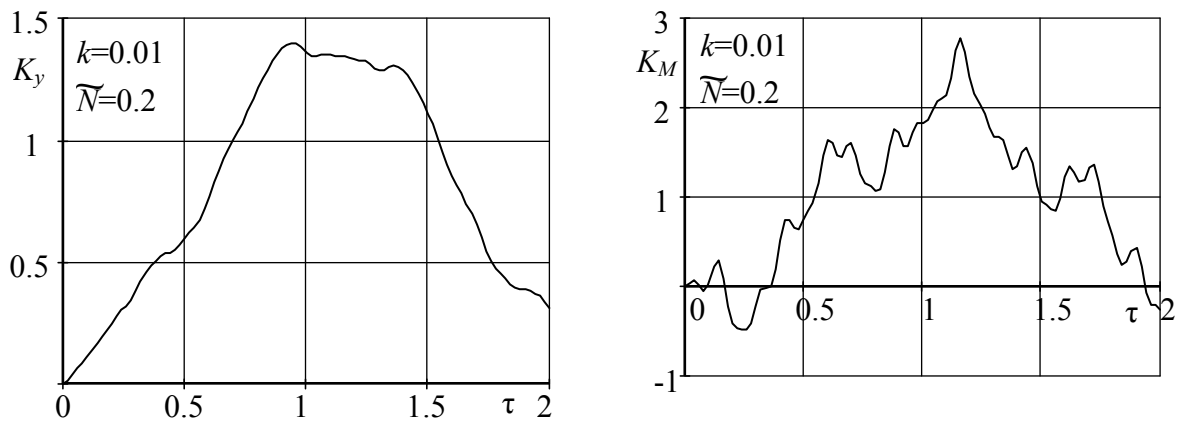


Рисунок 6.5. Динамические коэффициенты по максимальному прогибу и изгибающему моменту в основании растянутого стержня

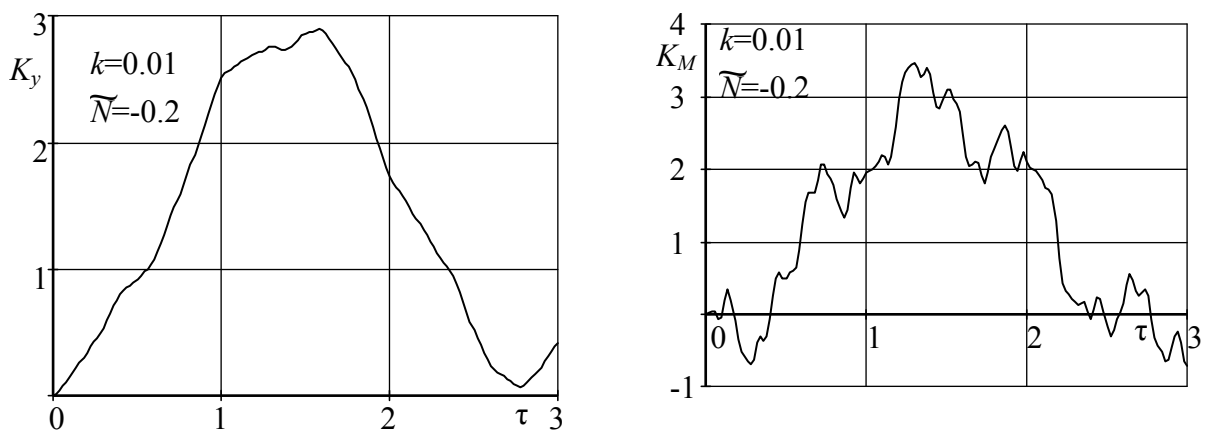


Рисунок 6.6. Динамические коэффициенты по максимальному прогибу и изгибающему моменту в основании сжатого стержня

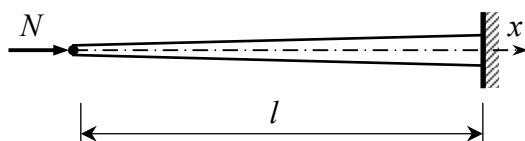
Полученные расчетные зависимости могут быть непосредственно использованы для моделирования НДС при динамических воздействиях нагрузок в таких объектах как: элементы бурильного оборудования, конструкции опор линий электропередач и пр. Найденное аналитическое решение также можно использовать для построения эталонных моделей и верификации расчетных данных при работе с программными комплексами объектного и имитационного моделирования. Однако стоит отметить, что ряды (6.16), (6.26) и (6.28), которые являются решениями уравнения (6.9), имеют плохую сходимость для больших значений аргумента, это во многом ограничивает практическое использование этих решений и требует дальнейших исследований. Рассмотренные динамические исследования предварительно нагруженных стержней, представлены в работе автора [247].

6.4. Применение разработанной методики для анализа динамической неустойчивости в случаях «мертвой» и следящей продольной силы

В отличие от исследования НДС конструкций на динамические воздействия методом Фурье, когда требуется определение большого числа собственных форм и соответствующих им частот, для задач устойчивости на основе динамического критерия достаточно определение первой или двух первых частот. Рассмотрим устойчивость стержневых конструкций для некоторых видов граничных условий.

6.4.1. Устойчивость консольной конструкции

Для стержня рисунок 6.7 граничные условия будут:



$$\begin{aligned} y(1,t)|_{x=l} &= 0; \quad y'(1,t)|_{x=l} = 0; \\ M(k,t)|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

Рисунок 6.7. Расчетная схема консольного стержня

для случая «мертвой» нагрузки

$$Q(0,t) - Ny'(0,t) = 0, \quad (6.40)$$

для случая следящей силы

$$Q(0,t) = 0. \quad (6.41)$$

Исходя из удовлетворения условий (6.39) введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} A_n &= U_2(\lambda_n)R'(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_2(\lambda_n)W'(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - R(\lambda_n)U_2'(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) + R(\lambda_n)W'(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + W(\lambda_n)U_2'(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - W(\lambda_n)R'(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}), \\ B_n &= U_0(\lambda_n)R'(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)W'(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - R(\lambda_n)U_0'(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) + R(\lambda_n)W'(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + W(\lambda_n)U_0'(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - W(\lambda_n)R'(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}), \\ C_n &= U_0(\lambda_n)U_2'(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)W'(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - U_2(\lambda_n)U_0'(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) + U_2(\lambda_n)W'(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + W(\lambda_n)U_0'(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - W(\lambda_n)U_2'(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}), \\ D_n &= U_0(\lambda_n)U_2'(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)R'(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - U_2(\lambda_n)U_0'(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) + U_2(\lambda_n)R'(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + R(\lambda_n)U_0'(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - R(\lambda_n)U_2'(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}), \end{aligned}$$

штрихом обозначены производные по z . С учетом принятых обозначений выражение собственных функций (6.29) для консольного стержня получим в виде

$$Z_n(z) = A_n U_0(\lambda_n \sqrt{z}) - B_n R(\lambda_n \sqrt{z}) + C_n W(\lambda_n \sqrt{z}) - D_n U_2(\lambda_n \sqrt{z}). \quad (6.42)$$

Определив производные от собственных функций (6.42), из условия (6.40) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$\left(z^2 Z_n''(\lambda_n \sqrt{z}) \right)' \Big|_{z=k} - \frac{1}{4} (\eta^2 - 1) Z_n'(\lambda_n \sqrt{k}) = 0. \quad (6.43)$$

На рисунке 6.8 представлены зависимости первого собственного значения частотного уравнения (6.43) от безразмерной продольной силы $\tilde{N}$ для конструкций с отношением радиусов инерции торцевых сечений $k = 0,1$ и $k = 0,5$. Из результатов численных исследований частотного уравнения (6.43) следует, что первая частота колебаний консольного стержня делается равной нулю, когда нагрузка достигает $\tilde{N} \approx 1,06$ при $k = 0,1$ и соответственно $\tilde{N} \approx 6,74$ при $k = 0,5$. Эти значения соответствуют критическим силам.

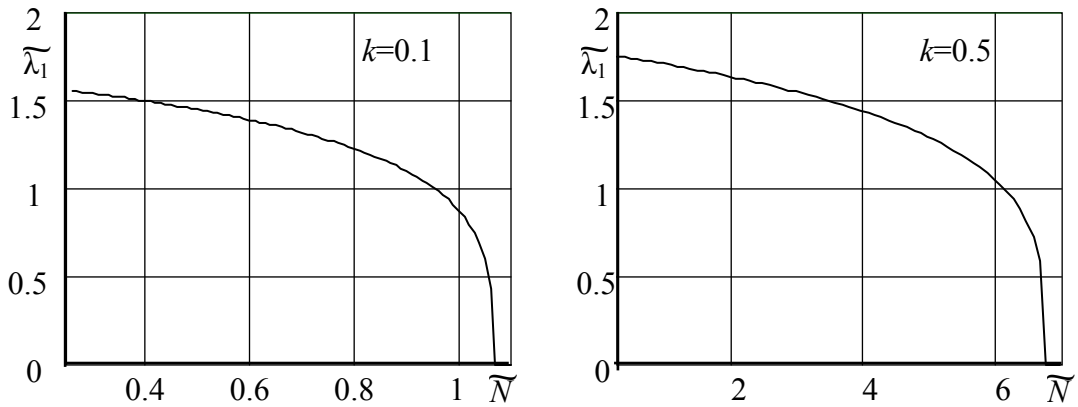


Рисунок 6.8. Зависимость первого собственного значения от величины безразмерной продольной нагрузки $\tilde{N}$

Из условия (6.41) получаем уравнение для нахождения собственных значений для случая следящей силы

$$\left(z^2 Z_n''(\lambda_n \sqrt{z}) \right)' \Big|_{z=k} = 0. \quad (6.44)$$

На рисунке 6.9 представлены зависимости первых двух собственных значений частотного уравнения (6.44) от безразмерной продольной силы $\tilde{N}$ для конструкций с отношением радиусов инерции торцевых сечений $k = 0,01$ и

$k = 0,1$. Из результатов численных исследований частотного уравнения (6.44) следует, что упругая линия сочетает первую и вторую собственные формы при значениях $\tilde{N} \approx 6,02$ для $k = 0,01$ и соответственно $\tilde{N} \approx 5,92$ для $k = 0,1$. При больших значениях силы система окажется неустойчивой и будет раскачиваться, снабжаясь дополнительной энергией за счет работы неконсервативной составляющей силы N . Сравнение значений критических нагрузок следящей силы и силы постоянного направления показывает, что величина следящей нагрузки приблизительно в двенадцать раз больше величины «мертвой» силы для конструкции с $k = 0,01$, а для конструкции с $k = 0,1$ это отношение составит всего 5,6 раз. Для стержня однородного отношение критических нагрузок составляет 8 раз [55].

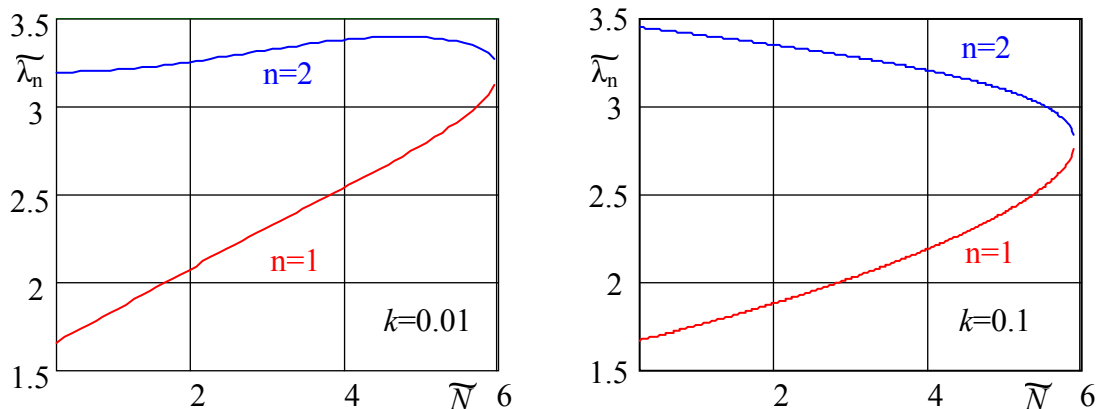


Рисунок 6.9. Зависимости первых двух собственных значений от величины безразмерной продольной нагрузки $\tilde{N}$

6.4.2. Устойчивость стержня с шарнирными опорами по торцам

Для рассматриваемой схемы (рисунок 6.10) граничные условия будут:

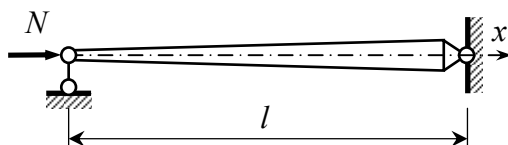


Рисунок 6.10. Расчетная схема шарнирно опертого стержня

$$\begin{aligned} y(1,t)|_{x=l} &= 0; \quad M(1,t)|_{x=l} = 0; \\ M(k,t)|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$y(k, t)|_{x=0} = 0. \quad (6.46)$$

Исходя из удовлетворения условий (6.45) введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} A_n &= U_2(\lambda_n)R''(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_2(\lambda_n)W''(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - R(\lambda_n)U_2''(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) + R(\lambda_n)W''(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + W(\lambda_n)U_2''(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - W(\lambda_n)R''(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}), \\ B_n &= U_0(\lambda_n)R''(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)W''(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - R(\lambda_n)U_0''(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) + R(\lambda_n)W''(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + W(\lambda_n)U_0''(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - W(\lambda_n)R''(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}), \\ C_n &= U_0(\lambda_n)U_2''(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)W''(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - U_2(\lambda_n)U_0''(\lambda_n)W''(\lambda_n\sqrt{k}) + U_2(\lambda_n)W''(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + W(\lambda_n)U_0''(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - W(\lambda_n)U_2''(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}), \\ D_n &= U_0(\lambda_n)U_2''(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) - U_0(\lambda_n)R''(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - \\ &\quad - U_2(\lambda_n)U_0''(\lambda_n)R''(\lambda_n\sqrt{k}) + U_2(\lambda_n)R''(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}) + \\ &\quad + R(\lambda_n)U_0''(\lambda_n)U_2''(\lambda_n\sqrt{k}) - R(\lambda_n)U_2''(\lambda_n)U_0''(\lambda_n\sqrt{k}), \end{aligned}$$

штрихом обозначены производные по z . С учетом принятых обозначений выражение собственных функций (6.29) для шарнирно опертого стержня получим в виде

$$Z_n(z) = A_n U_0(\lambda_n \sqrt{z}) - B_n R(\lambda_n \sqrt{z}) + C_n W(\lambda_n \sqrt{z}) - D_n U_2(\lambda_n \sqrt{z}). \quad (6.47)$$

Определив производные от собственных функций (6.47), из условия (6.46) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$Z_n(\lambda_n \sqrt{k}) = 0. \quad (6.48)$$

На рисунке 6.11 представлены зависимости первого собственного значения частотного уравнения (6.48) от безразмерной продольной силы $\tilde{N}$ для конструкций с отношением радиусов инерции торцевых сечений $k = 0,1$ и $k = 0,5$. Из результатов численных исследований частотного уравнения (6.48) следует, что первая частота колебаний консольного стержня делается равной нулю, когда нагрузка достигает $\tilde{N} \approx 2,12$ при $k = 0,1$ и соответственно $\tilde{N} \approx 20,8$ при $k = 0,5$. Эти значения соответствуют критическим силам.

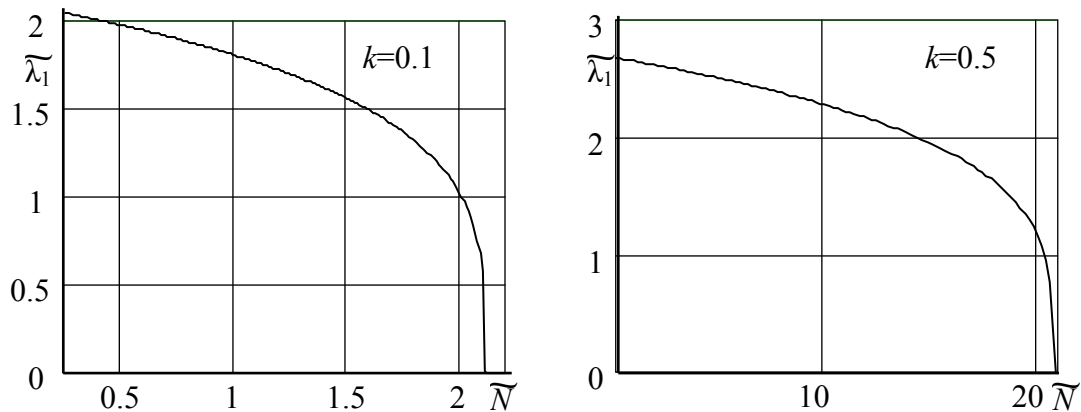


Рисунок 6.11. Зависимость первого собственного значения от величины безразмерной продольной нагрузки $\tilde{N}$

6.4.3. Устойчивость стержня со свободным и шарнирно опертым концом

Для рассматриваемой схемы (рисунок 6.12) граничные условия будут:

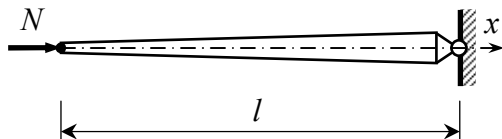


Рисунок 6.12. Расчетная схема стержня со свободным и шарнирно опертым концом

$$y(1, t)|_{x=l} = 0; \quad M(1, t)|_{x=l} = 0; \\ M(k, t)|_{x=0} = 0, \quad (6.49)$$

$$Q(k, t)|_{x=0} = 0. \quad (6.50)$$

Исходя из совпадения условий (6.49) и (6.45) собственные функции будут иметь вид (6.47). Из условия (6.50) получаем уравнение для нахождения собственных значений

$$\left(z^2 Z_n''(\lambda_n \sqrt{z}) \right)' \Big|_{z=k} = 0. \quad (6.51)$$

На рисунке 6.13 представлены зависимости второго и третьего собственного значения частотного уравнения (6.51) от безразмерной продольной силы $\tilde{N}$ для конструкций с отношением радиусов инерции торцевых сечений $k = 0,01$ и $k = 0,1$. Первое собственное значение $\lambda_1 = 0$ [192] (геометрически изменяемая конструкция). Из результатов численных исследований частотного уравнения (6.44) следует, что упругая линия сочетает первую и вторую собственные формы при значениях $\tilde{N} \approx 19,1$ для $k = 0,01$ и соответственно $\tilde{N} \approx 10,8$ для $k = 0,1$.

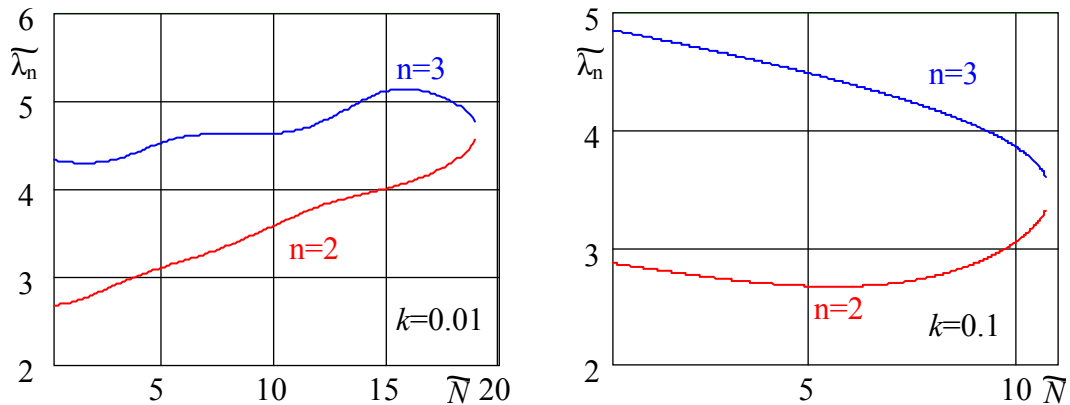


Рисунок 6.13. Зависимости второго и третьего собственного значения от величины безразмерной продольной нагрузки $\tilde{N}$

Задача об устойчивости стержня с обоими свободными концами, нагруженного на одном из торцов сжимающей следящей силой, при этом центр тяжести стержня совершает равноускоренное движение, рассмотрена в статье [238].

6.5. Выводы

1. Получено решение уравнения динамического изгиба стержневой конструкции с квадратичным законом изменения изгибной жесткости и постоянной линейной плотностью при учете наличия продольной нагрузки, которое позволяет рассматривать произвольный вид граничных условий.

2. Разработан алгоритм решения задач динамики поперечных колебаний неоднородного упругого стержня с учетом наличия продольных нагрузок методом Фурье.

3. Проведен анализ влияния продольных сил на частотные характеристики и параметры НДС стержневой системы при ее динамическом нагружении.

4. Исследована устойчивость стержневых систем при действии продольной нагрузки постоянного направления и следящей силы для разных схем закрепления.

5. Найденные в рядах решения имеют плохую сходимость при больших значениях аргумента, что ограничивает их практическое применение и требует дальнейших исследований.

РАЗДЕЛ 7

Приложения методов анализа неклассических моделей динамики и устойчивости неоднородных стержней к расчету инженерных конструкций

7.1. Расчет продольно-поперечного изгиба весомых стержней применительно к исследованию устойчивости стальных крепей при спуске на плаву

При креплении ствола диаметром 4,3 м, глубиной 385 м, который предполагалось оборудовать для клетового подъема на шахте «Юбилейная» в Донецкой области, ПАО «Донецкое ШПУ» был выбран способ спуска обсадной трубы на плаву, с целью обеспечения вертикальности ствола в соответствии с требованиями стандарта (*Подземные горные выработки угольных шахт. Правила выполнения работ: стандарт организации Украины СОУ 10.1.00174131.004–2006*). Профилировка, составленная после осушения ствола, показала, что начиная с отметки 110 м, происходит искривление оси ствола, а ее увод от вертикали на максимальной глубине составил 0,5 м (при 0,1 м допускаемой величины). С учетом, что пробуренный ствол имел необходимое сечение в свету для отвесного спуска колонны, возникло предположение, что искривление оси обсадной трубы произошло за счет потери продольной устойчивости.

Проектирование крепи было выполнено в соответствии с нормами (*Общесоюзные нормы технологического проектирования шахтных стволов и скважин, сооружаемых способом реактивно-турбинного бурения (РТБ): ОНТП 3-80. М.: Минуглепром СССР, 1980. 74 с.*), где обсадная труба рассчитывается, как цилиндрическая оболочка, усиленная шпангоутами, под действием внешнего давления на прочность и устойчивость. Расчет технологических параметров спуска на плаву сделан с учетом рекомендаций [81, 89], согласно которым влияние осевой нагрузки в прочностных расчетах учитывается, как дополнительное напряжение от сжатия. Таким образом, принятые на предприятии

методы расчета и проектирования обсадной колонны не рассматривают специфику ее работы при спуске на плаву, как гибкого весомого стержня.

С учетом специфики расчетной схемы (рисунок 7.1) – схема является геометрически изменяемой и имеется взаимосвязь между длиной стержня и действующей нагрузкой, выполним построение модели статического изгиба, весомой стержневой системы.

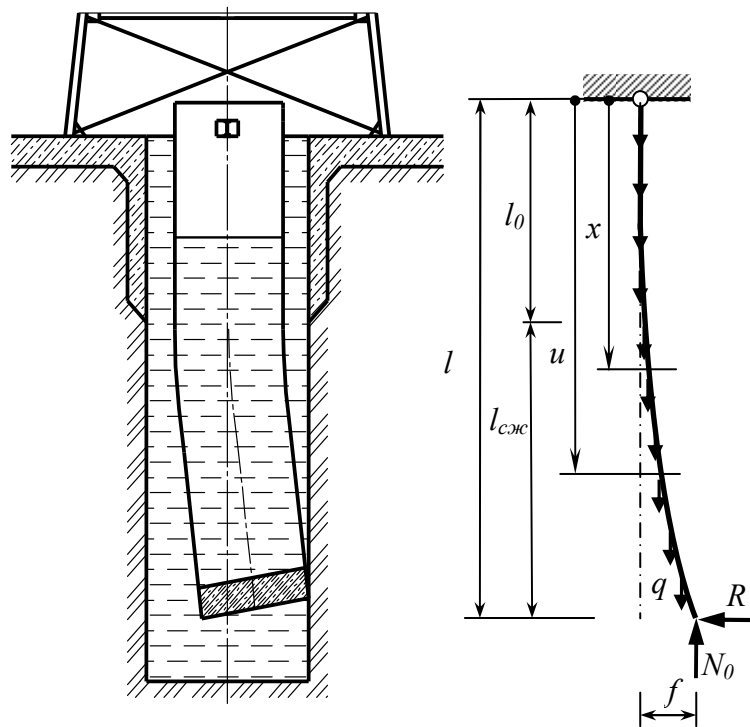


Рисунок 7.1. Расчетная схема спуска обсадной трубы на плаву

Обсадная труба рассматривается, как упругий стержень длиной l и погонным весом q (рисунок 7.1). На нижний конец стержня действует продольная нагрузка N_0 , которая соответствует выталкивающей силе, необходимой для снижения нагрузки на талевую систему буровой вышки. Таким образом, стержень имеет участок сжатия длиной $l_{сж} = N_0 / q$ и растяжения ($l_0 = l - l_{сж}$). Изгибающий момент в произвольном сечении x будет вычисляться по формуле

$$M(x) = N_0(f - y) - R(l - x) - q \int_x^l (\eta - y) du, \quad (7.1)$$

где u – текущая координата, η – соответствующее ей перемещение, f – горизонтальное перемещение нижнего конца стержня.

Если продифференцировать выражение (7.1) по переменной x , то с учетом соотношения $M(x) = EJy''$ приходим к уравнению поперечного изгиба весомого стержня

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} + (N_0 - ql + qx) \frac{dy}{dx} = R,$$

которое с помощью замен $k = \sqrt{\frac{ql^3}{EJ}}$, $\zeta = \psi + \frac{x}{l} - 1$, $\psi = \frac{N_0}{ql}$ – относительная

величина выталкивающей силы, $\tilde{R} = \frac{Rl^2}{EJ}$ и $y' = \theta$ приводится к уравнению вида

$$(2.21)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} + k^2 \zeta \theta = \tilde{R}. \quad (7.2)$$

Точка $x_0 = (1 - \psi)l$ ($\zeta = 0$) является точкой ветвления решений линейного дифференциального уравнения (7.2). Если для участка растяжения ($0 \leq x < (1 - \psi)l$) ввести обозначение $\zeta^* = 1 - \psi - \frac{x}{l}$, тогда дифференциальное уравнение (7.2) примет вид (2.6)

$$\frac{d^2 \theta}{d\zeta^{*2}} - k^2 \zeta^* \theta = \tilde{R}. \quad (7.3)$$

Решение дифференциального уравнения (7.2) находится в функциях Бесселя и Ломмеля (2.22)

$$\theta(z) = y'_x = C_1 z^{1/3} J_{1/3}(z) + C_2 z^{1/3} J_{-1/3}(z) + \tilde{R} \left(\frac{2}{3k^2} \right)^{2/3} z^{1/3} s_{0,1/3}(z), \quad (7.4)$$

где $z = \frac{2}{3}k\zeta^{3/2}$,

Если проинтегрировать выражение (7.4) с учетом, что $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{l} \left(\frac{3k^2 z}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{dy}{dz}$ и обозначить $C_4 = \frac{2}{3k^2} \tilde{R}$, то получим выражение для перемещений $y(z)$

$$y(z) = l \left(C_1 \bar{J}_{1/3}(z) + C_2 \bar{J}_{-1/3}(z) + C_3 + C_4 \bar{S}_{0,1/3}(z) \right), \quad (7.5)$$

где $\bar{J}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z J_{\pm 1/3}(z) dz$, $\bar{S}_{0,1/3}(z) = \int_0^z S_{0,1/3}(z) dz$.

Продифференцировав выражения с использованием рекуррентных зависимостей для функций Бесселя и Ломмеля, получим уравнения углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил (см. (2.25) – (2.27))

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \left(\frac{3k^2 z}{2} \right)^{1/3} \left(C_1 J_{1/3}(z) + C_2 J_{-1/3}(z) + C_4 S_{0,1/3}(z) \right); \\ M(z) &= ql^2 \left(\frac{3z}{2k} \right)^{2/3} \left(C_1 J_{-2/3}(z) - C_2 J_{2/3}(z) - \frac{2}{3} C_4 S_{-1,-2/3}(z) \right); \\ Q(z) &= -ql \frac{3z}{2} \left(C_1 J_{1/3}(z) + C_2 J_{-1/3}(z) - \frac{8}{9} C_4 S_{-2,1/3}(z) \right), \end{aligned} \quad (7.6)$$

Решение дифференциального уравнения (7.3) имеет вид (2.7)

$$y'_x = \theta(z) = C_1^* z^{1/3} I_{1/3}(z) + C_2^* z^{1/3} I_{-1/3}(z) - \tilde{R} \left(\frac{2}{3k^2} \right)^{2/3} z^{1/3} g_{0,1/3}(z), \quad (7.7)$$

где $z = \frac{2}{3}k(\zeta^*)^{3/2}$.

По аналогии, как для участка сжатия, для участка растяжения уравнения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил получим в виде (см. (2.9) – (2.12))

$$\begin{aligned}
y(z) &= l \left(C_1^* \bar{I}_{1/3}(z) + C_2^* \bar{I}_{-1/3}(z) + C_3^* - C_4^* \bar{g}_{0,1/3}(z) \right) \\
\theta(z) &= - \left(\frac{3k^2 z}{2} \right)^{1/3} \left(C_1^* I_{1/3}(z) + C_2^* I_{-1/3}(z) - C_4^* g_{0,1/3}(z) \right); \\
M(z) &= ql^2 \left(\frac{3z}{2k} \right)^{2/3} \left(C_1^* I_{-2/3}(z) + C_2^* I_{2/3}(z) + \frac{2}{3} C_4^* g_{-1,-2/3}(z) \right); \\
Q(z) &= -ql \frac{3z}{2} \left(C_1^* I_{1/3}(z) + C_2^* I_{-1/3}(z) - \frac{8}{9} C_4^* g_{-2,1/3}(z) \right),
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Рассмотрим устойчивость обсадной трубы в процессе спуска, для этого следует удовлетворить уравнения (7.5), (7.6) и (7.8) условию сопряжения растянутого и сжатого участков и граничным условиям закрепления.

На границе стыковки двух участков (растяжение-сжатие) воспользуемся условием равенства перемещений, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил. Из этих условий, используя формулы (7.5), (7.6) и (7.8), получаем

$$C_1^* = C_1, \quad C_2^* = -C_2, \quad C_3^* = C_3, \quad C_4^* = C_4. \tag{7.9}$$

Граничные условия в рамках рассматриваемой схемы (рисунок 7.1) имеют вид:

$$y_{x=0} = 0; \quad M_{x=0} = 0; \quad M_{x=l} = 0; \quad Q_{x=l} = -N_0 \theta_{x=l},$$

последнее условие приводит к выражению

$$C_4 \left(\frac{8}{9} S_{-2,1/3} \left(\frac{2}{3} k \psi^{3/2} \right) + S_{0,1/3} \left(\frac{2}{3} k \psi^{3/2} \right) \right) = 0, \quad \text{тогда с учетом рекуррентной}$$

зависимости [48] $S_{0,1/3}(z) = \frac{1}{z} - \frac{8}{9} S_{-2,1/3}(z)$, получим $C_4 = 0$, используя соотношения (9), получаем однородную систему относительно произвольных постоянных C_1, C_2, C_3

$$\begin{cases} C_1 \bar{I}_{1/3} \left(\frac{2}{3} k (1-\psi)^{3/2} \right) - C_2 \bar{I}_{-1/3} \left(\frac{2}{3} k (1-\psi)^{3/2} \right) + C_3 = 0 \\ C_1 I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} k (1-\psi)^{3/2} \right) - C_2 I_{2/3} \left(\frac{2}{3} k (1-\psi)^{3/2} \right) = 0 \\ C_1 J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} k \psi^{3/2} \right) - C_2 J_{2/3} \left(\frac{2}{3} k \psi^{3/2} \right) = 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

Приравнявая определитель системы (7.10) нулю, приходим к уравнению для определения относительной величины критической силы ψ в зависимости от параметра k

$$\begin{aligned} & I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} k (1-\psi)^{3/2} \right) J_{2/3} \left(\frac{2}{3} k \psi^{3/2} \right) - \\ & - I_{2/3} \left(\frac{2}{3} k (1-\psi)^{3/2} \right) J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} k \psi^{3/2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Численные исследования уравнения (7.11) представлены на графике рисунок 7.2. Из графика следует, что при $k = 0$ ($EJ \rightarrow \infty$) $\psi = 0,5$, что соответствует предельному значению ψ , при котором обсадная труба находится в состоянии устойчивого равновесия, как «абсолютно жесткий» стержень.

Рассмотрим устойчивость исследуемой трубы в процессе спуска, параметры конструкции имеют следующие значения: диаметр трубы 4,3 м, толщина стенки 16 мм ($EJ = 1,02 \cdot 10^{11}$ Нм²), погонный вес $q = 21$ кН/м, максимальная нагрузка на монтажную балку 2,8 МН, длина участка растяжения составит $l_0 = \frac{2,8 \cdot 10^3}{21} = 133$

м, соответственно найдем минимальное значение параметра гибкости

$k_{\min} = \sqrt{\frac{q l_0^3}{EJ}} = 0,695$, максимальное значение определяется для полной длины

колоны $l_{\max} = 385$ м – $k_{\max} = 3,42$. Параметр выталкивающей силы, необходимой

для снижения нагрузки на монтажную балку, для произвольной длины колоны ($l_0 \leq l \leq l_{\max}$) определяется зависимостью

$$\psi = \frac{ql - ql_0}{ql} = 1 - \left(\frac{k_{\min}}{k} \right)^{2/3}. \quad (7.12)$$

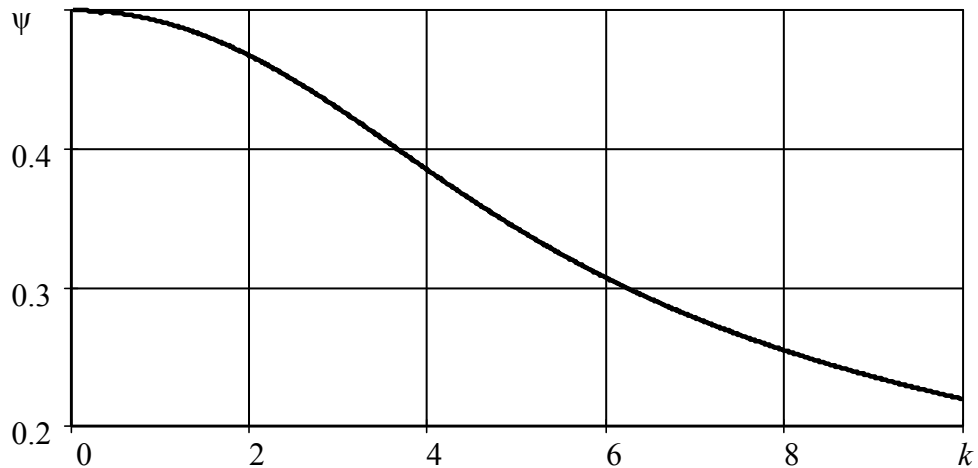


Рисунок 7.2. Зависимость относительной величины критической нагрузки от гибкости трубы

На рисунке 7.3 кривая 1, построенная по зависимости (7.11), определяет критические значения параметра ψ , кривая 2 (формула (7.12)) соответствует фактическому значению выталкивающей силы, их пересечение дает критическое значение длины трубы $l_{\text{кр}} = 253$ м ($k = 1,82$).

После достижения критической длины колона отклоняется от вертикального положения до возникновения контакта со стенкой ствола, дальнейший ее спуск сопровождается «сползанием» по стенке. При этом возникает отклонение от вертикальности и соответственно снижение эксплуатационных качеств скважины, а так же появление дополнительных нагрузок на крепь в процессе спуска, за счет возникновения состояния продольного изгиба.

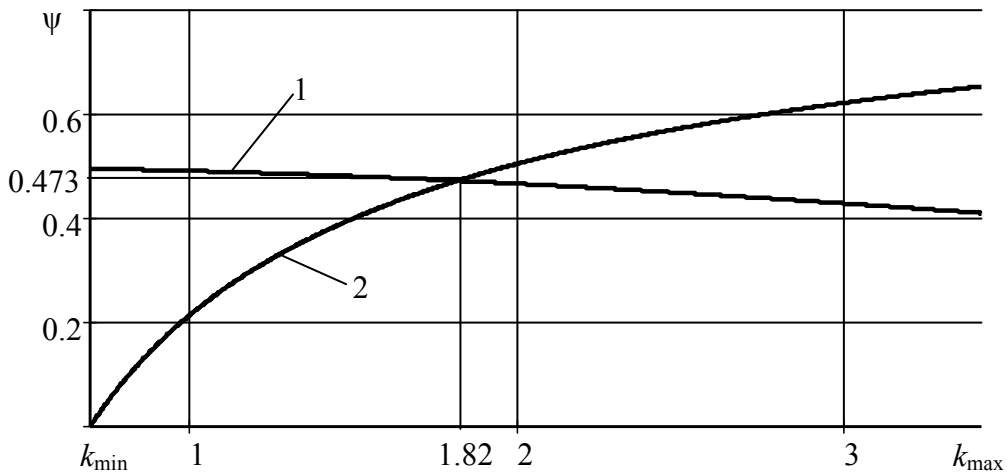


Рисунок 7.3. Зависимости относительных величин нагрузок от гибкости трубы: 1 – критическая нагрузка; 2 – действующая нагрузка

Один из вариантов решения данной проблемы заключается в изменении

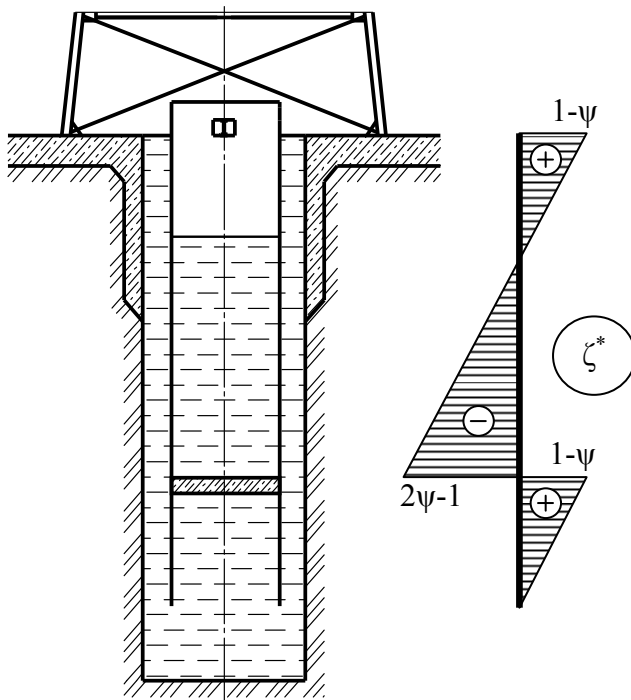


Рисунок 7.4. Технологическая схема спуска трубы с двумя участками растяжения

технологической схемы спуска, это реализуется следующим образом: колонна наращивается до достижения допустимой грузоподъемности буровой вышки, как при секционном способе, после устанавливается днище и спуск продолжается на плаву (рисунок 7.4).

Напряженно-деформированное состояние на участке выше днища (растянуто-сжатом) описывается зависимостями (7.5), (7.6), (7.8) и (7.9) с произвольными постоянными C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , на участке ниже днища

(растянутом) зависимостями (7.8) с произвольными постоянными C_5 , C_6 , C_7 , C_8 , тогда граничные условия в соответствии с эпюрой ζ^* (рисунок 7.4), будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \left(\frac{2}{3} k (1 - \psi)^{3/2} \right) = 0 \\ M_1 \left(\frac{2}{3} k (1 - \psi)^{3/2} \right) = 0 \\ y_1 \left(\frac{2}{3} k (2\psi - 1)^{3/2} \right) = y_2 \left(\frac{2}{3} k (1 - \psi)^{3/2} \right) \\ \theta_1 \left(\frac{2}{3} k (2\psi - 1)^{3/2} \right) = \theta_2 \left(\frac{2}{3} k (1 - \psi)^{3/2} \right) \\ M_1 \left(\frac{2}{3} k (2\psi - 1)^{3/2} \right) = M_2 \left(\frac{2}{3} k (1 - \psi)^{3/2} \right) \\ Q_1 \left(\frac{2}{3} k (2\psi - 1)^{3/2} \right) = Q_2 \left(\frac{2}{3} k (1 - \psi)^{3/2} \right) - N_0 \theta_2 \left(\frac{2}{3} k (1 - \psi)^{3/2} \right) \\ M_2(0) = 0 \\ Q_2(0) = 0 \end{array} \right. \quad (7.13)$$

На рисунке 7.5 представлены: кривая 1, построенная по численным исследованиям системы (7.13), и кривая 2 по формуле (7.12), в пределах варьирования k для описанных выше параметров конструкции. Из графика (рисунок 7.5) очевидно, что при такой схеме спуска устойчивость обсадной трубы будет обеспечена. Следует отметить, что для данной схемы влияние общей гибкости трубы k на величину критической нагрузки ψ , по сравнению с предыдущей схемой, в значительной степени снижается при этом значения $\psi_{кр}$ мало отличаются от предельной величины $\psi_{np} = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$, при котором труба находится в состоянии устойчивого равновесия, как «абсолютно жесткий» стержень. Таким образом, при возможной потере устойчивости фактически колона будет терять равновесие, сохраняя свою ось прямолинейной.

При спуске обсадной колоны на плаву, для обеспечения вертикальности продольной оси, следует выбирать технологическую схему спуска (рисунок 7.1, рисунок 7.4) исходя из устойчивости конструкции, как весомого центрально-сжатого стержня. Если обе схемы не дают необходимый результат, а реализация другого метода спуска, например, на воздушной подушке, невозможна, то

необходимо предварительно установить на забой кондуктор с направляющим конусом. В этом случае в расчетах труб следует учесть нагрузки от продольного изгиба.

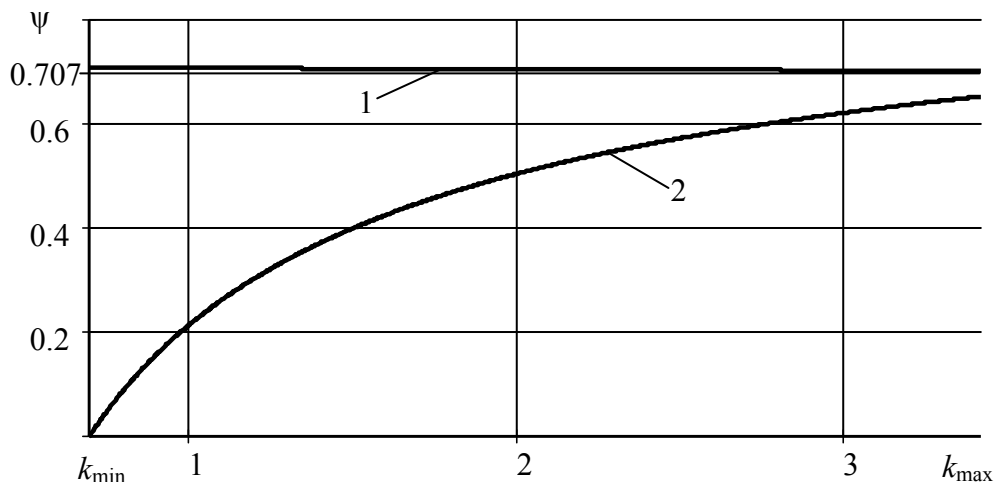


Рисунок 7.5. Зависимости относительных величин нагрузок от гибкости трубы: 1 – критическая нагрузка; 2 – действующая нагрузка

Результаты данного исследования представлены в статье [252].

Как видно, точное решение при усложнении технологической схемы приводит к громоздким математическим выражениям в функциях Бесселя и Ломмеля. Таким образом, для анализа проблемы устойчивости обсадных труб при спуске на плаву целесообразным является рассмотрение инженерного подхода к данной задаче на основе упрощенной математической модели продольного изгиба невесомого стержня. Такой подход рассмотрен в статье [251].

В качестве расчетной модели рассматривается упругий стержень длиной l и весом, приложенным к нейтральному сечению (рисунок 7.6). Положение нейтрального сечения (длину участка растяжения l_p) определим через грузоподъемность буровой установки G и погонную плотность трубы q , $l_p = G/q$. Длина участка сжатия будет определяться через выталкивающую силу N_0 , действующую на нижний конец стержня $l_c = N_0/q$. Решение дифференциального уравнения в случае продольно-поперечного изгиба

однородного стержня известно, и по методу начальных параметров уравнение изогнутой оси имеет вид [270]:

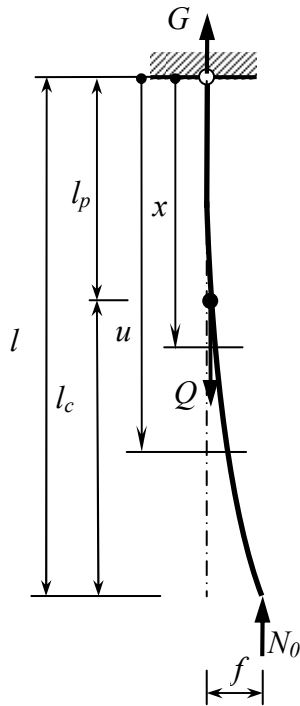


Рисунок 7.6.
Расчетная схема
невесомого стержня

– на участке растяжения ($0 \leq x \leq l_p$)

$$y(x) = y_0 + \frac{\theta_0}{k_1} \sinh k_1 x - \frac{M_0}{k_1^2 EJ} (1 - \cosh k_1 x) - \frac{P_0}{k_1^3 EJ} (k_1 x - \sinh k_1 x) \quad (7.14)$$

– на участке сжатия ($0 \leq x \leq l_c$)

$$y(x) = y_0^* + \frac{\theta_0^*}{k_2} \sinh k_2 x + \frac{M_0^*}{k_2^2 EJ} (1 - \cosh k_2 x) + \frac{P_0^*}{k_2^3 EJ} (k_2 x - \sinh k_2 x), \quad (7.15)$$

где, y_0 , θ_0 , M_0 , P_0 – начальные параметры: прогиб, угол поворота, изгибающий момент, поперечная сила при ($x=0$), соответственно для участков растяжения и сжатия, EJ – изгибная жесткость трубы, $k_1 = \sqrt{\frac{G}{EJ}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{N_0}{EJ}}$.

Введем следующие обозначения: $\lambda = \sqrt{\frac{ql_p^3}{EJ}}$, $\xi = x/l_p$, $\chi = l_c/l_p$. Подставляя

принятые обозначения в уравнения (7.14) – (7.15), а также учитывая, что $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l_p}$,

из дифференциальных зависимостей получаем уравнения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил:

– на участке растяжения ($0 \leq \xi \leq 1$)

$$\begin{aligned}
y(\xi) &= l_p \left(y_0 + \frac{\theta_0}{\lambda} \sinh \lambda \xi - \frac{M_0}{ql_p^2} (1 - \cosh \lambda \xi) - \frac{P_0}{\lambda ql_p} (\lambda \xi - \sinh \lambda \xi) \right); \\
\theta(\xi) &= \theta_0 \cosh \lambda \xi + \frac{M_0 \lambda}{ql_p^2} \sinh \lambda \xi - \frac{P_0}{ql_p} (1 - \cosh \lambda \xi); \\
M(\xi) &= \frac{EJ}{l_p} \left(\theta_0 \lambda \sinh \lambda \xi + \frac{M_0 \lambda^2}{ql_p^2} \cosh \lambda \xi + \frac{P_0 \lambda}{ql_p} \sinh \lambda \xi \right); \\
Q(\xi) &= \frac{EJ}{l_p^2} \left(\theta_0 \lambda^2 \cosh \lambda \xi + \frac{M_0 \lambda^3}{ql_p^2} \sinh \lambda \xi + \frac{P_0 \lambda^2}{ql_p} \cosh \lambda \xi \right), \quad (7.16)
\end{aligned}$$

– на участке сжатия ($0 \leq \xi \leq \chi$)

$$\begin{aligned}
y(\xi) &= l_p \left(y_0^* + \frac{\theta_0^*}{\lambda \sqrt{\chi}} \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{M_0^*}{\chi ql_p^2} (1 - \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi})) + \frac{P_0^*}{\lambda \chi^{3/2} ql_p} (\lambda \xi \sqrt{\chi} - \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi})) \right); \\
\theta(\xi) &= \theta_0^* \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{M_0^* \lambda}{\sqrt{\chi} ql_p^2} \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{P_0^*}{\chi ql_p} (1 - \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi})); \\
M(\xi) &= \frac{EJ}{l_p} \left(-\theta_0^* \lambda \sqrt{\chi} \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{M_0^* \lambda^2}{ql_p^2} \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{P_0^* \lambda}{\sqrt{\chi} ql_p} \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) \right); \\
Q(\xi) &= \frac{EJ}{l_p^2} \left(-\theta_0^* \lambda^2 \chi \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) - \frac{M_0^* \lambda^3 \sqrt{\chi}}{ql_p^2} \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{P_0^* \lambda^2}{ql_p} \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) \right). \quad (7.17)
\end{aligned}$$

Рассмотрим устойчивость обсадной трубы в процессе спуска, для этого необходимо, чтобы уравнения (7.16) и (7.17) удовлетворяли условию сопряжения растянутого и сжатого участков и граничным условиям закрепления.

Из шарнирного закрепления верхнего торца получаем: $y_0 = 0$; $M_0 = 0$. Оставшиеся шесть условий имеют вид:

$$y_0^* = y_1(0); \quad \theta_0^* = \theta_1(0); \quad M_0^* = M_1(0);$$

$$P_0^* = P_0; M_2(\chi) = 0; Q_2(\chi) + ql_c \theta_2(\chi) = 0, \quad (7.18)$$

где индекс «1» использован для участка растяжения, «2» – сжатия.

Используя первые четыре соотношения из условий (7.18), составим выражения для углов поворота и поперечных сил на участке сжатия:

$$\begin{aligned} \theta_2(\xi) = \theta_0 & \left(\cosh \lambda \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sinh \lambda \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) \right) + \\ & + \frac{P_0}{ql_p} \left(-(1 - \cosh \lambda) \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sinh \lambda \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{1}{\chi} (1 - \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi})) \right); \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} Q_2(\xi) = \frac{EJ}{l_p^2} & \left(\theta_0 \lambda^2 \chi \left(-\cosh \lambda \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) - \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sinh \lambda \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{P_0 \lambda^2 \chi}{ql_p} \left((1 - \cosh \lambda) \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) - \frac{1}{\sqrt{\chi}} \sinh \lambda \sin(\lambda \xi \sqrt{\chi}) + \frac{1}{\chi} \cos(\lambda \xi \sqrt{\chi}) \right) \right) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Подставив полученные соотношения (7.19) и (7.20) в последнее из условий (7.18), находим $P_0 = 0$, тогда из предпоследнего условия (7.18) получим выражение для нахождения собственных значений уравнения устойчивости:

$$\tanh \lambda = \sqrt{\chi} \tan(\lambda \chi^{3/2}). \quad (7.21)$$

Численные исследования уравнения (7.21) представлены на графике рисунок 7.7. Из графика следует, что при $\lambda \rightarrow 0$ ($EJ \rightarrow \infty$) $\chi \rightarrow 1$, что соответствует предельному значению χ , при котором обсадная труба находится в состоянии устойчивого равновесия, как «абсолютно жесткий» стержень.

Рассмотрим устойчивость исследуемой трубы в процессе спуска. Параметры конструкции имеют следующие значения: диаметр трубы 4,3 м, толщина стенки 16 мм ($EJ = 1,02 \cdot 10^{11}$ Нм²), погонная плотность $q = 21$ кН/м, максимальная нагрузка на монтажную балку 2,8 МН, длина участка растяжения составит:

$l_p = \frac{2,8 \cdot 10^3}{21} = 133$ м, соответственно, найдем значение параметра гибкости:

$\lambda = \sqrt{\frac{ql_p^3}{EJ}} = 0,695$, $\chi = 0,877$, откуда находим $l_c = \chi l_p = 117$ м, соответственно,

полная длина колонны составит: $l_{кр} = 250$ м. Как ранее рассмотрено, для модели весомого стержня критическое значение длины составляет: $l_{кр} = 253$ м. Видим, что сравнение результатов расчета на устойчивость по упрощенной невесомой модели с известными результатами, полученными для весомого стержня, моделирующего колонну, имеют высокую точность (для рассматриваемого примера погрешность составила менее 1 %).

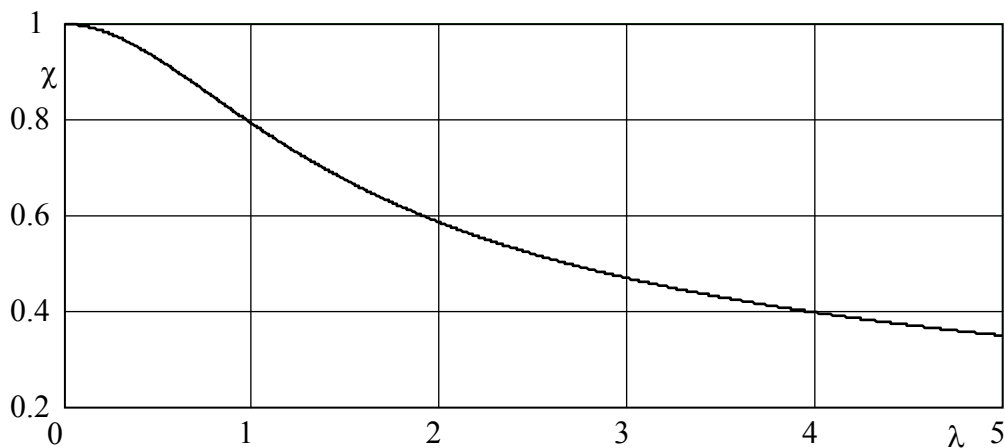


Рисунок 7.7. Зависимость относительной длины сжатого участка от гибкости колонны

Таким образом, предлагаемая модель может быть положена в основу инженерных методов выбора технологических регламентов при спуске обсадных колонн на плаву.

7.2. Инженерная методика расчета критических нагрузок в стержнях с неоднородностью физико-механических свойств

Исследование устойчивости прямолинейной формы стержневых конструкций является, как самостоятельной научно-технической задачей, так и

сопряженной задачей, в частности, при обосновании упрощенных моделей, когда продольные нагрузки не учитывают, или их учет ведется по принципу суперпозиций. Для последнего случая практический интерес представляют ориентировочные значения критических нагрузок, соответствующих схем закрепления стержневой системы, и их сопоставление с действующими силами. В справочнике [192] представлены результаты исследования устойчивости стержней с непрерывно-изменяемой жесткостью для некоторых частных случаев. Используя аппроксимацию результатов численных исследований аналитических моделей, рассмотренных во втором и третьем разделе работы, можно в значительной степени дополнить справочную базу инженерных расчетных методов.

Рассматриваются стержневые конструкции, у которых изгибная жесткость и интенсивность продольной нагрузки описываются степенными зависимостями от продольной координаты x (рисунок 7.8):

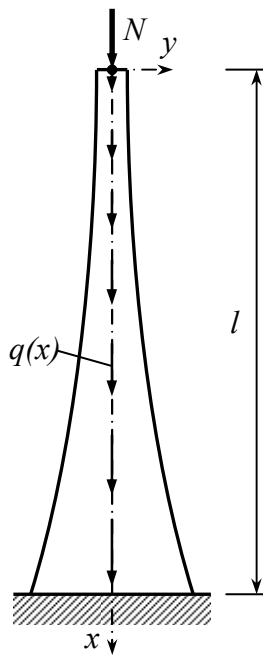


Рисунок 7.8. Расчетная схема весомого стержня с непрерывно изменяемым сечением.

$$EJ = EJ_2 \left((1-\chi) \frac{x}{l} + \chi \right)^v; \\ q = \gamma F_2 \left((1-\chi) \frac{x}{l} + \chi \right)^\mu, \quad (7.22)$$

где $\chi = \frac{h_1}{h_2}$ ($0 < \chi < 1$), h_1 и h_2 – геометрические параметры торцевых сечений (для стержней пирамидального и конического очертаний – радиусы инерции), E – модуль упругости, F_2 и J_2 – площадь и осевой момент инерции поперечного сечения основания стержня, γ – удельный вес, l – длина стержня, показатели степени v , μ зависят от геометрии конструкции. К верхнему торцу стержня приложена продольная сила N .

Исследования устойчивости разных видов конструкций [250, 235, 55, 270] показало, что критическую сосредоточенную силу при учете действия

распределенной нагрузки с достаточной точностью можно найти из линейной аппроксимации

$$\tilde{N}_{кр} = \tilde{N}_{0кр} \left(1 - \frac{\tilde{q}}{\tilde{q}_{кр}} \right), \quad (7.23)$$

где $\tilde{N}_{0кр} = \frac{N_{0кр} l^2}{EJ_2}$ – безразмерная критическая сила для невесомого стержня,

$\tilde{q}_{кр} = \frac{\gamma F_2 l^3}{EJ_2}$ – безразмерный критический вес.

На основе точного решения уравнения продольного изгиба, критический вес определен: для однородных стержней [55, 270, 80], стержней с квадратичным законом изменения изгибной жесткости ($\nu = 2$; $\mu = 0$) [235], остроконечных стержней [192, 80]. Для определения критического веса $\tilde{q}_{кр}$ в более общем случае стержневой конструкции аппроксимируем ее форму стержневой системой, состоящей из n участков, параметры каждого участка, с учетом зависимостей (7.22), определим следующим образом:

$$l_k = \frac{l}{n}; \quad q_k = \gamma F_n \left((1 - \chi) \frac{k - \xi}{n} + \chi \right)^\mu; \quad EJ_k = EJ_n \left((1 - \chi) \frac{k - \xi}{n} + \chi \right)^\nu, \quad (7.24)$$

где ξ – параметр, определяющий сечение в пределах участка по которому устанавливаются интенсивность продольной нагрузки и жесткость участка ($0 \leq \xi \leq 1$).

Выбор числа участков n и параметра ξ осуществляется путем сопоставления результатов расчета, с известными значениями для остроконечных конструкций [192, 80]. В остальном алгоритм построения модели аналогичен, представленному в параграфе 2.2. Результаты численных исследований аппроксимированы степенными зависимостями и сведены в таблицу 7.1.

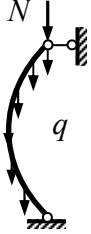
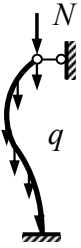
Зависимости для определения критической силы невесомого стержня, представленные в таблице 7.1, получены из аппроксимации результатов численных исследований моделей, рассмотренных в параграфе 3.2.

Численные исследования всех рассматриваемых моделей выполнены в пределах изменения параметра поперечного размера – $0,01 \leq \chi \leq 0,99$ с шагом $\Delta\chi = 0,01$.

Таблица 7.1.

Зависимости для определения критических нагрузок

Схема, условия закрепления	Тип конструкции	Расчетные зависимости; $0,01 \leq \chi \leq 0,99$
1	2	3
 $M(0) = 0; Q(0) = 0;$ $y(l) = 0; \theta(l) = 0.$	Однородный стержень ($\nu = 0; \mu = 0$)	$\tilde{N}_{0кр} = (\pi/2)^2$ $\tilde{q}_{кр} = 7,83$
	Плоская конструкция трапецидального очертания ($\nu = 1; \mu = 1$)	$\tilde{N}_{0кр} = 1,05\chi^{0,711} + 1,419$ $\tilde{q}_{кр} = -27,77\chi^{0,239} + 35,09$
	Решетчатая конструкция пирамидального очертания ($\nu = 2; \mu = 0$)	$\tilde{N}_{0кр} = 2,01\chi^{0,698} + 0,451$ $\tilde{q}_{кр} = 4,255\chi^{0,784} + 3,586$
	Клиновидный стержень; коническая трубчатая стойка ($\nu = 3; \mu = 1$)	$\tilde{N}_{0кр} = 2,47\chi^{0,878}$ $\tilde{q}_{кр} = -23,04\chi^{0,058} + 30,76$
	Пирамидальная, коническая стойка ($\nu = 4; \mu = 2$)	$\tilde{N}_{0кр} = 2,557\chi^{1,24} - 0,062$ $\tilde{q}_{кр} = -37,26\chi^{0,222} + 44,48$
	Однородный стержень ($\nu = 0; \mu = 0$)	$\tilde{N}_{0кр} = \pi^2$ $\tilde{q}_{кр} = 18,59$

1	2	3
 $y(0) = 0; M(0) = 0;$ $y(l) = 0; M(l) = 0.$	Плоская конструкция трапецидального очертания $(\nu = 1; \mu = 1)$	$\tilde{N}_{0кр} = 6,236\chi^{0,779} + 3,624$ $\tilde{q}_{кр} = -7,183\chi^{0,66} + 25,59$
	Решетчатая конструкция пирамидального очертания $(\nu = 2; \mu = 0)$	$\tilde{N}_{0кр} = 2,01\chi^{0,698} + 0,451$ $\tilde{q}_{кр} = 14,41\chi^{0,951} + 4,071$
	Клиновидный стержень; коническая трубчатая стойка $(\nu = 3; \mu = 1)$	$\tilde{N}_{0кр} = 9,523\chi^{0,985} + 0,284$ $\tilde{q}_{кр} = 16,45\chi^{0,645} + 2,102$
	Пирамидальная, коническая стойка $(\nu = 4; \mu = 2)$	$\tilde{N}_{0кр} = 9,87\chi^2$ $\tilde{q}_{кр} = 22,05\chi^{0,481} - 2,878$
 $y(0) = 0; M(0) = 0;$ $y(l) = 0; \theta(l) = 0.$	Однородный стержень $(\nu = 0; \mu = 0)$	$\tilde{N}_{0кр} = (\pi / 0,699)^2$ $\tilde{q}_{кр} = 52,52$
	Плоская конструкция трапецидального очертания $(\nu = 1; \mu = 1)$	$\tilde{N}_{0кр} = 13,71\chi^{0,728} + 6,468$ $\tilde{q}_{кр} = -50,91\chi^{0,433} + 102,4$
	Решетчатая конструкция пирамидального очертания $(\nu = 2; \mu = 0)$	$\tilde{N}_{0кр} = 19,34\chi^{0,992} + 0,72$ $\tilde{q}_{кр} = 39,31\chi^{0,887} + 13,01$

1	2	3
	Клиновидный стержень; коническая трубчатая стойка ($\nu = 3; \mu = 1$)	$\tilde{N}_{0кр} = 19,89\chi^{1,473} + 0,204$ $\tilde{q}_{кр} = 31,23\chi^{0,614} + 21,15$
	Пирамидальная, коническая стойка ($\nu = 4; \mu = 2$)	$\tilde{N}_{0кр} = 20,19\chi^2$ $\tilde{q}_{кр} = 46,71\chi^{0,131} + 6,356$

7.3. Рекомендации к определению коэффициента восстановления при ударе упругих неоднородных стержней

При частично упругом ударе импульс системы соударяющихся тел после удара меньше, чем был до удара. Для учета потерь энергии вводится т.н. коэффициент восстановления K_g , который в «классической» теории удара считается зависящим только от физических свойств материалов соударяющихся тел [131]. Коэффициентом восстановления учитываются такие следствия удара: как остаточные деформации, звуковые колебания, нагревание тел, изменение механических свойств материалов и пр. [131]. Проблеме определения коэффициента восстановления посвящены, как теоретические [153, 110], так и экспериментальные работы [154, 113].

Одним из основных критериев применения формул классической механики является условие, что время прохождения упругих волн деформаций через все тело много меньше времени удара, а в случае если эти величины сопоставимы, следует использовать волновую теорию удара [131]. Однако, как показали исследования удара упругих однородных стержней о жесткий ограничитель (рисунок 7.9), выполненные на основе волновой теории [160, 12], результат ударного взаимодействия стержня с ограничителем полностью согласуется с

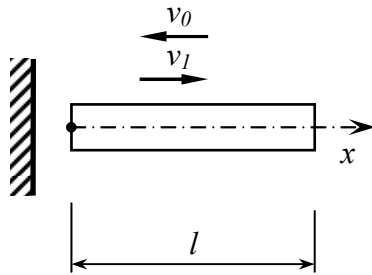


Рисунок 7.9. Удар стержня о жесткий ограничитель

положениями классической теории об ударе абсолютно-упругого тела. Т.е. в процессе удара происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию деформации тела и последующее полное восстановление кинетической энергии ($v_1 = v_0$). Так на рисунке 7.10 представлены графики безразмерной величины усилия в ударном сечении

$$\tilde{P} = -\frac{P}{4EF} \frac{c}{v_0}, \quad \text{выражение (4.124) и}$$

безразмерного перемещения свободного конца стержня $\tilde{u} = -\frac{u}{4l} \frac{c}{v_0}$ (4.123) в

зависимости от безразмерного времени $\tau = tc/l$ для однородного стержня ($\eta = 0$).

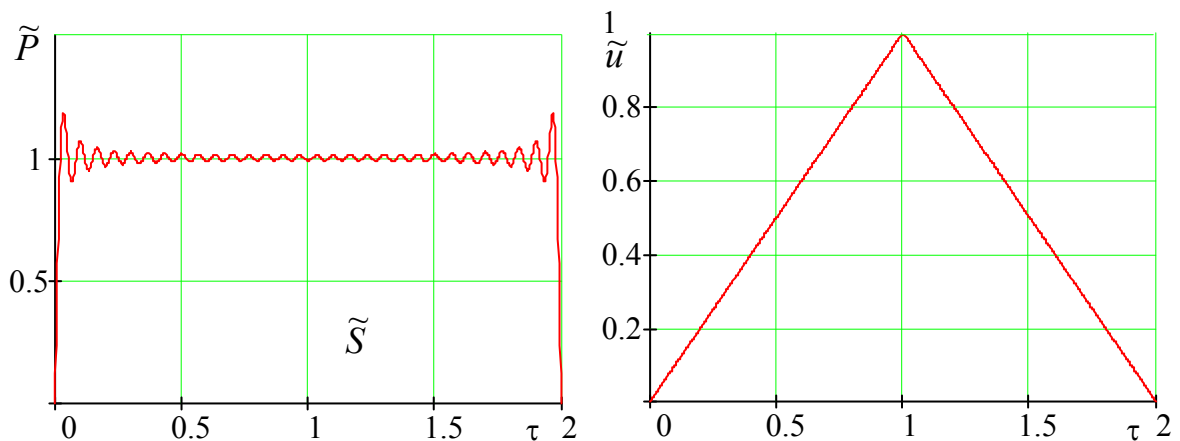


Рисунок 7.10. Зависимости усилия в ударном торце $\tilde{P}$ и перемещения свободного конца $\tilde{u}$ от безразмерного времени τ в однородном стержне

Из графиков (рисунок 7.10) следует, что относительное время удара стержня об ограничитель составит $\tau_0 = 2$ (для неударяющей связи – время, за которое усилие в ударном торце не меняет знак). За этот промежуток времени свободный конец стержня перемещается в направлении опоры, что соответствует сжатию стержня, а в момент освобождения от связи стержень полностью восстанавливает свою длину. Оценим характер взаимодействия стержня с преградой с позиции элементарной теории удара [12]

$$M\bar{v}_1 - M\bar{v}_0 = \bar{S}, \quad (7.25)$$

где $M\bar{v}_0$, $M\bar{v}_1$ - количество движения тела до и после соударения, $\bar{S}$ - импульс реакции опоры. Взяв проекции на ось x для равенства (7.25) получим зависимость для определения скорости после соударения

$$v_1 = \frac{1}{M} \int_T P(t) dt - v_0. \quad (7.26)$$

С учетом введенных обозначений, выражение для скорости получим в виде

$$v_1 = \left(\int_0^{\tau_0} \tilde{P} d\tau - 1 \right) v_0,$$

где τ_0 - относительное время удара (для однородного стержня $\tau_0 = 2$ - см. рисунок 7.10).

Подставив в зависимость (7.26) выражение (4.124) с учетом результатов расчетов, полученных в §4.4, находим

$$v_1 = 0,986v_0.$$

В данном случае, является очевидным, что погрешность в 1,4% носит исключительно вычислительный характер.

С использованием аналогичного подхода при рассмотрении удара конического стержня в §4.1.1 было получено следующее соотношение скоростей (4.34)

$$v_1 = 0,888v_0,$$

которое указывает на не полное восстановление кинетической энергии. На рисунке 7.11 представлены графики безразмерной величины усилия в ударном сечении

$\tilde{P} = -\frac{P}{EF_1} \frac{c}{v_0}$, выражение (4.31) и безразмерного перемещения

свободного конца стержня $\tilde{u} = -\frac{u}{l} \frac{c}{v_0}$ в зависимости от безразмерного времени

$\tau = tc/l$ для конического стержня с углом уклона $\varphi = 0,5^\circ$.

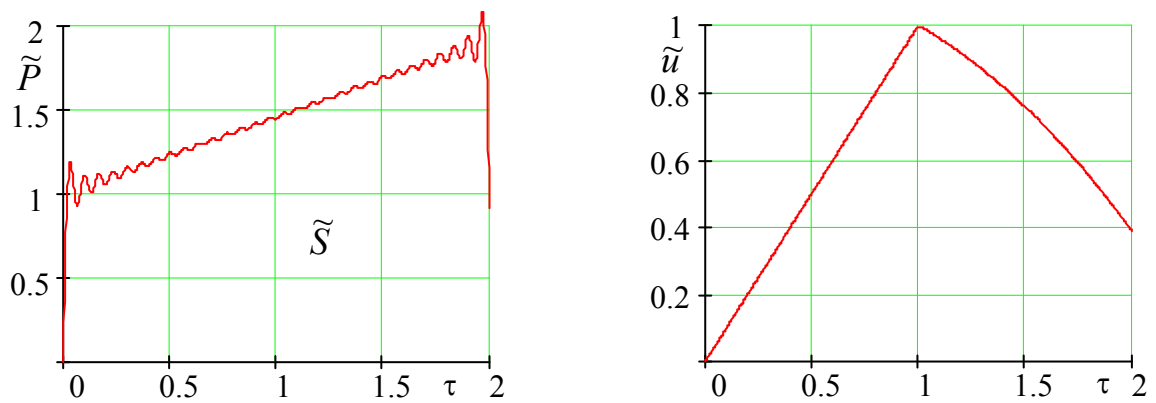


Рис. 7.11. Зависимости усилия в ударном торце $\tilde{P}$ и перемещения свободного конца $\tilde{u}$ от безразмерного времени τ в коническом стержне с уклоном $\varphi = 0,5^\circ$

Из графиков (рисунок 7.11) видно, что, как и в предыдущем случае относительное время удара стержня об ограничитель составляет $\tau_0 = 2$, но при этом за этот промежуток времени стержень не восстанавливает свою длину, а остается частично сжатым. Таким образом, после освобождения от связи конический стержень будет совершать упругие колебания, влиянием которых нельзя пренебречь. Анализ ударного процесса для более широкого класса неоднородных стержневых конструкций показывает, что по завершению удара в стержнях могут оставаться упругие волны, как сжатия, так и растяжения. Аналогичный результат получен в работе [12] при рассмотрении соударения ступенчато-неоднородных стержней.

С учетом вышесказанного следует, что классическая теория удара применима к упругим неоднородным стержневым конструкциям, если учесть дополнительные потери энергии на упругие колебания с использованием коэффициента восстановления.

Рассматриваются две схемы удара упругого стержня с произвольной степенной неоднородностью площади поперечного сечения (рисунок 7.12)

$$F(x) = F_2 z^\alpha; \quad z = (1 - k)x/l + k, \quad (7.27)$$

где l – длина стержня, $k = \sqrt[\alpha]{F_1 / F_2}$, F_1 , F_2 – площади торцевых сечений стержня, в случае $\alpha > 0$ будем принимать $F_2 > F_1$ и при $\alpha < 0$ – $F_2 < F_1$, α – показатель степени, принимает любое вещественное значение.

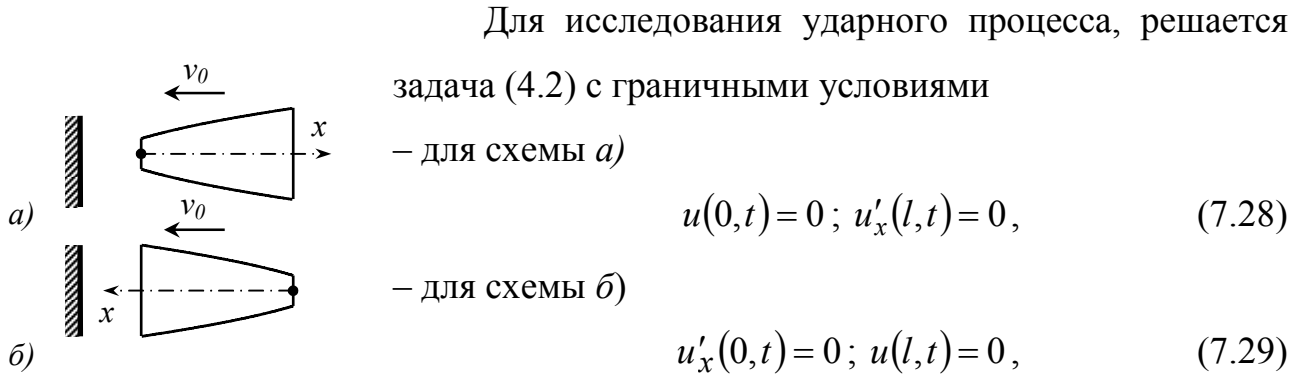


Рисунок 7.12. Схемы удара неоднородного стержня о жесткий ограничитель

и начальными условиями

$$u(x, 0) = 0; \dot{u}(x, 0) = \mp v_0 e(x), \quad (7.30)$$

где v_0 – скорость удара, $e(x)$ – единичная функция.

Подставляя начальные условия (7.28) и (7.29) в зависимости (4.64) и (4.65), а также с учетом первого начального условия (7.30) получаем выражения для продольных перемещений и усилий

– для схемы а)

$$u(z, t) = z^v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{0n} l}{EF_2(1-k)} \frac{k^{v-1}}{\lambda_n} B(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (7.31)$$

$$N(z, t) = z^{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} N_{0n} k^{v-1} D(\lambda_n z) \sin \omega_n t, \quad (7.32)$$

– для схемы б)

$$u(z, t) = z^v \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} k^{-v} A(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (7.33)$$

$$N(z, t) = z^{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} \frac{EF_2(1-k)}{l} k^{-v} \lambda_n C(\lambda_n z) \sin \omega_n t, \quad (7.34)$$

где $\nu = \frac{1-\alpha}{2}$, u_{0n} , N_{0n} – продольное перемещение и продольное усилие нулевого сечения для произвольной формы, $\lambda_n = \frac{\omega_n l}{(1-k)c}$ – собственные значения, ω_n – собственная частота колебаний, c – скорость продольных волн деформаций.

Удовлетворяя вторым граничным условиям (7.28) и (7.29), получим уравнения для нахождения собственных значений

– для схемы а)

$$D(\lambda_n) = 0;$$

– для схемы б)

$$A(\lambda_n) = 0.$$

С учетом зависимости (4.15) получим выражение для квадрата нормы собственных функций с учетом веса ($\rho(z) = z^{1-2\nu}$)

– для схемы а)

$$\Delta_n^2 = \frac{k^{2\nu-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2\nu}}{2\lambda_n^2}, \quad (7.35)$$

– для схемы б)

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2} \left(k^{-2\nu} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2\nu} \right). \quad (7.36)$$

Из второго начального условия (7.30), определяются начальные параметры

– для схемы а)

$$N_{0n} = -EF_2 \frac{\nu_0}{c} \frac{1}{\lambda_n^3 \Delta_n^2}, \quad (7.37)$$

– для схемы б)

$$u_{0n} = l \frac{\nu_0}{c} \frac{k^{-\nu} C(\lambda_n)}{(1-k)\lambda_n^2 \Delta_n^2}. \quad (7.38)$$

Подставляя начальные параметры (7.37) и (7.38) с учетом зависимостей (7.35) и (7.36) в выражения (7.31) – (7.34) получаем окончательные выражения продольных перемещений и усилий

– для схемы а)

$$u(z, t) = -2 \frac{lv_0}{c} \frac{k^{v-1}}{1-k} z^v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 (k^{2v-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2v})} B(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (7.39)$$

$$N(z, t) = -2EF_2 \frac{v_0}{c} k^{v-1} z^{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n (k^{2v-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2v})} D(\lambda_n z) \sin \omega_n t, \quad (7.40)$$

– для схемы б)

$$u(z, t) = 2l \frac{v_0}{c} \frac{k^{-2v}}{1-k} z^v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)}{\lambda_n^2 (k^{-2v} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2v})} A(\lambda_n z) \sin \omega_n t; \quad (7.41)$$

$$N(z, t) = 2EF_2 \frac{v_0}{c} k^{-2v} z^{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)}{\lambda_n (k^{-2v} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2v})} C(\lambda_n z) \sin \omega_n t. \quad (7.42)$$

Используя принятые ранее обозначения для безразмерных величин нагрузки и времени, выражения для определения усилий в ударном торце получим в виде

– для схемы а)

$$\tilde{P}(\tau) = -\frac{N(k, \tau)}{EF_1} \frac{c}{v_0} = 2k^{2v-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n (k^{2v-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2v})} \sin((1-k)\lambda_n \tau); \quad (7.43)$$

– для схемы б)

$$\tilde{P}(\tau) = \frac{N(1, \tau)}{EF_2} \frac{c}{v_0} = 2k^{-2v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)^2}{\lambda_n (k^{-2v} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2v})} \sin((1-k)\lambda_n \tau). \quad (7.44)$$

На рисунке 7.13 показаны импульсы в ударном торце конического стержня с отношением размеров торцевых сечений $d_1 : d_2 = 1 : 5$ для схем удара а) и б) (рисунок 7.12) соответственно.

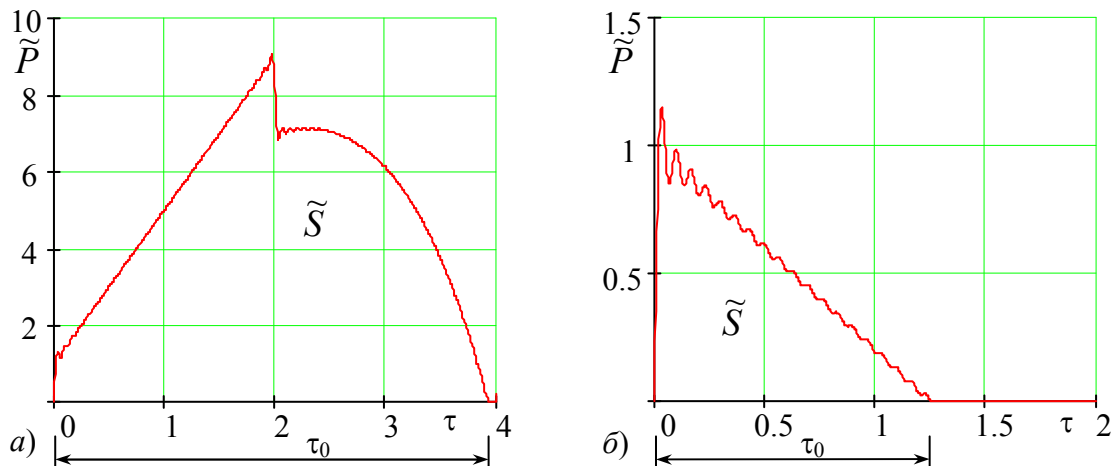


Рисунок 7.13. Зависимость относительного усилия в ударном торце конического стержня ($d_1 : d_2 = 1 : 5$) от безразмерного времени для схемы удара а) и б) соответственно

Численно определив время удара τ_0 (см. рисунок 7.13), подставив выражения (7.43) и (7.44) в формулу (7.26), получим зависимости для нахождения коэффициента восстановления

– для схемы а)

$$K_\epsilon = \frac{4(1-\nu)}{1-k^{2-2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 (k^{2\nu-2} B(\lambda_n)^2 - k^{2\nu})} (1 - \cos((1-k)\lambda_n \tau_0)) - 1; \quad (7.45)$$

– для схемы б)

$$K_\epsilon = \frac{4(1-\nu)k^{-2\nu}}{1-k^{2-2\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C(\lambda_n)^2}{\lambda_n^2 (k^{-2\nu} C(\lambda_n)^2 - k^{2-2\nu})} (1 - \cos((1-k)\lambda_n \tau_0)) - 1. \quad (7.46)$$

Для стержней гиперболического очертания ($\alpha < 0$) расчетные зависимости для схем а) и б) следует поменять местами.

Результаты численных исследований стержневых конструкций по рассмотренной методике представлены в таблице 7.2.

Коэффициенты восстановления при ударе упругих неоднородных стержней
о жесткий ограничитель

Форма очертания стержня	Отношение торцевых размеров, k	Схема удара	Относительное время удара, τ_0	Коэффициент восстановления, K_ϵ
1	2	3	4	5
Клиновидный стержень трапецеидальной формы $\alpha = 1$ ($\nu = 0$)	0,1	a)	3,24	0,96
		b)	1,59	0,64
	0,2	a)	2,82	0,9
		b)	1,79	0,69
	0,3	a)	2,49	0,87
		b)	1,98	0,78
	0,4	a)	2,16	0,88
		b)	1,99	0,86
	0,5	a)	2,02	0,92
		b)	1,99	0,91
	0,6	a)	2,01	0,95
		b)	1,99	0,94
	0,7	a)	2,01	0,97
		b)	2	0,96
	0,8	a)	2	0,98
		b)	2	0,98
	0,9	a)	2	0,99
		b)	2	0,98

1	2	3	4	5
Конический, пирамидальный стержень $\alpha = 2$ ($\nu = -0,5$)	0,1	a)	5,91	1
		б)	1,11	0,48
	0,2	a)	3,94	0,96
		б)	1,25	0,5
	0,3	a)	3,45	0,98
		б)	1,44	0,53
	0,4	a)	3,07	0,93
		б)	1,65	0,59
	0,5	a)	2,71	0,88
		б)	1,92	0,7
	0,6	a)	2,3	0,86
		б)	1,99	0,83
	0,7	a)	2,02	0,91
		б)	1,99	0,9
	0,8	a)	2,01	0,96
		б)	1,99	0,95
	0,9	a)	2	0,98
		б)	2	0,98
Клиновидный стержень гиперболического очертания $\alpha = -1$ ($\nu = 1$)	0,1	a)	3,31	0,92
		б)	1,92	0,51
	0,2	a)	2,83	0,86
		б)	1,98	0,69
	0,3	a)	2,46	0,84
		б)	1,99	0,79
	0,4	a)	2,02	0,87
		б)	1,99	0,86
	0,5	a)	2,02	0,92
		б)	1,99	0,91
	0,6	a)	2,01	0,95
		б)	1,99	0,94
	0,7	a)	2,01	0,97
		б)	2	0,96

1	2	3	4	5
	0,8	<i>a)</i>	2	0,98
		<i>б)</i>	2	0,98
	0,9	<i>a)</i>	2	0,99
		<i>б)</i>	2	0,98
Гиперболический стержень $\alpha = -2$ ($\nu = 1,5$)	0,1	<i>a)</i>	6,01	0,99
		<i>б)</i>	0,523	0,04
	0,2	<i>a)</i>	3,84	0,94
		<i>б)</i>	1,19	0,21
	0,3	<i>a)</i>	3,47	0,96
		<i>б)</i>	1,79	0,39
	0,4	<i>a)</i>	3,01	0,91
		<i>б)</i>	1,92	0,56
	0,5	<i>a)</i>	2,72	0,86
		<i>б)</i>	1,98	0,72
	0,6	<i>a)</i>	2,28	0,86
		<i>б)</i>	1,99	0,83
	0,7	<i>a)</i>	2,02	0,91
		<i>б)</i>	1,99	0,9
	0,8	<i>a)</i>	2,01	0,96
		<i>б)</i>	1,99	0,95
	0,9	<i>a)</i>	2	0,98
		<i>б)</i>	2	0,98

Как видно из таблицы 7.2, расход энергии на упругие колебания не значителен для стержней с большим отношением размеров торцевых сечений ($k = 0,7 \div 1$). С уменьшением параметра k , при ударе стержня по торцу с минимальной площадью, происходит вначале увеличение доли энергии на собственные колебания стержня, а за тем ее снижение. При этом наблюдается увеличение продолжительности контактного взаимодействия стержня с опорой, и при значениях $\tau_0 \geq 3$ – более 90% потенциальной энергии идет на восстановление кинетической. Это в свою очередь подтверждает положение о том, что если время прохождения упругих волн через все тело меньше времени удара, то влиянием

упругих колебаний можно пренебречь [131]. В случае удара стержня по торцу с максимальной площадью, при уменьшении параметра k происходит только усиление волновых процессов в стержне, на которые уходит значительная доля энергии, при этом время удара существенно сокращается. Так стержень гиперболического очертания близкий к остроконечной форме можно рассматривать, как абсолютно-неупругое тело. Аналогичный эффект получен в работе [167] при рассмотрении поперечных колебаний заостренного стержня, и связывается данный эффект с отсутствием отраженных волн со стороны заостренного конца.

7.4. Выводы

1. Предложена математическая модель НДС обсадной колонны при спуске на плаву, как упругого растянуто-сжатого весомого стержня. С использованием данной модели проведены исследования устойчивости колонны, на основе которых разработаны рекомендации по выбору технологических схем спуска.

2. Рассмотрена упрощенная модель спуска колонны, как невесомого растянуто-сжатого стержня. Сравнение результатов исследования двух моделей показало достаточную точность упрощенной модели для инженерных расчетов (расхождение для рассматриваемых параметров обсадных труб составило порядка 1%).

3. Для оценки несущей способности инженерных конструкций и сооружений и обоснования выбора схем и методов их расчета получены эмпирические зависимости критических нагрузок, на основе аппроксимации результатов численных исследований соответствующих математических моделей.

4. Выполнены исследования удара упругих стержней о жесткий ограничитель на основе волновой теории удара. В результате чего установлено, что в отличие от однородных стержней, после удара стержня переменного сечения не вся потенциальная энергия идет на восстановление кинетической

энергии. Часть энергии остается и вызывает собственные колебания, при этом ее величина во многом зависит от схемы удара.

5. На основании численных исследований моделей удара упругих стержней о жесткий ограничитель предложены рекомендации относительно уточнения величины коэффициента восстановления, что позволяет применять в динамике стержневых систем методы классической теории удара.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация является завершенной научно-исследовательской работой, в которой решена актуальная проблема построения математических моделей НДС для упругих стержней со сложной конфигурацией, как действующих нагрузок, так и геометрических и физико-механических свойств, при статических и динамических воздействиях, на основе новых аналитических решениях.

Основные научные результаты работы заключаются в следующем.

1. На основе аналитического решения уравнения изгиба в функциях Бесселя и Ломмеля и их модификаций, разработан алгоритм определения критических сил для стержней с произвольной конфигурацией изгибной жесткости и распределенной нагрузки.

2. Впервые решена задача в аналитической форме продольно-поперечного изгиба весомого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости от продольной координаты (решение получено с использованием функций Бесселя и Ломмеля). Выполнена оценка влияния продольных нагрузок на параметры НДС стержня при изгибе, а также проведено исследование устойчивости стержня, для распространенных условий закрепления.

3. По приближенным моделям проведена оценка результатов расчетов с точными решениями, для частных случаев продольного изгиба весомых стержней.

4. Введены функции (на основе рекуррентных соотношений функций Бесселя), структура которых позволяет представить зависимости перемещений и внутренних силовых факторов методом начальных параметров в задачах продольно-поперечного изгиба невесомых стержней со степенным законом изменения изгибной жесткости от продольной координаты. Частные решения в случае на распределенной нагрузки получены в функциях Ломмеля и их модифицированной форме.

5. Впервые применен метод Фурье к задачам динамики продольных и крутильных колебаний стержней с осевой неоднородностью геометрических и

механических свойств. Исследовано влияние параметров стержня на величину собственных частот для основных видов граничных условий. Для решения задач вынужденных колебаний и удара получено выражение квадрата нормы собственных функций для произвольного вида граничных условий. Рассмотрены примеры моделирования НДС стержней переменного сечения при продольном и крутильном ударе.

6. Разработан приближенный метод динамического расчета для упругих стержней с произвольной продольной и крутильной жесткостью. Дано обоснование выбора шага для аппроксимации сложных форм участками для которых известны аналитические решения.

7. Получено новое решение задачи динамики поперечных колебаний стержней с распределенной массой и переменной жесткостью, методом Фурье с учетом наличия инерционных нагрузок, когда собственные функции не ортогональны. Выражения для деформаций и внутренних силовых факторов представлены через начальные параметры с использованием функций, которые являются аналогом функций Крылова для неоднородных балок. Проведен анализ влияния параметров моделей на собственные формы и частоты колебаний для основных условий закрепления. Для ряда прикладных задач получены динамические коэффициенты, которые по прогибам практически совпадают с известными значениями для соответствующих задач однородных стержней, а по усилиям, в зависимости от параметров модели, могут варьироваться в значительном диапазоне.

8. Выполнена оценка влияния продольной силы на величину собственных частот изгибных колебаний для упругого стержня с квадратичным законом изменения изгибной жесткости, на основе нового аналитического решения уравнения колебаний. Также проведены исследования устойчивости стержня на основе динамического критерия для случаев «мертвой» и следящей нагрузки.

9. Предложена математическая модель НДС обсадной трубы, как весомого растянуто-сжатого стержня. На ее основе проведены исследования устойчивости

прямолинейной формы. По результатам исследования даны практические рекомендации относительно технологии монтажа стальных крепей.

10. Для инженерных расчетов получены эмпирические зависимости критических нагрузок на основе аппроксимации результатов численных исследований математических моделей.

11. Установлено, что после удара стержня переменного сечения о жесткий ограничитель не вся потенциальная энергия идет на восстановление кинетической энергии. Часть энергии остается и вызывает собственные колебания, при этом ее величина во многом зависит от схемы удара. На основании численных исследований моделей удара упругих стержней о жесткий ограничитель предложены рекомендации относительно уточнения величины коэффициента восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абзалимов, Р.Р. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями / Р.Р. Абзалимов, Е.В. Саяхова // Известие высших учебных заведений. Математика. – 2008. – №11. – С. 3-11.
2. Азметов Х.А. Определение продольных усилий в подземном действующем трубопроводе в условиях его продольно-поперечного изгиба / Х.А. Азметов, З.Х. Павлова // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2014. – № 1(95). – С. 30-36.
3. Акуленко Л.Д. Анализ спектра поперечных колебаний стержня в неоднородной упругой среде / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // ДАН. – 2010. – Т. 433, № 3. – С. 337-340.
4. Акуленко Л.Д. Влияние дефекта массы на частоты и формы продольных колебаний стержня / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // Изв. Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – Т.49, №1. – С. 135–144.
5. Акуленко Л.Д. Исследование влияния дефектов на спектры собственных частот и формы колебаний стержней / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2011. – №4(2). – С. 31–33.
6. Акуленко Л.Д. Собственные поперечные колебания вращающегося стержня / Л.Д. Акуленко, Л.И. Коровина, С.В. Нестеров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2007. – № 1. – С. 3-14.
7. Акуленко Л.Д. Собственные поперечные колебания неоднородного стержня / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2003. – № 3. – С. 179-192.
8. Акуленко Л.Д. Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки / Л.Д. Акуленко, Д.В. Георгиевский С.В. Нестеров // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2015. – № 2. – С. 139-144.

9. Алгазин С.Д. Численное исследование свободных колебаний балки с осцилляторами // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 4(278). – С. 135-144.
10. Алгазин С.Д. Численное исследование свободных колебаний стержня с осцилляторами // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 3(277). – С. 150-156.
11. Александров А.В. Строительная механика. В 2 книгах. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем / А.В. Александров, В.Д. Потапов, В.Б. Зылев. – М.: Высшая школа, 2008. – 384 с.
12. Александров Е.В. Прикладная теория и расчеты ударных систем./ Е.В. Александров, В.Б. Соколинский. - М.: Наука, 1969. – 199 с.
13. Александрова Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I: внешняя среда не деформируема. // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2012. – №5. – С. 104–119.
14. Александрова Н.И. Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. II: внешняя среда деформируема / Н.И. Александрова // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2013. – №3. – С. 91–106.
15. Алимов О.Д. Удар. Распространение волн деформаций в ударных системах. / О.Д. Алимов, В.К. Манжосов, В.Э. Еремьянц. - М.: Наука, 1985. – 357 с.
16. Андрюкова В.Ю. Об устойчивости стержня при односторонних ограничениях на перемещения / В.Ю. Андрюкова, В.Н. Тарасов // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. – 2013. – Вып. 17. – С. 3-16.
17. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции – М.:Наука, 1974. – 432 с.
18. Архипов С.В. Программный пакет MOCODISS и его применение к расчету стержневых систем на упругом основании // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 7. – С. 29-38.

19. Архипова Н.И. Описание распространения упругих волн в слоистых элементах конструкций с помощью уточненных стержневых моделей / Н.И. Архипова, Е.И. Ерофеев, Н.П. Семерикова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 2011. – №4(1). – С. 130–133.

20. Архипова Н.И. Распространение продольных волн в составном вязко-упругом стержне / Н.И. Архипова, Е.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев и др. // Приволжский научный журнал – 2013. – №3(27) – С. 18–23.

21. Архипова Н.И. Уточненные модели в задачах о распространении упругих волн в слоистых элементах конструкций / Н.И. Архипова, Е.И. Ерофеев, В.М. Сандалов // Вестник научно-технического развития. – 2014. – №12(88).

22. Ахтямов А.М. Диагностирование местоположения трещины в стержне по собственным частотам продольных колебаний / А.М. Ахтямов, А.Р. Каримов // Электронный журнал «Техническая акустика» – 2010. – Т.10. 3. URL: <http://ejta.org/ru/karimov1> (дата обращения: 15.02.2018).

23. Ахтямов А.М. Идентификация трещины в стержне по двум собственным частотам продольных колебаний / А.М. Ахтямов, А.Р. Каримов // В мире научных открытий. – 2012. – №1. – С. 111–123.

24. Ахтямов А.М. Исследование прямой и обратной задачи о колебаниях неоднородного стержня, состоящего из двух различных участков / А.М. Ахтямов, Д.Р. Галева // Контроль. Диагностика. – 2014. – №4. – С. 58–63.

25. Ахтямов А.М. Обратная задача для продольно-поперечного изгиба стержня / А.М. Ахтямов, М.А. Захарова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. – № 4. – С. 31-33.

26. Ахтямов А.М. Определение длины, плотности и модуля упругости коррозионного участка стержня по собственным частотам продольных колебаний / А.М. Ахтямов, Д.Р. Галеева // Вестник Башкирского университета. – 2015. – Т.20, №2. – С. 398–402.

27. Ахтямов А.М. Определение местоположения и объема полости в упругом стержне по двум собственным частотам его колебаний / А.М. Ахтямов, С.Э. Искандерович // Дефектоскопия. – 2012. – №5. – С. 78–83.

28. Ахундова И.А. Разрушение кусочнооднородного стержня, подвергнутого коррозии, при динамическом продольном нагружении // Механика машин, механизмов и материалов. – 2009. – №3(8). – С. 61–64.
29. Балицкий В.П. Экспериментальные исследования высокочастотных продольных колебаний // Машины и нефтяное оборудование. – 1979. – №11. – С. 9–11.
30. Баргуев С.Г. Решение начально-краевой задачи о колебаниях балки Тимошенко с упруго прикрепленным твердым телом // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 2(50). – С. 28–32.
31. Бейлин А.Б. Задача о колебаниях стержня с нелинейным затуханием второго порядка / А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина // Вестник Самарского ун-та. Естественная серия. – 2015. – №3(125). – С. 9–20.
32. Бейлин А.Б. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями / А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина // Вестник Самарского ун-та. Естественная серия. – 2014. – №3(114). – С. 9–19.
33. Бейлин А.Б. Задача о продольных колебаниях упруго закрепленного нагруженного стержня // Вестн. Сам. Гос. Техн. Ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2016. – Т.20, №2. – С. 249–258.
34. Беляев А.Б. Расчет трансмиссионного вала на крутильные колебания / А.Б. Беляев, В.К. Итбаев // Вестник транспорта Приволжья. – 2009. – №3. – С. 46–49.
35. Беляев А.К. Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева / А.К. Беляев, Д.Н. Ильин, Н.Ф. Морозов // Изв-я РАН. Механика твердого тела. – 2013. – №5 – С. 28–33.
36. Белянкова Т.И. Низкочастотные резонансы при динамическом взаимодействии упругого тела с полуограниченной средой / Т.И. Белянкова, И.И. Ворович, В.В. Калинин // ПММ. – 1998. – Т.62, №5. – С. 860–865.
37. Беридзе С.П. Свободные крутильные колебания конического стержня / С.П. Беридзе // Вестник Оренбургского государственного университета. – 1999. – №3. – С. 104–107.

38. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.
39. Битюрин А.А. Продольный удар неоднородного стержня о жесткую преграду / А.А. Битюрин, В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – 164 с.
40. Блинов А.В. Разработка и верификация нестационарной конечно-элементной модели для исследования волновых процессов в трубопроводе / А.В. Блинов, П.В. Максимов // Современные проблемы науки и образования. - 2015. - № 1-1. - URL: www.science-education.ru/ru/article/view?id=17097 (дата обращения: 14.10.2017).
41. Боброва А.Н. Об определении закона изменения модуля Юнга при анализе продольных колебаний стержня / А.Н. Боброва, А.О. Ватульян // Вестник Донского государственного технического университета. – 2009. – Т.9, №4(43) – С. 613–621.
42. Бондаренко Д.В. Свободные поперечные колебания упругих стержней с локально сосредоточенными неоднородностями // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2012. – № 6. – С. 57-58.
43. Бондаренко Н.И. К вопросу определения динамических характеристик прямого стержня при его поперечных колебаниях / Н.И. Бондаренко, Терентьев Ю.И. // Справочник. Инженерный журнал с приложением. – 2013. – № 12(201). – С. 15-23.
44. Бочарова О.В. О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня / А.Н. Боброва, А.О. Ватульян // Акустический журнал. – 2009. – Т.55, №3 – С. 275–282.
45. Бочарова О.В. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня / О.В. Бочарова, А.О. Ватульян // Из-я вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. – 2008. – №3. – С. 33–37.
46. Бочарова О.В. Реконструкция полости в упругом стержне / О.В. Бочарова, А.О. Ватульян, Р.С. Жарков // Из-я вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. – 2006. – №2. – С. 28–32.

47. Вазиева Л.Т. Теоретический анализ спектра собственных частот поперечных колебаний непризматического стержня / Л.Т. Вазиева, Е.И. Соколова, Ф.К. Агаева // Труды СКГМИ (ГТУ). – 2009. – № 16. – С. 3-9.
48. Ватсон Г.И. Теория бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 798 с.
49. Ватульян А.О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний / А.О. Ватульян, Н.О. Солуянов // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 6(292). – С. 1015-1020.
50. Ватульян А.О. Об одном способе определения упругих характеристик для неоднородных тел / А.О. Ватульян, О.В. Денина // Прикладная механика и техническая физика. – 2012. – Т.53, №2(312). – С. 137–147.
51. Ватульян А.О. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями / А.О. Ватульян, А.В. Осипов // Вестник ДГТУ. – 2012. – Т. 12, № 8(69). – С. 34-40.
52. Ведерникова А.А. Численно-аналитический расчет устойчивости внецентренно сжатых трубобетонных стержней круглого и квадратного сечения // Вестник СевКавГТИ. – 2017. – Вып. 3(30). – С. 112-118.
53. Веклич Н.А. Уточнение решения задачи о малых поперечных колебаниях прямолинейной секции трубопровода / Н.А. Веклич, В.Н. Жермоленко, Лопаницын Е.А. // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 4. – С. 32-40.
54. Вибрации в технике: В 6 т./ И.И. Артоболевский [и др.] // Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1: Колебания линейных систем. – 352 с.
55. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1967. – 983 с.
56. Воронов С.А. Динамическая устойчивость поперечных колебаний стержня с вибрирующей промежуточной опорой / С.А. Воронов, А.М. Гуськов, А.И. Хвостов // Вестник МГТУ им Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. – 2009. – № 1. – С. 43-57.

57. Гаджиев В.Д. Поперечное колебание прямого участка неоднородного трубопровода, лежащего на двухконстантном основании / В.Д. Гаджиев, Х.Г. Джафаров // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – Т. 6, № 7(72). – С. 4-7.

58. Галишникова В.В. Обобщенная геометрически нелинейная теория и численный анализ деформирования и устойчивости пространственных стержневых систем: дис. ... доктора техн. наук: 05.23.17 / Галишникова Вера Владимировна – Москва, 2014 – 355 с.

59. Геворкян Г.З. Об изгибных колебаниях ортотропных полос переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки // Актуальные проблемы механики сплошной среды: труды IV Межд. конф. 21-26 сентября 2015 г., Цахкадзор. – Цахкадзор (Армения): [б.и.], 2015. – С. 129-133.

60. Глазков А.С. Продольно-поперечный изгиб трубопровода на участках грунтовых изменений / А.С. Глазков, В.П. Климов, К.М. Гумеров // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2012. – № 1. – С. 63-70.

61. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Госстройиздат, 1965. – 448 с.

62. Горбачев В.И. О собственных частотах продольных колебаний неоднородного стержня с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Серия 1: математика, механика. – 2016. – №1. – С. 31–39.

63. Гордон В.А. Динамические напряжения в арматурном стержне при внезапном образовании трещин / В.А. Гордон, А.Г. Тамразян, Т.В. Савостикова // Вестник НИЦ «Строительство». – 2010. – №2. – С. 167–176.

64. Горохов Е.В. Учет конструктивных особенностей узловых соединений в расчетах устойчивости центрально сжатых стержней структурных покрытий / Е.В. Горохов, А.В. Мушанов // Металлические конструкции. – 2016. – Т. 22, № 3. – С. 125-137.

65. Горохова И.В. Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня // Математические заметки. – 2011. – Т 89, № 6. – С. 825-832.
66. Горынин Г.Л. Деформирование слоистых анизотропных стержней в пространственной постановке. 1: Продольно-поперечный изгиб и условие кромочной совместимости / Г.Л. Горынин, Ю.В. Немировский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 3. – С. 379-410.
67. Горынин Г.Л. Продольно-поперечный изгиб слоистых балок в трехмерной постановке / Г.Л. Горынин, Ю.В. Немировский // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т. 45, № 6(268) – С. 133-143.
68. Гриднев С.Ю. Использование интегральных преобразований для исследований колебаний наплавных мостов // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. – 2010. – Вып. 3(19). – С. 7-14.
69. Гумеров К.М. К оценке продольной устойчивости магистрального трубопровода / К.М. Гумеров, С.А. Сильверстов // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2017. – № 1(107). – С. 60-68.
70. Гумеров К.М. Численно-аналитический расчет напряженного состояния подземного трубопровода с учетом его конфигурации / К.М. Гумеров, Р.А. Харисов, А.А. Распопов // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2018. – Т. 8, № 1. – С. 44–53.
71. Гусев Б.В. О колебаниях неоднородных балок / Б.В. Гусев, В.В. Саурин // Инженерный вестник Дона. – 2017. – № 3. – Ст. 50. Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/N3y2017/4312>. (Дата обращения 21.03.2018)
72. Денина О.В. О реконструкции неоднородностей в стержневых системах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4(5) – С. 2135–2137.
73. Денисов Г.Г. Об импульсе волн и их влиянии на движение сосредоточенных объектов вдоль одномерных упругих систем / Г.Г. Денисов, В.В. Новиков, М.Л. Смирнова // ПММ – 2012. – Т.76, №2 – С. 311–324.

74. Денисов Г.Г. Об импульсе волн при продольных колебаниях упругого стержня / Г.Г. Денисов, В.В. Новиков, М.Л. Смирнова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2010. – №5(1) – С. 134–137.

75. Джинчвелашвили Г.А. Колебания высотных зданий при сейсмическом воздействии с учетом физической и геометрической нелинейности / Г.А. Джинчвелашвили, С.В. Булушев // Строительство: наука и образование. – 2014. – № 2. – Ст. 1. Режим доступа: <http://www.nso-journal.ru>. (Дата обращения 05.03.2018)

76. Джинчвелашвили Г.А. Нелинейные динамические методы расчета зданий и сооружений с заданной обеспеченностью сейсмостойкости: дис. ... доктора техн. наук: 05.23.17 / Джинчвелашвили Гурам Автандилович – Москва, 2015 – 427 с.

77. Джинчвелашвили Г.А. Оценка точности нелинейного статического метода анализа сейсмостойкости сооружений / Г.А. Джинчвелашвили, С.В. Булушев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 2. – С. 41-48.

78. Динамические свойства крановых балок с переменными массой и жесткостью / Л.В. Гальченко [и др.] // Вісник СевНТУ. – 2014. – № 148. – С. 105-111.

79. Динник А.Н. Избранные труды. Т. 2. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. - Киев: Изд-во АН УССР, 1955. - 220 с.

80. Динник А.Н. Продольный изгиб, кручение / А.Н. Динник - М.: Изд. АН СССР, 1955. - 392 с.

81. Добровольский Г.Б. Крепление скважин большого диаметра / Добровольский Г.Б., Казикаев Д.М., Петриченко В.П. – М.: Недра, 1988. – 238 с.

82. Дудченко А.А. Колебания закрученного многослойного анизотропного стержня произвольного поперечного сечения / А.А. Дудченко, А.У. Нурымбетов, В.Н. Сергеев // Конструкции из композиционных материалов. – 2017. – № 1(145). – С. 3-11.

83. Егоров В.В. Поперечные колебания шпренгельных конструкций со специальными средствами гашения колебаний / В.В. Егоров, П.Н. Григорьев // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: «Строительство и архитектура». – 2009. – № 16. – С. 53-57.
84. Егорова А.А. Построение приближенного решения для задачи вязкоупругости в тонком неоднородном стержне из материала Кельвина-Фойгхта // Математические заметки СВФУ. – 2007. – Т.14, №1. – С. 21–44.
85. Еленицкий Э.Я. Аналитическое решение для стержневой системы с учетом упругопластических свойств материала // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 3. – С. 27-34.
86. Еленицкий Э.Я. Деформирование консольного стержня с учетом упруго-пластических свойств материала // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. естественные науки и техносферная безопасность. – Самара: СГАСУ, 2017. – С. 192-196.
87. Ерофеев В.И. Математическая модель упругого тонкостенного стержня, совершающего крутильные колебания при наличии нелинейности и депланации // В.И. Ерофеев, Б.Б. Лампси // Приволжский научный журнал. – 2014. – №2. – С. 14–17.
88. Желтков В.И. Динамические состояния продольно-сжатых неоднородных стержней / В.И. Желтков, Ю.А. Чадаев // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – 2014. – № 4. – С. 3-7.
89. Жиленко Н.П. Справочное пособие по реактивно-турбинному бурению. / Жиленко Н.П., Краснощек А.А. – М.: Недра, 1987. – 309 с.
90. Жуков И.А. Вывод уравнения продольных колебаний с учетом трехмерности распространения волн деформаций при соударении стержней // Машиностроение. – 2009. – №19. – С. 121–124.
91. Жуков И.А. Теоретические основы синтезирования форм бойков ударных систем технологического назначения / И.А. Жуков, Е.В. Сараханова // Изв. Томского политехнического университета. – 2009. – Т.315, №2. – С. 173–177.

92. Жуков И.А. Продольные колебания стержней применительно к ударным системам технологического назначения // Машиностроение и инженерное образование. – 2016. – Т.1, №1(46). – С. 40–49.

93. Зверяев Е.М. Сравнительный анализ моделей низкочастотных и высокочастотных колебаний балочных элементов авиационных конструкций / Е.М. Зверяев, Д.Л. Докина // Научный вестник МГТУ ГА. Серия: Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. – 2007. – № 123. – С. 41–47.

94. Зинченко А.С. Интенсивные продольно-крутильные и продольно-изгибные волны в элементах конструкций: автореферат дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06 / Зинченко Антон Сергеевич. – Нижний Новгород, 2013. – 16 с.

95. Ильгамов М.А. Устойчивость сжатого стержня с поперечным надрезом // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 5. – С. 28–33.

96. Ильин В.А. Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы / В.А. Ильин, П.В. Луфференко // Доклады Академии наук. – 2009. – Т.429, №4. – С. 455–458.

97. Ильин В.А. О продольных колебаниях стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, в случае совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Доклады Академии наук. – 2009. – Т.429, №6. – С. 742–745.

98. Ильин В.А. Формула типа Даламбера для поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности // ДАН. – 2009. – Т. 427, № 5. – С. 609–611.

99. Ильин В.А. Формула типа Даламбера для продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности и разной упругости / В.А. Ильин, П.В. Луфференко // Доклады Академии наук. – 2009. – Т.427, №4. – С. 466–468.

100. Ильин М.М. Метод начальных параметров при наличии двухопорных тел, упруго скрепленных со стержнем // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2006. – № 5. – С. 3-8.

101. Илюхин А.А. Задача растяжения-сжатия естественно закрученного стержня в рамках моментной теории упругости / А.А. Илюхин, А.К. Попов // Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. – 2011. – Вып 41. – С. 175–186.

102. Илюхин, А.А. Исследование форм равновесия упругого стержня в решении Гесса / А.А. Илюхин, Б.П. Иванов // Прикладная механика. – 1980. – № 11 – С. 89–94.

103. Илюхин, А.А. Математическая модель замкнутых молекул ДНК / А.А. Илюхин, Д.В. Тимошенко // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика – 2008. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 32–40.

104. Илюхин, А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней: монография. – К.: Наукова думка, 1979. – 216 с.

105. Илюхин, А.А. Свободные колебания вращающегося стержня / А. А. Илюхин, Г. Г. Гордеев, А. Я. Савченко // Математическая физика. – К.: Наукова думка, 1982. – Вып. 31.

106. Илюхин, А.А. Теория упругих стержней с вращательным взаимодействием частиц и её применение к исследованию замкнутости молекул ДНК / А. А. Илюхин, Д. В. Тимошенко // Механика твердого тела. – К.: Наукова думка, 2008. – Вып. 38. – С. 161–167.

107. Исаев В.И. Математические модели стержней, балок и плит в задачах сосредоточенного удара: дис. ... канд. ф-м. наук: 05.13.18 / Исаев Вячеслав Игоревич – Москва, 2007 – 155 с.

108. Каган-Розенцвейг Л.М. Метод определения усилий в упругих сжато-изогнутых стержнях переменного сечения. Упрощенное уравнение изгиба (II) // Вестник гражданских инженеров. – 2016. – № 1. – С. 75-81.

109. Каган-Розенцвейг Л.М. Развитие прикладного метода расчета сжато-изогнутых стержней // Вестник гражданских инженеров. – 2017. – № 4(63). – С. 130 – 134.

110. Кадомцев И.Г. Определение коэффициента восстановления при упругопластическом соударении тел // Механика твердого тела. – 1991. – № 6. – С. 89–91.

111. Калинин А.Е. Численное исследование параметрических колебаний стержня / А.Е. Калинин, Н.П. Кузнецов // Вестник ИжГТУ им. М.Т. Калашникова. – 2016. – № 1(69). – С. 3-6.

112. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

113. Кангур Х.Ф. Экспериментальное и расчетное определение коэффициента восстановления при ударе / Х.Ф. Кангур, И.Р. Клейс // Изв. АН СССР. МТТ. – 1988. – № 5. – С. 182–185.

114. Касумов В.М. Экспериментальные исследования динамики спуска бурильного инструмента гидравлическим подъемником / В.М. Касумов, В.А. Иванов, С.А. Раджабов // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1976. – №5. – С. 27-31.

115. Кауров П.В. Новый способ определения перемещений стержня малой жесткости при продольно-поперечном изгибе / П.В. Кауров, А.А. Тимофеев // Известия Петербургского университета путей сообщения. – 2011. – № 1. – С. 163-171.

116. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – К.: Наукова думка, 1976. – 320 с.

117. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1964. – 332 с.

118. Клименко Е.С. Устойчивость сжатых неоднородных стержней с учетом физической нелинейности материала: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.18 / Клименко Екатерина Сергеевна – Ростов-на-Дону, 2011 – 19 с.

119. Козельская М.Ю. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести / М.Ю. Козельская, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов // Инженерный вестник Дона. – 2013. – № 2(25). – Ст.

139. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-metoda-galyorkina->

обращения 03.05.2018)

120. Кользеев А.А. Оценка влияния толщины полок на устойчивость внецентренно-сжатых стержней из прямоугольных труб // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. №6 С. 85-88.

121. Кользеев А.А. Оценка влияния формы трубчатого сечения на устойчивость сжатых стержней // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2007. №5 С. 91-96.

122. Кользеев А.А. Сравнительная оценка коэффициентов продольного изгиба сжатых стальных стержней из труб // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2011. №3 С. 105-110.

123. Коренева Е.Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. Научное издание. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 240 с.

124. Коренева Е.Б. Задача о собственных колебаниях с $m \geq 2$ узловыми диаметрами круглых пластин переменной толщины // Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – № 4. – С. 47 – 49.

125. Коренева Е.Б. Методы расчета пластин сложной формы / Е.Б. Коренева, В.Р. Гросман // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – Т. 10, № 3. – С. 76-81.

126. Коренева Е.Б. Разработка аналитических моделей расчета фундаментов зданий и сооружений в условиях тесной городской застройки // Вестник МГСУ. – 2012. – № 6. – С. 42 – 47.

127. Космодамианский А.С. Толстые многосвязные пластины / А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с

128. Костин Г.В. Вариационные подходы к решению начально-краевых задач динамики линейных упругих систем / Г.В. Костин, В.В. Саурин // ПММ. – 2009. – Т. 73, № 6. – С. 934-953.

129. Костин Г.В. Метод интегродифференциальных соотношений в задаче о собственных колебаниях балки / Г.В. Костин, В.В. Саурин // Проблемы прочности и пластичности. – 2006. – № 68. – С. 139-149.

130. Костин Г.В. Моделирование и анализ собственных колебаний упругой призматической балки на основе проекционного подхода / Г.В. Костин, В.В. Саурин // ПММ. – 2011. – Т. 75, № 6. – С. 995-1010.

131. Кочетков А.В. Некоторые вопросы теории удара / А.В. Кочетков, П.В. Федотов // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2013. – № 5. Ст. 110ТВН513
Режим доступа: <https://naukovedenie.ru/PDF/110tvn513.pdf> (Дата обращения 05.05.2018)

132. Кравчук А.С. Крутильные колебания круглых композиционных и реологически активных стержней. / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, И.А. Тарасюк // Прикладные проблемы оптики, информатики, радиофизики и физики конденсированного состояния. Материалы IV Международной научно-практической конференции. 2017. – 2017. – С. 258–260.

133. Кравчук А.С. Продольные колебания слоистых и структурно неоднородных композиционных стержней / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, И.А. Тарасюк // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2016. – №3(34) – С. 41–52.

134. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №6. С. 22–29.

135. Крутий Ю.С. Задача Эйлера в случае непрерывной поперечной жесткости (Продолжение) // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №4. С. 27–33.

136. Крутий Ю.С. Новый метод исследования поперечных колебаний стержня с переменными, непрерывно распределенными параметрами // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 2(247). – С. 48-55.

137. Крутий Ю.С. Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – №1. – С. 25–33.

138. Крутий Ю.С. Продольные колебания неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной массой (продолжение) // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – №4. – С. 26–34.

139. Крутий Ю.С. Точное решение дифференциального уравнения вынужденных продольных колебаний стержня с произвольными непрерывными параметрами // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2015. – №6(231). – С. 23–28.

140. Крутий Ю.С. Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – Вып. 5. – С. 47-53.

141. Кудайбергенов А.К. Нелинейные поперечные колебания буровой колонны // Процессы в геосредах. – 2016. – № 8. – С. 52-57.

142. Кузнецова Д.А. Влияние продольной и сдвиговой жесткостей на устойчивость балок и колонн // Интернет- журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2016. – Том 8, №2. – Ст. 111 Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/96TVN216.pdf> (Дата обращения 03.05.2018). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/96TVN216

143. Кулешова А.Н. Продольно-поперечные колебания тонкостенного составного стержня: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Кулешова Анастасия Николаевна – Волгоград, 2008 – 156 с.

144. Кулинич И.И. Устойчивость продольно-сжатых стержней переменной жесткости при ползучести: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.18 / Кулинич Иван Игоревич – Ростов-на-Дону, 2012 – 24 с.

145. Культербаев Х.П. Математическое моделирование изгибных колебаний вертикального стержня переменного сечения / Х.П. Культербаев, М.Х. Алокова, Л.А. Барагунова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. – 2015. – № 4(185). – С. 100-106.

146. Купавцев В.В. Базисные функции метода двусторонних оценок в задачах устойчивости упругих неоднородно сжатых стержней // Вестник МГСУ. – 2013. – № 6. – С. 63-70.

147. Купавцев В.В. Вариационные формулировки интегрального уравнения устойчивости упругих стержней // Вестник МГСУ. – 2012. – № 9. – С. 137-143.

148. Купавцев В.В. Двусторонние оценки на основе вариационных формулировок интегральных уравнений устойчивости упругих стержней // Вестник МГСУ. – 2014. – № 10. – С. 41-47.

149. Курнавина С.О. Оценка применимости консольной модели с распределенными параметрами для расчета каркасных зданий на сейсмические воздействия / С.О. Курнавина, А.А. Колганов // Строительство и реконструкция. – 2017. – № 4(72). – С. 41-46.

150. Кушнарченко Б.М. Свободные продольные колебания конического стержня / Б.М. Кушнарченко, С.П. Беридзе // Вестник ОГУ. – 2000. – №3. – С. 83–86.

151. Ларионов Ю.В. Оценка напряженно-деформированного состояния трубопровода на участках пучения грунта / Ю.В. Ларионов, Д.Ю. Грязнев, С.Н. Чужинцов // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2012. – № 6. – С. 107-119.

152. Лат А.З. Упругий удар по тонкостенному стержню // Мир транспорта. – 2012. – Т. 10, № 2(40). – С. 26-33.

153. Лашков В.А. Коэффициент восстановления скорости при ударе под углом // Вестник СПбГУ. Серия 1. – 2010. – Вып. 2. – С. 31-38.

154. Лашков В. А. Об экспериментальном определении коэффициентов восстановления скорости частиц потока газозвеси при ударе о поверхность // Инж.-физ. журнал. – 1991. – Том 60, № 2. – С. 197–203.

155. Локтев А.А. Динамический контакт ударника и тонких тел с учетом волновых процессов: дис. ... доктора ф.-м. наук: 01.02.04 / Локтев Алексей Алексеевич – Москва, 2010 – 272 с.

156. Луференко П.В. Аналитический вид оптимальных граничных управлений продольными колебаниями стержня, состоящего из нескольких участков, имеющих разные плотности и упругости, но одинаковые импедансы // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т.47, №3. – 422–432.

157. Ляхович Л.С. Критерии минимальной материалоемкости стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты / Л.С. Ляхович, П.А. Акимов, Б.А. Тухфатуллин // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – № 1. С. 9-22.

158. Малюгин А.А. Расчет колебаний бурильной колонны в режиме реального времени в составе тренажерных систем / А.А. Малюгин, Д.В. Казунин // Вестник С-ПбУ. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2017. – Т.13, №1. – С. 91–101.

159. Манжосов В.К. Модели продольного удара. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 160 с.

160. Манжосов В.К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В.К. Манжосов, В.В. Слепухин // Ульяновск: УлГТУ, 2011. - 208 с.

161. Маслов Н.М. Интегрирование уравнения продольных колебаний неоднородных стержней // Механика деформируемых сред. – 1997. – №13. – С. 49–52.

162. Мещеряков В.Б. Поведение тонкостенных стержней при ударных нагрузках / В.Б. Мещеряков, Зо Лат Аунг, Л.Ю. Соловьев // Изв. Транссиба. – 2012. – №3. – С. 113–123.

163. Мещеряков В.Б. Устойчивость стержней при продольном и поперечном ударе / В.Б. Мещеряков, Зо Лат Аунг // Изв. Транссиба. – 2012. – №1. – С. 98–106.

164. Мижидон А.Д. Собственные колебания двухпролетной балки Тимошенко с присоединенным осциллятором / А.Д. Мижидон, С.Г. Баргуев, М.Ж. Цыцыренова // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2013. – № 4 (28). – С.78-84.

165. Миронов А.И. К исследованию поперечных колебаний гребных валов. Часть 1 // Вестник АГТУ. Серия: Морская техника и технология. – 2013. – № 2. – С. 125-130.

166. Миронов А.И. К исследованию поперечных колебаний гребных валов. Часть 2. Влияние упругой податливости подшипников на процесс колебаний вала // Вестник АГТУ. Серия: Морская техника и технология. – 2014. – № 1. – С. 77-82.

167. Миронов М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акустический журнал. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 3-8.

168. Моделирование устойчивости балок методом конечных разностей / Ю.В. Карсаков [и др.] // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2010. – Т. 1, № 6. – С. 92–93.

169. Морозов Н.Ф. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. – 2013. – Вып. 3. – С. 131–141.

170. Морозов Н.Ф. Динамика стержня при продольном ударе / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Астрономия. – 2009. – Вып. 2. – С. 105–111.

171. Морозов Н.Ф. Статика и динамика стержня при продольном нагружении / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – С. 76–89.

172. Морозов Н.Ф. Поперечные колебания стержня, вызванные кратковременным продольным ударом / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // ДАН. – 2013. – Т. 452, № 1. – С. 37-41.

173. Морозов Н.Ф. Устойчивость сжатого стержня при наличии ограничения на перемещение / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик // Вестник СПбГУ. Сер. Математика. Механика. Астрономия. – 2006. – № 2. – С. 109-117.

174. Муницын А.И. Нелинейные колебания стержня с близкими значениями осевых моментов инерции поперечного сечения // ПММ. – 2009. – Т. 73, № 3. – С. 427-438.

175. Муницын А.И. Пространственные нелинейные колебания стержня с двумя жесткими заделками / А.И. Муницын, Л.Н. Крайнова, Н.А. Сабанеев // Вестник ИГЭУ. – 2010. – Вып. 2. – С. 63-65.

176. Мясников А.А. Уравнение продольных колебаний стержней на базе теоремы об изменении количества движения // Вестник КРСУ. – 2013. – Т.13, №4. – С. 80–82.

177. Нигматуллина С.В. Собственные частоты имплантата стремени поршневого типа / С.В. Нигматуллина, А.А. Селянинов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика – 2012. – №3. – С 135–147.

178. Новиков Ф.В. Поперечные колебания центрально сжатых прямолинейных стержней трубчатого сечения / Ф.В. Новиков, В.С. Дерябин, И.А. Рябенков // Современные инновации в науке и технике: материалы II Между- нар. науч.-практ. конф. (Россия, г. Курск, 18 апреля 2012 г.) / под ред. А.А. Горохова. – Курск : Изд-во ЗАО «Университетская книга», 2012. – С. 221-225.

179. Овсянко В.М. Моделирование дифференциальных уравнений при расчете на поперечный и продольно-поперечный изгиб стержневых систем без учета и с учетом вязкоупругих свойств материалов // Наука и техника. – 2012. – № 4. – С. 35-43.

180. Павлов А.М. Продольные колебания пакета стержней / А.М. Павлов, А.Н. Темнов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». – 2014. – №6(57). – С. 53–66.

181. Павлов В.П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник УГАТУ. – 2017. – Т. 21, № 2(76). – С. 3-16.

182. Паймушин В.Н. О малых свободных колебаниях полосы / В.Н. Паймушин, Т.В. Полякова // ПММ. – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 72-82.

183. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 232 с.

184. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Изд. 3-е. – Л.: Машиностроение. – 1976. – 320 с.

185. Параметрически возбуждаемые крутильные колебания в одномодульной конструкции РЛДВПТ с рычажно-кулачковым преобразователем движения / М.А. Донченко [и др.] // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. – №3. – С. 114–118.

186. Пархомовский Я.Н. Крутильные колебания крыла, несущего сосредоточенный груз (Асимптотика) / Я.Н. Пархомовский // Ученые записки ЦАГИ. – 1981. – Т.ХII. №3. – С. 69–82.

187. Перетялько Ю.Г. Продольно-поперечный изгиб сварных колонн с учетом упругой работы поясных швов // Металлические конструкции. – 2008. – Т.14, № 4. – С. 269-278.

188. Пожалостин А.А. Колебания упругих одномерных систем с трением / А.А. Пожалостин, Б.Г. Кулешов, А.В. Паншина // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – №12(24). – Ст. 6. – URL: <http://engjournal.ru/articles/1136/html/files/assets/basic-html/index.html#1> (дата обращения: 14.10.2017).

189. Продольно-поперечный изгиб балки. Решение в различных программных комплексах / А.В. Савченко, [и др.] // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2015. – № 11(38). – С. 96-111.

190. Продольные колебания стержня Релея-Бишопа / И.А. Федотов [и др.] // Доклады Академии наук. – 2010. – Т.435, №5. – С. 613–618.

191. Промыслова А.С. Продольные колебания упругих стержней переменного сечения (концентраторов) // Изв. Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2008. – Т.43, №6. – С. 118–127.

192. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: «Машиностроение», 1968. – 567 с.

193. Раджабов С.А. Влияние массы подвижных элементов буровой установки на уровень динамики спуско-подъемных операций / С.А. Раджабов, Ф.К. Мамедов, М.М. Мехтиев // Изв. вузов. Нефть и газ. – 1991. – №2. – С.31-35.

194. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
195. Радченко В.Н. Динамические усилия в оборудовании и бурильной колонне при ее торможении // Машины и нефтяное оборудование. – 1977. – №6. – С. 27-30.
196. Распопов А.С. Продольные и крутильные колебания стержневых систем с древовидной или кольцевой структурой // Наука и прогресс транспорта. – 2008. – №23. – С. 161–166.
197. Ретлинг Э.В. Поперечные колебания стержня с учетом сдвиговых деформаций и инерции вращения его элементов // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Технические науки. – 2006. – № 6. – С. 31-37.
198. Рожников А.М. Оптимальное управление продольными колебаниями составных стержней с равным временем прохождения волны по каждому из участков // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т.49, №5. – С. 607–616.
199. Розов Ю.Г. Анализ потери продольной устойчивости двух труб, вставленных одна в другую, при упругих деформациях // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2016. – № 2(57). – С. 76-81.
200. Романов К.И. Продольно-поперечный изгиб реономных стержней // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – № 1. – С. 160-164.
201. Романов К.И. Продольный изгиб нелинейно-вязких стержней // Расчеты на прочность – М.: Машиностроение, 1993. – Вып. 33. – С. 139-151.
202. Сабиров Р.А. Продольно-поперечный изгиб стержня при его вращении в центрифуге // Решетневские чтения. – 2014. – Т.1, № 18. – С. 29-31.
203. Санкин Ю.Н. Линейная модель заготовки при ковке / Ю. Н. Санкин, Н. А. Юганова // Фундаментальные исследования. – 2012. – №11(4). – С. 952–955.
204. Санкин Ю.Н. Нестационарные колебания стержневых систем при соударении с препятствием / Ю. Н. Санкин, Н. А. Юганова / под общ. ред. Ю.Н. Санкина. – Ульяновск : УлГТУ, 2010. – 174 с.

205. Санкин Ю.Н. Продольные колебания упругих стержней ступенчато-переменного сечения при соударении с жёстким препятствием / Ю. Н. Санкин, Н.А. Юганова // ПММ. – 2001. – Т.65, №3. – С. 444–450.

206. Сароян А.Е. Влияние продольных колебаний бурильной колонны на усилие, передаваемое долоту // Вопросы бурения глубоких нефтяных и газовых скважин в Азербайджане. – Баку: АзНИИ нефть. – 1985. – С. 74-79.

207. Саурин В.В. Двойственность и оценка качества решений в вариационных задачах теории упругости: дис. ... доктора физ.-мат. наук: 01.02.04 / Саурин Василий Васильевич – Москва, 2013 – 406 с.

208. Сафина Г.Ф. Исследование прямой и обратной задач по поперечным колебаниям вала на опорах // Дефектоскопия. – 2010. – № 4. – С. 83-96.

209. Сеницкий Ю.Э. Общая устойчивость сжатых составных стержней переменного сечения / Сеницкий Ю.Э., Ишутин А.С. // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 19, № 2. – С. 341-357.

210. Слиденко А.М. Продольные колебания стержня с имитацией сопротивления при ударных нагрузках / А.М. Слиденко, В.М. Слиденко // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. – 2013. – №2(37). – С. 247–254.

211. Слиденко А.М. Сравнение разностных схем для задач с уравнениями продольных колебаний стержня / А.М. Слиденко, В.М. Слиденко // Вестник Воронежского государственного аграрного университета. – 2011. – №4(31). – С. 38–45.

212. Смирнов И.Н. О колебаниях, описываемых телеграфным уравнением, в случае системы, состоящей из нескольких участков разной плотности и упругости // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т.49, №5. – С. 643–648.

213. Сотников А.Л. Математическая модель и методика синтеза упругих элементов рессорного механизма качания кристаллизатора МНЛЗ / А.Л. Сотников, С.Н. Царенко // Вестник машиностроения. – 2017. – № 12. – С. 25-29.

214. Сухарев В.А. Крутильные колебания вала со сосредоточенными массами / В.А. Сухарев // Изв. Сельскохозяйственной науки Тавриды. – 2015. – №4(167). – С. 48–53.
215. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 449 с.
216. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко – М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1971. – 807 с.
217. Томилин А.К. Определение положения трещины в стержне методом ударных импульсов / А.К. Томилин // ГИАБ – 2013. – №4(1) – С. 510 – 514.
218. Тулкина А.Н. Определение частот и форм колебаний стержневой системы, содержащей нанообъект, на основе теории С.П. Тимошенко // Вестник СПбГУ. Серия: Математика. Механика. Астрономия. – 2011. – № 1. – С. 144-154.
219. Тулубенская Е.В. Устойчивость стержня переменной жесткости при односторонних ограничениях на перемещения / Е.В. Тулубенская, Р.В. Каргин // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1. – 2008. – Вып. 8. – С. 141-148.
220. Уединенные волны деформации в составном нелинейно-упругом стержне / Н.И. Архипова [и др.] // Приволжский научный журнал – 2013. – №4(28) – С. 19–23.
221. Улитин Г.М. Динамика и устойчивость бурильных колонн буровых установок роторного типа: дис. ... доктора техн. наук: 05.02.09 / Улитин Геннадий Михайлович – Днепропетровск, 2003 – 321 с.
222. Улитин Г.М. Изгибные колебания стержня с переменной жесткостью и распределенной массой / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Прикладная математика и механика. – 2015. – №6. – С. 817-823.
223. Улитин Г.М. Изгибные колебания упругого стержня с переменной жесткостью сжатого продольной силой / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 2 (59). – С. 19-26
224. Улитин Г.М. Математическая модель продольных колебаний буровой колонны // Труды Междунар. конф. «Прогрессивные технологии машиностроения и современность». – Донецк: ДонГТУ. – 1997. – С. 247-248.

225. Улитин Г.М. Метод усреднения в задачах о продольном ударе стержней переменного сечения / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2016. – Т. 8, № 1. – С. 43–48.

226. Улітін Г.М. Моделювання динамічних процесів в бойках гіперболічної форми в механізмах ударної дії / Г.М. Улітін, С.М. Царенко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014 – № 3. – С. 37-42.

227. Улитин, Г.М. Оценка метода усреднения в задачах устойчивости бурильных колон / Г.М. Улитин // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Гірничо-геологічна». 2005. №85. С. 69-72.

228. Улитин Г.М. Поперечные колебания металлических башенных конструкций с учетом переменной жесткости и продольных нагрузок / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2012. – №2 (66). – С. 90-94.

229. Улитин Г.М. Поперечные колебания упругого стержня переменного сечения, моделирующего конструкции несущих опор / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Труды ИПММ. – 2016. – Т.30. – С. 140–146.

230. Улитин Г.М. Продольно-поперечный изгиб и устойчивость весомой стержневой системы / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – №2. – С. 18 – 23.

231. Улитин Г.М. Продольные удары при спуске буровой колонны // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – Донецк: ДонГТУ. – 2000. – Вып. 10. – С. 249-253.

232. Улитин Г.М. Решение динамических задач на ударную нагрузку в буровых установках роторного типа // Вибрации в технике и технологиях. – 1998. – №2. – С. 78-80.

233. Улітін Г.М. Удар кінцевого стрижня об жорстку перешкоду / Г.М. Улітін, С.М. Царенко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2014. – Вип. 93. – С. 56-63.

234. Улитин Г.М. Ударные процессы в буровых установках / Г.М. Улитин, Ю.В. Петтик // Вибрации в технике и технологиях. – 2000. – №1. – С.70-74.

235. Улитин Г.М. Устойчивость упругого весомого стержня переменной изгибной жесткости, моделирующего конструкции башенного типа / Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – №6. – С. 36–40.

236. Утяшев И.М. Идентификация повреждения трубопровода с использованием тензодатчиков / И.М. Утяшев, А.М. Ахтямов // Труды института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. – 2012. – Т.9, №2. – С. 130–133.

237. Утяшев И.М. Определение места повреждения участка трубопровода с помощью его продольных колебаний / И.М. Утяшев, А.М. Ахтямов // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. – 2012. – №6. – С. 36–39.

238. Феодосьев В.И. Об одной задаче устойчивости // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т.29, №2. – С. 391–392.

239. Филиппов А.П. Колебания механических систем. - Киев: Наукова думка, 1965. - 716 с.

240. Фоменко С.А. Рациональные способы демпфирования изгибных колебаний балочных конструкций (на примере жесткой ошиновки открытых распределительных устройств): дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Фоменко Серафим Александрович – Макеевка, 2018 – 163 с.

241. Хакимов А.Г. О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта / А.Г. Хакимов // Дефектоскопия. – 2010. – №6. – С. 93–98.

242. Хакимов А.Г. О собственных крутильных колебаниях бурильной колонны / А.Г. Хакимов, Э.И. Сатыев // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2014. – №6 – С. 120–153.

243. Хакимов А.Г. О собственных продольных колебаниях ступенчатого стержня с распределенной присоединенной массой // Контроль. Диагностика. – 2013. – №11. – С. 9–13.

244. Хакимов А.Г. Определение скорости и усилия натяжения движущегося стержня по собственным частотам изгибных колебаний // Вестник УГАТУ. – 2015. – Т. 19, № 4(70). – С. 40-44.

245. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Свиточ, 1991. – 176 с.

246. Царенко С.Н. Динамика изгибных колебаний конструкций с осевой неоднородностью геометрических характеристик // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. – № 3(278). – С. 48–54.

247. Царенко С.Н. Динамика изгибных колебаний предварительно нагруженных стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. - № 2. – С. 54-61.

248. Царенко С.Н. Продольно-поперечный изгиб стержней переменной жесткости // Известия вузов. Строительство. – 2016. – № 1. – С. 5-13.

249. Царенко С.Н. Устойчивость весоных стержней переменного сечения // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: «Строительство и архитектура». – 2016. – Вып. 46(65). – С. 68-74.

250. Царенко С.Н. Устойчивость конических стоек трубчатого сечения // Вестник СевНТУ. Сборник научных трудов. Серия: Механика, энергетика, экология. – 2014. – Вып. 148 – С. 64-68.

251. Царенко С.Н. Устойчивость невесомого растянуто-сжатого стержня, моделирующего работу стальной крепи при спуске на плаву // С.Н. Царенко, И.И. Бريدун, М.В. Бريدун // Вестник Донецкого национального технического университета. – 2018. – № 2(12). – С. 29–34.

252. Царенко С.Н. Устойчивость стальной крепи при спуске на плаву // Известия вузов. Горный журнал. – 2014. – № 7. – С. 48-55.

253. Царенко С.Н. Частотные характеристики и собственные колебания легких металлических мачт / С.Н. Царенко, В.В. Губанов, И.В. Межинская // Сучасне промислове та цивільне будівництво. - 2010. – Том 6, № 4. – С. 193-200.

254. Чадаев Ю.А. Определение спектра поперечных колебаний стержней, нагруженных продольной нагрузкой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – Вып. 1, Ч. 1. – С. 225-231.

255. Чепурненко А.С. Оптимизация формы поперечного сечения сжатых стержней из условия устойчивости / А.С. Чепурненко, Б.М. Языев // Научное обозрение. – 2012. – № 6 – С. 202-204.

256. Чепурненко А.С. Энергетический метод при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести / А.С. Чепурненко, В.И. Андреев, Б.М. Языев // Вестник МГСУ. – 2013. – № 1. – С. 101-108.

257. Черноус Д.А. Вынужденные продольные колебания вязкоупругого стержня // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. – 2010. – №4(4). – С. 138–145.

258. Чернышов А.Д. О гармонических колебаниях вязкоупругого стержня треугольного сечения // ПММ. – 2008. – Т.72, №1. – С. 91–98.

259. Чириков В.А. Универсальная экспериментальная зависимость для определения собственных частот поперечных колебаний коротких балок со свободными концами / В.А. Чириков, Д.М. Димитров, К.П. Костов // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2015. – Issue 4. – С. 42-51.

260. Чиркунов Е.А. Нелинейные продольные колебания вязкоупругого стержня в модели Кельвина / Е.А. Чиркунов // ПММ. – 2015. – Т.79, №5. – С. 717–727.

261. Шалдырван В.А. Дифференциальные уравнения / В.А. Шалдырван, К.В. Медведев. – Москва: Вузовская книга, 2008. – 356 с.

262. Шалдырван В.А. Методы математической физики / В.А. Шалдырван, В.С. Герасимчук. – Москва: Вузовская книга, 2006. – 512 с.

263. Шапошников И.-И.Д. Влияние формы штанги на бурение продольным ударом // Машиностроение. – 2011. – № 21. – С. 95–107.

264. Шевченко Ф.Л. Динамика упругих стержневых систем. – Донецк: ДонГТУ, 1999. – 268 с.

265. Шевченко Ф.Л. Динамические задачи весомых стержней ступенчато-переменной жесткости / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин // Труды Междунар. конф. «Металлостроительство-96». – Том 2. – Донецк-Макеевка: Донбасская ГАСА. – 1996. – С. 85-87.

266. Шевченко Ф.Л. Задачі з опору матеріалів: Навчальний посібник / Ф.Л. Шевченко, С.М. Царенко. – Донецьк, ФОП Бабалік А.В., 2011. – 356 с.

267. Шевченко Ф.Л. Колебания буровой колонны с учетом внутреннего трения / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин, Н.С. Тю // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – Донецк: ДонГТУ. – 2001. – Вып. 18. – С. 81-86.

268. Шевченко Ф.Л. Крутильный удар при свободных колебаниях в буровых установках / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин, Ю.В. Петтик // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – Донецк: ДонГТУ. – 1999. – Вып. 8. – С. 244-247.

269. Шевченко Ф.Л. Методы расчета буровых колонн на продольный удар / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин // Наукові праці ДонДТУ. – Донецьк: ДонДТУ. – 2001. – Вип. 27. – С. 414-420.

270. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. Часть 2. Сложное напряженно-деформированное состояние: Учебное пособие. – Донецк: РИО ДонНТУ, 2007. – 306 с.

271. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем. – К.: ИСИО, 1993. – Ч.3: Динамическое воздействие нагрузок. – 186 с.

272. Шевченко Ф.Л. О разновидностях крутильных ударов, возникающих при работе буровых установок, и способы их устранения / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин // Совершенствование техники и технологии бурения скважин на твердые полезные ископаемые. – Екатеринбург: Уральская ГГА. – 2001. – Вып. 24. – С. 132-138.

273. Шевченко Ф.Л. Общие и различные свойства балок и ферм / Ф.Л. Шевченко, С.Н. Царенко // Сучасне промислове та цивільне будівництво. – 2011. – Том 7, № 4. – С. 215-223.

274. Шевченко Ф.Л. Оценка точности упрощенного динамического расчета систем с распределенными параметрами на примере однопролетной жестко заземленной балки с консолью / Ф.Л. Шевченко, С.Н. Царенко // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні. - 2011. – Вып. 45. – С.159–167.

275. Шевченко Ф.Л. Проблемы расчета буровых вышек на устойчивость / Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик, С.Н. Царенко // Наукові праці ДонНТУ. Серія: «Гірничо-геологічна». – 2012. – Вип. 16 (206) – С. 115-123.

276. Шевченко Ф.Л. Сопротивление материалов. Специальный курс. Метод начальных параметров. – Киев: УМК ВО, 1992. – 184 с.

277. Шевченко Ф.Л. Расчет на устойчивость составных металлоконструкций переменной жесткости / Ф.Л. Шевченко, Г.М. Улитин, С.Н. Царенко // Вестник СевНТУ. Сборник научных трудов. Серия: Механика, энергетика, экология. – 2012. – Вып. 133. – С. 85–89.

278. Шевченко Ф.Л. Упрощенный расчет частот основного тона поперечных колебаний буровых вышек и их динамический расчет на ветровую нагрузку / Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик, С.Н. Царенко // Матеріали міжнародної конференції „Форум гірників – 2012”, Дніпропетровськ, 3–6 жовтня 2012 р. – Дніпропетровськ, 2012 – Т.3. – С. 247–251.

279. Шевченко Ф.Л. Устойчивость буровых вышек башенного типа и их расчет на жесткость / Ф.Л. Шевченко, Ю.В. Петтик, С.Н. Царенко // Матеріали міжнародної конференції „Форум гірників – 2011”, Дніпропетровськ, 12–15 жовтня 2011 р. – Дніпропетровськ, 2011 – С. 216–224.

280. Шевченко Ф.Л. Устойчивость ретрансляционной башни / Ф.Л. Шевченко, С.Н. Царенко, Ю.В. Петтик // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – 2012. – Т. 2, Вип. 2(32). – С. 90–105.

281. Шепитько Ю.С. Динамика стержней с учетом нелокального демпфирования // Современное состояние, проблемы и перспективы развития отраслевой науки: Материалы Всероссийской научной конференции с

международным участием. 2016, 10-25 ноября 2016 г., Москва – Москва: «Перо», 2016. – С. 51-57.

282. Шимановский А.О. Распространение упругих волн в стержневых системах со взаимно перпендикулярными стержнями // Актуальные вопросы машиноведения. – 2015. – Вып. 4. – С. 205–208.

283. Экспериментальные исследования железобетонных колонн на неоднократный продольный удар / Н.Н. Белов [и др.] // Вестник ТГАСУ. – 2007. – №1. – С. 118–125.

284. Экспериментальные характеристики поперечных колебаний консольных стержней различных форм / Е.Н. Пересыпкин [и др.] // Известия Сочинского государственного университета. – 2013. – № 1-2(24). – С. 18-25.

285. Юганова Н.А. Продольные колебания стержней при соударении с жестким препятствием // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – С. 2. – URL: <https://www.science-education.ru/ru/article/view?id=12054> (дата обращения: 05.12.2017)

286. Югов А.М. Монтажное напряжённо-деформированное состояние шарнирно-стержневого покрытия склада шаров и реагентов / А.М. Югов, А.Б. Бондарев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – № 3. – С. 12-22.

287. Югов А.М. Напряжённо-деформированное состояние однопоясной стержневой металлической оболочки покрытия цилиндрической формы при наличии погрешностей изготовления и монтажа // Металлические конструкции – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 27-36.

288. Югов А.М. Способ вариации масс для уточнения параметров динамической модели вибрационного метода / А.М. Югов, Е.В. Денисов // Металлические конструкции – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 103-111.

289. Югов А.М. Статический расчёт однопоясных цилиндрических стержневых металлических оболочек покрытия / А.М. Югов, А.Б. Бондарев // Металлические конструкции – 2013. – Т. 19, № 2. – С. 81-91.

290. Юлдашев Т. Вывод дифференциальных уравнений колебания стержней типа шпинделя уборочного аппарата при пространственном нагружении / Т. Юлдашев, А.И. Исомиддинов // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2017. – № 1(7). – С. 74-85.
291. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М: Наука, 1977. – 342 с.
292. Ярошевич Е. Частотные уравнения продольных и поперечных колебаний ступенчатых стержней и валов / Е. Ярошевич, К. Жур // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1(22). – С. 36-40.
293. Abrate, S. Vibration of Non-Uniform Rods and Beams // Journal of Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 185, Issue 4. – pp 703–716.
294. Alshorbagy A.E. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method / A.E. Alshorbagy, M.A. Eltaher, F.F. Mahmoud // Applied Mathematical Modelling. – 2011. – Vol. 35, № 1. – pp. 412-425.
295. Altay, G. On the lower-order theories of continua with application to incremental motions, stability and vibrations of rods / G. Altay, M.C. Dökmeci // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2014. – Vol. 26, Issue 5. – pp 715-751.
296. Auciello N.M. Exact solution for the transverse vibration of a beam a part of which is a taper beam and other part is a uniform beam / N.M. Auciello, A. Ercolano // International Journal of Solids and Structures. – 1997. – pp. 2115-2129.
297. Bayanov, E.V. Propagation of elastic waves in circular rods homogeneous over the cross section / E.V. Bayanov, A.I. Gulidov // J Appl Mech Tech Phy – 2011. – Vol. 52, No 5 – pp. 155–162.
298. Biswas, S.K. Note on the torsional vibration of a thin beam of varying cross-section / S.K. Biswas // PAGEOPH – 1970. – Vol. 79, Issue 1. – pp. 18–21.
299. Bityurin A.A. Calculation of the critical velocity of a stepwise rod system under a longitudinal impact / Journal of Applied Mechanics and Technical Physics – 2011 – Vol. 52, No. 4 – pp. 530–535.
300. Borshch, E.I. Helical traveling waves in elastic rods / E.I. Borshch, E.V. Vashchilina, V.I. Gulyaev // Mech. Solids – 2009. – No 2. – pp. 143–149.

301. Caruntu D.I. On bending vibrations of some kinds of beams of variable cross-section using orthogonal polynomials // *Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique Appliquee.* – 1996. – Vol. 41, № 3-4. – pp. 265-272.

302. Chaudhari T.D. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack / T.D. Chaudhari, S.K. Maiti // *Engineering Fracture Mechanics.* – 1999. – Vol. 63. – pp. 425-445.

303. Chopra A.K. DYNAMICS OF STRUCTURES. Theory and Applications to Earthquake Engineering. Fourth Edition – Prentice Hall, 2011 – 992 p.

304. Clough Ray W. Dynamics of structures. Third Edition / Ray W. Clough and Joseph Penzien – Berkeley: Computers & Structures, Inc., 2003 – 730 p.

305. Conway H.D. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates / H.D. Conway, E.C.H. Becker, J.F. Dubil // *Journal of Applied Mechanics.* – 1964. – T. June. – pp. 329-331.

306. Conway H.D. Vibration frequencies of truncated wedge and cone beam / Conway H.D., Dubil J.F. // *Journal of Applied Mechanics.* – 1965. – Vol. 32, № 4. – pp. 932- 935.

307. Cranch E. T. Bending vibration of variable section beams / E.T. Cranch, A.A. Adler // *Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers.* – 1956. – №23(1). – P. 103–108.

308. Craver Jr. W.L. Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with constraining springs / Jr.W.L. Craver, P. Jampala // *Journal of Sound and Vibration.* – 1993. – Vol. 166, № 3. – pp. 521-529.

309. Doyle J.F. Longitudinal Waves in Rods. // *Wave Propagation in Structures. Mechanical Engineering Series.* – New York: Springer, 1997. – pp. 43–73.

310. Dynamic response of lattice towers and guyed masts (Committee rapport) / Editor Madugula. - M.K.S. Reston (US): ASCE, 2002. - 266 p.

311. Eberhard P. Longitudinal Wave Propagation in Conical Rods Subject to Impacts / P. Eberhard, B. Hu, W. Schiehlen // *Multifield Problems, Sändig AM., Schiehlen W., Wendland W.L. (eds) – Berlin, Heidelberg: Springer, 2000 – pp. 246-253.*

312. Ece MC. Vibration of a variable cross-section beam. / MC. Ece, M. Aydogdu, V. Taskin // *Mechanics Research Communications*. – 2007. – Vol. 34. – P. 78–84.

313. Elishakoff, I. A selective review of direct, semi-inverse and inverse eigenvalue problems for structures described by differential equations with variable coefficients // *Archives of Computational Methods in Engineering*. – 2000. – Vol. 7, Issue 4. – pp 451-526.

314. Elishakoff I. Eigenvalues of Inhomogeneous Structures: Unusual Closed-form Solutions. / Boca Raton, FL: CRC Press, 2005 – 752 p.

315. Elishakoff, I. Exact solutions for buckling of some divergence-type nonconservative systems in terms of Bessel and Lommel functions / Isaac Elishakoff, Flavio Pellegrini // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – North-Holland, 1988. – №66. – pp. 107-119.

316. Elkaranshaw H.A. A Finite Element Simulation of Longitudinal Impact Waves in Elastic Rods. / H.A. Elkaranshaw, N.S. Bajaba // In: *Materials with Complex Behaviour II. Advanced Structured Materials*, Öchsner A., da Silva L., Altenbach H. (eds) – Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. – vol 16. – pp. 3 – 17.

317. Gan C. Longitudinal wave propagation in a multi-step rod with variable cross-section / C. Gan, Y. Wei, S. Yang // *Journal of Vibration and Control* – 2014. – Vol 22, Issue 3. – pp. 837 – 852.

318. Genta G. A conical element for finite element rotor dynamics / G. Genta, A. Gugliotta // *Journal of Sound and Vibration*. – 1988. – V. 120. – pp. 175-182.

319. Glavardanov, V.B. Stability of a twisted and compressed clamped rod / V.B. Glavardanov & R.B. Maretic // *Acta Mech*. – 2009. – Vol. 202, Iss. 1-4. – pp 17-33.
<https://doi.org/10.1007/s00707-008-0043-5>

320. Goel R.P. Transverse vibration of tapered beams // *Journal of Sound and Vibration*. – 1976. – Vol. 47, № 1. – pp. 1-7.

321. Greenhill L.M. A conical beam finite element for rotor dynamics analysis / L.M. Greenhill, W.B. Bickford, H.D. Nelson // *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*. – 1985. – V. 107. – pp. – 421-430.

322. Hsu M.-H. Vibration Analysis of Non-Uniform Beams Resting on Elastic Foundations Using the Spline Collocation Method // *Tamkang Journal of Science and Engineering*. – 2009. – Vol. 12, No. 2. – pp. 113-122.

323. Huang Y. A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section / Y. Huang, X.F. Li // *Journal of Sound and Vibration*. – 2010. – Vol. 329, № 11. – pp. 2291-2303.

324. Impact of an elastic rod on a deformable barrier: analytical and numerical investigations on models of a valve and a rod-shaped stamping tool / C. Schwarz [et al.] // *Archive of Applied Mechanics* – 2009 – Vol. 80, No. 1. – P. 3-24.

325. Kang Y.A. Bending of functionally graded cantilever beam with power-law nonlinearity subjected to an end force / Y.A. Kang, X.F. Li // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2009. – Vol. 44, № 6. – pp. 696-703.

326. Kapitanov, D.V. Nonconservative stability of a pipeline and cantilever rod / D.V. Kapitanov, V.F. Ovchinnikov & L.V. Smirnov // *J. Mach. Manuf. Reliab.* – 2010. – Vol. 39, Iss. 2. – pp 197-202. <https://doi.org/10.3103/S1052618810020160>

327. Kapuria S. Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: a theoretical model and its experimental validation / S. Kapuria, M. Bhattacharyya, A.N. Kumar // *Composite Structures*. – 2008. – Vol. 82, № 3. – pp. 390-402.

328. Klein L. Transverse vibrations of non-uniform beams // *Journal of Sound and Vibration*. – 1974. – V. 37. – pp. 491-505.

329. Liu, Y. Stability analysis of helical rod based on exact Cosserat model / Y. Liu & Y. Xue // *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* – 2011. – Vol. 32, Iss. 5. – pp 603-612. <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1442-8>

330. Liu, Y. Stability and bifurcation of helical equilibrium of a thin elastic rod / Y. Liu & J. Zu // *Acta Mechanica*. – 2004. – Vol. 167, Iss. 1-2. – pp 29-39. <https://doi.org/10.1007/s00707-003-0060-3>

331. Mabie J.J. Traverse vibrations of tapered cantilever beams with end support / J.J. Mabie, C.B. Rogers // *Journal of Acoustical Society of America*. – 1968. – Vol. 44. – pp. 1739-1741.

332. Majidi C. On the stability of a rod adhering to a rigid surface: Shear-induced stable adhesion and the instability of peeling / C. Majidi, O.M. O'Reilly, J.A. Williams // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2012. – Vol. 60, Iss. 5. – pp 827-843.

333. Morozov, N.F. Stability of a compressed rod under restrictions on the displacement / N.F. Morozov & P.E. Tovstik // *Dokl. Phys.* – 2007. Vol. 52, Iss. 1. – pp 55-59. <https://doi.org/10.1134/S1028335807010144>

334. Murin J. Exact solution of the bending vibration problem of FGM beams with variation of material properties / J. Murin, M. Aminbaghai, V. Kutis // *Engineering Structures*. – 2010. – Vol. 32, № 6. – pp. 1631-1640.

335. Naguleswaran S. Vibration in the two principal planes of a non-uniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial co-ordinate // *Journal of Sound and Vibration*. – 1994. – Vol. 172, № 3. – pp. 305-319.

336. Potapov, V.D. On the stability of a rod under deterministic and stochastic loading with allowance for nonlocal elasticity and nonlocal material damping // *J. Mach. Manuf. Reliab.* – 2015. Vol. 44, Iss. 1. – pp 6-13. <https://doi.org/10.3103/S1052618814060089>

337. Rajasekaran S. Structural dynamics of earthquake engineering. Theory and application using MATHEMATICA and MATLAB. – Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2009 – 882 p.

338. Rosa M.A. Free vibrations of tapered beams with flexible ends / M.A. De Rosa, N.M. Auciello // *Computers & Structures*. – 1996. – Vol. 60, № 2. – pp. 197-202.

339. Rouch K.E. A tapered beam finite element for rotor dynamics analysis / K.E. Rouch, J.S. Kao // *Journal of Sound and Vibration*. – 1979. – V. 63. – pp. 119-140.

340. Sanger D.J. Transverse vibration of a class of non-uniform beams // *Journal of Mechanical Engineering Science*. – 1968. – Vol. 16. – pp. 111-120.

341. Sankar B.V. An elasticity solution for functionally graded beams // *Composites Science and Technology*. – 2001. – Vol. 61, № 5. – pp. 689-696.

342. Sharafutdinova, G.G. An operator method for studying the Euler problem on types of the loss of stability for a pivoted rod under buckling load // Russ Math. – 2010. – Vol. 54, Issue 11. – pp 77-82. <https://doi.org/10.3103/S1066369X10110083>

343. Shevchenko F.L. Calculation of dynamic strength of elastic deformed systems / F.L. Shevchenko [et al.] // Proceedings of Donetsk National Technical University. – 2010. - No 1. – pp 55-62.

344. Stepanov R. Dynamics of Longitudinal Impact in the Variable Cross-Section Rods / R. Stepanov, D. Romenskyi, S. Tsarenko // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 317 – P. 012029 URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/317/1/012029> (дата обращения: 19.04.2018)

345. Storti D. Bending vibrations of a class of rotating beams with hypergeometric solutions / D. Storti, Y. Aboelnaga // Journal of Applied Mechanics. – 1987. – Vol. 54. – pp. 311-314.

346. Strommen Einar N. Structural Dynamics. – Springer Series in Solid and Structural Mechanics. Vol. 2, 2014 – 510 p.

347. Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods / A. Benatar [et al.] // Journal of the Mechanics and Physics of Solids – 2003. – Vol. 51 – pp 1413 – 1431.

348. Timoshko A. Comparison of efficiency of Lira 9.6 and SAP2000 program complexes in the dynamic calculation of high-rise object / A. Timoshko, A. Yugov // Металлические конструкции – 2015. – Т. 21, № 4. – С. 207-216.

349. To C.W.S. A linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotary inertia for vibration analysis // Journal of Sound and Vibration. – 1981. – V. 78. – pp. 475-484.

350. Tong X. Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section / X. Tong, B. Tabarrok // Journal of Sound and Vibration. – 1995. – № 186(5). – P. 821–835.

351. Tsarenko S. Investigation of strained deformed state of variable stiffness rod / S. Tsarenko, G. Ulitin // SpringerPlus – 2014 – Vol. 3 P. 367 URL: <http://www.springerplus.com/content/3/1/367> (дата обращения: 19.04.2018)
352. Ulitin G.M. Longitudinal Vibrations of Elastic Rods of Variable Cross-Section. / G.M. Ulitin, S.N. Tsarenko // Int. Appl. Mech. – 2015. – Vol. 51. No. 1. – pp 123-129
353. Ulitin G. M. The longitudinal vibrations of an elastic rod simulating a drilling rig // Int. Appl. Mech. – 2000. – Vol. 36, No 10. – pp 1380 – 1384.
354. Ulitin G. M. Stability of the Column of a Rotor-Type Drilling Rig // Strength Mater – 2002. – Vol. 34, No 1. – pp 94-98.
355. Yang B. Stress, Strain and Structural Dynamics: An Interactive Handbook of Formulas, Solutions, and MATLAB Toolboxes. – Elsevier, 2005. – 942 p.
356. Yoo, C.H. Stability of structures: principles and applications / C. H. Yoo, S. C. Lee. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2011. – 536 p.
357. Vodička V. Longitudinal vibrations of a conical bar // Applied Scientific Research, Section A – 1963. – Vol. 11, No. 1. – P. 13-16.
358. Wang H.C. Generalized hypergeometric function solutions on the transverse vibrations of a class of non-uniform beams // Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34E. – pp. 702-708.
359. Werner E.A. The stress state in a moving rod suddenly elastically fixed at its trailing end / E.A. Werner, F.D. Fischer // Acta Mech. – 1995. – Vol. 111, Iss. 3-4. – P. 171–179.
360. Werner S. Longitudinal Waves in Elastic Rods with Discontinuous Cross Sections / S. Werner, B. Hu, P. Eberhard // Contact Mechanics. Solid Mechanics and Its Applications – 2002. – Vol. 103. – P. 117-124.
361. Zhang, S. Three kinds of nonlinear dispersive waves in elastic rods with finite deformation / S. Zhang, Z. Liu // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. – 2008. – Vol. 29, Iss. 7. – P. 909–917.
362. Zhong Z. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam / Z. Zhong, T. Yu // Composites Science and Technology.–2007.–Vol.67, №4.–pp. 481-488.