

Министерство образования и науки  
Донецкой Народной Республики  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Донецкий национальный университет»



*На правах рукописи*

**Моисеенко Игорь Алексеевич**

**ЗАДАЧИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ  
С УСЛОЖНЕННЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ  
И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»

**Диссертация**

на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант  
**Сторожев Валерий Иванович**  
доктор технических наук,  
профессор

Донецк – 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	6
РАЗДЕЛ 1. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМАМ ВОЛНОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ И ПОСТАНОВКА АКТУАЛЬНЫХ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В РАССМАТРИВАЕМОЙ ОБЛАСТИ .....	19
1.1. Обзор исследований по проблеме .....	19
1.2. Линейная математическая модель волнового деформирования цилиндрических тел с усложненными физико-механическими свойствами .....	30
1.3. Нелинейная математическая модель волнового деформирования цилиндрических тел .....	39
Выводы к разделу 1 .....	41
РАЗДЕЛ 2. ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ .....	43
2.1. Интегрирование уравнений волнового деформирования в случае трансверсально изотропного материала .....	43
2.1.1. Сведение к задаче решения системы рекуррентных уравнений .....	43
2.1.2. Базисные решения в случае крутильных волн .....	49
2.1.3. Базисные решения в случае продольно-сдвиговых волн .....	56
2.1.4. Базисные решения в случае неосесимметричных волн .....	62
2.2. Интегрирование уравнений волнового деформирования в случае цилиндрически ортотропного материала .....	68
2.2.1. Сведение к задаче решения системы рекуррентных уравнений .....	68

2.2.2. Базисные решения в случае осесимметричных волн .....	72
2.2.3. Базисные решения в случае неосесимметричных волн .....	75
2.3. Получение дисперсионных соотношений.....	80
2.4. Результаты численных экспериментов .....	81
Выводы к разделу 2 .....	92
РАЗДЕЛ 3. ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ СЕКТОРНО-КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ: СЛУЧАЙ ГИБКОГО НЕРАСТЯЖИМОГО ПОКРЫТИЯ РАДИАЛЬНЫХ УЧАСТКОВ ...	94
3.1. Решения вспомогательной спектральной задачи в случае трансверсально-изотропного материала .....	94
3.2. Решения вспомогательной спектральной задачи в случае цилиндрически ортотропного материала .....	98
3.3. Получение дисперсионных соотношений и результаты численных экспериментов .....	101
Выводы к разделу 3 .....	110
РАЗДЕЛ 4. ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО- ИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СВОБОДНЫХ ЛИБО ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ СЕКТОРНО-КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ .....	112
4.1. Постановка и решение вспомогательных спектральных задач для волноводов со свободной граничной поверхностью .....	112
4.2. Постановка и решение вспомогательных спектральных задач для волноводов с жестко закрепленной граничной поверхностью .....	133
4.3. Получение дисперсионных соотношений .....	141
4.4. Результаты численных экспериментов .....	144
Выводы к разделу 4 .....	147

РАЗДЕЛ 5. ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ КОЛЬЦЕВОГО И СЕКТОРНО-КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ .....	149
5.1. Интегрирование уравнений волнового деформирования цилиндрически ортотропного протяженного цилиндра кольцевого сечения .....	149
5.1.1. Сведение к задаче решения системы рекуррентных уравнений .....	149
5.1.2. Базисные решения в случае крутильных волн .....	157
5.1.3. Базисные решения в случае продольно-сдвиговых волн .....	165
5.1.4. Базисные решения в случае неосесимметричных волн ... ..	169
5.2. Интегрирование уравнений волнового деформирования трансверсально изотропного протяженного цилиндра кольцевого сечения .....	171
5.2.1. Базисные решения в случае осесимметричных волн .....	171
5.2.2. Базисные решения в случае неосесимметричных волн .....	172
5.3. Интегрирование уравнений волнового деформирования анизотропного протяженного цилиндра секторно-кольцевого сечения .....	173
5.4. Получение дисперсионных соотношений .....	175
5.5. Результаты численных экспериментов .....	178
Выводы к разделу 5 .....	189
РАЗДЕЛ 6. ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ КОЛЬЦЕВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С ЖИДКОСТНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ .....	191
6.1. Получение дисперсионных соотношений в рамках модели гидродинамики для потенциальных движений невязкой слабосжимаемой жидкости .....	191

6.2. Результаты численных экспериментов .....	196
Выводы к разделу 6 .....	201
<b>РАЗДЕЛ 7. ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ</b>	
<b>АНГАРМОНИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ</b>	
<b>УПРУГИХ ВОЛН В ЦИЛИНДРАХ С УСЛОЖНЕННЫМИ</b>	
<b>СВОЙСТВАМИ .....</b>	
	<b>202</b>
7.1. Модель малых нелинейных эффектов при распространении нормальных волн деформаций в трансверсально-изотропных цилиндрических телах .....	202
7.2. Анализ краевых задач для определения вторых гармоник монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрах .....	208
7.3 Частный случай учета эффектов геометрической нелинейности .....	213
7.4. Численная реализация алгоритмов исследования вторых гармоник нормальных упругих волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрических волноводах .....	216
Выводы к разделу 7 .....	223
<b>РАЗДЕЛ 8. МЕТОДОЛОГИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ</b>	
<b>СТАЦИОНАРНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ</b>	
<b>НИЗКОСИММЕТРИЧНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД</b>	
<b>ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ</b>	
<b>ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ .....</b>	
	<b>226</b>
8.1. Сведение уравнений волнового деформирования к системе дифференциальных уравнений специального вида .....	226
8.2. Постановка краевых задач для систем разностных уравнений .....	230
8.3 Построение интегрального оператора .....	241
8.4. Свойства интегрального оператора .....	245
Выводы к разделу 8 .....	251
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>252</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>255</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Упругие тела цилиндрической геометрии представляют собой важнейший по фундаментальной и прикладной значимости класс объектов математического моделирования в волновой механике деформируемых сред. Это связано с самой широкой распространенностью деталей, конструкционных и структурных элементов цилиндрической формы в машинах, приборах и строительных сооружениях, в природных объектах и живых организмах. Однако, несмотря на длительную историю разносторонних содержательных научных исследований по данной проблематике, и на сегодняшний день можно констатировать существование целого ряда ее современных, крайне актуальных, но малоизученных аспектов, требующих разработки новых методов теоретического численно-аналитического анализа, углубленной систематизации и обобщения результатов численных экспериментов, синтеза рекомендаций по использованию полученных закономерностей и выводов в сферах практических приложений.

Наличие открытых неисследованных вопросов волновой динамики цилиндрических тел связано как со сложностями теоретического анализа многих типов ранее сформулированных задач данного класса, так и с появлением новых вариантов их постановки в контексте современных запросов инновационных научно-технических отраслей и достижений в технологиях изготовления и обработки новых конструкционных материалов, в том числе формируемых методами 3D печати. В этой связи, может быть выделен круг неклассических проблем волновой механики цилиндрических деформируемых тел, в которых, наряду с традиционными элементами формулировки моделей динамического деформирования полых и сплошных изотропных цилиндров однослойной и многослойной структуры, ставятся задачи последовательного комплексного учета специфических факторов усложнения физико-механических и геометрических свойств. В частности, это учет определенных типов анизотропии механических свойств для материалов однослойных и многослойных цилиндров; учет

нескольких типов непрерывной неоднородности их физико-механических свойств (свойств инновационных функционально-градиентных материалов); учет пьезоэлектрических и пьезомагнитных свойств; учет эффектов диссипативного рассеяния энергии волновых колебаний; комплексный учет свойств геометрической и физической нелинейности в процессах динамического деформирования рассматриваемых объектов. Актуальным элементом неклассической постановки проблем волновой механики цилиндрических деформируемых тел является также учет неканонической геометрии сечений рассматриваемых объектов, в частности анализ волновой динамики полых и сплошных однослойных и многослойных цилиндров с криволинейными сечениями, с сечениями, имеющими вырезы и вставки секторной и сегментной формы. К рассматриваемой группе проблем могут быть отнесены и задачи волновой механики цилиндров со смещенными неклассическими вариантами задания краевых условий на различных участках граничных поверхностей, а также задачи волновой механики цилиндров содержащих жидкость либо вмещенных в акустическую среду. Элементами неклассической постановки проблем волновой механики цилиндрических деформируемых тел выступают различные сочетания всего ряда перечисленных факторов.

Создание новых версий численно-аналитических методов решения задач волновой механики цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами помимо реализации целевого задания по дальнейшему развитию методологической базы фундаментальных и прикладных исследований, обеспечивает также дополнительную верификацию результатов применения к рассматриваемым проблемам прямых численных методов, создает возможности для более эффективного поиска и обобщения параметрических закономерностей в исследуемых процессах.

Таким образом, с учетом круга представленных соображений, тема данной диссертационной работы, посвященной теоретическому численно-аналитическому исследованию неклассических проблем волновой механики цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими

свойствами, может быть отнесена к актуальным темам научных исследований по современным проблемам важнейшего народно-хозяйственного значения.

**Связь работы с научными программами, планами, темами.** Представленные в работе исследования связаны с тематикой конкурсных исследовательских проектов: «Резонансные явления и эффекты локализации волновых полей в геометрически сложных существенно анизотропных телах и элементах конструкций» (МОНУ, №0199U001502, 1999-2000гг.); «Возбуждение, распространение и рассеяние нелинейных упругих волн в трехмерных кристаллических пластинах и цилиндрических телах» (МОНУ, №0101U005370, 2001-2003гг.); «Волновые процессы в низкосимметричных пьезокристаллических и пьезомагнитных телах пространственной геометрии» (МОНУ, №0104U002148, 2004-2006гг.); «Нормальные и поверхностные волны деформаций в трехмерных анизотропных волноводах усложненного геометрического строения» (МОНУ, №0107U001464, 2007-2009гг.); «Пространственные поля линейных и нелинейных нормальных волн деформаций в составных анизотропных телах призматического, цилиндрического и слоистого строения» (МОНУ, №0107U003466, 2010-2012гг.); «Волны деформаций в анизотропных телах с локализованными участками неоднородности геометрических и физико-механических свойств» (МОНУ, МОН ДНР, №0113U001529, 2013-2016гг.); «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (МОН ДНР, №0117D000071, 2017-2019гг.). Ведущие результаты диссертационной работы включены в отчеты по указанным НИР.

**Цель и задачи исследования.** Целью исследования является разработка и обобщение систематизированных результатов реализации теоретических численно-аналитических методов решения неклассических пространственных задач волновой механики протяженных деформируемых цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

- построение базисных множеств аналитических частных решений



уравнений волнового деформирования применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрах из прямолинейно ортотропных материалов с гладкой границей поперечного сечения;

- построение базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью;

- построение базисных множеств аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводов с секторно-круговым и секторно-кольцевым сечением при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности;

- построение базисных множеств аналитических и численно-аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных волноводов с сечением в виде кругового сектора в случае свободных либо жестко закрепленных радиальных участков граничной поверхности;

- исследование асимптотических свойств решений рассматриваемых спектральных задач;

- получение и исследование дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах исследуемого геометрического строения со свободными и жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности с радиальной неоднородностью экспоненциально степенного типа на основе использования базисных множеств решений уравнений модели и вспомогательных спектральных задач;

- получение и исследование дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах

кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью;

- разработка методики исследования малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования;

- разработка и реализация методик анализа параметрических закономерностей в топологическом строении и составе дисперсионных спектров нормальных волн, в распределениях их фазовых и групповых скоростей, а также в кинематических характеристиках волновых движений применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами;

- обобщение и систематизация полученных новых фундаментальных данных о закономерностях влияния особенностей усложненной геометрии сечений, типов граничных условий, радиальной неоднородности, анизотропии и нелинейности физико-механических свойств материалов волноводов на структуры дисперсионных спектров и особенности кинематических характеристик исследуемых нормальных волн, представляющие первоочередной интерес для сферы практических приложений.

**Объектом исследования** являются математические модели волновой механики деформируемых цилиндрических тел с неклассическими геометрическими и физико-механическими свойствами.

**Предметом исследования** являются численно-аналитические методы решения и систематизированные результаты параметрического исследования задач о спектрах и свойствах упругих волн в цилиндрах с сечениями усложненной геометрии из радиально-неоднородных анизотропных линейных и нелинейных материалов.

**На защиту выносятся:**

1. Методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования в форме кратных степенных рядов комплексных

переменных для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрах из прямолинейно ортотропных материалов с гладкой границей поперечного сечения.

2. Методики построения базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования трансверсально-изотропных и ортотропных в окружном направлении цилиндров с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн, формулируемым в цилиндрических областях кругового и кольцевого поперечного сечения.

3. Методика построения базисных множеств аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводов с секторно-круговым и секторно-кольцевым сечением при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности.

4. Методики построения базисных множеств аналитических и численно-аналитических решений вспомогательных спектральных задач для случаев однородных условий свободных либо жестко закрепленных примыкающих к ребру конечных участков радиальных граней граничной поверхности трансверсально-изотропных клиновидных цилиндров с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн, формулируемым в цилиндрических областях секторно-кругового поперечного сечения.

5. Методики получения дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах исследуемого геометрического строения со свободными и жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности с радиальной неоднородностью экспоненциально степенного типа на основе использования базисных множеств решений уравнений модели и вспомогательных спектральных задач.

6. Методики учета в решениях задач о распространении нормальных волн в свободных и жестко закрепленных трансверсально-изотропных волноводах секторно-кругового сечения с радиальной неоднородностью материала экспоненциально степенного типа всех членов, порождающих возможные типы особенностей в поле напряжений в окрестности сингулярных точек границы волновода.

7. Методика построения и анализа дисперсионных соотношений в задачах о спектрах нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью.

8. Методика исследования малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

9. Установленные и обобщенные параметрические закономерности в топологическом строении и составе дисперсионных спектров, в распределениях фазовых и групповых скоростей нормальных волн, а также в кинематических характеристиках линейных нормальных волн и с учетом малых нелинейных ангармонических эффектов волновых движений применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

#### **Научная новизна полученных результатов.**

1. Впервые разработаны методики построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндров кругового и кольцевого поперечного сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью для краевых задач о спектрах осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн.

2. Впервые в замкнутой форме с использованием функций Уиттекера построены базисные наборы частных решений системы уравнений волновой механики для задач о распространении нормальных крутильных волн в

трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндрах кругового сечения для двух частных случаев экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала.

3. Впервые для задач о распространении нормальных крутильных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндрах кольцевого сечения для двух специальных случаев экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала в замкнутой форме построены базисные наборы частных решений уравнений волновой динамики, представленные через функции Уиттекера и интегралы биконфлюэнтного уравнения Гойна.

4. Впервые разработана методика построения и исследования аналитических представлений базисных частных решений вспомогательных спектральных задач для анализа проблемы распространения нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах секторно-кругового и секторно-кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности.

5. Впервые поставлены и решены вспомогательные спектральные задачи для исследования проблемы распространения нормальных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах с радиальной неоднородностью материала экспоненциально-степенного типа, имеющих поперечные сечения в виде кругового сектора со свободными либо жестко закрепленными радиальными участками граничной поверхности. Исследованы основные свойства полученных решений и разработана методика построения дисперсионных соотношений для волн исследуемого типа с использованием полученных базисных множеств решений соответствующих вспомогательных спектральных задач.

6. Впервые решена задача учета в решениях дисперсионных задач о распространении нормальных волн в свободных и жестко закрепленных трансверсально-изотропных волноводах секторно-кругового сечения с радиальной неоднородностью материала экспоненциально-степенного типа членов, порождающих все возможные типы особенностей в поле напряжений в

окрестности сингулярных точек границы волновода.

7. Разработана модифицированная методика получения и исследования дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью.

8. Предложена модифицированная методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования в форме кратных степенных рядов комплексных переменных для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрах из прямолинейно ортотропных упругих материалов с гладкой границей поперечного сечения.

9. Впервые реализовано численно-аналитическое исследование малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении монохроматических осесимметричных волн кручения вдоль протяженных трансверсально-изотропных цилиндров с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

10. Впервые осуществлены разработка и реализация методик анализа параметрических закономерностей в топологическом строении и составе дисперсионных спектров нормальных волн, в распределениях их фазовых и групповых скоростей, а также в кинематических характеристиках волновых движений применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

11. Впервые даны обобщение и систематизация полученных новых фундаментальных данных о закономерностях влияния особенностей усложненной геометрии сечений, типов граничных условий, радиальной неоднородности, анизотропии и нелинейности физико-механических свойств материалов волноводов на структуры дисперсионных спектров и особенности кинематических характеристик исследуемых нормальных волн, представляющие первоочередной интерес для сферы практических приложений.

**Методы исследования.** Исследование базируется на линейной модели динамического деформирования однородных и неоднородных анизотропных

упругих сред, а также модели геометрически и физически нелинейного деформирования в рамках применения теории конечных деформаций и представления упругого потенциала с квадратичными и кубическими членами по деформациям. Используются аппарат теории систем дифференциальных уравнений в частных производных; методы матричной алгебры; теория разложений в степенные и обобщенно степенные ряды; методы теории матричных рекуррентных уравнений; теория диофантовых приближений; теория решения эллиптических спектральных задач; теория специальных функций; дискретный и интегральный метод наименьших квадратов.

**Достоверность и обоснованность** основных результатов и выводов работы обосновывается использованием апробированных математических моделей исследуемых деформационных процессов; строгостью и корректностью постановки рассматриваемых задач без привнесения упрощающих гипотез геометрической природы; использованием при исследованиях апробированных корректных математических методов; верификацией полученных решений по критериям удовлетворения уравнениям математической модели и граничным условиям рассматриваемых краевых задач; применением критериев сходимости к представлениям, получаемым в форме функциональных рядов; согласованностью результатов, полученных разрабатываемыми методами в предельных частных случаях, с опубликованными результатами других исследователей.

**Теоретическая значимость** результатов работы заключается в создании эффективных численно-аналитических методов решения новых классов задач волновой механики цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами в рамках логики внутринаучного развития фундаментальных исследований в области механики деформируемого твердого тела.

**Практическое значение** результатов работы заключается в том, что разработанные методы и алгоритмы их реализации, закономерности и выводы относительно структуры полных дисперсионных спектров, кинематических, энергетических и высокочастотных асимптотических свойств нормальных волн в

трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных функционально-градиентных цилиндрах, полученные на основе проведенных численных экспериментов, являются инструментами предпроектного моделирования и эффективных технических решений в ряде современных научно-промышленных отраслей. В частности, это проектирование и конструкторские расчеты новых поколений волноводных компонентов акустоэлектронных устройств; технологии неразрушающего ультразвукового контроля промышленных изделий, в частности продукции трубного производства, упрочняемых осей и валов в ответственных конструкциях двигателестроения; ультраакустическая диагностика конструкций из новых поколений неоднородных нанокompозитных материалов; моделирование и расчеты нелинейных акустоэлектронных устройств для интегрирования и усиления информационных сигналов.

**Личный вклад автора.** Все основные аналитические и численные результаты представленных в диссертации исследований получены лично автором работы. В совместно проведенных исследованиях и опубликованных работах, соавторам А.С. Космодамианскому [105, 293] и В.И. Сторожеву [83, 86, 129, 144, 147, 152, 154, 155, 159, 187, 188, 321] принадлежат участие в постановке рассматриваемых задач и рекомендации по схемам анализа и обобщения полученных результатов; соавторам Вит.В. Волчкову [156], В.А. Шалдырвану [161] принадлежат участие в выработке рекомендаций по схемам анализа и обобщения полученных результатов; соавторам Ю.П. Бай [177], Т.В. Волобуевой [128], А.И. Дзундзе [126-128], А.В. Елагину [82-86], Е.С. Кисель [164], В.А. Моисеенко [126, 127, 130, 132, 158], М.С. Полуказаковой [177], С.А. Прийменко [161, 165], Н.В. Приходько [143, 148], В.В. Пузыреву [131], О.Ю. Сидаш [154, 159, 160, 166, 187, 321], О.Д. Смоктий [185], Р.Р. Троян [105, 134, 137, 139-142, 293, 320], В.А. Цапову [129], М.Н. Чернову [147] принадлежат участие в разработке программных приложений для осуществления численных экспериментов на базе предложенных методов, а также участие в обработке и систематизации результатов численного анализа.

**Апробация результатов работы.** Основные положения исследования



докладывались и обсуждались на ряде научных форумов различного уровня, в том числе на: Международной научной конференции «Современные проблемы концентрации напряжений» (Донецк, 21-25 июня 1998 г.); XII Международных научных школах им. академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». (Симферополь, 16-22 сентября 2002 г.); Акустических симпозиумах Консонанс - 2005 (Киев, 27-29 сент. 2005 г.), IX Международной конференции «Устойчивость, управление и динамика твёрдого тела» (Донецк, 1-6 сентября 2005 г.); International Seminar «Days on Diffraction'2006» (Saint Petersburg, May 30 – June 2, 2006); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.); IV и VII Международных научных конференциях «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006 г., 11-14 июня 2013 г.); VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013 г.); XVII и XVIII Международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г., 7-10 ноября 2016 г.); IX – XIII Всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 26-30 мая 2014 г., 25-30 мая 2015 г., 23-27 мая 2016 г., 29 мая – 3 июня 2017 г., 31 мая – 3 июня 2018 г.); IX Международной научной конференции «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львов, 15-19 сентября 2014 г.); Международной научно-методической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.И. Бородина (Донецк, 31 марта 2016 г.); I Международной научной конференции «Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности» (Донецк, 16-18 мая 2016 г.); 5-th International conference, Dedicated to the 90-th Anniversary of Academician V.L. Rvachev «Nonlinear Dynamics – 2016» (Kharkov, September 27–30, 2016); III международной научно-практической конференции «Приоритетные направления развития современной науки: от теории к практике» по итогам 2017 года» (Троицк, 20-24 ноября,

2017 г.); VII Международная научно-практической интернет-конференции «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты» (Донецк, 25 мая 2018 г.). По циклам опубликованных работ в рамках тематики диссертационного исследования результаты докладывалась на заседаниях объединенного научного семинара по математическим проблемам механики сплошной среды кафедр теории упругости и вычислительной математики, прикладной механики и компьютерных технологий ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» и отдела аналитических методов механики горных пород ГУ «Институт прикладной математики и механики», в полном объеме работа докладывалась на научном семинаре по механике сплошных сред кафедры теории упругости и вычислительной математики ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А. Калоерова (2002 – 2018 гг.).

**Публикации.** Результаты диссертационного исследования опубликованы в 50 научных работах. В их числе 23 статьи в реферируемых изданиях, включенных в перечень ВАК ДНР, из которых 7 статей в изданиях, включенных в Международные наукометрические базы.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, восьми разделов, заключения с основными выводами и результатами, списка литературы из 399 источников. Работа содержит 86 рисунков и 6 таблиц, изложена на 297 страницах, из которых 254 страницы занимает основное содержание.

## РАЗДЕЛ 1

# АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМАМ ВОЛНОВОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ И ПОСТАНОВКА АКТУАЛЬНЫХ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В РАССМАТРИВАЕМОЙ ОБЛАСТИ

### 1.1. Обзор исследований по проблеме

Как отмечено во вводном разделе работы, различные аспекты проблемы динамики деформируемых тел цилиндрической геометрии являлись предметом теоретических исследований на основе синтеза и анализа соответствующих математических моделей достаточно длительный период времени. Вместе с тем, их изучение продолжает сохранять актуальность в связи с современными фундаментальными и прикладными запросами в контексте перехода к исследованию многих классов задач в новых вариантах постановки.

Общее представление о различных этапах реализованных теоретических исследований по данной проблематике, о спектре разработанных методов изучения моделей динамического деформирования цилиндрических тел и обобщенных структурно-параметрических закономерностях в анализируемых процессах упругих колебаний и распространения волн деформаций для объектов этого типа дают обобщающие монографии и обзорные аналитические публикации В.М. Бабича, Л.А. Молоткова [9]; М.К. Балакирева, И.А. Гилинского [10]; А.В. Белокопя [12], Ю.И. Бобровницкого, М.Д. Генкина, В.П. Маслова, А.В. Римский-Корсакова [17]; И.А. Викторова [37]; И.И. Воровича, В.А. Бабешко [47]; И.П. Гетмана, Ю.А. Устинова [52]; В.Г. Гоголадзе [53]; Э.И. Григолюка, И.Т. Селезова [55]; В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [62]; Р.М. Дейвиса [74]; Э. Дьелесана, Д. Руайе [75]; В.И. Ерофеева, В.В. Кажаяева, Н.П. Семериковой [87]; Н.В. Зволинского, М.И. Рейтмана, Г.С. Шапиро [90]; В.Б. Иванова [91]; Г. Кольского [97]; А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева [102, 103]; В.Д. Купрадзе, Т.В. Бурчуладзе [109]; В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко,

С.А. Довгого, А.Н. Трофимчука, Г.Я.Ф. Ван Хейст [122]; Т. Микера, А. Мейтцлера [123]; Р. Миттра, С. Ли [124]; В.З. Партона, П.И. Перлина [175]; В.Т. Головчана, В.Д. Кубенко, Н.А. Шульги [179]; В.А. Шутилова [198]; J.D. Achenbach [204]; М.М. Al–Mousawi [209]; В.А. Auld [212]; D.M. Barnett [217]; K.F. Graff [270]; H.D. McNiven, J.J. McCoy [310]; H.D. McNiven [311]; T.R. Meeker, А.Н. Meitzler [312]; J. Miklowitz [315, 316]; M.J.P. Musgrave [323]; M. Redwood [342]; J. Whitham [388].

В контексте тематики данной диссертационной работы из общего обширного ряда теоретических исследований по проблемам динамического деформирования цилиндрических упругих тел можно выделить многоаспектное направление, посвященное анализу специфики и закономерностей распространения стационарных волн деформаций в цилиндрических объектах – волноводах с различными особенностями в физико-механических и геометрических свойствах на базе использования пространственных моделей изучаемых волновых процессов. В историческом аспекте, исходными по данному направлению принято считать работы L. Pochhammer [339], С. Chree [247], в которых представлены получение и первоначальное исследование дисперсионного соотношения для продольно-сдвиговых нормальных упругих волн протяженных изотропных цилиндров кругового и концентрического кольцевого сечения со свободными боковыми поверхностями. В последующем, вплоть до шестидесятых – семидесятых годов минувшего столетия были последовательно выполнены исследования, посвященные различным аспектам анализа уравнений Похгаммера-Кри и отраженные в работах J. Adem [205]; C.W. Curtis [248]; G.S. Field [264 - 266]; W.A. Green [271]; А.Н. Holden [274]; G.E. Hudson [281]; J.R. Hutchinson, С.М. Percival [283]; H.D. McNiven, D.C. Perry [309]; McNiven, J.J. McCoy [310]; H.D. McNiven [311]; T.R. Meeker, А.Н. Meitzler [312]; А.Н. Meitzler [313, 314]; R.D. Mindlin, H.D. McNiven [318]; H. Ohnabe, J.L. Nowinski [330]; J. Oliver [331]; M. Onoe, H.D. McNiven, R.D. Mindlin [332]; Y.–H. Pao, R.D. Mindlin [335]; Y.–H. Pao [336]; R.N. Thurston [373]; J. Zemanek [394]. Более поздние исследования по данной проблематике представлены в работах

A. Bostrom [233]; J.M. Carcione, G. Seriani [236]; F. Honarvar, E. Enjilela, A.N. Sinclair [277]; H. Hosseini-Toudeshky, M.R. Mofakhami, Sh. Hosseini Hashemi [279]; T. Mazuch [308]; D.E. Syresin, T.V. Zharnikov, V.V. Tyutekin [363]; G. Tang, X.M. Xu [365]; Y.M. Tsai [380]; K. Watanabe, R.G. Payton [385, 386], L. Zhang [397]. Эти исследования, в определенном смысле, касались классических вариантов постановки задачи о спектрах и свойствах нормальных упругих волн в изотропных цилиндрических телах кругового и концентрического кольцевого сечения, и их результатом явились систематизированные данные о структуре полных дисперсионных спектров осесимметричных и неосесимметричных нормальных волн с различными показателями изменчивости в окружном направлении, о топологии действительных, мнимых и комплексных дисперсионных кривых, об асимптотических свойствах мод бегущих нормальных волн в высокочастотном коротковолновом и низкочастотном длинноволновом диапазонах, о кинематических свойствах нормальных волн. Уместно подчеркнуть, что характеризуемые исследования стимулировались и на сегодняшний день во многом связаны с развитием наукоемких приложений, о чем свидетельствуют работы И.И. Артоболевского, Ю.И. Бобровницкого, М.Д. Генкина [8]; Э. Дьелесана, Д. Руайе [75]; Б.И. Капранова [95]; В.И. Речицкого [181]; О.Н. Петрищева [176]; В.Н. Чехова, В.А. Лушникова [193]; S.K. Datta, A.H. Sha [252]; S. Djili, F. Boubenider [255]; G.A. Holzapfel, R.W. Ogden [276]; Y. Jin, Deshuang Zhao, Y. Ying [284]; B.N. Pavlakovic [337]; H.J. Shin, M.J. Quarry, J.L. Rose [351]; R.N. Thurston [374]. В частности, в работах М. Cés, D. Royer, C. Prada [238]; Jérôme Laurent, Daniel Royer, Takasar Hussain, Faiz Ahmad, Claire Prada [297] представлен перспективный способ идентификации свойств материалов на основе анализа моды волн Лэмба в цилиндре, характеризующейся нулевой групповой скоростью.

Применительно к изотропным цилиндрам также углубленно исследовалась проблема описания комплексных ветвей дисперсионных спектров (мод краевых стоячих волн), что, в частности, отражают работы Г.Л. Комиссаровой [98]; П.Е. Краснушкина [107] и ряда других авторов. Следует отметить, что для

проблемы исследования спектров и свойств нормальных волн в цилиндрических волноводах по многим аспектам свойственна общность постановочных заданий и методов исследования с проблемами анализа закономерностей дисперсии упругих волн в волноводах иной геометрической формы – в полосе, слое, призматических телах и т.д., рассматривавшимися в работах Ю.И Бобровницкого [15 – 16, 18 - 19]; А.А. Бондаренко [24]; А.В. Наседкина [167, 168] и др.

Последующий период в исследованиях спектров и свойств упругих волн в протяженных телах цилиндрической формы связан с переходом к анализу широкой серии моделей волноводов, в которых нашли отражение факторы усложнения деформационных свойств материалов в виде существенной механической анизотропии, неоднородности, нелинейности, начальных напряжений; факторы усложнения геометрической формы поперечных сечений; составная структура кусочно-однородных цилиндров; факторы контакта граничных поверхностей цилиндров с жидкостью и задание на этих поверхностях смешанных неклассических типов граничных условий. В ряду этих исследований, прежде всего, можно отметить работы, F. Honarvar, E. Enjilela, A.N. Sinclair, A. Mirnezami [278]; H.E. Keck, A.E. Armenakias [288]; I. Mirsky [319]; посвященные получению и анализу дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах с канонической круговой и кольцевой формой поперечных сечений. Волновые процессы в однородных цилиндрически-ортотропных волноводах кругового сечения и волноводах более низких классов цилиндрической анизотропии, а также с учетом факторов сопряженных физико-механических полей, исследовались в работах К.В. Медведева, В.М. Шульги, В.Ф. Корниенко, И.А. Ластивки [121]; Д.Л. Новицкого [170]; А.М. Abd–Alla, Fatimah Alshaikh [203]; F.–H. Chou, J.D. Achenbach [245]; S. Markus, D.J. Mead [302]; Michael Y. Shatalov, Arthur G. Every, Alfred S. Yenwong–Fai [350]; Alfred Sevidzem Yenwong-Fai [392]. Применительно к цилиндрически-ортотропным волноводам концентрического кольцевого сечения в работах Е.И. Рамской, Н.А. Шульги [180]; Н.А. Шульги [195]; Н.А. Шульги, А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимовой [196] предложен оригинальный эффективный

аналитических подход, связанный с введением в рассмотрение вместо радиальных цилиндрических обобщенных кольцевых координат с последующим интегрированием уравнений стационарной динамики рассматриваемых цилиндров для осесимметричного и неосесимметричного случаев в степенных рядах по этой координате. Также ортотропные цилиндры концентрического кольцевого сечения рассматривались в работе С. Jolicoeur, A. Cardou [285]; F.G. Yuan, C.C. Hsieh [393]. Волновые процессы в однородных упругих цилиндрах с винтовой механической анизотропией (спирально ортотропных цилиндрах) исследовались в работах И.А. Панфилова, Ю.А. Устинова [171]; В.А. Ромащенко [182, 183].

Теоретические модели изотропных, трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводов кругового и кольцевого сечения, окруженных жидкостью или содержащих жидкость во внутренних полостях, являлись предметом анализа в работах В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссаровой [65 – 66, 69 – 71]; Г.Л. Комиссаровой [99, 100]; В.Н. Шульги, О.Н. Шульги [197]; F.Ahmad [207]; K. Baik, J. Jiang, T.G. Leighton [214]; M.J. Berliner, R. Solecki [224, 225]; M.A. Biot [227]; Yuan–Fang Chou, Tzu–Huan Peng [246]; V. Dayal [253]; V.A. Del Grosso [254]; Andrew J.A. Hull [282]; Hegeon Kwun, Keith A. Bartels, Christopher Dynes [294]; L.D. Lafleur, F.D. Shields [295]; P.B. Nagy [325]; Ahmet Özbay [333]; N. Santatriniaina, F. Razafimahery, L. Rakotomanana [346]; R. Selvamani, P. Ponnusamy [347]; B. Shanker, C.N. Nath, S.A. Shah, P.M. Reddy [348]. Применительно к данным моделям исследовано качественное и количественное влияние фактора наличия жидкостной компоненты волноводов на трансформацию топологии и состава дисперсионных спектров, на особенности локализации волн из различных мод в высокочастотном коротковолновом диапазоне, на эффекты энергетического вытекания для нормальных волн. Волны в пьезоактивных полых цилиндрах, содержащих жидкость, исследовались в работе W. Larbi, J.–F. Deu [296]. Сходные подходы применяются в работах P. Ponnusamy, R. Selvamani [340] и для анализа процессов распространения локализованных упругих волн в цилиндрических волноводах, окруженных

деформируемой твердой средой.

Волновые процессы в многослойных протяженных цилиндрических упругих и электроупругих телах, исследуемые в пространственной постановке и на основе уточненных оболочечных теорий явились предметом исследования в работах R. Ansari, F. Alisafaei, P. Ghaedi [211]; V. Birman [228]; M. D'ottavio, D. Ballhause, V. Kroplin, E. Carrera [256]; C.H. Huang, S.B. Dong [280].

Цилиндрические упругие волноводы с усложненной гладкой криволинейной либо полигональной геометрией поперечных сечений и искривлениями оси исследованы в работах А.Я. Григоренко [56]; V. Damljanovi, R.L. Weaver [250]; E. Khajeh, L. Breon, J.L. Rose [290]; K. Nagaya [324]; G. Rosenfeld, J.B. Keller [344]; G. Rosenfeld, J.B. Keller [345]; J. Sun, Q. Xiao [360]; M. Venkatesan, P. Ponnusamy [384].

Одним из актуальных и требующих дальнейших исследований аспектом проблемы изучения спектров и свойств нормальных волн в цилиндрических волноводах с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами явился анализ асимптотических эффектов локализации и предельного поведения скоростей бегущих нормальных волн в высокочастотном коротковолновом и низкочастотном длинноволновом диапазонах. Эти вопросы, связанные с общей проблемой теории поверхностных волн на криволинейных границах деформируемых тел, являлись предметом рассмотрения в публикациях И.А. Викторова [38]; В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссаровой [67]; В.Т. Гринченко [68]; A. Bamberger, P. Joly, M. Kern [216]; D.M. Barnett [217]; S.V. Biryukov, Yu.V. Gulyaev, V.V. Krylov, V.P. Plessky [229]; A. Bostrom, A. Burden [231]; A.D. Burden [234, 235]; P. Chadwick, G.D. Smith [239]; Ia.A. Mindlin [317]; J. Tromp, F.A. Dahlen [379]; T.C.T. Ting [378]. Дальнейшие перспективные исследования в этом направлении связаны, в частности, с анализом существования в цилиндрических волноводах с усложненными свойствами специфических механизмов локализации нормальных упругих волн, описанных в работах О.П. Абрамовой, В.И. Сторожева, В.А. Шпака [1]; А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева, В.А. Шпака [104].



Эффекты учета начальных напряжений в упругих цилиндрических волноводах по различным аспектам, в том числе в связи с обратными задачами идентификации характеристик полей предварительных напряжений, анализируются в публикациях А.О. Ватульяна, В.О. Юрова [30, 32]; А.Н. Гузя, Ф.Г. Махорта, О.И. Гущи [72]; Т. Kerceler [289]; A. Ozturk, S.D. Akbarov [334].

Спектры нормальных волн в упругих и вязкоупругих многослойных телах цилиндрической геометрии анализировались в публикациях Н. Adnan, N.B. Nagy, P.B. Nagy [206]; K. Bhaskar, T.K. Varadan [226]; J. Mu [322]; А.Н. Nayfeh, P.B. Nagy [327], I.K. Soldatos, J. Ye [356]. В работах А.Я. Григоренко, И.А. Лозы [57]; И.А. Лозы [111 – 115]; исследовались спектры и свойства связанных электроупругих волн в сплошных, полых и многослойных цилиндрах из пьезоактивных материалов с различными типами предварительной поляризации.

В современных исследованиях в области волновой механики деформируемых сред рассматриваются также неклассические задачи распространения волн деформаций в объектах их специальных классов метаматериалов, обладающих уникальными акустическими свойствами. Исследования в данном направлении представлены в работах Ю.И. Бобровницкого [22, 23].

Особое внимание в последние десятилетия вызывают неклассические проблемы исследования спектров и свойств нормальных волн деформаций в протяженных цилиндрах из непрерывно-неоднородных (функционально-градиентных) материалов, для которых способы изготовления, включая технологии 3-D печати, характеристики физико-механических свойств, теоретические модели деформирования с учетом и без учета начальных напряжений, детально характеризуются в публикациях Т.И. Белянковой, В.А. Лыжова [13]; А.В. Боровских [25, 26]; В.В. Калинчука, Т.И. Белянковой [93]; K.S. Al-Basyouni, S.R. Mahmoud, E.O. Alzahrani [208]; V.I. Alshits, H.O.K. Kirchner [210]; A. Bamberger, Y. Dermenjian, P. Joly [215]; A. Bostrom, M. Johansson, T. Svedberg [232]; M. Cavalcante, S. Marques, M.-J. Pindera [237]; H.-L. Dai, Y.-N. Rao, T. Dai. [249]; X.-Q. Fang [260]; X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-

L. Zhang [261]; X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong [262]; Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford [263]; M. Gasik, N. Cherradi, A. Kawasaki [268]; M. Koizumi [291]; T. Nakamura, T. Wang, S. Sampath [326]; A.N. Norris, A.L. Shuvalov [329]; M. Shariyat, M. Khaghani, S.M.H. Lavasani [349]; X.S. Sun, Y. Chen, V.B.C. Tan, R.K. Jaiman, T.E. Tay [361]; K. Swaminathan, D.T. Naveenkumar, A.M. Zenkour, E. Carrera [362]; J.-Q. Tarn [368]; Y.M. Tarnopol'skii, V.L. Kulakov, D.D. Mungalov [370]; E.E. Theotokoglou, I.H. Stampouloglou [372]; N. Tutanku [381]; I. Tsukrov, B. Drach, T.S. Gross [383]; G.J. Weng [387]; Y.Y. Yang [391]; G.M. Zhang, R.C. Batra [396].

Начатые в последний период исследования по неклассическим проблемам распространения волн в цилиндрических волноводах на базе моделей данного типа представлены в нескольких циклах опубликованных работ. Так, в работах А.Я. Григоренко, И.А. Лозы [58]; А.Я. Григоренко [59]; А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимовой, Ю.А. Коротких [60]; И.А. Лозы [116] теоретические исследования по проблемам динамики функционально-градиентных упругих и электроупругих радиально-неоднородных цилиндров осуществлены на основе разработки и применения специализированных модификаций прямых разностных численных методов интегрирования соответствующих краевых задач. Аналитические подходы к исследованию краевых задач динамики неоднородных изотропных и цилиндрически-ортотропных функционально-градиентных цилиндров кругового и концентрического кольцевого сечения, в том числе при дополнительном учете факторов демпфирования и пористости материалов, представлены в публикациях А.О. Ватульяна, А.В. Моргуновой [29]; А.О. Ватульяна, В.О. Юрова [33]; А.О. Ватульян, С.А. Нестерова [34]; А.О. Ватульяна, В.С. Кондратьева [35]; А.М. Abd-Alla, Т.А. Nofal, А.М. Farhan [199]; А.М. Abd-Alla, А.М. Farhan [200]; А.М. Abd-Alla, S.R. Mahmoud, N.A. Al-Shehri [201]; А.М. Abd-Alla, S.R. Mahmoud [202]; C. Baron [218, 219]; L. Elmaimouni, J.E. Lefebvre, V Zhang., T. Gryba [257]; M. El-Raheb [258]; X. Han, G.R. Liu, Z.C. Xi, K.Y. Lam [272]. В работе А.О. Ватульяна, О.Б. Домбровой, В.Е. Жирова [28] рассматривается проблема определения неоднородной поляризации для электроупругого стержня.

Вопросы методологии решения обратных задач идентификации характеристик функционально-градиентных материалов рассматриваются в работе А.О. Ватульяна, С.А. Нестерова [31]. Анализ пространственных колебательных процессов в содержащей жидкость ортотропной цилиндрической оболочке представлен в публикации W.Q. Chen, Z.G. Bian, H.J. Ding [244].

Можно также особо выделить работы J. Vodig, B.A. Jayne [230]; P. Gillis [269]; P.A. Martin, J.R. Berger [303 - 307], посвященные вопросам распространения упругих волн в цилиндрических объектах из древесины, рассматриваемой в моделях как материал, обладающий анизотропией и функционально-градиентный материал. В работах S.R. Mahmoud [300]; S.R. Mahmoud, M. Marin, K.S. Al-Basyouni [301] данные о свойствах волн деформаций в функционально-градиентных цилиндрических телах применяются в биомеханических приложениях для диагностики свойств сухих костей человека.

Проблема анализа нормальных упругих волн в цилиндрических удлиненных телах с различными особенностями физико-механических свойств имеет также аспекты, связанные с описанием динамических деформационных процессов в волокнистых композиционных материалах и описываемые в работах J.N. Barshinger, J.L. Rose [220]; Y. Benveniste, G.J. Dvorak, T. Chen [223]; J. Chang, C. Zheng, Q.-Q. Ni [240]; T. Chen, G.J. Dvorac, G.J. Benveniste [241 - 243]; I.M. Daniel, O. Ishai [251]; E. Herve, A. Zaoui [273].

Важную роль для характеристики осуществляемых в настоящей работе исследований играют результаты анализа моделей деформирования цилиндрических тел из многослойных и функционально-градиентных материалов, модели и методы исследования волновых процессов в сопряженных физико-механических полях, представленные в публикациях А.О. Ватульяна, А.Ю. Кирютенко, А.В. Наседкина [27]; M.H. Babaei, Zengtao Chen [213]; R.C. Batra, G.L. Iaccarino [221]; G.A. Kardomateas [286, 287]; L.P. Kollar, G.S. Springer [292]; C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy [298]; Vlado A. Lubarda [299]; G.J. Nie, R.C. Batra [328]; J.L. Pelletier, S.S. Vel [338]; A.L. Shuvalov [352]; H. Singh, J.N. Sharma [355]; M. Tajuddin, S. Ahmed Shah [364]; J.-Q. Tarn [366]; J.-

Q. Tarn, H.–H. Chang [369]; T.C.T. Ting [376, 377]; I. Tsukrov, B. Drach [382]; C.A. Zhang, S.V. Hoa [395]; X. Zhang, N. Hasebe [398]; S. Zhifei, Z. Taotao, X. Hongjun [399].

Специфика геометрии рассматриваемых в данной диссертационной работе волноводов, выражающаяся в наличии внешних и внутренних ребер на боковых поверхностях протяженных цилиндров с секторно-круговой и секторно-кольцевой геометрией сечений, является мотивом для реализации в ней углубленного детализированного анализа качественных эффектов возникновения, типологии и количественных параметров особенностей, формирующихся при распространении нормальных волн механических полей в окрестностях вершин указанных ребер. Осуществляемые в работе исследования в этом направлении базируются на подходах и результатах, представленных в публикациях О.К. Аксентян [3]; В.М. Александрова, Б.И. Сметанина, Б.В. Соболя [4]; Р.К. Алексаняна [6]; Л.П. Вовка [39 – 42, 45]; Л.П. Вовк, Б.В. Соболя [43, 44]; С.Х. Геворкяна [50]; В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [63]; А.И. Каландия [92]; В.А. Кондратьева [101]; С.Е. Михайлова [125]; А.Н. England [259]; G.V. Sinclair [353, 354]; J.–Q. Tarn [367]; M.L. Williams [389, 390].

Представленные в диссертационной работе исследования посвящены также обобщению численно-аналитических подходов к анализу малых нелинейных ангармонических возмущений (вторых гармоник) для нормальных упругих волн в цилиндрических волноводах на класс трансверсально-изотропных материалов. Концептуально рассматриваемые модели геометрически- и физически-нелинейного деформирования основываются на базовых положениях теории нелинейного динамического деформирования, описываемых в работах А. Грина, Дж. Адкинса [61]; Л.К. Зарембо, В.А. Красильникова [88]; Л.К. Зарембо, В.И. Тимошенко [89]; В.А. Красильникова, В.Е. Лямова [106]; А.Г. Куликовского, Е.И. Свешникова [108]; В.Е. Лямова [118]; Я.Я. Рущицкого [184]; M. Bednarik, M. Cervenka [222]. Разрабатываемая и апробируемая в диссертации методика анализа нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн вдоль трансверсально-изотропных цилиндров кругового сечения основана на

распространении и внесении новых элементов в подходы, описываемые применительно к изотропным цилиндрам в публикациях А.В. Елагина, В.И. Сторожева [76, 79, 81]; А.В. Елагина [77, 78, 80]; N. Sugimoto, M. Hirao [357]; N. Sugimoto, T. Makimoto [358]; N. Sugimoto [359].

В качестве одного из важных перспективных направлений использования полученных в настоящей работе результатов можно рассматривать развитие методов исследования задач динамики цилиндров конечных размеров на основе концепции рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн (базисным системам динамических однородных решений). Общие принципиальные элементы разработки и применения таких подходов представлены, в частности, в работах Е.В. Алтухова, М.В. Фоменко [7]; И.П. Гетмана, Ю.А. Устинова [52]; А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева [102, 103]. Важнейшую роль для использования таких подходов имеют исследования ряда фундаментальных свойств систем динамических однородных решений, в том числе представленное в работе Ю.И. Бобровницкого [21] описание свойства взаимности в задачах об отражении и прохождении неоднородных нормальных упругих волн; анализ аналогичных исследований в работах Ю.И. Бобровницкого [15, 19]; И.П. Гетмана, Ю.А. Устинова [52]; А.В. Наседкина [169] свойств обобщенной ортогональности представлений базисных нормальных волн, свойств полноты систем базисных нормальных волн, а также свойств регулярности и возможностей асимптотического анализа бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений по базисным нормальным волнам на основе методик, представленных в работах В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [62]; А.Д. Ляшко, В.Н. Чехова [119]; С.О. Папкина, В.Н. Чехова [172 – 174]; В.Н. Чехова, А.В. Пан [191, 192].

Построенные в работе представления для базисных нормальных волн перспективны и для использования в исследованиях по резонансам на неоднородных волнах (краевым резонансам) в полубесконечных цилиндрах с усложненными физико-механическими и геометрическими свойствами в рамках подходов, представленных в работах Ю.И. Бобровницкого [20]; В.Т. Гринченко,

В.В. Мелешко [64]; А. Holst, D. Vassiliev [275].

Таким образом, представленные в настоящем подразделе данные о состоянии выполненных теоретических разработок в области волновой механики цилиндрических деформируемых тел, позволяют сделать заключение об актуальности темы и научных заданий данной диссертационной работы, и обозначить место полученных в ней результатов в общей палитре исследований по разработке и применению теоретических численно-аналитических методов решения неклассических пространственных задач волновой механики протяженных деформируемых цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

## **1.2. Линейная математическая модель волнового деформирования цилиндрических тел с усложненными физико-механическими свойствами**

Рассматривается задача разработки новых эффективных аналитических и численно-аналитических подходов для исследования взаимодействия нормальных волн деформаций в упругих волноводах цилиндрической формы с усложненными физико-механическими характеристиками материала волновода и наличием ребер геометрической сингулярности граничной поверхности волновода.

Для исследуемых волновых процессов рассматриваются протяженные волноводы, поперечное сечение которых представляет собой круг (Рисунок 1.1) и круговой сектор (Рисунок 1.2) радиуса  $R_1$ , концентрическое круговое кольцо (Рисунок 1.3) и концентрический круговой кольцевой сектор (Рисунок 1.4) с внутренним и внешним радиусами соответственно  $R_1$  и  $R_2$ , а также включающую точку начала координат конечную односвязную выпуклую область  $\mathcal{D}$  с гладкой по Гельдеру границей [36]  $\gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = \varphi_1(s), x_2 = \varphi_2(s), s \in [0, 1]\}$ , где  $\varphi_1(0) = \varphi_1(1)$ ,  $\varphi_2(0) = \varphi_2(1)$  (Рисунок 1.5). Угловая мера сектора и кольцевого сектора в сечениях на Рисунках 1.2 и 1.4 имеет естественное ограничение  $0 < 2\alpha < 2\pi$ .

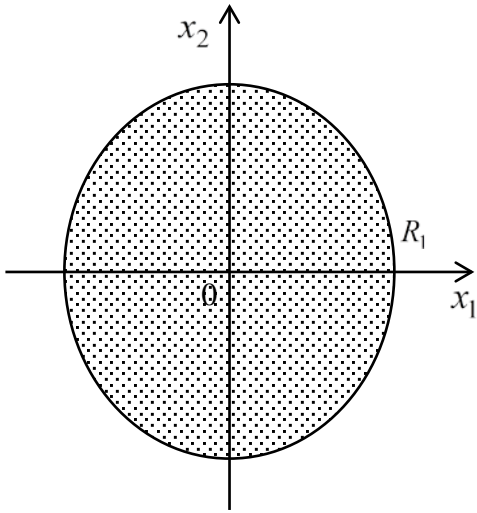


Рис. 1.1.

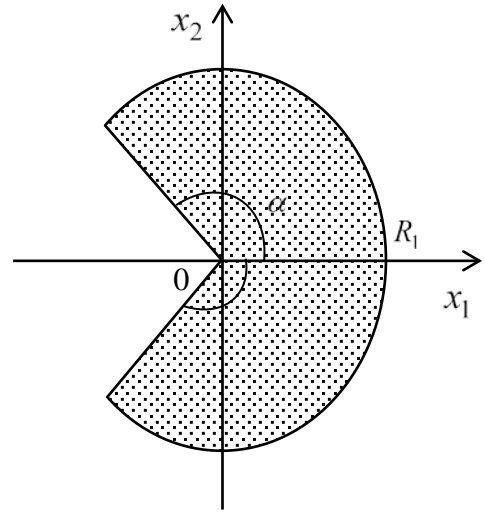


Рис. 1.2.

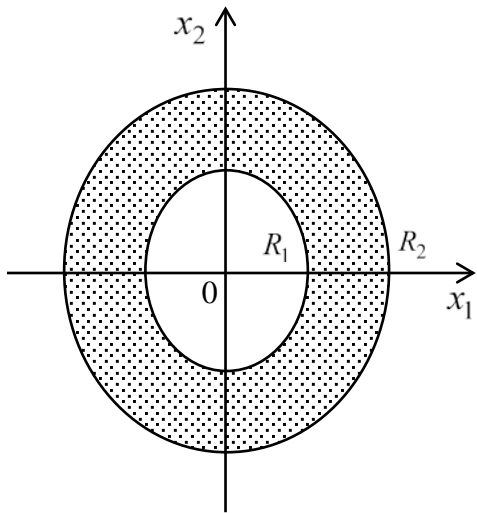


Рис.1.3.

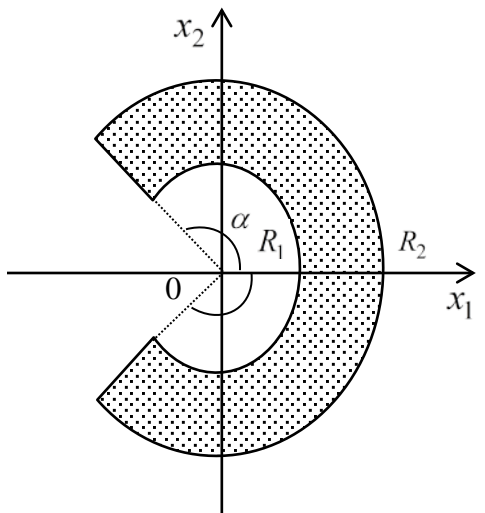


Рис.1.4.

Нормирующий параметр для сплошных цилиндров (Рисунки 1.1, 1.2) задается соотношением  $R_* = R_1$ , для криволинейных сплошных цилиндров (Рисунок 1.5)

$$R_* = \sup_{(x_1, x_2) \in \gamma} \left( \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right),$$

а для цилиндров кольцевого сечения (Рисунки 1.3, 1.4) при построении целевых решениях оставляется произвол выбора  $R_*$ , ограниченный условиями

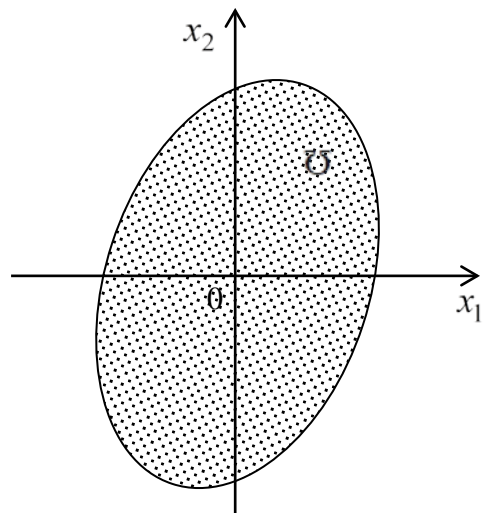


Рис. 1.5.

$$R_1 \leq R_* \leq R_2, \quad R_2/2 < R_*, \quad (1.1)$$

и вводится безразмерный параметр

$$h = \max \{1 - R_1/R_*, R_2/R_* - 1\} \quad (0 < h < 1). \quad (1.2)$$

С учетом введенных нормировок в отнесенных к нормирующему параметру  $R_*$  безразмерных цилиндрических координатах  $Or\theta z$  волноводы с поперечными сечениями, представленными на Рисунках 1.1 – 1.5 соответственно занимают области  $V_j$  ( $j = \overline{1,5}$ )

$$V_1 = \{r \in [0,1], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (1.3)$$

$$V_2 = \{r \in [0,1], \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (1.4)$$

$$V_3 = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\},$$

$$V_3 \subseteq \{r \in [1-h, 1+h]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (1.5)$$

$$V_4 = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*]; \theta \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\},$$

$$V_4 \subseteq \{r \in [1-h, 1+h]; \theta \in [-\alpha, \alpha]; z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (1.6)$$

$$V_5 = \{r \in [0, \varphi(\theta)], \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)) \quad (1.7)$$

имеют граничные поверхности  $G_j$  ( $j = \overline{1,5}$ )

$$G_1 = G_1^{(1)}, \quad G_1^{(1)} = \{r = 1, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (1.8)$$

$$G_2 = G_2^{(1)} \cup G_2^{(-)} \cup G_2^{(+)}, \quad G_2^{(1)} = \{r = 1, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\},$$

$$G_2^{(\pm)} = \{r \in [0,1], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (1.9)$$

$$G_3 = G_3^{(1)} \cup G_3^{(2)},$$

$$G_3^{(j)} = \{r = R_j/R_*, \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (j = \overline{1,2}); \quad (1.10)$$

$$G_4 = G_4^{(1)} \cup G_4^{(2)} \cup G_4^{(-)} \cup G_4^{(+)},$$

$$G_4^{(j)} = \{r = R_j/R_*, \theta \in [-\alpha, \alpha], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (j = \overline{1,2}),$$

$$G_4^{(\pm)} = \{r \in [R_1/R_*, R_2/R_*], \theta = \pm\alpha, z \in (-\infty, \infty)\}; \quad (1.11)$$



$$G_5 = \{r = \varphi(\theta), \theta \in [-\pi, \pi], z \in (-\infty, \infty)\} \quad (\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)). \quad (1.12)$$

Пространственная линейная математическая модель динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в системах нормированных безразмерных декартовых  $Ox_1x_2x_3$  и цилиндрических  $Or\theta z$  координат включает соответствующую систему дифференциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} + \partial_3\sigma_{13} - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_1 &= 0, \\ \partial_1\sigma_{12} + \partial_2\sigma_{22} + \partial_3\sigma_{23} - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_2 &= 0, \\ \partial_1\sigma_{13} + \partial_2\sigma_{23} + \partial_3\sigma_{33} - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_3 &= 0; \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_r\sigma_{rr} + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{r\theta} + \partial_z\sigma_{rz} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_r &= 0, \\ \partial_r\sigma_{r\theta} + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta\theta} + \partial_z\sigma_{\theta z} + 2r^{-1}\sigma_{r\theta} - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_\theta &= 0, \\ \partial_r\sigma_{rz} + r^{-1}\partial_\theta\sigma_{\theta z} + \partial_z\sigma_{zz} + r^{-1}\sigma_{rz} - (\rho R_*^2/c_*)\partial_t^2 u_z &= 0; \end{aligned} \quad (1.14)$$

определяющие соотношения обобщенного линейного закона Гука в указанных системах координат для случаев трансверсально изотропного

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}, & \sigma_{22} &= c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= c_{13}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{23} &= c_{44}\varepsilon_{23}, & \sigma_{13} &= c_{44}\varepsilon_{13}, & \sigma_{12} &= c_{66}\varepsilon_{12}; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{\theta z} &= c_{44}\varepsilon_{\theta z}, & \sigma_{rz} &= c_{44}\varepsilon_{rz}, & \sigma_{r\theta} &= c_{66}\varepsilon_{r\theta}; \end{aligned} \quad (1.16)$$

прямолинейно ортотропного

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}, & \sigma_{22} &= c_{12}\varepsilon_{11} + c_{22}\varepsilon_{22} + c_{23}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= c_{13}\varepsilon_{11} + c_{23}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{23} &= c_{44}\varepsilon_{23}, & \sigma_{13} &= c_{55}\varepsilon_{13}, & \sigma_{12} &= c_{66}\varepsilon_{12}; \end{aligned} \quad (1.17)$$

и цилиндрически ортотропного материала

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{23}\varepsilon_{zz}, \\
\sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{23}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz}, \\
\sigma_{\theta z} &= c_{44}\varepsilon_{\theta z}, & \sigma_{rz} &= c_{55}\varepsilon_{rz}, & \sigma_{r\theta} &= c_{66}\varepsilon_{r\theta};
\end{aligned} \tag{1.18}$$

уравнения связи в соответствующей системе координат между компонентами тензора малых деформаций  $(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})$ ,  $(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{r\theta})$  и отнесенными к нормирующему параметру  $R_*$  компонентами безразмерного вектора динамических упругих волновых перемещений  $(u_1, u_2, u_3)$ ,  $(u_r, u_\theta, u_z)$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \partial_1 u_1, & \varepsilon_{22} &= \partial_2 u_2, & \varepsilon_{33} &= \partial_3 u_3, \\
\varepsilon_{23} &= \partial_3 u_2 + \partial_2 u_3, & \varepsilon_{13} &= \partial_3 u_1 + \partial_1 u_3, & \varepsilon_{12} &= \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2;
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \partial_r u_r, & \varepsilon_{\theta\theta} &= r^{-1}u_r + r^{-1}\partial_\theta u_\theta, & \varepsilon_{zz} &= \partial_z u_z, \\
\varepsilon_{\theta z} &= \partial_z u_\theta + r^{-1}\partial_\theta u_z, & \varepsilon_{rz} &= \partial_z u_r + \partial_r u_z, & \varepsilon_{r\theta} &= r^{-1}\partial_\theta u_r + (\partial_r - r^{-1})u_\theta.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Во введенных представлениях  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$  и  $(\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta})$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  безразмерные характеристики напряженно-деформированного состояния на основных площадках соответственно декартовой и цилиндрической координатных систем; в представлениях (1.15), (1.16)  $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2\}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  модули упругости трансверсально-изотропного материала волновода; в представлениях (1.17) и (1.18)  $\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{22}, c_{23}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}\}$  – отнесенные к нормирующему параметру  $c_*$  модули упругости соответственно прямолинейно и цилиндрически ортотропного материала;  $\rho$  – плотность материала волновода;  $t$  – время;  $\partial_j = \partial/\partial j$  ( $j = r, \theta, z, t$ );  $\partial_j = \partial/\partial x_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ).

Представленная модель включает различные комбинации однородных условий на гладких участках граничных поверхностей волноводов, в том числе: для волноводов с геометрией  $V_1$  – условия свободной

$$\sigma_{rs} \Big|_{(r, \theta, z) \in G_1} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \tag{1.21}$$

либо жестко закрепленной

$$u_s \Big|_{(r,\theta,z) \in G_1} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (1.22)$$

граничной поверхности; для волноводов с геометрией  $V_2$  – условия, моделирующие нанесение на радиальные участки граничной поверхности абсолютно гибкого нерастяжимого покрытия

$$u_r \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = u_z \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = \sigma_{\theta\theta} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = 0 \quad (1.23)$$

и условия свободного

$$\sigma_{rs} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(1)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (1.24)$$

либо жестко закрепленного

$$u_s \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(1)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (1.25)$$

цилиндрического участка граничной поверхности, а также условия свободных

$$\sigma_{\theta s} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(\pm)}} = \sigma_{rs} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2^{(1)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (1.26)$$

либо жестко закрепленных

$$u_s \Big|_{(r,\theta,z) \in G_2} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (1.27)$$

всех участков граничной поверхности; для волноводов с геометрией  $V_3$  – свободных

$$\sigma_{rs} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(j)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z; j = 1, 2) \quad (1.28)$$

либо жестко закрепленных

$$u_s \Big|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(j)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z; j = 1, 2) \quad (1.29)$$

обоих участков граничной поверхности; для волноводов с геометрией  $V_4$  – условия, моделирующие нанесение на радиальные участки граничной поверхности абсолютно гибкого нерастяжимого покрытия

$$u_r \Big|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(\pm)}} = u_z \Big|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(\pm)}} = \sigma_{\theta\theta} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(\pm)}} = 0 \quad (1.30)$$

и условия свободных

$$\sigma_{rs} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_4^{(j)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z; j = 1, 2) \quad (1.31)$$

либо жестко закрепленных

$$u_s|_{(r,\theta,z)\in G_4^{(j)}} = 0 \quad (s = r, \theta, z; j = 1, 2) \quad (1.32)$$

обоих цилиндрических участков граничной поверхности; для волноводов с геометрией  $V_5$  – свободной

$$\sigma_{ns}|_{(x_1,x_2,x_3)\in G_5} = 0 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (1.33)$$

либо жестко закрепленной

$$u_s|_{(x_1,x_2,x_3)\in G_5} = 0 \quad (s = 1, 2, 3) \quad (1.34)$$

граничной поверхности.

При постановке задач изучения волновых процессов в неоднородных волноводах с геометрией  $V_j$  ( $j = \overline{1,4}$ ) полагается, что материал волновода является функционально-неоднородным в радиальных направлениях по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность  $\rho$  и нормированные модули упругости  $c_{jp}$  соответственно описываются представлениями

$$\rho = \tilde{\rho} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad c_{jp} = \tilde{c}_{jp} \exp(f_{\lambda,q}(r)), \quad (1.35)$$

где  $f_{\lambda,q}(r)$  в случаях, представленных на Рисунках 1.1, 1.2 имеет вид

$$f_{\lambda,q}(r) = \lambda r^q, \quad (1.36)$$

а для Рисунков 1.3, 1.4 задается так

$$f_{\lambda,q}(r) = \lambda ((r-1)/h)^q. \quad (1.37)$$

Здесь  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) и  $q$  ( $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ) параметры, характеризующие соответственно относительный максимальный уровень и форму локализации в теле волновода радиальной неоднородности материала;  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{c}_{jp}$  соответственно плотность и нормированные модули упругости однородного материала.

На Рисунке 1.6 изображены графики функции  $F(r) = \exp(f_{\lambda,q}(r))$  (1.36) для волноводов с поперечными сечениями, представленными на Рисунках 1.1 и 1.2. Форма локализации неоднородности материала фиксировалась значением

$q = 6$ , а для параметра  $\lambda$  выбирались значения  $\lambda = \ln(1/2)$  и  $\lambda = \ln(3/2)$ , определяющие в зоне локализации у поверхности цилиндра соответственно уменьшение и увеличение на 50% физико-механических характеристик материала.

Для волноводов с поперечными сечениями, представленными на Рисунках 1.3 и 1.4. графики функции  $F(r) = \exp(f_{\lambda,q}(r))$  (1.37) изображены на Рисунках 1.7 (а – г) в случае  $R_1 = 3$ ,  $R_2 = 5$ . Значения параметра  $\lambda$  выбирались с целью ограничить относительный максимальный уровень изменения физико-механических характеристик материала в зоне локализации 50%.

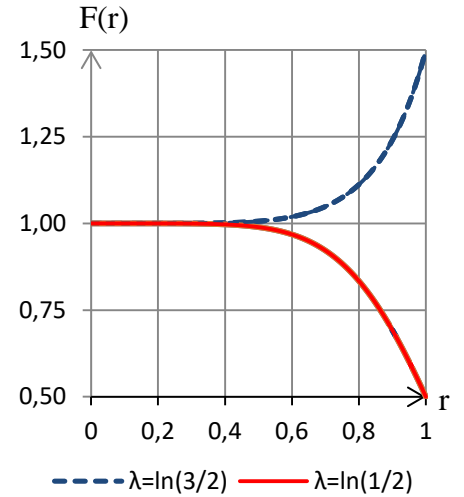


Рис. 1.6.

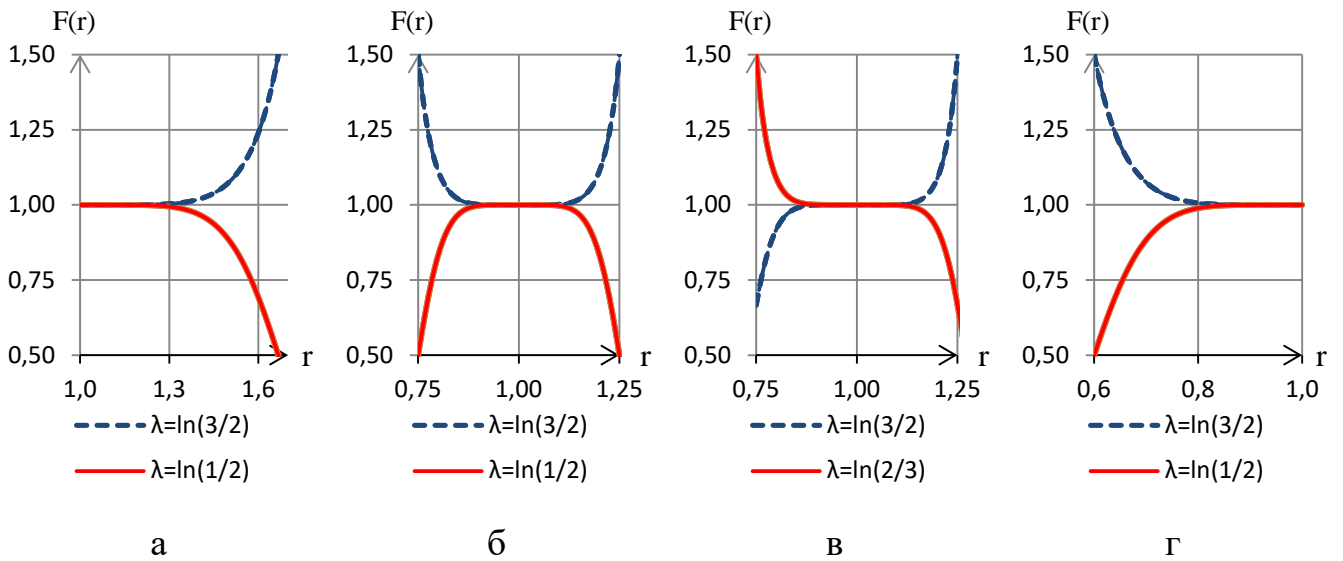


Рис. 1.7.

Для управления размещением зоны локализации в теле волновода значение нормирующего параметра  $R_*$  выбиралось так:  $R_* = R_1$  ( $h = 2/3$ ),  $q = 6$  (Рисунок 1.7 (а));  $R_* = (R_1 + R_2)/2$  ( $h = 1/4$ ),  $q = 6$  (Рисунок 1.7 (б)) и  $q = 7$  (Рисунок 1.7 (в));  $R_* = R_2$  ( $h = 2/5$ ),  $q = 6$  (Рисунок 1.7 (г)).

В рамках представленной модели для исследуемых нормальных волн с круговой частотой  $\omega$ , нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым

числом  $\tilde{k}$  ( $\tilde{k} \in \mathbb{C}$ ) и окружным волновым числом  $\tau$  ( $\tau \in \mathbb{C}$ ) в матричной форме вводятся комплексные представления, которые в случае распространения волн вдоль оси  $Oz$  в радиально неоднородных протяженных цилиндрах с геометрией  $V_j$  ( $j = \overline{1,4}$ ) имеют вид

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (1.38)$$

а в случае распространения волн вдоль оси  $Ox_3$  в протяженных цилиндрах с геометрией  $V_5$  записываются так:

$$\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t) = \exp(-i\omega t + i\tilde{k}x_3) \tilde{\mathbf{U}}(x_1, x_2). \quad (1.39)$$

Здесь  $\delta$  ( $\delta \in \mathbb{R}$ ) – произвольный параметр;  $f_{\lambda,p}(r)$  – функциональный закон радиальной неоднородности материала, задаваемый соотношениями (1.36) либо (1.37);  $\mathbf{U}(r, \theta, z, t)$  и  $\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t)$  – вектор-столбцы с безразмерными компонентами вектора упругих перемещений соответственно

$$\mathbf{U}(r, \theta, z, t) = [u_r(r, \theta, z, t), u_\theta(r, \theta, z, t), u_z(r, \theta, z, t)]^T, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{U}(x_1, x_2, x_3, t) = [u_1(x_1, x_2, x_3, t), u_2(x_1, x_2, x_3, t), u_3(x_1, x_2, x_3, t)]^T; \quad (1.41)$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{U}}(x_1, x_2)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{u}_z^{(\tau)}(r)]^T, \quad (1.42)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(x_1, x_2) = [\tilde{u}_1(x_1, x_2), \tilde{u}_2(x_1, x_2), \tilde{u}_3(x_1, x_2)]^T; \quad (1.43)$$

$\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)$  – диагональная матрица, отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{1,1} &= \cos(\tau\theta + \beta), & [\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{2,2} &= \sin(\tau\theta + \beta), \\ [\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)]_{3,3} &= i \cos(\tau\theta + \beta) & (\beta \in \{0, \pi/2\}), \end{aligned} \quad (1.44)$$

где  $\beta$  – параметр, задающий независимый тип симметрии волновых движений относительно плоскости  $Ox_1x_3$ , с выделением при  $\beta = 0$  условно симметричных волн (волн  $S$ -типа) со свойствами

$$u_r(r, -\theta, z, t) = u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = -u_\theta(r, \theta, z, t),$$

$$u_z(r, -\theta, z, t) = u_z(r, \theta, z, t)$$

и при  $\beta = \pi/2$  – условно антисимметричных волн (волн А-типа) со свойствами

$$u_r(r, -\theta, z, t) = -u_r(r, \theta, z, t), \quad u_\theta(r, -\theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, z, t),$$

$$u_z(r, -\theta, z, t) = -u_z(r, \theta, z, t).$$

В приведенных соотношениях и далее: выделение жирным шрифтом применяется для обозначения матричных и векторных объектов;  $\mathbf{O}$  и  $\hat{\mathbf{O}}$  – нулевые соответственно квадратная матрица и вектор-столбец;  $\mathbf{I}$  – единичная квадратная матрица; обозначения  $[\mathbf{X}]_{j,p}$  и  $[\mathbf{X}]_j$  при  $j, p \in \mathbb{N}$  используется для индексного доступа к элементам соответственно матричных и векторных объектов, а при  $j$  либо  $p$  заданных индексным диапазоном вида  $n..m$  или  $(n_1, n_2, \dots, n_p)$  – для определения соответственно подматрицы либо подвектора; операция  $[\ ]$  – для определения матричных и векторных объектов (формально  $[\mathbf{X}] \equiv \mathbf{X}$ ); операция транспонирования  $\mathbf{X}^T$ ; операция комплексного сопряжения  $\bar{\mathbf{X}}$ ; операция обращения неособенной квадратной матрицы  $\mathbf{X}^{-1}$ ;  $\|\mathbf{X}\|$  – мультипликативная согласованная евклидова норма [49]. Применение скалярной функции или оператора к матричным или векторным объектам определяется как их применение к элементам указанных объектов.

Экспериментальные и теоретические данные о физико-механических свойствах анизотропных материалов [110], рассматриваемые в различных разделах настоящей работы, заимствованы из публикаций [5, 14, 371, 375].

### **1.3. Нелинейная математическая модель волнового деформирования цилиндрических тел**

Рассматриваемая в работе модель нелинейного деформирования однородных трансверсально-изотропных цилиндров с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности базируется на тензорной форме

представления функции упругого потенциала

$$U = (1/2) c_{jqlm} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{lm} + (1/6) c_{jqlmnp} \varepsilon_{jq} \varepsilon_{lm} \varepsilon_{np} \quad (1.45)$$

с квадратичными членами по конечным деформациям

$$\varepsilon_{jq} = (1/2) (u_{j,q} + u_{q,j} + u_{p,j} u_{p,q}). \quad (1.46)$$

Тензорные коэффициенты  $c_{jqlm}$  и  $c_{jqlmnp}$  в представлении (1.45) для поперечно-изотропной среды выражаются через пять независимых упругих констант матричного типа  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{44}$  второго порядка, а также девять независимых матрицы упругих постоянных матричного типа  $c_{111}$ ,  $c_{112}$ ,  $c_{113}$ ,  $c_{123}$ ,  $c_{133}$ ,  $c_{144}$ ,  $c_{155}$ ,  $c_{344}$ ,  $c_{333}$  третьего порядка [267]. Симметрия тензоров упругих постоянных второго и третьего порядка для трансверсально-изотропных материалов описана в работах [118, 267]. Компоненты тензоров упругих постоянных являются безразмерными характеристиками, отнесенными к нормирующему параметру  $c_*$ .

В нормированных цилиндрических координатах  $Or\theta z$  и нормированных прямоугольных декартовых координатах  $Ox_1x_2x_3$ , полученных из исходных отнесением координатных переменных линейной физической размерности к нормирующему параметру  $R_* = R$ , цилиндр имеет единичный приведенный безразмерный радиус (Рисунок 1.8).

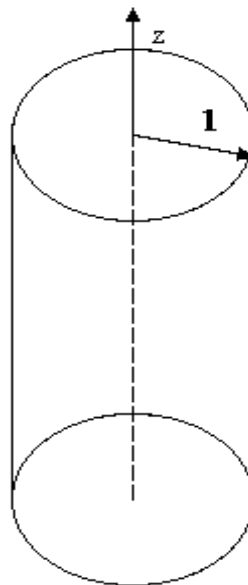


Рис. 1.8. Геометрия рассматриваемого волновода.



Волновод занимает область  $V_6$

$$V_6 = \{r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], z \in (-\infty, \infty)\} = \{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leq 1, x_3 \in (-\infty, \infty)\} \quad (1.47)$$

с граничной поверхностью  $G_6$

$$G_6 = \{r = 1, \theta \in [0, 2\pi], z \in (-\infty, \infty)\} = \{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = 1, x_3 \in (-\infty, \infty)\}. \quad (1.48)$$

Представленная модель наряду с соотношениями (1.45), (1.46) включает в системах нормированных безразмерных декартовых  $Ox_1x_2x_3$  и цилиндрических  $Or\theta z$  координат соответствующую систему дифференциальных уравнений движения (1.13) или (1.14), а также различные комбинации однородных граничных условий, в том числе условия свободной

$$\sigma_{rs} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_6} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (1.49)$$

либо жестко закрепленной

$$u_s \Big|_{(r,\theta,z) \in G_6} = 0 \quad (s = r, \theta, z) \quad (1.50)$$

граничной поверхности, а также условия, моделирующие нанесение на цилиндрическую граничную поверхность абсолютно гибкого нерастяжимого покрытия

$$u_\theta \Big|_{(r,\theta,z) \in G_6} = u_z \Big|_{(r,\theta,z) \in G_6} = \sigma_{rr} \Big|_{(r,\theta,z) \in G_6} = 0. \quad (1.51)$$

## Выводы к разделу 1

1. На основании обзора публикаций по тематике диссертационной работы дана характеристика актуальности проблемы исследования класса задач волновой механики протяженных цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, посвященных учету анизотропии и неоднородности, геометрической и физической нелинейности, секторно-круговой и секторно-кольцевой формы сечений с ребрами сингулярности, наличия жидкостного заполнения во внутренних полостях для нескольких типов условий на гладких участках граничной поверхности волновода. Охарактеризована

степень важности этих задач в теоретическом и прикладном отношении. Показано, что при наличии многочисленных исследований по различным аспектам распространения нормальных упругих волн в цилиндрических волноводах пространственной геометрии, проблемы учета различных сочетаний всего ряда перечисленных выше элементов неклассической постановки задач волновой механики цилиндрических деформируемых тел остаются открытыми.

2. Дана линейная физико-механическая и математическая постановка краевых задач для протяженных цилиндрических волноводов с круговой, кольцевой, секторно-круговой, секторно-кольцевой и односвязной криволинейной формой поперечного сечения из функционально неоднородных трансверсально изотропных и цилиндрически ортотропных материалов, а также из однородных прямолинейно ортотропных материалов.

3. Дана физико-механическая и математическая постановка краевых задач, описывающих малые нелинейные (ангармонические) волновые эффекты, при распространении нормальных упругих волн в трансверсально изотропных упругих цилиндрах.

## РАЗДЕЛ 2

**ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-  
ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

**2.1. Интегрирование уравнений волнового деформирования в случае  
трансверсально изотропного материала**

**2.1.1. Сведение к задаче решения системы рекуррентных уравнений.**

Рассматривается цилиндрический волновод, занимающий в нормированной безразмерной цилиндрической системе координат  $Or\theta z$  область  $V_1$  (1.3) с граничной поверхностью  $G_1$  (1.8), имеющий в поперечном сечении форму круга (Рисунок 1.1). Функциональный закон радиальной неоднородности трансверсально изотропного материала имеет вид (1.35), (1.36). Математическая модель включает уравнения (1.14), (1.16) и (1.20), условия на граничной поверхности (1.21) или (1.22), а также представления для безразмерных компонент вектора упругих перемещений (1.38), (1.40), (1.42), (1.44) в которых на окружное волновое число  $\tau$  из геометрических соображений накладываются ограничения вида  $\tau \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, в рассматриваемом волноводе с учетом представлений (1.38) подлежат независимому исследованию осесимметричные продольно-сдвиговые ( $\tau = 0, \beta = 0$ ) и крутильные ( $\tau = 0, \beta = \pi/2$ ) волны, а также неосесимметричные волны ( $\tau \in \mathbb{N}, \beta = 0$ ). В последнем случае варианты  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi/2$  эквивалентны с точностью до поворота цилиндрической системы координат в плоскости  $(r\theta)$  на угол  $\pi/(2\tau)$ .

На основании соотношений (1.20), (1.38), (1.40), (1.42), (1.44) в матричной форме получаются комплексные представления

$$\mathbf{E}(r, \theta, z, t) = \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{E}(r, \theta, z, t)$  – вектор-столбец с компонентами тензора упругих деформаций

$$\mathbf{E}(r, \theta, z, t) = \left[ \varepsilon_{rr}(r, \theta, z, t), \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \varepsilon_{zz}(r, \theta, z, t), \varepsilon_{\theta z}(r, \theta, z, t), \varepsilon_{rz}(r, \theta, z, t), \varepsilon_{r\theta}(r, \theta, z, t) \right]^T; \quad (2.2)$$

$\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r)$  – вектор-столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) = \left[ \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\varepsilon}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\varepsilon}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\varepsilon}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^{(\tau)}(r) \right]^T; \quad (2.3)$$

$\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)$  – диагональная матрица, отличные от нуля элементы которой равны

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \right]_{j,j} &= \cos(\tau\theta + \beta) \quad (j = \overline{1,3}), & \left[ \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \right]_{4,4} &= i \sin(\tau\theta + \beta), \\ \left[ \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \right]_{5,5} &= i \cos(\tau\theta + \beta), & \left[ \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \right]_{6,6} &= \sin(\tau\theta + \beta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Получаются также в матричной форме дифференциальные соотношения связи между векторами  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r)$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)$  – матричный дифференциальный оператор, отличные от нуля элементы которого имеют вид

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{5,3} = d_r - \delta\lambda qr^{q-1}, \\ \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,1} &= r^{-1}, & \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,2} &= \tau r^{-1}, & \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} &= -\tilde{k}, \\ \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{4,2} &= \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{5,1} = \tilde{k}, & \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{4,3} &= \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{6,1} = -\tau r^{-1}, \\ \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{6,2} &= d_r - \delta\lambda qr^{q-1} - r^{-1}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь и далее  $d_r = d/dr$ .

На основании соотношений обобщенного линейного закона Гука для случая трансверсально изотропного материала (1.16) и представлений (2.1) – (2.6) получаются комплексные выражения

$$\mathbf{S}(r, \theta, z, t) = \exp\left((1 - \delta) f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz\right) \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r), \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{S}(r, \theta, z, t)$  – вектор-столбец с безразмерными компонентами тензора напряжений

$$\mathbf{S}(r, \theta, z, t) = [\sigma_{rr}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, z, t), \sigma_{zz}(r, \theta, z, t), \sigma_{\theta z}(r, \theta, z, t), \sigma_{rz}(r, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t)]^T; \quad (2.8)$$

$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$  – вектор-столбец с элементами

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(r)]^T. \quad (2.9)$$

Получается также в матричной форме дифференциальные соотношения связи между векторами  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{M}_2^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r), \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)$  – матричный дифференциальный оператор, отличные от нуля элементы которого имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,1} &= \tilde{c}_{11}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1}) + \tilde{c}_{12}r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,1} &= \tilde{c}_{12}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1}) + \tilde{c}_{11}r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{3,1} &= \tilde{c}_{13}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1} + r^{-1}), \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,2} &= \tilde{c}_{12}\tau r^{-1}, \quad [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,2} = \tilde{c}_{11}\tau r^{-1}, \quad [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{3,2} = \tilde{c}_{13}\tau r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{1,3} &= [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{2,3} = -\tilde{c}_{13}\tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{3,3} = -\tilde{c}_{33}\tilde{k}, \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{4,2} &= [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{5,1} = \tilde{c}_{44}\tilde{k}, \quad [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{4,3} = -\tilde{c}_{44}\tau r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{5,3} &= \tilde{c}_{44}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1}), \quad [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{6,1} = -\tilde{c}_{66}\tau r^{-1}, \\ [\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)]_{6,2} &= \tilde{c}_{66}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1} - r^{-1}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь и далее в случае трансверсально изотропного материала полагается, что  $\tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2$ .

С учетом соотношений (1.38), (1.40), (1.42), (1.44), (2.7) – (2.11) на основании системы дифференциальных уравнений движения (1.14) получается однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами следующего вида

$$\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \hat{\mathbf{O}}, \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)$  – матричный дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{1,1} &= \tilde{c}_{11} r^2 d_r^2 + \tilde{c}_{11} \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q r^q \right) r d_r - \tilde{c}_{11} - \tau^2 \tilde{c}_{66} + \\ &+ \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right) r^2 + \lambda q r^q \left( -\delta q \left( 1 + (1 - \delta) \lambda r^q \right) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12} \right), \\ \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{1,2} &= \tau \left( (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r + \lambda q r^q \left( (1 - \delta) \tilde{c}_{12} - \delta \tilde{c}_{66} \right) - (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}) \right), \\ \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{1,3} &= -\tilde{k} r \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r d_r + \lambda q r^q \left( (1 - \delta) \tilde{c}_{13} - \delta \tilde{c}_{44} \right) \right), \\ \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{2,1} &= -\tau \left( (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r - \lambda q r^q \left( \delta \tilde{c}_{12} - (1 - \delta) \tilde{c}_{66} \right) + \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66} \right), \\ \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{2,2} &= \tilde{c}_{66} \left( r^2 d_r^2 + \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q r^q \right) r d_r \right) - \tilde{c}_{66} - \tau^2 \tilde{c}_{11} + \\ &+ \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right) r^2 - \lambda q r^q \left( 1 + \delta q + \delta (1 - \delta) \lambda q r^q \right) \tilde{c}_{66}, \\ \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{2,3} &= \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{3,2} = \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) r, \\ \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{3,1} &= \tilde{k} r \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) (r d_r + 1) + \lambda q r^q \left( (1 - \delta) \tilde{c}_{44} - \delta \tilde{c}_{13} \right) \right), \\ \left[ \mathbf{M}_3^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} &= \tilde{c}_{44} \left( r^2 d_r^2 + \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q r^q \right) r d_r \right) - \tau^2 \tilde{c}_{44} + \\ &+ \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} \right) r^2 - \delta \lambda q^2 r^q \left( 1 + (1 - \delta) \lambda r^q \right) \tilde{c}_{44}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь  $\Omega^2 = \tilde{\rho} \omega^2 R_*^2 / c_*$ .

Ставится задача построения базисного набора частных решений уравнения (2.12). В качестве метода построения указанных решений используется подход, основанный на представлениях компонент искомого векторных решений обобщенными степенными рядами радиальной координаты. С учетом физической модели рассматриваемой задачи, а также структуры дифференциальных уравнений (2.12), для искомого решения вводятся матричные представления рядами с неопределенными векторными коэффициентами следующего вида

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} \quad \|\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}\| \neq 0, \quad (2.14)$$

с ограничениями на параметр  $\eta$

$$\begin{aligned} \eta \in \{-1; 0\} \quad \text{или} \quad \operatorname{Re}(\eta) > 0, \quad \text{если} \quad [\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}]_3 = 0, \\ \eta \in \{0; 1\} \quad \text{или} \quad \operatorname{Re}(\eta) > 1, \quad \text{если} \quad [\mathbf{X}_0^{(\tau,\eta)}]_3 \neq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

следующими из критериев ограниченности и непрерывности всех характеристик волновых полей при  $r=0$ . Полагается, что ряд (2.14) сходится равномерно и абсолютно на любом конечном отрезке  $r \in [0, r_1]$  ( $0 < r_1 < \infty$ ). В представлении (2.14)  $\mathbf{A}_1(r)$  – диагональная матрица, отличные от нуля элементы которой равны

$$[\mathbf{A}_1(r)]_{1,1} = [\mathbf{A}_1(r)]_{2,2} = r, \quad [\mathbf{A}_1(r)]_{3,3} = 1; \quad (2.16)$$

$\{\mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}\}_{m=0}^{\infty}$  – зависящие от параметров  $\eta$  и  $\tau$  искомые наборы векторных коэффициентов. Представление (2.14) с учетом соотношений (2.5) и (2.10) определяет вид разложений для векторов  $\mathbf{E}^{(\tau)}(r)$  и  $\mathbf{S}^{(\tau)}(r)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\eta} \mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{A}_2(r)$  – диагональная матрица, отличные от нуля элементы которой равны

$$[\mathbf{A}_2(r)]_{j,j} = 1 \quad (j=1,2,3,6), \quad [\mathbf{A}_2(r)]_{j,j} = r^{-1} \quad (j=4,5); \quad (2.18)$$

$\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,p)}(r)$  ( $p=1,2$ ) – прямоугольные матрицы, отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{1,1} &= \nu + 1 - \delta\lambda q r^q, \quad [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{2,1} = 1, \quad [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{2,2} = \tau, \\ [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{3,3} &= -\tilde{k}, \quad [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{4,2} = [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{5,1} = \tilde{k}r^2, \\ [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{4,3} &= [\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)]_{6,1} = -\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 1)}(r) \right]_{5,3} &= \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 1)}(r) \right]_{6,2} = \nu - \delta \lambda q r^q; \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{1,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{1,2} = \tau \tilde{c}_{12}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{2,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{11}, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{2,2} = \tau \tilde{c}_{11}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{3,1} &= (\nu + 2 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{13}, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{3,2} = \tau \tilde{c}_{13}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{1,3} &= \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{2,3} = -\tilde{k} \tilde{c}_{13}, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{3,3} = -\tilde{k} \tilde{c}_{33}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{4,2} &= \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{5,1} = \tilde{k} r^2 \tilde{c}_{44}, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{4,3} = -\tau \tilde{c}_{44}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{5,3} &= (\nu - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{44}, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{6,1} = -\tau \tilde{c}_{66}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{6,2} &= (\nu - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{66}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь  $\nu = m + \eta$ .

В результате подстановки разложений (2.14) в уравнение (2.12) получается матричное функциональное уравнение

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} r^m \left( \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 2)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau, \eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 3)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau, \eta)} + \right. \\
\left. + \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 4)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau, \eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 5)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau, \eta)} \right) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, \infty)),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

в котором полагается, что

$$\mathbf{X}_j^{(\tau, \eta)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (j < 0).$$

Из условия выполнения уравнения (2.20) при  $r = 0$  получается уравнение для определения начального векторного коэффициента

$$\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)} \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta)} = \hat{\mathbf{O}}. \tag{2.21}$$

Условие нетривиальной разрешимости уравнения (2.21)

$$\det \left( \mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)} \right) = 0 \tag{2.22}$$

определяет допустимые значения параметра  $\eta$ . Функциональное уравнение (2.20) порождает также рекуррентные уравнения для определения последующих



векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)}$  ( $m = \overline{1,\infty}$ )

$$\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \mathbf{X}_m^{(\tau,\eta)} = -\left( \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau,\eta)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau,\eta)} \right) \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2.23)$$

Здесь  $\mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,n)}$  ( $n = \overline{1,5}$ ) – квадратные матрицы, отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{1,1} &= \nu(\nu + 2)\tilde{c}_{11} - \tau^2\tilde{c}_{66}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{1,2} &= \tau(\nu\tilde{c}_{11} - (\nu + 2)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{1,3} &= -\nu\tilde{k}(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{2,1} &= \tau(\nu\tilde{c}_{66} - (\nu + 2)\tilde{c}_{11}), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{2,2} &= \nu(\nu + 2)\tilde{c}_{66} - \tau^2\tilde{c}_{11}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{2,3} &= \tau\tilde{k}(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,1)} \right]_{3,3} &= (\nu^2 - \tau^2)\tilde{c}_{44}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{2,2} = \Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{44}, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{3,1} &= \tilde{k}\nu(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{3,2} &= \tilde{k}\tau(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{3,3} &= \Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{33}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tau ((1 - \delta)\tilde{c}_{11} - (2 - \delta)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,1} &= \lambda q ((q - 2\nu - 2)\delta - q + \nu + 2)\tilde{c}_{11} - 2\tilde{c}_{66}, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,3} &= \lambda q \tilde{k}(\delta\tilde{c}_{44} - (1 - \delta)\tilde{c}_{13}), & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{2,1} &= \lambda q \tau(\delta\tilde{c}_{11} - (1 + \delta)\tilde{c}_{66}), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{2,2} &= \lambda q ((q - 2\nu - 2)\delta - q + \nu)\tilde{c}_{66}, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{3,3} &= \lambda q ((q - 2\nu)\delta - q + \nu)\tilde{c}_{44}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \right]_{3,1} &= \lambda q \tilde{k}((1 - \delta)\tilde{c}_{44} - \delta\tilde{c}_{13}), \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{1,1} &= -\delta(1 - \delta)\lambda^2 q^2 \tilde{c}_{11}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{2,2} &= -\delta(1 - \delta)\lambda^2 q^2 \tilde{c}_{66}, \\ \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{3,3} &= -\delta(1 - \delta)\lambda^2 q^2 \tilde{c}_{44}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

**2.1.2. Базисные решения в случае крутильных волн.** Как уже отмечалось, осесимметричный случай ( $\tau = 0$ ) подлежит отдельному рассмотрению. При  $\tau = 0$  и  $\beta = \pi/2$  представления (1.38), (2.1) и (2.7) с учетом (1.40), (2.2), (2.8) соответственно преобразуются к такому виду

$$\begin{aligned}
u_\theta(r, z, t) &= \exp\left(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r), \\
\mathbf{E}(r, z, t) &= \exp\left(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(TW)} \tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(r), \\
\mathbf{S}(r, z, t) &= \exp\left((1-\delta) f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z\right) \mathbf{T}_2^{(TW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r), \tag{2.25}
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}(r, z, t)$  и  $\mathbf{S}(r, z, t)$  – вектор-столбцы с ненулевыми компонентами тензоров соответственно упругих деформаций и безразмерных напряжений

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(r, z, t) &= \left[ \varepsilon_{\theta z}(r, z, t), \varepsilon_{r\theta}(r, z, t) \right]^T, \\
\mathbf{S}(r, z, t) &= \left[ \sigma_{\theta z}(r, z, t), \sigma_{r\theta}(r, z, t) \right]^T; \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(r) &= \left[ \tilde{\varepsilon}_{\theta z}^{(TW)}(r), \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^{(TW)}(r) \right]^T, \\
\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r) &= \left[ \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(r), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(r) \right]^T; \tag{2.27}
\end{aligned}$$

$\mathbf{T}_2^{(TW)}$  – диагональная матрица, отличные от нуля элементы которой равны

$$\left[ \mathbf{T}_2^{(TW)} \right]_{1,1} = i, \quad \left[ \mathbf{T}_2^{(TW)} \right]_{2,2} = 1. \tag{2.28}$$

Из условия разрешимости (2.22) и уравнения (2.21), соответственно принявших вид

$$\left[ \mathbf{Q}_0^{(0, \eta, 1)} \right]_{2,2} = \eta(\eta + 2) \tilde{c}_{66} = 0, \quad \eta(\eta + 2) \tilde{c}_{66} x_0^{(TW)} = 0, \tag{2.29}$$

с учетом ограничений (2.15) определяется единственное допустимое значение параметра  $\eta = 0$  и соответствующее ему начальное значение  $x_0^{(TW)} = b$ , где  $b$  – произвольная постоянная. Тогда решение целевой задачи с учетом соотношений (2.25), (2.26) может быть представлено через базисные решения так:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) &= b \tilde{u}_\theta^{(TW, B)}(r), \quad \tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(r) = b \tilde{\mathbf{E}}^{(TW, B)}(r), \\
\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r) &= b \tilde{\mathbf{S}}^{(TW, B)}(r), \tag{2.30}
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{u}_\theta^{(TW, B)}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+1} x_m^{(TW)},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(TW)} \sum_{m=0}^{\infty} r^m x_m^{(TW)} \mathbf{H}_m^{(TW,1)}(r), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(TW)} \sum_{m=0}^{\infty} r^m x_m^{(TW)} \mathbf{H}_m^{(TW,2)}(r).\end{aligned}\quad (2.31)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_m^{(TW,1)}(r) &= \begin{bmatrix} \tilde{k}r^2 \\ m - \delta\lambda qr^q \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_m^{(TW,2)}(r) &= \begin{bmatrix} \tilde{k}r^2 \tilde{c}_{44} \\ (m - \delta\lambda qr^q) \tilde{c}_{66} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2^{(TW)}(r) &= \begin{bmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (2.32)$$

а для определения  $x_m^{(TW)}$  из рекуррентных уравнений (2.23) получаются явные рекуррентные представления

$$\begin{aligned}x_m^{(TW)} &= 0 \quad (m < 0), \quad x_0^{(TW)} = 1, \\ x_m^{(TW)} &= w_m^{(TW,1)} x_{m-2}^{(TW)} + w_m^{(TW,2)} x_{m-q}^{(TW)} + w_m^{(TW,3)} x_{m-2q}^{(TW)} \quad (m = 1, 2, \dots).\end{aligned}\quad (2.33)$$

В соотношениях (2.33)

$$\begin{aligned}w_m^{(TW,1)} &= -\kappa_3^2 / (m(m+2)), \\ w_m^{(TW,2)} &= \lambda q (\delta(2m+2-q) - m + q) / (m(m+2)), \\ w_m^{(TW,3)} &= \delta(1-\delta) \lambda^2 q^2 / (m(m+2));\end{aligned}\quad (2.34)$$

$$\kappa_3^2 = (\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44}) / \tilde{c}_{66}.\quad (2.35)$$

Следует отметить, что при  $m \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические оценки для коэффициентов (2.34) из рекуррентных соотношений (2.33)

$$\begin{aligned}w_m^{(TW,1)} &\approx -m^{-2} \kappa_3^2, \quad w_m^{(TW,2)} \approx m^{-1} (2\delta - 1) \lambda q, \\ w_m^{(TW,3)} &\approx m^{-2} \delta(1-\delta) \lambda^2 q^2,\end{aligned}$$

непосредственным следствием которых является абсолютная и равномерная

сходимость разложений в (2.31) на любом конечном отрезке  $r \in [r_0, r_1]$  ( $0 < r_0 < r_1 < \infty$ ) [189].

В рассматриваемом случае крутильных волн в системе дифференциальных уравнений (2.12) остается одно уравнение

$$\left( r^2 d_r^2 + \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q r^q \right) r d_r + \kappa_3^2 r^2 - 1 - \lambda q r^q \left( 1 + \delta q + \delta (1 - \delta) \lambda q r^q \right) \right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = 0. \quad (2.36)$$

В частных случаях  $q = 0$  (однородный материал),  $q = 1$  и  $q = 2$  (неоднородный материал) это уравнение имеет решение в специальных функциях. При  $q = 0$  уравнение (2.36) представляет собой классическое уравнение Бесселя [2]

$$\left( d_r^2 + r^{-1} d_r + \kappa_3^2 - r^{-2} \right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = 0. \quad (2.37)$$

Следовательно, известные решения целевой задачи, выражающиеся через функции Бесселя  $J_n(z)$ , с учетом (2.25), (2.26), (2.30), (2.35) допустимо представить через базисные решения, которые в этом случае выглядят так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r) &= \kappa_3 \left[ \mathbf{Y}_0^{(TW)}(r) \right]_2, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(r) &= \mathbf{P}_0^{(TW,1)}(r) \mathbf{Y}_0^{(TW)}(r), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r) &= \mathbf{P}_0^{(TW,2)}(r) \mathbf{Y}_0^{(TW)}(r), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$\mathbf{P}_0^{(TW,1)} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{k} \kappa_3 \\ \kappa_3^2 & -2\kappa_3 r^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_0^{(TW,2)} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{k} \kappa_3 \tilde{c}_{44} \\ \kappa_3^2 \tilde{c}_{66} & -2\kappa_3 r^{-1} \tilde{c}_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{Y}_0^{(TW)}(r) = \begin{bmatrix} J_0(\kappa_3 r) \\ J_1(\kappa_3 r) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

При  $q = 1$  ( $\lambda \neq 0$ ) уравнение (2.36) принимает вид

$$\left( d_r^2 + \left( (1 - 2\delta) \lambda + r^{-1} \right) d_r + \kappa_3^2 - \delta (1 - \delta) \lambda^2 - (1 + \delta) \lambda r^{-1} - r^{-2} \right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = 0. \quad (2.41)$$

Рассматриваются два случая. Если  $\lambda^2 \neq 4\kappa_3^2$ , то в уравнении (2.41) вводится

замена функции

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = \left( \exp((\delta - 1/2)\lambda r) / \sqrt{r} \right) f(r)$$

с последующей заменой переменной  $r = \xi/\gamma$ , где

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 - 4\kappa_3^2}. \quad (2.42)$$

В результате (2.41) преобразуется в уравнение Уиттекера [2]

$$\left( d_\xi^2 - 1/4 + \nu/\xi + (1/4 - \mu^2)/\xi^2 \right) f(\xi) = 0 \quad (2.43)$$

с параметрами

$$\nu = -3\lambda/(2\gamma), \quad \mu = 1. \quad (2.44)$$

Общее решение уравнения (2.43) в области с точкой начала координат записывается через функцию Уиттекера  $f(\xi) = bM_{\nu,\mu}(\xi)$ , где  $b$  – произвольная постоянная. Таким образом, базисные решения целевой задачи с учетом представлений (2.25), (2.26), (2.30) в этом случае принимают такой вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r) &= \left( \exp((\delta - 1/2)\lambda r) / \sqrt{r} \right) \left[ \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r) \right]_1, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(r) &= \left( \exp((\delta - 1/2)\lambda r) / \sqrt{r} \right) \mathbf{P}_1^{(TW,1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r) &= \left( \exp((\delta - 1/2)\lambda r) / \sqrt{r} \right) \mathbf{P}_1^{(TW,2)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(TW,1)} &= \begin{bmatrix} \tilde{k} & 0 \\ (1 - \lambda\gamma^{-1})(\gamma - 3r^{-1})/2 & 3(1 - \lambda\gamma^{-1})r^{-1}/2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_1^{(TW,2)} &= \begin{bmatrix} \tilde{k}\tilde{c}_{44} & 0 \\ (1 - \lambda\gamma^{-1})(\gamma - 3r^{-1})\tilde{c}_{66}/2 & 3(1 - \lambda\gamma^{-1})r^{-1}\tilde{c}_{66}/2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r) &= \begin{bmatrix} M_{\nu,\mu}(\gamma r) \\ M_{\nu+1,\mu}(\gamma r) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Параметры  $\nu$  и  $\mu$  в соотношении (2.46) определяются выражениями (2.42), (2.44).

Если же  $\lambda^2 = 4\kappa_3^2$ , то в уравнении (2.41) вводится такая замена функции

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = \exp((\delta - 1/2)\lambda r) f(r)$$

с последующей заменой переменной  $r = \xi^2/6$ . В результате (2.41) преобразуется в уравнение Бесселя [2] такого вида

$$\left(d_\xi^2 + \xi^{-1}d_\xi - 4\xi^{-2} - \lambda\right)f(\xi) = 0. \quad (2.47)$$

Значит, базисные решения целевой задачи с учетом представлений (2.25), (2.26), (2.30) в этом случае записывается так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r) &= \exp((\delta - 1/2)\lambda r) J_2(\sqrt{-6\lambda r}), \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(r) &= \exp((\delta - 1/2)\lambda r) \mathbf{P}_1^{(TW,1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r) &= \exp((\delta - 1/2)\lambda r) \mathbf{P}_1^{(TW,2)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r), \end{aligned} \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(TW,1)} &= \begin{bmatrix} -\tilde{k} & 2\tilde{k}/\sqrt{-6\lambda r} \\ (\lambda + 4r^{-1})/2 & -4(\lambda + r^{-1})/\sqrt{-6\lambda r} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_1^{(TW,1)} &= \begin{bmatrix} -\tilde{k} \tilde{c}_{44} & 2\tilde{k} \tilde{c}_{44}/\sqrt{-6\lambda r} \\ (\lambda + 4r^{-1}) \tilde{c}_{66}/2 & -4(\lambda + r^{-1}) \tilde{c}_{66}/\sqrt{-6\lambda r} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r) &= \begin{bmatrix} J_0(\sqrt{-6\lambda r}) \\ J_1(\sqrt{-6\lambda r}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Здесь  $J_n(z)$  – функция Бесселя.

При  $q = 2$  ( $\lambda \neq 0$ ) уравнение (2.36) принимает следующий вид

$$\left(d_r^2 + (2(1 - 2\delta)\lambda r + r^{-1})d_r - 4\delta(1 - \delta)\lambda^2 r^2 + \kappa_3^2 - 2(1 + 2\delta)\lambda - r^{-2}\right)\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = 0. \quad (2.50)$$

После введения замены функции

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = \left(\exp((\delta - 1/2)\lambda r^2)/r\right) f(r)$$

с последующей заменой переменной  $r = \sqrt{\xi/\lambda}$ , уравнение (2.50) также преобразуется в уравнение Уиттекера (2.43) с параметрами

$$\nu = \kappa_3^2 / (4\lambda) - 1, \quad \mu = 1/2. \quad (2.51)$$

Базисные решения целевой задачи с учетом представлений (2.25), (2.26), (2.30) в этом случае записываются так

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\theta^{(TW,B)}(r) &= \left( \exp((\delta - 1/2)\lambda r^2) / r \right) \left[ \mathbf{Y}_2^{(TW)}(r) \right]_1, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(r) &= \left( \exp((\delta - 1/2)\lambda r^2) / r \right) \mathbf{P}_2^{(TW,1)}(r) \mathbf{Y}_2^{(TW)}(r), \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r) &= \left( \exp((\delta - 1/2)\lambda r^2) / r \right) \mathbf{P}_2^{(TW,2)}(r) \mathbf{Y}_2^{(TW)}(r), \end{aligned} \quad (2.52)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2^{(TW,1)} &= \begin{bmatrix} \tilde{k} & 0 \\ \delta\lambda(2r-1) - 2(\nu+1)r^{-1} & 2(\nu+1)r^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_2^{(TW,2)} &= \begin{bmatrix} \tilde{k}\tilde{c}_{44} & 0 \\ (\delta\lambda(2r-1) - 2(\nu+1)r^{-1})\tilde{c}_{66} & 2(\nu+1)r^{-1}\tilde{c}_{66} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_2^{(TW)}(r) &= \begin{bmatrix} M_{\nu,\mu}(\lambda r^2) \\ M_{\nu+1,\mu}(\lambda r^2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Параметры  $\nu$  и  $\mu$  в соотношении (2.53) определяются выражениями (2.51).

Следует отметить, что представления (2.45), (2.48) и (2.52) имеют общее место – при значении параметра  $\delta = 1/2$  они не содержат экспоненциальной составляющей. Этот факт может рассматриваться с позиций улучшения сходимости разложений в (2.31). Численный эксперимент, проводившийся с высокой точностью вычислений, подтвердил сделанное предположение. В качестве параметров  $\tilde{c}_{jp}$  использовались нормированные модули упругости трансверсально-изотропного материала  $Zn$ , а характеристики волнового процесса и относительный максимальный уровень локализации неоднородности задавались так:  $\tilde{k} = 2$ ;  $\Omega = 1$ ;  $\lambda = \ln(3/2)$ . В Таблицах 2.1 и 2.2 приведены порядки значений  $\left| x_m^{(TW)} \right|$  при значениях параметра  $q$  соответственно  $q = 1$  и  $q = 6$ .

Таблица 2.1.

	$m = 0$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$\delta = -1$	1	$10^{-14}$	$10^{-38}$	$10^{-66}$	$10^{-97}$	$10^{-130}$
$\delta = 0$	1	$10^{-17}$	$10^{-42}$	$10^{-72}$	$10^{-105}$	$10^{-140}$
$\delta = 1/2$	1	$10^{-17}$	$10^{-44}$	$10^{-75}$	$10^{-109}$	$10^{-145}$
$\delta = 1$	1	$10^{-16}$	$10^{-41}$	$10^{-71}$	$10^{-104}$	$10^{-139}$
$\delta = 2$	1	$10^{-14}$	$10^{-38}$	$10^{-65}$	$10^{-96}$	$10^{-129}$

Таблица 2.2.

	$m = 0$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$\delta = -1$	1	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-11}$	$10^{-14}$	$10^{-18}$
$\delta = 0$	1	$10^{-4}$	$10^{-9}$	$10^{-14}$	$10^{-18}$	$10^{-24}$
$\delta = 1/2$	1	$10^{-4}$	$10^{-9}$	$10^{-14}$	$10^{-20}$	$10^{-27}$
$\delta = 1$	1	$10^{-3}$	$10^{-7}$	$10^{-11}$	$10^{-16}$	$10^{-22}$
$\delta = 2$	1	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$	$10^{-12}$	$10^{-17}$

**2.1.3. Базисные решения в случае продольно-сдвиговых волн.** При  $\tau = 0$  и  $\beta = 0$  представления (1.38), (2.1) и (2.7) с учетом (1.40), (2.2), (2.8) соответственно приобретают такой вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}(r, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r), \\
 \mathbf{E}(r, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r), \\
 \mathbf{S}(r, z, t) &= \exp((1 - \delta) f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r), \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{U}(r, z, t)$ ,  $\mathbf{E}(r, z, t)$  и  $\mathbf{S}(r, z, t)$  – вектор-столбцы с ненулевыми компонентами соответственно вектора безразмерных перемещений, тензоров упругих деформаций и безразмерных напряжений



$$\begin{aligned}
\mathbf{U}(r, z, t) &= [u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)]^T, \\
\mathbf{E}(r, z, t) &= [\varepsilon_{rr}(r, z, t), \varepsilon_{\theta\theta}(r, z, t), \varepsilon_{zz}(r, z, t), \varepsilon_{rz}(r, z, t)]^T, \\
\mathbf{S}(r, z, t) &= [\sigma_{rr}(r, z, t), \sigma_{\theta\theta}(r, z, t), \sigma_{zz}(r, z, t), \sigma_{rz}(r, z, t)]^T; \quad (2.55)
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) &= [\tilde{u}_r^{(LSW)}(r), \tilde{u}_z^{(LSW)}(r)]^T, \\
\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r) &= [\tilde{\varepsilon}_{rr}^{(LSW)}(r), \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(LSW)}(r), \tilde{\varepsilon}_{zz}^{(LSW)}(r), \tilde{\varepsilon}_{rz}^{(LSW)}(r)]^T, \\
\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r) &= [\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(r), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(r)]^T; \quad (2.56)
\end{aligned}$$

$\mathbf{T}_1^{(LSW)}$  и  $\mathbf{T}_2^{(LSW)}$  – диагональные матрицы, отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned}
[\mathbf{T}_1^{(LSW)}]_{1,1} &= 1, \quad [\mathbf{T}_1^{(LSW)}]_{2,2} = i, \\
[\mathbf{T}_2^{(LSW)}]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), \quad [\mathbf{T}_2^{(LSW)}]_{4,4} = i. \quad (2.57)
\end{aligned}$$

Из условия разрешимости (2.22), принявшего вид

$$\det\left([\mathbf{Q}_0^{(0,\eta,1)}]_{(1,3),(1,3)}\right) = \eta^3 (\eta + 2) \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{44} = 0, \quad (2.58)$$

с учетом ограничений (2.15) определяются соответствующие кратному корню  $\eta = 0$  два допустимых одинаковых значения параметра  $\eta_1 = 0$  и  $\eta_2 = 0$ , которым соответствуют различные векторные решения уравнения (2.21), с точностью до произвольного скалярного множителя записанные так

$$\mathbf{X}_0^{(LSW, \eta_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(LSW, \eta_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Поскольку  $\eta_1 = \eta_2$  с учетом соотношений (2.59) определяются матричные коэффициенты

$$\mathbf{X}_m^{(LSW)} = [\mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_2)}] \quad (\eta_1 = \eta_2 = 0; m = \overline{0, \infty}). \quad (2.60)$$

Основываясь на представлениях (2.59), (2.60), а также на справедливости

соотношения

$$\det\left(\left[\mathbf{Q}_m^{(0,\eta_j,1)}\right]_{(1,3),(1,3)}\right) = m^3(m+2)\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44} \neq 0 \quad (j = \overline{1,2}; m \geq 1),$$

рекуррентные уравнения (2.23) преобразуются в последовательность явных рекуррентных представлений следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(LSW)} &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \quad \mathbf{X}_0^{(LSW)} = \mathbf{I}, \\ \mathbf{X}_m^{(LSW)} &= \mathbf{W}_m^{(LSW,1)}\mathbf{X}_{m-2}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,2)}\mathbf{X}_{m-q}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,3)}\mathbf{X}_{m-2-q}^{(LSW)} + \mathbf{W}_m^{(LSW,4)}\mathbf{X}_{m-2q}^{(LSW)} \\ &\quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Здесь  $\mathbf{W}_m^{(LSW,p)}$  ( $p = \overline{1,4}$ ) – матрицы второго порядка

$$\mathbf{W}_m^{(LSW,p)} = -\left(\left[\mathbf{Q}_m^{(0,0,1)}\right]_{(1,3),(1,3)}\right)^{-1} \left[\mathbf{Q}_m^{(0,0,p+1)}\right]_{(1,3),(1,3)} \quad (p = \overline{1,4}), \quad (2.62)$$

отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,1)}\right]_{1,1} &= -\left(\tilde{k}^2\tilde{c}_{13}(\tilde{c}_{13} + 2\tilde{c}_{44}) - \Omega^2\tilde{c}_{44}\right) / \left(m(m+2)\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44}\right), \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,1)}\right]_{1,2} &= \tilde{k}(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})\left(\tilde{k}^2\tilde{c}_{33} - \Omega^2\right) / \left(m^2(m+2)\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44}\right), \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,1)}\right]_{2,1} &= -\tilde{k}(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / \left(m\tilde{c}_{44}\right), \quad \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,1)}\right]_{2,2} = \left(\tilde{k}^2\tilde{c}_{33} - \Omega^2\right) / \left(m^2\tilde{c}_{44}\right), \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,2)}\right]_{1,1} &= \lambda q(\delta(2-q+2m) - 1 + q - m - \tilde{c}_{12}/\tilde{c}_{11}) / \left(m(m+2)\right), \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,2)}\right]_{1,2} &= \lambda q\tilde{k}\left((\delta m - \delta q + q)\tilde{c}_{13} + (\delta m - \delta q + q - m)\tilde{c}_{44}\right) / \left(m^2(m+2)\tilde{c}_{11}\right), \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,2)}\right]_{2,2} &= \lambda q(\delta(2m-q) + q - m) / m^2, \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,3)}\right]_{1,1} &= \lambda q\tilde{k}^2(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})\left(\delta\tilde{c}_{33} - (1-\delta)\tilde{c}_{44}\right) / \left(m^2(m+2)\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44}\right), \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,3)}\right]_{2,1} &= \lambda q\tilde{k}(\delta(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{44}) - 1) / m^2, \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,4)}\right]_{1,1} &= \lambda^2 q^2 \delta(1-\delta) / \left(m(m+2)\right), \quad \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,4)}\right]_{2,2} = \lambda^2 q^2 \delta(1-\delta) / m^2 \\ \left[\mathbf{W}_m^{(LSW,4)}\right]_{1,2} &= \lambda^2 q^2 \tilde{k} \delta(1-\delta)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) / \left(m^2(m+2)\tilde{c}_{11}\right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Таким образом, решение целевой задачи с учетом соотношений (2.54), (2.55)

может быть представлено через базисные решения так:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r)\mathbf{B}, & \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(r) &= \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(r)\mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(r) &= \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r)\mathbf{B},\end{aligned}\quad (2.64)$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор-столбец второго порядка с произвольными постоянными компонентами;  $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r)$  – матричные базисные решения следующего вида

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{X}_m^{(LSW)}, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW)}.\end{aligned}\quad (2.65)$$

Здесь  $\mathbf{A}_p^{(LSW)}(r)$  ( $p = \overline{1,2}$ ) – диагональные матрицы, отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{A}_1^{(LSW)}(r)\right]_{1,1} &= r, & \left[\mathbf{A}_1^{(LSW)}(r)\right]_{2,2} &= 1, \\ \left[\mathbf{A}_2^{(LSW)}(r)\right]_{j,j} &= 1 \quad (j = \overline{1,3}), & \left[\mathbf{A}_2^{(LSW)}(r)\right]_{4,4} &= r^{-1};\end{aligned}\quad (2.66)$$

$\mathbf{H}_m^{(LSW,p)}(r)$  ( $p = \overline{1,2}$ ) – прямоугольные матрицы размерности  $4 \times 2$ , отличные от нуля элементы которых равны

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}\right]_{1,1} &= m+1 - \delta\lambda qr^q, & \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}\right]_{2,1} &= 1, & \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}\right]_{3,2} &= -\tilde{k}, \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}\right]_{4,1} &= \tilde{k}r^2, & \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}\right]_{4,2} &= m - \delta\lambda qr^q; \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r)\right]_{1,1} &= (m+1 - \delta\lambda qr^q)\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}, & \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r)\right]_{1,2} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{13}, \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r)\right]_{2,1} &= (m+1 - \delta\lambda qr^q)\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{11}, & \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r)\right]_{2,2} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{13}, \\ \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r)\right]_{3,1} &= (m+2 - \delta\lambda qr^q)\tilde{c}_{13}, & \left[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r)\right]_{3,2} &= -\tilde{k}\tilde{c}_{33},\end{aligned}$$

$$\left[ \mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r) \right]_{4,1} = \tilde{k} \tilde{c}_{44} r^2, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(r) \right]_{4,2} = (m - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{44}. \quad (2.67)$$

Поскольку при  $m \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические оценки для норм матричных коэффициентов в рекуррентных представлениях (2.61)

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,1)} \right\| &\approx m^{-1} |\tilde{k}| (1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{44}), & \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,2)} \right\| &\approx m^{-1} q \sqrt{2} |\lambda(1-2\delta)|, \\ \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,3)} \right\| &\approx m^{-2} q |\lambda \tilde{k} (\delta(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{44}) - 1)|, & \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW,4)} \right\| &\approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{2} |\delta(1-\delta)| \end{aligned} \quad (2.68)$$

следовательно, разложения в соотношениях (2.65) сходятся абсолютно и равномерно на любом конечном отрезке  $r \in [r_0, r_1]$  ( $0 < r_0 < r_1 < \infty$ ) [189].

В рассматриваемом случае продольно-сдвиговых волн в системе дифференциальных уравнений (2.12) остаются два уравнения

$$\left[ \mathbf{M}_3^{(0)}(r) \right]_{(1,3),(1,3)} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, \infty)).$$

В частном случае  $q = 0$  (однородный материал) эти уравнения имеют известное решение в функциях Бесселя. После введения замены функций

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = \left[ \tilde{k} d_r \varphi(r), -\chi \varphi(r) \right]^T \quad (2.69)$$

система (2.68) порождает два независимых уравнения Бесселя относительно функции  $\varphi(r)$

$$\left( d_r^2 + r^{-1} d_r + \kappa_j^2 \right) \varphi(r) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.70)$$

общее решение каждого из которых в области с точкой начала координат

$$\varphi_j(r) = b_j J_0(\kappa_j r) \quad (j = 1, 2), \quad (2.71)$$

где  $b_j$  произвольные постоянные, является решением системы (2.68). С учетом представления (2.69), принявшего вид

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{k} d_r & \tilde{k} d_r \\ -\chi_1 & -\chi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_0(\kappa_1 r) & 0 \\ 0 & J_0(\kappa_2 r) \end{bmatrix} \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{B}$  вектор-столбец второго порядка с произвольными постоянными компонентами, а параметры  $\kappa_j$  и  $\chi_j$  ( $j = 1, 2$ ) определяются из соотношений

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \sqrt{\left(d_2 - \sqrt{d_2^2 - 4d_1d_3}\right)/(2d_1)}, & \kappa_2 &= \sqrt{\left(d_2 + \sqrt{d_2^2 - 4d_1d_3}\right)/(2d_1)}, \\ \chi_j &= \left(\kappa_j^2 \tilde{c}_{11} - b_1\right)/\left(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}\right) \quad (j=1,2), \\ b_1 &= \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44}, & b_2 &= \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33}, \\ d_1 &= \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{44}, & d_2 &= b_1 \tilde{c}_{44} + b_2 \tilde{c}_{11} + \tilde{k}^2 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44})^2, & d_3 &= b_1 b_2,\end{aligned}\quad (2.72)$$

известные решения целевой задачи совместно с (2.54), (2.55), (2.64) представимы через базисные решения, которые выглядят так

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r) &= \left[ \mathbf{P}_1^{(LSW,0)}(r) \mathbf{Y}_1^{(LSW)}(r), \mathbf{P}_2^{(LSW,0)}(r) \mathbf{Y}_2^{(LSW)}(r) \right], \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(r) &= \left[ \mathbf{P}_1^{(LSW,1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(LSW)}(r), \mathbf{P}_2^{(LSW,1)}(r) \mathbf{Y}_2^{(LSW)}(r) \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r) &= \left[ \mathbf{P}_1^{(LSW,2)}(r) \mathbf{Y}_1^{(LSW)}(r), \mathbf{P}_2^{(LSW,2)}(r) \mathbf{Y}_2^{(LSW)}(r) \right].\end{aligned}\quad (2.73)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_j^{(LSW,0)} &= \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{k} \kappa_j \\ -\chi_j & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_j^{(LSW,1)} &= \begin{bmatrix} -\tilde{k} \kappa_j^2 & \tilde{k} \kappa_j r^{-1} \\ 0 & -\tilde{k} \kappa_j r^{-1} \\ \tilde{k} \chi_j & 0 \\ 0 & \kappa_j (\chi_j - \tilde{k}^2) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_j^{(LSW,2)} &= \begin{bmatrix} \tilde{k} (\chi_j \tilde{c}_{13} - \kappa_j^2 \tilde{c}_{11}) & 2\tilde{k} \kappa_j r^{-1} \tilde{c}_{66} \\ \tilde{k} (\chi_j \tilde{c}_{13} - \kappa_j^2 \tilde{c}_{12}) & -2\tilde{k} \kappa_j r^{-1} \tilde{c}_{66} \\ \tilde{k} (\chi_j \tilde{c}_{33} - \kappa_j^2 \tilde{c}_{13}) & 0 \\ 0 & \kappa_j (\chi_j - \tilde{k}^2) \tilde{c}_{44} \end{bmatrix} \quad (j=1,2);\end{aligned}\quad (2.74)$$

$$\mathbf{Y}_j^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} J_0(\kappa_j r) \\ J_1(\kappa_j r) \end{bmatrix} \quad (j=1,2).\quad (2.75)$$

В рассматриваемом случае также проводился численный эксперимент с высокой точностью вычислений, подтвердивший оптимальность выбора значения параметра  $\delta = 1/2$  для ускорения сходимости разложений в представлениях (2.65).

Как и для крутильных волн, в качестве параметров  $\tilde{c}_{jp}$  использовались нормированные модули упругости трансверсально-изотропного материала  $Zn$ , а характеристики волнового процесса и относительный максимальный уровень локализации неоднородности материала цилиндра имели те же значения  $\tilde{k} = 2$ ,  $\Omega = 1$  и  $\lambda = \ln(3/2)$ . В Таблицах 2.3 – 2.4 приведены порядки значений  $\|\mathbf{X}_m^{(LSW)}\|$  при тех же значениях параметров  $q$  соответственно  $q = 1$  и  $q = 6$ .

Таблица 2.3.

	$m = 0$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$\delta = -1$	1	$10^{-14}$	$10^{-38}$	$10^{-66}$	$10^{-97}$	$10^{-130}$
$\delta = 0$	1	$10^{-15}$	$10^{-40}$	$10^{-70}$	$10^{-103}$	$10^{-137}$
$\delta = 1/2$	1	$10^{-16}$	$10^{-42}$	$10^{-72}$	$10^{-106}$	$10^{-142}$
$\delta = 1$	1	$10^{-15}$	$10^{-40}$	$10^{-70}$	$10^{-103}$	$10^{-137}$
$\delta = 2$	1	$10^{-14}$	$10^{-37}$	$10^{-65}$	$10^{-96}$	$10^{-129}$

Таблица 2.4.

	$m = 0$	$m = 20$	$m = 40$	$m = 60$	$m = 80$	$m = 100$
$\delta = -1$	1	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-17}$
$\delta = 0$	1	$10^{-3}$	$10^{-8}$	$10^{-13}$	$10^{-17}$	$10^{-23}$
$\delta = 1/2$	1	$10^{-3}$	$10^{-8}$	$10^{-14}$	$10^{-19}$	$10^{-26}$
$\delta = 1$	1	$10^{-2}$	$10^{-7}$	$10^{-11}$	$10^{-15}$	$10^{-21}$
$\delta = 2$	1	$10^{-1}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$	$10^{-11}$	$10^{-16}$

**2.1.4. Базисные решения в случае неосесимметричных волн.** При  $\tau \in \mathbb{N}$  условие разрешимости (2.22) принимает вид

$$\det(\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)}) = \det\left(\left[\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)}\right]_{(1..2), (1..2)}\right) \det\left(\left[\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)}\right]_{3,3}\right) = 0, \quad (2.76)$$

где

$$\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)} = \begin{bmatrix} \eta(\eta + 2)\tilde{c}_{11} - \tau^2\tilde{c}_{66} & \tau(\eta\tilde{c}_{11} - (\eta + 2)\tilde{c}_{66}) & -\tilde{k}\eta(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \\ \tau(\eta\tilde{c}_{66} - (\eta + 2)\tilde{c}_{11}) & \eta(\eta + 2)\tilde{c}_{66} - \tau^2\tilde{c}_{11} & \tilde{k}\tau(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \\ 0 & 0 & (\eta^2 - \tau^2)\tilde{c}_{44} \end{bmatrix},$$

или

$$\det\left(\left[\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)}\right]_{(1..2), (1..2)}\right) = \left((\eta + 2)^2 - \tau^2\right)(\eta^2 - \tau^2)\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{66} = 0; \quad (2.77)$$

$$\det\left(\left[\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta, 1)}\right]_{3,3}\right) = (\eta^2 - \tau^2)\tilde{c}_{44} = 0. \quad (2.78)$$

Тогда с учетом ограничений (2.15) определяются два допустимых корня  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) уравнения (2.77) и один допустимый корень  $\eta_3$  уравнения (2.78) в виде

$$\eta_1 = \tau - 2, \quad \eta_2 = \tau, \quad \eta_3 = \tau. \quad (2.79)$$

Соответствующие этим корням решения уравнения (2.21) с точностью до произвольного скалярного множителя записываются в таком виде

$$\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_2)} = \begin{bmatrix} (\tau + 2)\tilde{c}_{66} - \tau\tilde{c}_{11} \\ (\tau + 2)\tilde{c}_{11} - \tau\tilde{c}_{66} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_3)} = \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ -\tilde{k} \\ 2(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})/(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

В случае  $\eta = \eta_j$  ( $j = \overline{2, 3}$ ) рекуррентные уравнения (2.23) с учетом того, что

$$\det\left(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)}\right) = m^2(m + 2)(m + 2\tau)^2(m + 2(\tau + 1))\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44}\tilde{c}_{66} \neq 0 \quad (m \geq 1) \quad (2.81)$$

совместно с (2.80) преобразуются в явные рекуррентные представления для определения последующих векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)}$  разложений (2.14) и (2.17). Указанные представления с учетом

$$\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0) \quad (2.82)$$

записываются в таком виде

$$\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)} = \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 1)}\mathbf{X}_{m-2}^{(\tau, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 2)}\mathbf{X}_{m-q}^{(\tau, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 3)}\mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4)}\mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau, \eta_j)} \\ (m = 1, 2, \dots), \quad (j = \overline{2, 3}). \quad (2.83)$$

$$\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, p)} = -\left(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)}\right)^{-1} \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, p+1)} \quad (p = \overline{1, 4}; \quad j = \overline{2, 3}). \quad (2.84)$$

Поскольку для  $\eta = \eta_1$  определитель системы линейных уравнений, порождаемой рекуррентными уравнениями (2.23),

$$\det\left(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_1, 1)}\right) = m(m-2)^2(m+2\tau)(m+2(\tau-1))^2 \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{44} \tilde{c}_{66} \quad (2.85)$$

обращается в нуль при  $m = 2$ , следовательно, рекуррентные уравнения (2.23) для  $\eta = \eta_1$  требуют отдельного рассмотрения в случаях  $m = 1$ ,  $m = 2$  и  $m \geq 3$ . С учетом соотношений (2.82) при  $m = 1$  решение уравнений (2.23) сразу записывается так:

$$\mathbf{X}_1^{(\tau, \eta_1)} = -\left(\mathbf{Q}_1^{(\tau, \eta_1, 1)}\right)^{-1} \mathbf{Q}_1^{(\tau, \eta_1, 3)} \mathbf{X}_{1-q}^{(\tau, \eta_1)}. \quad (2.86)$$

При  $m = 2$  система линейных уравнений третьего порядка, соответствующая матричному уравнению из (2.23)

$$\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \mathbf{X}_2^{(\tau, \eta_1)} = \mathbf{Z}, \quad (2.87)$$

где

$$\mathbf{Z} = -\left(\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 2)} \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} + \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 3)} \mathbf{X}_{2-q}^{(\tau, \eta_1)} + \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 5)} \mathbf{X}_{2-2q}^{(\tau, \eta_1)}\right), \quad (2.88)$$

имеет вырожденную матрицу

$$\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} = \begin{bmatrix} \tau((\tau+2)\tilde{c}_{11} - \tau\tilde{c}_{66}) & -\tau((\tau+2)\tilde{c}_{66} - \tau\tilde{c}_{11}) & -\tilde{k}\tau(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \\ -\tau((\tau+2)\tilde{c}_{11} - \tau\tilde{c}_{66}) & \tau((\tau+2)\tilde{c}_{66} - \tau\tilde{c}_{11}) & \tilde{k}\tau(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

характерной структуры

$$\left[\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)}\right]_{1,p} + \left[\mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)}\right]_{2,p} = 0 \quad (p = \overline{1, 3}).$$

Следовательно, условием существования решения уравнения (2.87) будет удовлетворение правой частью этого уравнения аналогичным структурным требованиям

$$[\mathbf{Z}]_1 + [\mathbf{Z}]_2 = 0, \quad [\mathbf{Z}]_3 = 0, \quad (2.89)$$

при выполнении которых уравнение (2.87) имеет бесконечное множество решений, из которых в качестве искомого может быть выбрано любое, например,



с точностью до произвольного скалярного множителя записанное так

$$\mathbf{X}_2^{(\tau, \eta_1)} = \left[ [\mathbf{Z}]_1 / \left( \left[ \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,2} - \left[ \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,1} \right), [\mathbf{Z}]_1 / \left( \left[ \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,1} - \left[ \mathbf{Q}_2^{(\tau, \eta_1, 1)} \right]_{1,2} \right), 0 \right]^T. \quad (2.90)$$

Здесь следует отметить, что условие (2.89) выполняется тождественно для  $q \neq 1$  ( $\mathbf{X}_1^{(\tau, \eta_1)} \equiv \mathbf{O}$ ), а при  $q = 1$  ( $\mathbf{X}_1^{(\tau, \eta_1)} \neq \mathbf{O}$ ) это условие принимает вид

$$[\mathbf{Z}]_1 + [\mathbf{Z}]_2 = -4\lambda^2 (\tau^2 - 1)(1 - \tilde{c}_{66}/\tilde{c}_{11})\tilde{c}_{66} / (4\tau^2 - 1) = 0, \quad [\mathbf{Z}]_3 \equiv 0.$$

Таким образом, построение решения рекуррентных уравнений (2.23) при  $q = 1$  в рамках рассматриваемой модели возможно только для  $\tau = 1$ . С учетом этих ограничений, записанных в виде

$$(\tau, q) \in \{(1, 1)\} \cup \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{0\}), \quad (2.91)$$

искомые решения уравнений (2.23) в случае  $\eta = \eta_1$  определяются совместно с (2.80), (2.82), (2.86) и (2.90) из явных рекуррентных представлений

$$\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)} = \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_1, 1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau, \eta_1)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_1, 2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau, \eta_1)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_1, 3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau, \eta_1)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_1, 4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau, \eta_1)} \quad (m = 3, 4, \dots), \quad (2.92)$$

где матрицы  $\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, p)}$  ( $p = \overline{1, 4}$ ) определены в (2.84). Окончательно, решение целевой задачи с учетом ограничений (2.91) совместно с (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.14), (2.17) представимо через базисные решения так

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau, B)}(r) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r) \mathbf{B}, \quad (2.93)$$

где  $\mathbf{B}$  – вектор-столбец третьего порядка с произвольными компонентами;  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau, B)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r)$  – матричные базисные решения следующего вида

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau, B)}(r) = \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[ r^{\eta_1} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}, r^{\eta_2} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_3)} \right],$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau, B)}(r) = \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[ r^{\eta_1} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_1, 1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}, \right.$$

$$\left. r^{\eta_2} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_2, 1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_3, 1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_3)} \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau, B)}(r) = \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[ r^{\eta_1} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_1, 2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}, \right. \\ \left. r^{\eta_2} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_2, 2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_2)}, r^{\eta_3} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta_3, 2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_3)} \right]. \end{aligned} \quad (2.94)$$

При этом справедливость следующих асимптотических оценок при  $m \rightarrow \infty$  для норм матричных коэффициентов (2.84) в рекуррентных представлениях (2.83) и (2.92)

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 1)} \right\| \approx m^{-1} |\tilde{k}| (1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{44}), \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 2)} \right\| \approx m^{-1} q \sqrt{3} |\lambda(1 - 2\delta)|, \\ \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 3)} \right\| \approx m^{-2} q |\lambda \tilde{k} (\delta(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{44}) - 1)|, \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4)} \right\| \approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{3} |\delta(1 - \delta)| \\ (j = \overline{1, 3}) \end{aligned} \quad (2.95)$$

обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость разложений в (2.94) на любом конечном отрезке  $r \in [r_0, r_1]$  ( $0 < r_0 < r_1 < \infty$ ) [189].

В частном случаях  $q = 0$  (однородный материал) система дифференциальных уравнений (2.12) имеет известное решение в функциях Бесселя. После введения замены функций

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \left[ \tilde{k} d_r \varphi(r), -\tilde{k} \tau r^{-1} \varphi(r), -\chi \varphi(r) \right]^T \quad (2.96)$$

система (2.12) порождает два независимых уравнения Бесселя относительно функции  $\varphi(r)$  вида

$$\left( d_r^2 + r^{-1} d_r - \tau^2 r^{-2} + \kappa_j^2 \right) \varphi(r) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.97)$$

общее решение каждого из которых в области с точкой начала координат вида

$$\varphi_j(r) = b_j J_\tau(\kappa_j r) \quad (j = 1, 2), \quad (2.98)$$

где  $b_j$  произвольные постоянные, является решением системы (2.12). Тогда представление (2.96) может быть переписано в таком виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{k} d_r & \tilde{k} d_r \\ -\tilde{k} \tau r^{-1} & -\tilde{k} \tau r^{-1} \\ -\chi_1 & -\chi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_\tau(\kappa_1 r) & 0 \\ 0 & J_\tau(\kappa_2 r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Здесь параметры  $\kappa_j$  и  $\chi_j$  ( $j=1,2$ ) определяются из соотношений (2.72). После введения такой замены функций

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) = \left[ \tau r^{-1} \varphi(r), -d_r \varphi(r), 0 \right]^T \quad (2.100)$$

система (2.12) преобразуется в одно уравнение Бесселя

$$\left( d_r^2 + r^{-1} d_r - \tau^2 r^{-2} + \kappa_3^2 \right) \varphi(r) = 0, \quad (2.101)$$

общее решение которого в области с точкой начала координат

$$\varphi(r) = b_3 J_\tau(\kappa_3 r) \quad (2.102)$$

также является решением системы (2.12). Здесь  $b_3$  – произвольная постоянная; параметр  $\kappa_3$  определяется из соотношения (2.35). Таким образом, окончательно известные решения целевой задачи совместно с представлениями (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8) и учетом соотношений (2.99), (2.102) представимы через базисные решения, которые выглядят так

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(r) &= \left[ \mathbf{P}_1^{(\tau,0)}(r) \mathbf{Y}_1^{(\tau)}(r), \mathbf{P}_2^{(\tau,0)}(r) \mathbf{Y}_2^{(\tau)}(r), \mathbf{P}_3^{(\tau,0)}(r) \mathbf{Y}_3^{(\tau)}(r) \right], \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau,B)}(r) &= \left[ \mathbf{P}_1^{(\tau,1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(\tau)}(r), \mathbf{P}_2^{(\tau,1)}(r) \mathbf{Y}_2^{(\tau)}(r), \mathbf{P}_3^{(\tau,1)}(r) \mathbf{Y}_3^{(\tau)}(r) \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(r) &= \left[ \mathbf{P}_1^{(\tau,2)}(r) \mathbf{Y}_1^{(\tau)}(r), \mathbf{P}_2^{(\tau,2)}(r) \mathbf{Y}_2^{(\tau)}(r), \mathbf{P}_3^{(\tau,2)}(r) \mathbf{Y}_3^{(\tau)}(r) \right]; \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{P}_j^{(\tau,0)} = \begin{bmatrix} \tilde{k} \tau r^{-1} & -\tilde{k} \kappa_j \\ -\tilde{k} \tau r^{-1} & 0 \\ -\chi_j & 0 \end{bmatrix} \quad (j=1,2), \quad \mathbf{P}_3^{(\tau,0)} = \begin{bmatrix} \tau r^{-1} & 0 \\ -\tau r^{-1} & \kappa_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_j^{(\tau,1)} = \begin{bmatrix} \tilde{k} (\tau(\tau-1)r^{-2} - \kappa_j^2) & \tilde{k} \kappa_j r^{-1} \\ -\tilde{k} \tau (\tau-1) r^{-2} & -\tilde{k} \kappa_j r^{-1} \\ \tilde{k} \chi_j & 0 \\ \tau (\chi_j - \tilde{k}^2) r^{-1} & 0 \\ -\tau (\chi_j - \tilde{k}^2) r^{-1} & \kappa_j (\chi_j - \tilde{k}^2) \\ -2\tilde{k} \tau (\tau-1) r^{-2} & 2\tilde{k} \tau \kappa_j r^{-1} \end{bmatrix} \quad (j=1,2),$$

$$\mathbf{P}_3^{(\tau,1)} = \begin{bmatrix} \tau(\tau-1)r^{-2} & -\tau\kappa_3 r^{-1} \\ -\tau(\tau-1)r^{-2} & \tau\kappa_3 r^{-1} \\ 0 & 0 \\ -\tau\tilde{k}r^{-1} & \tilde{k}\kappa_3 \\ \tau\tilde{k}r^{-1} & 0 \\ (\kappa_3^2 - 2\tau(\tau-1)r^{-2}) & -2\kappa_3 r^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_j^{(\tau,2)} = \begin{bmatrix} \tilde{k}(\chi_j\tilde{c}_{13} - \kappa_j^2\tilde{c}_{11} + 2\tau(\tau-1)\tilde{c}_{66}r^{-2}) & 2\tilde{k}\kappa_j\tilde{c}_{66}r^{-1} \\ \tilde{k}(\chi_j\tilde{c}_{13} - \kappa_j^2\tilde{c}_{12} - 2\tau(\tau-1)\tilde{c}_{66}r^{-2}) & -2\tilde{k}\kappa_j\tilde{c}_{66}r^{-1} \\ \tilde{k}(\chi_j\tilde{c}_{33} - \kappa_j^2\tilde{c}_{13}) & 0 \\ \tau(\chi_j - \tilde{k}^2)\tilde{c}_{44}r^{-1} & 0 \\ -\tau(\chi_j - \tilde{k}^2)\tilde{c}_{44}r^{-1} & \kappa_j(\chi_j - \tilde{k}^2)\tilde{c}_{44} \\ -2\tilde{k}\tau(\tau-1)\tilde{c}_{66}r^{-2} & 2\tilde{k}\tau\kappa_j\tilde{c}_{66}r^{-1} \end{bmatrix} \quad (j=1,2),$$

$$\mathbf{P}_3^{(\tau,2)} = \begin{bmatrix} 2\tau(\tau-1)\tilde{c}_{66}r^{-2} & -2\tau\kappa_3\tilde{c}_{66}r^{-1} \\ -2\tau(\tau-1)\tilde{c}_{66}r^{-2} & 2\tau\kappa_3r^{-1} \\ 0 & 0 \\ -\tau\tilde{k}\tilde{c}_{44}r^{-1} & \tilde{k}\kappa_3\tilde{c}_{44} \\ \tau\tilde{k}\tilde{c}_{44}r^{-1} & 0 \\ (\kappa_3^2 - 2\tau(\tau-1)r^{-2})\tilde{c}_{66} & -2\kappa_3\tilde{c}_{66}r^{-1} \end{bmatrix}; \quad (2.104)$$

$$\mathbf{Y}_j^{(\tau)}(r) = \begin{bmatrix} J_\tau(\kappa_j r) \\ J_{\tau+1}(\kappa_j r) \end{bmatrix} \quad (j=\overline{1,3}). \quad (2.105)$$

## 2.2. Интегрирование уравнений волнового деформирования в случае цилиндрически ортотропного материала

### 2.2.1. Сведение к задаче решения системы рекуррентных уравнений.

Рассматривается, как и в случае трансверсально изотропного материала,

протяженный волновод, занимающий область  $V_1$  (1.3) с граничной поверхностью  $G_1$  (1.8), имеющий в поперечном сечении форму круга (Рисунок 1.1). Функциональный закон радиальной неоднородности цилиндрически ортотропного материала задается соотношениями (1.35), (1.36). Математическая модель включает уравнения (1.14), (1.18) и (1.20), условия на граничной поверхности (1.21) или (1.22). Представления для безразмерных компонент вектора упругих перемещений имеют вид (1.38), (1.40) в которых на азимутальное волновое число  $\tau$  накладываются аналогичные ограничения вида  $\tau \in \mathbb{Z}$ . В рассматриваемом волноводе подлежат независимому исследованию осесимметричные продольно-сдвиговые ( $\tau = 0, \beta = 0$ ) и крутильные ( $\tau = 0, \beta = \pi/2$ ) волны, а также неосесимметричные волны ( $\tau \in \mathbb{N}, \beta = 0$ ).

Сходство моделей в случаях трансверсально изотропного и цилиндрически ортотропного материалов волновода обеспечивает справедливость в рассматриваемом случае анизотропии определенных ранее соотношений (1.1) – (2.10), а отличные от нуля элементы матричного дифференциального оператора  $\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)$  в соотношениях связи (2.10) между векторами  $\mathbf{U}^{(\tau)}(r)$  и  $\mathbf{S}^{(\tau)}(r)$  в данном случае имеют такой вид

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{1,1} &= \tilde{c}_{11}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1}) + \tilde{c}_{12}r^{-1}, \\
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{2,1} &= \tilde{c}_{12}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1}) + \tilde{c}_{22}r^{-1}, \\
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{3,1} &= \tilde{c}_{13}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1}) + \tilde{c}_{23}r^{-1}, \\
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{1,2} &= \tilde{c}_{12}\tau r^{-1}, \quad \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{2,2} = \tilde{c}_{22}\tau r^{-1}, \quad \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{3,2} = \tilde{c}_{23}\tau r^{-1}, \\
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{1,3} &= -\tilde{c}_{13}\tilde{k}, \quad \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{2,3} = -\tilde{c}_{23}\tilde{k}, \quad \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{3,3} = -\tilde{c}_{33}\tilde{k}, \\
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{4,2} &= \tilde{c}_{44}\tilde{k}, \quad \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{4,3} = -\tilde{c}_{44}\tau r^{-1}, \\
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{5,1} &= \tilde{c}_{55}\tilde{k}, \quad \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{5,3} = \tilde{c}_{55}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1}), \\
\left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{6,1} &= -\tilde{c}_{66}\tau r^{-1}, \quad \left[\mathbf{M}_2^{(\tau)}(r)\right]_{6,2} = \tilde{c}_{66}(d_r - \delta\lambda qr^{q-1} - r^{-1}). \quad (2.106)
\end{aligned}$$

С учетом указанных соотношений на основании системы дифференциальных уравнений движения (1.14) получается однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2.12) с матричным дифференциальным оператором  $\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)$

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{1,1} &= \tilde{c}_{11}r^2d_r^2 + \tilde{c}_{11}\left(1+(1-2\delta)\lambda qr^q\right)rd_r - \tilde{c}_{22} - \tau^2\tilde{c}_{66} + \\
&+ \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{55}\right)r^2 + \lambda qr^q\left(-\delta q\left(1+(1-\delta)\lambda r^q\right)\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}\right), \\
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{1,2} &= \tau\left(\left(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}\right)rd_r + \lambda qr^q\left(\left(1-\delta\right)\tilde{c}_{12} - \delta\tilde{c}_{66}\right) - \left(\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}\right)\right), \\
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{1,3} &= -\tilde{k}r\left(\left(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}\right)rd_r + \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23} + \lambda qr^q\left(\left(1-\delta\right)\tilde{c}_{13} - \delta\tilde{c}_{55}\right)\right), \\
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{2,1} &= -\tau\left(\left(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}\right)rd_r - \lambda qr^q\left(\delta\tilde{c}_{12} - \left(1-\delta\right)\tilde{c}_{66}\right) + \tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}\right), \\
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{2,2} &= \tilde{c}_{66}\left(r^2d_r^2 + \left(1+(1-2\delta)\lambda qr^q\right)rd_r\right) - \tilde{c}_{66} - \tau^2\tilde{c}_{22} + \\
&+ \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{44}\right)r^2 - \lambda qr^q\left(1 + \delta q + \delta\left(1-\delta\right)\lambda qr^q\right)\tilde{c}_{66}, \\
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{2,3} &= \left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{3,2} = \tilde{k}\tau\left(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}\right)r, \\
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{3,1} &= \tilde{k}r\left(\left(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}\right)rd_r + \left(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{55}\right) + \lambda qr^q\left(\left(1-\delta\right)\tilde{c}_{55} - \delta\tilde{c}_{13}\right)\right), \\
\left[\mathbf{M}_3^{(\tau)}(r)\right]_{3,3} &= \tilde{c}_{55}\left(r^2d_r^2 + \left(1+(1-2\delta)\lambda qr^q\right)rd_r\right) - \tau^2\tilde{c}_{44} + \\
&+ \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{33}\right)r^2 - \delta\lambda q^2r^q\left(1+(1-\delta)\lambda r^q\right)\tilde{c}_{55}. \tag{2.107}
\end{aligned}$$

С целью построения базисных решений указанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений для векторов  $\mathbf{U}^{(\tau)}(r)$ ,  $\mathbf{E}^{(\tau)}(r)$  и  $\mathbf{S}^{(\tau)}(r)$  вводятся матричные представления обобщенными степенными рядами с неопределенными векторными коэффициентами соответственно (2.14), (2.17), а также ограничения на параметр  $\eta$  вида (2.15). В рассматриваемом случае анизотропии матрицы  $\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)$  в представлениях (2.17) сохраняют свое значение, определяемое соотношениями (2.19), а отличные от нуля элементы прямоугольных матриц  $\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,2)}(r)$  в данном случае с учетом замены  $\nu = m + \eta$  равны

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{1,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{1,2} &= \tau \tilde{c}_{12}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{2,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{22}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{2,2} &= \tau \tilde{c}_{22}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{3,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{3,2} &= \tau \tilde{c}_{23}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{1,3} &= -\tilde{k} \tilde{c}_{13}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{2,3} &= -\tilde{k} \tilde{c}_{23}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{3,3} &= -\tilde{k} \tilde{c}_{33}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{4,2} &= \tilde{k} r^2 \tilde{c}_{44}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{4,3} &= -\tau \tilde{c}_{44}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{5,1} &= \tilde{k} r^2 \tilde{c}_{55}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{5,3} &= (\nu - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{55}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{6,1} &= -\tau \tilde{c}_{66}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{6,2} &= (\nu - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{66}. \tag{2.108}
\end{aligned}$$

При подстановке разложений (2.14) в уравнение (2.12) получается матричное функциональное уравнение вида (2.20), в результате решения которого находится условие разрешимости (2.22), определяющее допустимые значения параметра  $\eta$ , а также получаются соотношения для определения искомым коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta)}$ , включающие уравнение для определения их начального значения (2.21) и рекуррентные уравнения для определения их последующих значений (2.23). Отличные от нуля элементы квадратных матриц  $\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, p)}$  ( $p = \overline{1, 5}$ ), входящих в соотношения (2.20) – (2.23) в рассматриваемом случае анизотропии равны

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \right]_{1,1} &= (\nu + 1)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} - \tau^2 \tilde{c}_{66}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \right]_{1,2} &= \tau ((\nu + 1) \tilde{c}_{12} - \tilde{c}_{22} + \nu \tilde{c}_{66}), \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \right]_{1,3} &= \tilde{k} (\tilde{c}_{23} - (\nu + 1) \tilde{c}_{13} - \nu \tilde{c}_{55}), \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \right]_{2,1} &= -\tau ((\nu + 1) \tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{22} + (\nu + 2) \tilde{c}_{66}), \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \right]_{2,2} &= \nu (\nu + 2) \tilde{c}_{66} - \tau^2 \tilde{c}_{22}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \right]_{2,3} &= \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}), \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 1)} \right]_{3,3} &= \nu^2 \tilde{c}_{55} - \tau^2 \tilde{c}_{44}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 2)} \right]_{1,1} &= \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 2)} \right]_{2,2} &= \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44}, \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 2)} \right]_{3,1} &= \tilde{k} ((\nu - 1) \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23} + \nu \tilde{c}_{55}), & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, 2)} \right]_{3,2} &= \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,2)} \right]_{3,3} &= \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tau ((1-\delta) \tilde{c}_{12} + \delta \tilde{c}_{66}), \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,1} &= \lambda q ((q-2\nu-2)\delta - q + \nu + 1) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}, \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{1,3} &= \lambda q \tilde{k} (\delta \tilde{c}_{55} - (1-\delta) \tilde{c}_{13}), & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{2,1} &= \lambda q \tau (\delta \tilde{c}_{12} + (\delta-1) \tilde{c}_{66}), \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{2,2} &= \lambda q ((q-2\nu-2)\delta - q + \nu) \tilde{c}_{66}, \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,3)} \right]_{3,3} &= \lambda q ((q-2\nu)\delta - q + \nu) \tilde{c}_{55}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,4)} \right]_{3,1} &= \lambda q \tilde{k} ((1-\delta) \tilde{c}_{55} - \delta \tilde{c}_{13}), \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{1,1} &= -\delta(1-\delta) \lambda^2 q^2 \tilde{c}_{11}, & \left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{2,2} &= -\delta(1-\delta) \lambda^2 q^2 \tilde{c}_{66}, \\
\left[ \mathbf{Q}_m^{(\tau,\eta,5)} \right]_{3,3} &= -\delta(1-\delta) \lambda^2 q^2 \tilde{c}_{55}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

**2.2.2. Базисные решения в случае осесимметричных волн.** В случае цилиндрически ортотропных материалов вся группа соотношений (2.25) – (2.53), полученная для крутильных волн в трансверсально изотропных цилиндрах остается неизменной, следовательно, указанные соотношения обеспечивают решение целевой задачи для указанного типа волн и в рассматриваемом случае анизотропии. В случае продольно-сдвиговых волн вид соотношений (2.54) – (2.57) остается справедливым, а из условия разрешимости (2.22), принявшего вид

$$\det \left( \left[ \mathbf{Q}_0^{(0,\eta,1)} \right]_{(1,3),(1,3)} \right) = \eta^2 \left( (\eta+1)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} \right) \tilde{c}_{55} = 0, \tag{2.110}$$

определяются два потенциально допустимые значения параметра  $\eta$

$$\eta_1 = \sqrt{\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{11}} - 1, \quad \eta_2 = 0. \tag{2.111}$$

Параметру  $\eta_1$  с учетом вытекающих из (2.15) ограничений на упругие модули однородного материала

$$\tilde{c}_{11} \leq \tilde{c}_{22} \tag{2.112}$$

соответствует решение уравнения (2.21), записанное с точностью до произвольного скалярного множителя в виде

$$\mathbf{X}_0^{(LSW,\eta_1)} = [1, 0]^T. \tag{2.113}$$

Поскольку при  $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22}$  получается, что  $\eta_1 = \eta_2$ , следовательно, отличное от



(2.113) второе решение уравнения (2.21), соответствующее  $\eta_2$ , в этом случае с точностью до произвольного скалярного множителя может быть построено только при выполнении дополнительных ограничений на упругие модули вида  $\tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{23}$ . В результате получается

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{(LSW, \eta_2)} &= [0, 1]^T, \quad \text{если} \quad (\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22}, \tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{23}), \\ \mathbf{X}_0^{(LSW, \eta_2)} &= \left[ \tilde{k}(\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}) / (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22}), 1 \right]^T, \quad \text{если} \quad (\tilde{c}_{11} \neq \tilde{c}_{22}). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Далее вводится обозначение

$$\psi_m^\eta = \det \left( \left[ \mathbf{Q}_m^{(0, \eta, 1)} \right]_{(1,3), (1,3)} \right) = (m + \eta)^2 \left( (m + \eta + 1)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} \right) \tilde{c}_{55}. \quad (2.115)$$

Так, как  $\psi_m^{\eta_1} \neq 0$  ( $m \geq 1$ ), следовательно, рекуррентные уравнения (2.23) при  $\eta = \eta_1$  преобразовываются в последовательность явных рекуррентных представлений ( $j = 1$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_j)} &= \mathbf{W}_m^{(LSW, \eta_j, 1)} \mathbf{X}_{m-2}^{(LSW, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(LSW, \eta_j, 2)} \mathbf{X}_{m-q}^{(LSW, \eta_j)} + \\ &+ \mathbf{W}_m^{(LSW, \eta_j, 3)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(LSW, \eta_j)} + \mathbf{W}_m^{(LSW, \eta_j, 4)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(LSW, \eta_j)} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.116)$$

для определения с учетом (2.113) искомых векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_1)}$ .

Здесь

$$\mathbf{W}_m^{(LSW, \eta_j, p)} = - \left( \left[ \mathbf{Q}_m^{(0, \eta_j, 1)} \right]_{(1,3), (1,3)} \right)^{-1} \left[ \mathbf{Q}_m^{(0, \eta_j, p+1)} \right]_{(1,3), (1,3)} \quad (m = \overline{1, \infty}; p = \overline{1, 4}); \quad (2.117)$$

$$\mathbf{X}_m^{(LSW, \eta_j)} = \mathbf{O} \quad (m < 0); \quad (2.118)$$

Поскольку в случае

$$\eta_1 \notin \mathbb{N}. \quad (2.119)$$

$\psi_m^{\eta_2} \neq 0$  ( $m \geq 1$ ), следовательно, при выполнении (2.119) представления (2.116) – (2.119) остаются справедливыми и для  $j = 2$ . Необходимо отметить, что непосредственным следствием невыполнения условия (2.119) является вырожденность на  $m = \eta_1$  шаге порождаемой рекуррентным уравнением (2.23) матрицы системы линейных уравнений

$$\left[ \mathbf{Q}_m^{(0,\eta_2,1)} \right]_{(1,3),(1,3)} = \begin{bmatrix} (m - \eta_1)(m + \eta_1 + 2)\tilde{c}_{11} & -\tilde{k}((m + 1)\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23} + m\tilde{c}_{55}) \\ 0 & m^2\tilde{c}_{55} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для существования возможного решения

$$\mathbf{X}_{\eta_1}^{(LSW,\eta_2)} = [b, 0]^T \quad (2.120)$$

указанного рекуррентного уравнения в этом случае необходимо выполнение требования

$$\mathbf{B}_{\eta_1}^{(2)} \mathbf{X}_{\eta_1-2}^{(LSW,\eta_2)} + \mathbf{B}_{\eta_1}^{(3)} \mathbf{X}_{\eta_1-q}^{(LSW,\eta_2)} + \mathbf{B}_{\eta_1}^{(4)} \mathbf{X}_{\eta_1-2-q}^{(LSW,\eta_2)} + \mathbf{B}_{\eta_1}^{(5)} \mathbf{X}_{\eta_1-2q}^{(LSW,\eta_2)} = \hat{\mathbf{O}}. \quad (2.121)$$

В соотношениях (2.120), (2.121)  $b$  – произвольная постоянная;

$$\mathbf{B}_{\eta_1}^{(p)} = \left[ \mathbf{Q}_{\eta_1}^{(0,\eta_2,p)} \right]_{(1,3),(1,3)} \quad (p = \overline{2,5}). \quad (2.122)$$

Не трудно проверить, что требование (2.121) выполняется в случае

$$\eta_1 = 2p - 1 \quad \text{и} \quad q \notin \{2s - 1\}_{s=1}^p \quad (p \in \mathbb{N}). \quad (2.123)$$

Окончательно, решение целевой задачи может быть представлено через базисные решения соотношениями (2.54), (2.55), (2.64) в которых  $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(r)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r)$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_1^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[ r^{\eta_1} \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_1)}, r^{\eta_2} \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(LSWV)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[ r^{\eta_1} \mathbf{H}_m^{(LSW,\eta_1,1)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_1)}, \right. \\ &\quad \left. r^{\eta_2} \mathbf{H}_m^{(LSW,\eta_2,1)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(r) &= \mathbf{A}_2^{(LSW)}(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^m \left[ r^{\eta_1} \mathbf{H}_m^{(LSW,\eta_1,2)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_1)}, \right. \\ &\quad \left. r^{\eta_2} \mathbf{H}_m^{(LSW,\eta_2,2)}(r) \mathbf{X}_m^{(LSW,\eta_2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Отличные от нуля элементы входящих в указанные соотношения прямоугольных матриц  $\mathbf{H}_m^{(LSW,\eta,p)}(r)$  ( $p = 1, 2$ ) с учетом замены  $\nu = m + \eta$  имеют следующий вид

$$\left[ \mathbf{H}_m^{(LSW,\eta,1)} \right]_{1,1} = \nu + 1 - \delta\lambda q r^q, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW,\eta,1)} \right]_{2,1} = 1, \quad \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW,\eta,1)} \right]_{3,2} = -\tilde{k},$$

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 1)} \right]_{4,1} &= \tilde{k} r^2, & \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 1)} \right]_{4,2} &= \nu - \delta \lambda q r^q; \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{1,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{1,2} &= -\tilde{k} \tilde{c}_{13}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{2,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{22}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{2,2} &= -\tilde{k} \tilde{c}_{23}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{3,1} &= (\nu + 1 - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{23}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{3,2} &= -\tilde{k} \tilde{c}_{33}, \\
\left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{4,1} &= \tilde{k} \tilde{c}_{55} r^2, & \left[ \mathbf{H}_m^{(LSW, \eta, 2)}(r) \right]_{4,2} &= (\nu - \delta \lambda q r^q) \tilde{c}_{55}. \quad (2.125)
\end{aligned}$$

Поскольку при  $m \rightarrow \infty$  справедливы следующие асимптотические оценки для норм матричных коэффициентов в рекуррентных представлениях (2.116)

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{W}_m^{(LSW, 1)} \right\| &\approx m^{-1} |\tilde{k}| (1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}), & \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW, 2)} \right\| &\approx m^{-1} q \sqrt{2} |\lambda(1 - 2\delta)|, \\
\left\| \mathbf{W}_m^{(LSW, 3)} \right\| &\approx m^{-2} q |\lambda \tilde{k} (\delta(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}) - 1)|, & \left\| \mathbf{W}_m^{(LSW, 4)} \right\| &\approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{2} |\delta(1 - \delta)|,
\end{aligned} \quad (2.126)$$

следовательно, разложения в (2.124) сходятся абсолютно и равномерно на любом конечном отрезке  $r \in [r_1, r_2]$  ( $0 < r_1 < r_2 < \infty$ ) [189].

**2.2.3. Базисные решения в случае неосесимметричных волн.** При  $\tau \in \mathbb{N}$  условие разрешимости (2.22) распадается на два независимых уравнения

$$a(\eta + 1)^4 - b(\eta + 1)^2 + g = 0, \quad (2.127)$$

$$\eta^2 \tilde{c}_{55} - \tau^2 \tilde{c}_{44} = 0, \quad (2.128)$$

где

$$\begin{aligned}
a &= \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{66}, & b &= \tau^2 \zeta + \tilde{c}_{66} (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}), & g &= (\tau^2 - 1)^2 \tilde{c}_{22} \tilde{c}_{66}, \\
\zeta &= \tilde{c}_{11} \tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12} (\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}). \quad (2.129)
\end{aligned}$$

Из четырех корней биквадратного уравнения (2.127) и двух корней квадратного уравнения (2.128) только три

$$\eta_1 = \sqrt{(b - \sqrt{d})/(2a)} - 1, \quad \eta_2 = \sqrt{(b + \sqrt{d})/(2a)} - 1, \quad \eta_3 = \tau \sqrt{\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}} \quad (2.130)$$

потенциально могут удовлетворять ограничениям (2.15) и, соответственно, породить на основании уравнения (2.21) для физически непротиворечивого

решения исходной задачи начальные значения коэффициентов  $\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_j)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) вида

$$\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_j)} = \begin{bmatrix} \tau(\tilde{c}_{22} - (1 + \eta_j)\tilde{c}_{12} - \eta_j\tilde{c}_{66}) \\ (1 + \eta_j)^2 \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22} - \tau^2 \tilde{c}_{66} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \mathbf{X}_0^{(1, \eta_3)} = \begin{bmatrix} [\mathbf{V}]_1 \\ [\mathbf{V}]_2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.131)$$

Здесь

$$\mathbf{V} = - \left( [\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta_3, 1)}]_{(1..2), (1..2)} \right)^{-1} [\mathbf{Q}_0^{(\tau, \eta_3, 1)}]_{(1..2), 3}. \quad (2.132)$$

В представлениях (2.130)

$$\begin{aligned} d &= b^2 - 4ag = h\tau^4 + s\tau^2 + v, & h &= \zeta^2 - 4\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}^2, \\ s &= 2\tilde{c}_{66}(\zeta(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}) + 4\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}), & v &= \tilde{c}_{66}^2(\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{22})^2. \end{aligned} \quad (2.133)$$

При  $\tau = 1$  соотношения (2.130), получающие существенно более простой вид

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -1, & \eta_2 &= \sqrt{1 + (\tilde{c}_{22}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66}) - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66})) / (\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{66})} - 1, \\ & & \eta_3 &= \sqrt{\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}}, \end{aligned} \quad (2.134)$$

обеспечивают возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи в случае, когда выполняются ограничения

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12}, \quad \tilde{c}_{55} \leq \tilde{c}_{44}. \quad (2.135)$$

При  $\tau \geq 2$  рассмотрению подлежат три варианта ограничений. Если выполняется условие

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}}, \quad (2.136)$$

то справедливыми оказываются соотношения  $h \geq 0$  и  $\zeta > 0$ , а, значит, и соотношения

$$b > 0, \quad d > 0, \quad b \geq \sqrt{d}. \quad (2.137)$$

Таким образом, при выполнении (2.136) во-первых,  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) всегда

вещественные и различные, во-вторых, дополнительные ограничения на величины нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала  $\tilde{c}_{jp}$ , обеспечивающие возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи будут иметь достаточно простой вид

$$(b - \sqrt{d}) / (2a) \geq 1, \quad \tau \sqrt{\tilde{c}_{44} / \tilde{c}_{55}} \geq 1. \quad (2.138)$$

С учетом соотношений (2.136), (2.137), ограничения (2.138) могут быть окончательно представлены так

$$\max \left( \sqrt{\tilde{c}_{55} / \tilde{c}_{44}}, \sqrt{2 + (\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66})) / (\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66})} \right) \leq \tau. \quad (2.139)$$

Из (2.139), в частности, следует, что при выполнении условия (2.136) множество критических значений окружного волнового числа  $\tau$  при которых в рамках рассматриваемой модели физически непротиворечивое решение исходной задачи построить невозможно всегда конечно и, если не пустое, включает только его низшие значения.

Если не выполняется (2.136), но выполняется условие

$$\sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} < \tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} / \tilde{c}_{12}, \quad (2.140)$$

то справедливыми являются соотношения  $\zeta \geq 0$  и  $b > 0$ , а, значит, и соотношения

$$h < 0, \quad s > 0, \quad v \geq 0. \quad (2.141)$$

Поскольку дискриминант квадратного относительно  $p = \tau^2$  уравнения

$$hp^2 + sp + v = 0$$

всегда остается положительным

$$s^2 - 4hv = 16\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}^2 \left( \zeta + \tilde{c}_{66}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}) \right)^2 > 0,$$

следовательно, в этом случае достаточными условиями, обеспечивающими возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи, будут совместные с (2.140) ограничения (2.139) и

$$\sqrt{\left( s + \sqrt{s^2 - 4hv} \right) / (-2h)} > \tau. \quad (2.142)$$

Условие (2.142), в частности, обеспечивает  $d > 0$ , а, значит, вещественность и несовпадение параметров  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ). При одновременном выполнении (2.140) и ограничения  $d < 0$

$$\sqrt{\left(s + \sqrt{s^2 - 4hv}\right)/(-2h)} < \tau \quad (2.143)$$

окажутся справедливыми соотношения

$$\operatorname{Re}(\eta_1) = \operatorname{Re}(\eta_2) > -1, \quad \operatorname{Im}(\eta_1) = -\operatorname{Im}(\eta_2) \neq 0, \quad (2.144)$$

следовательно, совместные с (2.140), (2.143) ограничения, обеспечивающие возможность построения физически непротиворечивого решения исходной задачи, будут выглядеть так

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{(b + \sqrt{d})/(2a)}\right) > 1, \quad \tilde{c}_{55}/\tilde{c}_{44} \leq \tau^2. \quad (2.145)$$

Наконец в случае

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} > \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12} \quad (2.146)$$

вопрос о существовании физически непротиворечивого решения исходной задачи при  $\tau \geq 2$  сводится к прямой проверке, с одной стороны, удовлетворения поставляемых соотношениями (2.130) значений параметров  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) условиям (2.15), с другой, выполнения требования  $d \neq 0$

$$\sqrt{\left(s + \sqrt{s^2 - 4hv}\right)/(-2h)} \neq \tau. \quad (2.147)$$

Здесь следует отметить, что, во-первых, применительно к представленным в литературе наборам упругих характеристик цилиндрически ортотропных материалов [196, 287, 361, 382, 383], а также для любых изотропных и трансверсально изотропных материалов справедливым является первое из рассмотренных ограничений на величины нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала  $\tilde{c}_{jp}$  (2.136), во-вторых, существуют материалы [196], для которых рассматриваемая модель обеспечивает физически корректное решение для любых значений  $\tau \in \mathbb{N}$ .

Наконец, после наложения на параметры  $\eta_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) вполне обоснованного дополнительного ограничения

$$|\eta_j - \eta_p| \notin \mathbb{N} \quad (j = \overline{1,3}; p = \overline{1,3}; j \neq p) \quad (2.148)$$

из которого непосредственно следует, что

$$\det(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)}) \neq 0 \quad (j = \overline{1,3}; m = \overline{1, \infty}), \quad (2.149)$$

справедливым становится преобразование рекуррентных уравнений (2.23), из которых определяются искомые векторные коэффициенты  $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)}$  ( $j = \overline{1,3}$ ), для всех  $\eta = \eta_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) в последовательность явных рекуррентных представлений (2.83), матричные коэффициенты  $\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, p)}$  ( $p = \overline{1,5}$ ) которого задаются соотношениями (2.84), а входящие в (2.84) матрицы  $\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, p)}$  ( $p = \overline{1,5}$ ) определяются в (2.109).

Окончательно, решение целевой задачи с учетом рассмотренных групп ограничений на величины нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала  $\tilde{c}_{jp}$  и круговое волновое число  $\tau$  совместно с (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.93) определяются через матричные базисные решения  $\mathbf{U}^{(\tau, B)}(r)$ ,  $\mathbf{E}^{(\tau, B)}(r)$  и  $\mathbf{S}^{(\tau, B)}(r)$  представлениями (2.94) в которых прямоугольные матрицы  $\mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 1)}(r)$  и  $\mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r)$  определяются соответственно соотношениями (2.19) и (2.108).

Для норм матричных коэффициентов (2.84) в рекуррентных представлениях (2.83) асимптотические оценки при  $m \rightarrow \infty$  в рассматриваемом случае анизотропии имеют вид

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 1)}\| &\approx m^{-1} |\tilde{k}| (1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}), & \|\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 2)}\| &\approx m^{-1} q \sqrt{3} |\lambda(1 - 2\delta)|, \\ \|\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 3)}\| &\approx m^{-2} q |\lambda \tilde{k} (\delta(1 + \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{55}) - 1)|, & \|\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4)}\| &\approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{3} |\delta(1 - \delta)| \\ & & (j = \overline{1,3}), & \end{aligned} \quad (2.150)$$

следовательно, разложения в соотношениях (2.94) сходятся абсолютно и равномерно на любом конечном отрезке  $r \in [r_0, r_1]$  ( $0 < r_0 < r_1 < \infty$ ) [189].

### 2.3. Получение дисперсионных соотношений

Рассмотренные математические модели волновых процессов в протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения из трансверсально изотропных и цилиндрически ортотропных материалов включают единые условия свободной (1.21) либо жестко закрепленной (1.22) граничной поверхности, которые с учетом представления решений целевой задачи через базисные решения порождают дисперсионное уравнение, определяющее спектр целевой задачи, а также уравнение для определения неизвестного векторного коэффициента  $\mathbf{B}$  (продольно-сдвиговые и неосесимметричные волны).

Для крутильных волн в обоих рассмотренных случаях анизотропии дисперсионные соотношения соответственно имеют вид

$$\left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(1) \right]_2 = 0 \quad \text{либо} \quad \tilde{y}_\theta^{(TW,B)}(1) = 0. \quad (2.151)$$

Входящие в (2.151) функции определены для общего случая  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  соотношениями (2.31), а для частных случаев  $q = 0, 1, 2$  также и соотношениями соответственно (2.38), (2.46), (2.51).

В случае продольно-сдвиговых волн дисперсионные соотношения соответственно получает представление

$$\det \left( \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(1) \right]_{(1,4),(1,2)} \right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det \left( \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(1) \right) = 0. \quad (2.152)$$

Входящие в (2.152) матричные функции определены в случае трансверсально изотропных материалов в общем случае  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  соотношениями (2.65) и частном случае  $q = 0$  также соотношениями (2.73), а для цилиндрически ортотропных материалов в общем случае  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  соотношениями (2.124).

В случае неосесимметричных волн дисперсионные соотношения соответственно записываются так:



$$\det\left(\left[\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(1)\right]_{(1,5,6),(1..3)}\right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det\left(\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(1)\right) = 0. \quad (2.153)$$

Входящие в (2.153) матричные функции определяются в общем случае  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  соотношениями (2.94) в которых прямоугольные матрицы  $\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,1)}(r)$  определяются соотношениями (2.19), матрицы  $\mathbf{H}_m^{(\tau,\eta,2)}(r)$  определяются в случае трансверсально изотропных материалов соотношениями (2.19), а цилиндрически ортотропных материалов – соотношениями (2.108). В частном случае  $q = 0$  для трансверсально изотропных материалов указанные матричные функции определяются также и соотношениями (2.103) – (2.105).

Также следует отметить, что в случае крутильных волн специфика рассмотренного варианта закона радиальной неоднородности физико-механических свойств материала волновода (1.35), (1.36) с учетом соотношений (2.34), (2.35), (2.38) – (2.40), (2.42), (2.44), (2.46), (2.49), (2.51), (2.53) и (2.151) влечет за собой, во-первых, характерную структуру спектра бегущих нормальных волн как множества кривых вида

$$\Omega^{(j)}(\tilde{k}) = \sqrt{\tilde{c}_{66} \left(\kappa_3^{(j)}\right)^2 + \tilde{c}_{44} \tilde{k}^2} \quad (j = \overline{1, \infty}), \quad (2.154)$$

где значения  $\sqrt{\tilde{c}_{66}} \kappa_3^{(j)}(\lambda, q, \delta)$  по физическому смыслу являются критическими частотами для мод волн указанного типа, во-вторых, неизменность предельных при  $\tilde{k} \rightarrow \infty$  значений параметров скоростей объемных сдвиговых волн при любых значениях параметров  $\lambda$ ,  $q$  и  $\delta$ , а, следовательно, и независимость асимптотического поведения мод нормальных волн кручения в высокочастотном коротковолновом диапазоне от этих параметров.

## 2.4. Результаты численных экспериментов

В рамках исследований, осуществляемых с использованием полученных в предыдущих подразделах теоретических результатов и направленных на описание эффектов влияния фактора неоднородности на спектры и кинематические

свойства нормальных волн в трансверсально-изотропных и ортотропных функционально-градиентных цилиндрических волноводах кругового сечения, в первую очередь проведен анализ влияния параметров радиальной неоднородности  $\lambda$  ( $q=1$ ) и механической анизотропии  $\eta = c_{44}^{(0)} / c_{66}^{(0)}$  на спектральные характеристики и формы упругих колебательных перемещений  $u_\theta$  для нормальных волн кручения. При выборе в качестве нормирующего параметра  $c_* = \tilde{c}_{66}$  и введения обозначения  $\delta(\lambda)$  для критических частот крутильных нормальных волн, дисперсионное соотношение (2.154) может быть записано в виде

$$\Omega(\tilde{k}, \lambda, \eta) = \sqrt{\delta(\lambda)^2 + \eta \tilde{k}^2}. \quad (2.155)$$

Данные анализа параметрических зависимостей  $\delta(\lambda)$  в диапазонах  $\lambda \in [-2.0, 2.0]$  для цилиндров с закрепленной и свободной от напряжений граничной поверхностью представлены, соответственно, на Рисунках 2.1-а и 2.1-б.

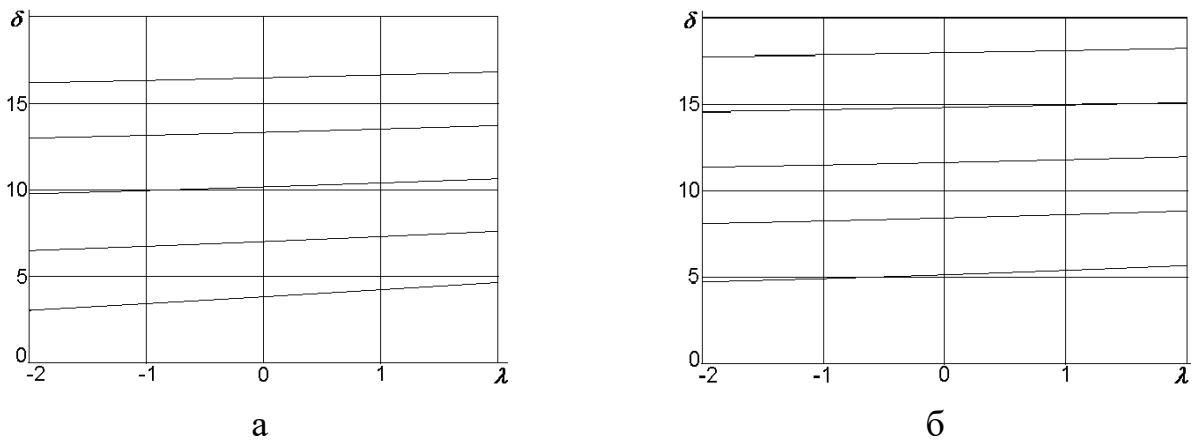


Рис.2.1.

Их анализ показывает, что в рассмотренном интервале изменения параметра неоднородности его влияние снижается по мере роста номера моды бегущих волн. Так, к примеру, рост значений  $\delta(2.0)$  по отношению к  $\delta(-2.0)$  составляет в случае первой моды спектра для свободного цилиндра 21.1%, в случае второй моды – 9.51%, а в случае пятой моды – лишь 2.72%. Для цилиндра с закрепленной граничной поверхностью это влияние оказывается более существенным, и вышеуказанные изменения составляют 52.55% для первой моды спектра, 17.18% для второй моды и 3.89% для пятой моды.

Различия в топологических картинах распределений пяти низших действительных ветвей спектров для закрепленных цилиндров с идентичными параметрами неоднородности  $\lambda = 2.0$  и различающимися показателями механической анизотропии  $\eta = 1/3$  и  $\eta = 3$  соответственно характеризуют Рисунки 2.2-а и 2.2-б. На указанных рисунках и ниже полагается, что  $a = R_*$ .

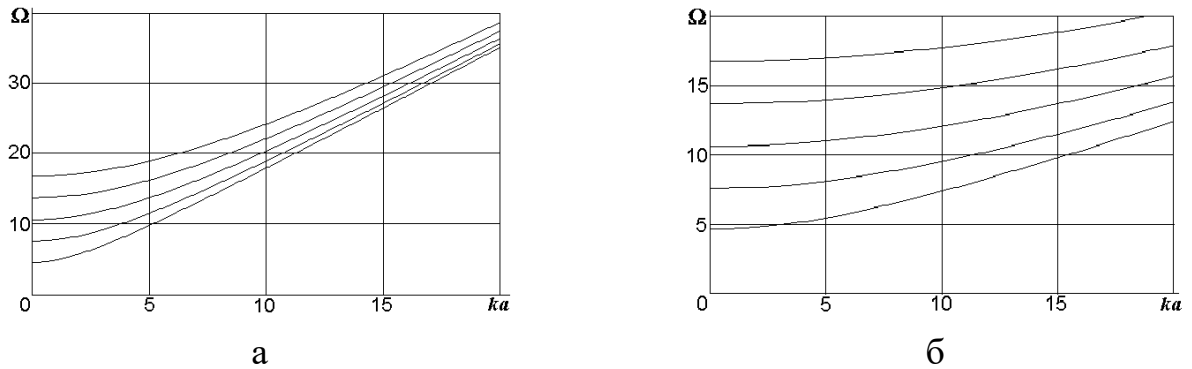


Рис.2.2.

Рассчитаны также описываемые радиальными распределениями  $\tilde{u}_\theta^0(r) = u_\theta(r, 0, 0) / \max_{r \in [0, 1]} (|u_\theta(r, 0, 0)|)$  нормализованные формы динамических перемещений  $u_\theta$  для соответствующих началу периода волновых колебаний моментов времени в волнах первой и пятой мод спектров нормальных крутильных волн в цилиндрах с показателями неоднородности ( $\lambda = -2, q = 1$ ) и ( $\lambda = 2, q = 1$ ). Так, данные формы приведены на Рисунке 2.3-а для нормальных волн из первых мод спектров цилиндров с закрепленными боковыми поверхностями, а на Рисунке 2.3-б – для нормальных волн, принадлежащих пятым модам спектров цилиндров с данным типом краевых условий на граничной поверхности.

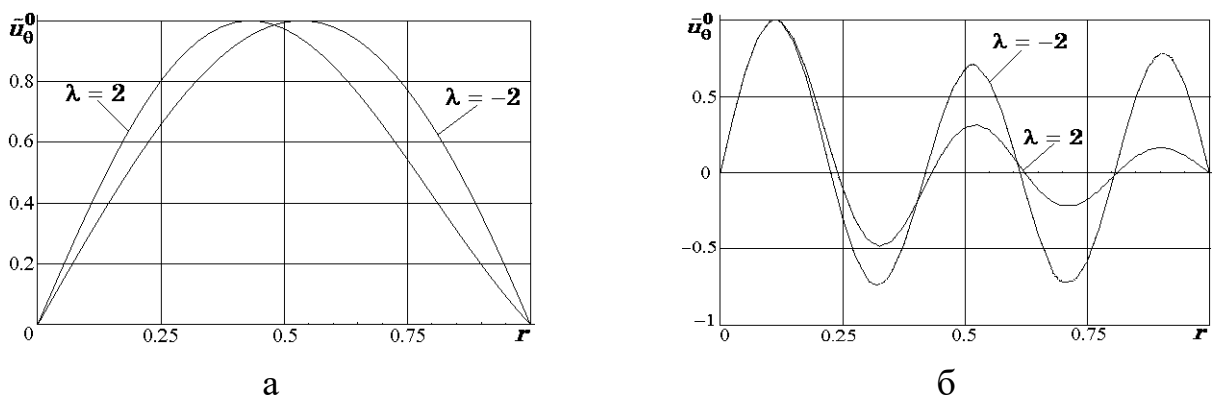


Рис. 2.3.

Аналогичные распределения представлены на Рисунках 2.4-а и 2.4-б для цилиндров со свободными боковыми поверхностями. В частности, эти распределения характеризуют эффекты смещения зон с повышенными уровнями интенсивности волновых колебаний к боковой поверхностям для цилиндров со снижающимися в радиальном направлении показателями жесткости и плотности ( $\lambda = -2.0$ ) и эффекты локализации зон повышенных уровней колебательных перемещений в окрестности центра сечения для цилиндров с увеличивающимися в радиальном направлении физико-механическими характеристиками ( $\lambda = 2.0$ ). С увеличением номера моды рассматриваемых волн степень выраженности указанных эффектов возрастает.

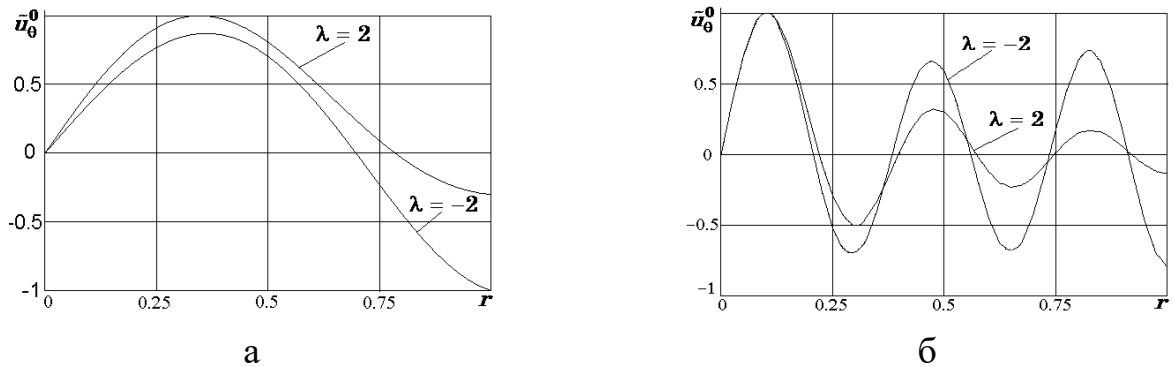


Рис. 2.4.

Осуществляемый анализ влияния факторов радиальной неоднородности  $\lambda$  и степени механической анизотропии материала на спектры и свойства осесимметричных нормальных продольно-сдвиговых волн в функционально-градиентных цилиндрах кругового сечения базируется на расчетах действительных ветвей  $\Omega^{(\lambda)}(ka)$  спектров бегущих нормальных волн; на расчетах частотных распределений для фазовых скоростей  $V_p^{(\lambda)}(ka)$  бегущих нормальных волн, отнесенных к скорости осесимметричной волны кручения  $\left( V_t^{(\lambda=0)} = \sqrt{c_{44}^{(0)} c_* / \rho^{(0)}} \right)$  в радиально однородном ( $\lambda = 0$ ) цилиндре с соответствующими характеристиками  $\tilde{c}_{js}$ ; на расчетах радиальных распределений нормализованных величин  $U_j(r) = u_j(r, 0, 0) / \max_{r \in [0, 1]} (|u_j(r, 0, 0)|)$  ( $j = r, z$ ), характеризующих формы амплитудных составляющих динамических

перемещений для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний. В численных экспериментах использованы наборы параметров  $\tilde{c}_{js}$ , соответствующие значениям модулей упругости конкретных трансверсально-изотропных материалов [190], волноводные свойства которых характеризуются различными величинами введенного в [103] обобщенного параметра волновой анизотропии  $\Delta$ . Это, соответственно, наборы параметров  $\tilde{c}_{js}$  для монокристаллических материалов с отрицательными значениями этого параметра –  $Zn$  ( $\Delta = -10.24$ ) и  $Cd$  ( $\Delta = -1.04$ ), а также материалов  $CdS$  ( $\Delta = 0.37$ ) и  $Co$  ( $\Delta = 0.64$ ) с положительными значениями этого параметра. В сопоставительном анализе с заданием показателей радиальной неоднородности ( $\lambda = -2, q = 1$ ) и ( $\lambda = 2, q = 1$ ) используется функция оценки расхождений  $\Delta\Omega(ka) = \Omega^{(2)}(ka) - \Omega^{(-2)}(ka)$  для мод с одинаковыми номерами в сравниваемых дисперсионных спектрах. Характерные результаты проведенных исследований для шести низших мод в жестко закрепленных цилиндрах представлены на Рисунке 2.5-а (для материала М1, параметры  $\tilde{c}_{js}$  которого соответствуют монокристаллу  $Zn$ ), Рисунке 2.5-б (для материала М2, параметры  $\tilde{c}_{js}$  которого соответствуют монокристаллу  $Cd$ ), Рисунке 2.6-а (для материала М3, параметры  $\tilde{c}_{js}$  которого соответствуют монокристаллу  $CdS$ ), Рисунке 2.6-б (для материала М4, параметры  $\tilde{c}_{js}$  которого соответствуют монокристаллу  $Co$ ).

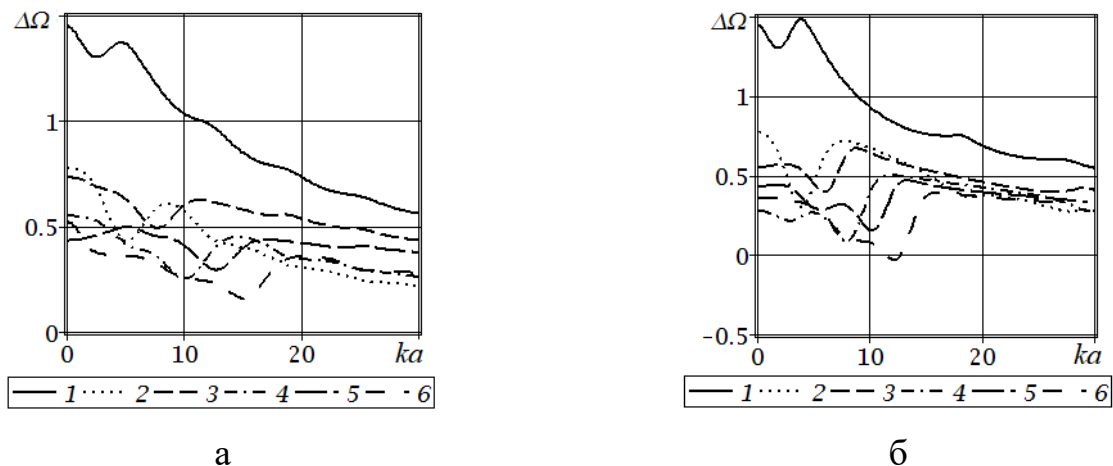


Рис. 2.5.

Результаты, представленные на Рисунке 2.5-а, свидетельствуют о том, что для цилиндра из материала М1, характеризующегося наибольшей волновой анизотропией в рассматриваемой группе материалов, все моды спектра  $\Omega^{(2)}(ka)$  в исследуемом диапазоне варьирования  $ka$  лежат выше соответствующих по номеру мод спектра  $\Omega^{(-2)}(ka)$ , то есть фазовые скорости волн из мод спектра  $\Omega^{(2)}(ka)$  в исследуемом диапазоне изменения параметра  $ka$  больше скоростей волн из мод спектра  $\Omega^{(-2)}(ka)$ .

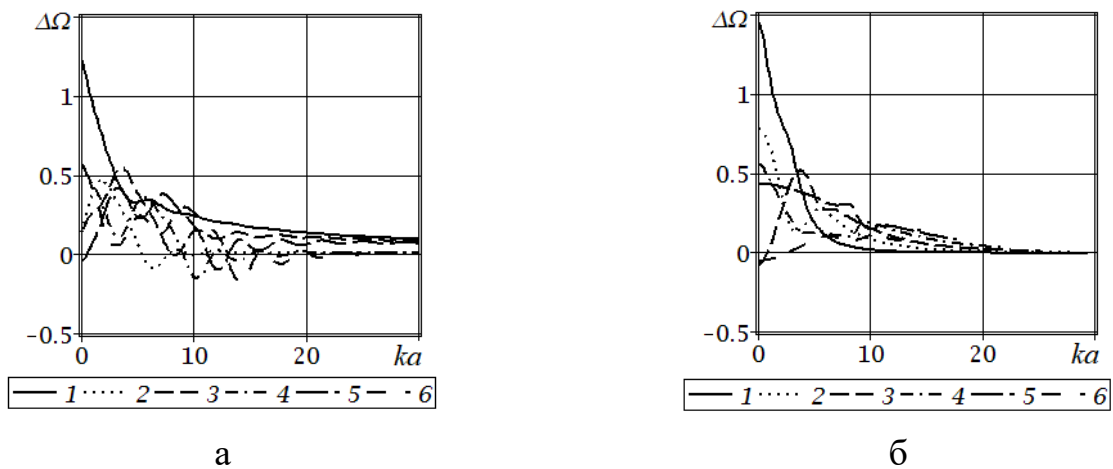


Рис. 2.6.

Для цилиндра из материала М4 третья и шестая моды спектра  $\Omega^{(2)}(ka)$  в асимптотической области длинных волн расположены ниже соответствующих мод спектра  $\Omega^{(-2)}(ka)$ . Только начиная с некоторого  $k_*a$  у этих мод наблюдается эффект доминирования значений  $\Omega^{(2)}(ka)$  над соответствующими значениями  $\Omega^{(-2)}(ka)$  для парных модами спектра (Рисунок 2.6-б).

На частотах, близких к частотам запирания ( $ka = 0.001$ ), проведен сопоставительный анализ форм исследуемых волн для цилиндров из материалов М1 – М4 с различными показателями экспоненциальной неоднородности, в рамках которого проанализированы радиальные распределения относительных интенсивностей динамических перемещений  $U_j(r)$  ( $j = r, z$ ) в сечении волновода при  $\lambda = -2, q = 1$  и  $\lambda = 2, q = 1$ . Результаты анализа, в частности,

представлены на Рисунке 2.7 в случае жестко закрепленного цилиндра из материала М2 для волн первой (Рисунок 2.7-а) и шестой (Рисунок 2.7-б) мод.

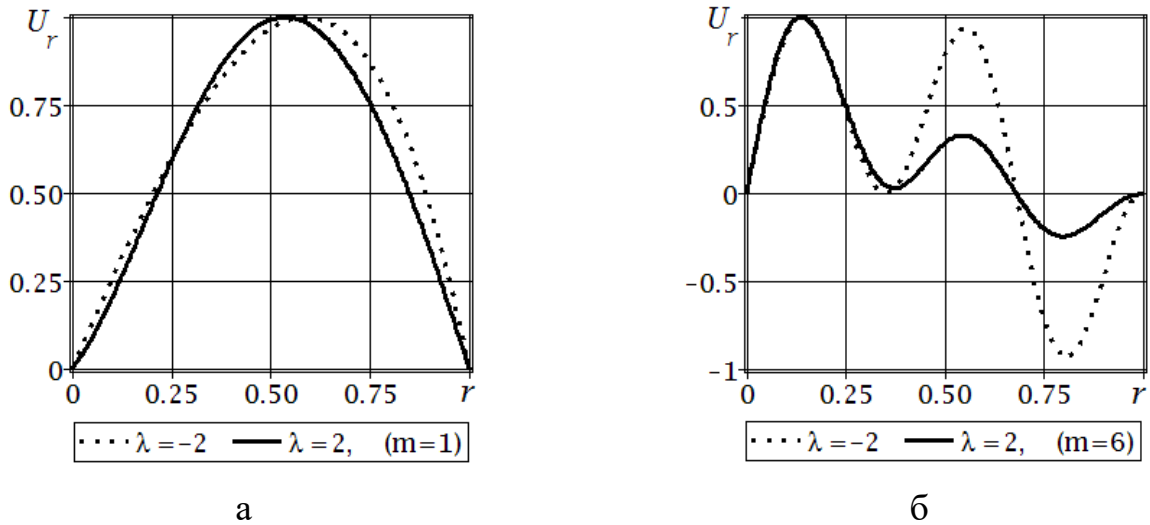


Рис. 2.7.

Обнаруживаемыми эффектами являются смещение областей повышенной интенсивности волновых колебаний к границе цилиндра при уменьшении значения параметра неоднородности  $\lambda$ ; рост количественной меры указанных эффектов с увеличением номера моды рассматриваемых волн.

Характерные результаты сопоставительного анализа спектров нормальных волн в свободных цилиндрах представлены на Рисунке 2.8-а для случая материала М1 и на Рисунке 2.8-б для случая материала М3.

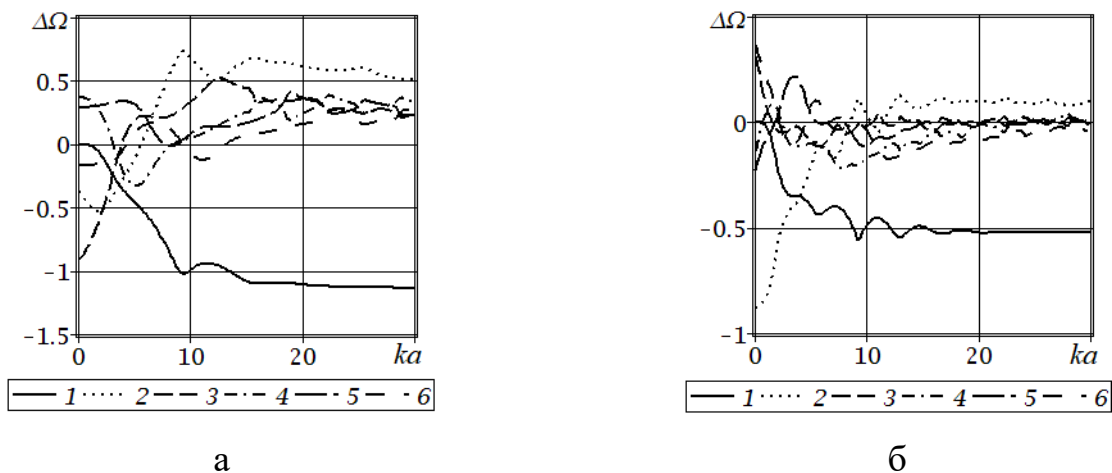


Рис. 2.8.

Здесь, прежде всего, следует отметить качественные различия в результатах составления для низших мод спектров и остальных действительных ветвей. Если для показателей радиальной неоднородности  $(\lambda = -2, q = 1)$  и  $(\lambda = 2, q = 1)$  в

длинноволновом диапазоне наибольшие различия выявлены для мод спектра начиная со второй, то с ростом  $ka$  для всех материалов максимальное отклонение характерно уже для первой моды, и при этом величины  $\Delta\Omega(ka)$  асимптотически приближаются к значениям  $\Delta\Omega(ka) \approx -1.152$  для материала М1 и  $\Delta\Omega(ka) \approx -0.522$  для материала М3.

При исследовании эффектов влияния показателей радиальной неоднородности  $(\lambda, q)$  и значений окружного волнового числа  $\tau$  на топологические картины спектров неосесимметричных бегущих нормальных волн в качестве материала рассматриваемого цилиндра выбирались трансверсально-изотропный материал М1 и цилиндрически ортотропный материал М5, набор параметров  $\tilde{c}_{js}$  которого выражается через нормированные технические упругие постоянные, представленные в работе [196] с принятой в ней схемой индексации

$$E_1 = 43/24, \quad E_2 = 179/24, \quad E_3 = 131/24, \quad G_{23} = 28/24, \\ G_{13} = 1, \quad G_{12} = 1, \quad \nu_{23} = 0.15, \quad \nu_{12} = 0.08, \quad \nu_{13} = 0.102.$$

Волноводные свойства материала М5 обеспечивают физически корректное решение задачи описания дисперсионного спектра в рамках используемой модели для любых значений  $\tau$  [152].

В случае материала М1 выполнен анализ ряда эффектов влияния параметров неоднородности на топологическую структуру и свойства действительных ветвей дисперсионных спектров бегущих нормальных изгибных ( $\tau = 1$ ) волн в радиально неоднородном  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 1)$  (Рисунок 2.9) и однородном  $(\lambda, q) = (0, 0)$  свободных цилиндрах. На основе анализа количественных различий в поведении пяти низших мод сопоставляемых спектров (Рисунок 2.10) с использованием функции сравнения

$$\Delta\Omega(ka) = \left( \omega_{\lambda, q}(ka) - \omega_{0,0}(ka) \right) a / c_t, \quad (2.156)$$

$a = R_*$ ,  $c_t = \sqrt{c_*/\tilde{\rho}}$  для мод с одинаковыми номерами, при общем качественном подобии спектров, позволило сделать ряд заключений.



Во-первых, установлено, что характер предельного асимптотического стремления фазовых скоростей мод бегущих волн с одинаковыми номерами в высокочастотном коротковолновом диапазоне из спектров для однородных и неоднородных цилиндров совпадает. При этом влияние неоднородности имеет больший характер для высших мод, фазовые скорости которых в однородных цилиндрах стремятся к скоростям объемных волн в их материалах. Для низшей моды с асимптотическим стремлением скорости к скорости поверхностной волны релеевского типа эффект влияния фактора неоднородности заключается в переходе соответствующей дисперсионной кривой на параллельную траекторию. Во-вторых, выявлено существенное влияние зон локального сближения и расталкивания мод на их траектории в соответствующих спектрах для неоднородного и однородного цилиндров. Этот эффект отчетливо наблюдается на Рисунке 2.10 при  $ka \approx 5$  для первой и второй моды, а также при  $ka \approx 3.5$  для третьей и четвертой моды.

На Рисунке 2.11 представлены графики нормализованных групповых скоростей  $c_g/c_t$  бегущих нормальных изгибных ( $\tau = 1$ ) волн в радиально неоднородном  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 1)$  свободном цилиндре. Здесь наряду с ярко выраженными характерными участками «обмена» групповыми скоростями смежных мод в зонах их локального сближения и отталкивания, отмечается также асимптотическая стабилизация значений групповых скоростей первой ( $\omega a/c_t > 12$ ) и второй ( $\omega a/c_t > 30$ ) мод.

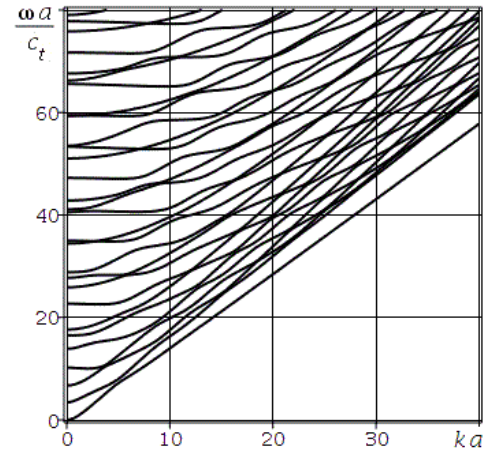


Рис. 2.9.

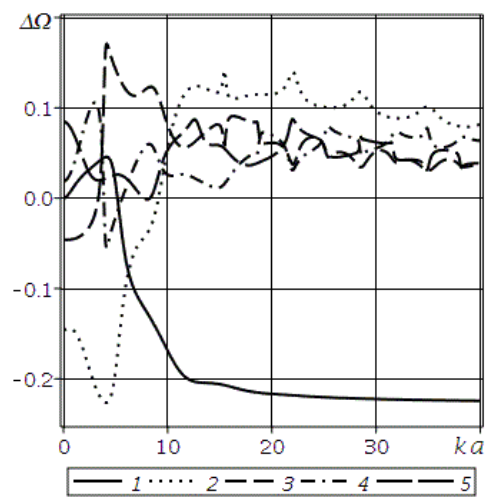


Рис. 2.10.

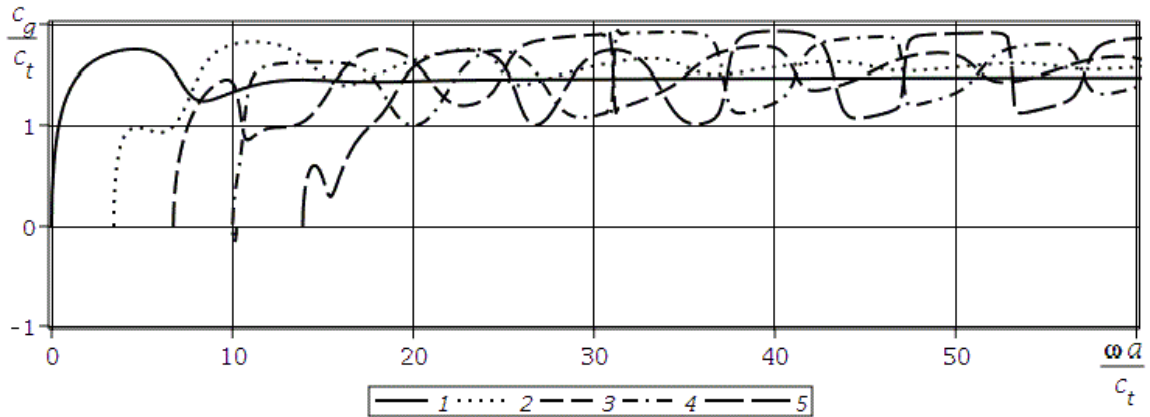


Рис. 2.11.

Расчет фрагментов спектра бегущих нормальных волн в диапазонах изменения параметров нормированной частоты  $\omega a/c_t \in [0,11]$  и продольного волнового числа  $ka \in [0,25]$  для материала М5 осуществлен при значениях окружного волнового числа  $\tau = 1$  и  $\tau = 2$  в случаях однородного ( $\lambda = 0, q = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = 2, q = 1$ ) цилиндров со свободной граничной поверхностью. Соответствующие фрагменты дисперсионных спектров представлены на Рисунке 2.12-а ( $\lambda = 2, q = 1, \tau = 1$ ) и Рисунке 2.12-б ( $\lambda = 2, q = 1, \tau = 2$ ). Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости независимо для каждого значения окружного волнового числа  $\tau$  определялся из условия равенства единице низшей ненулевой приведенной критической частоты ветвей спектра бегущих нормальных волн в однородном волноводе с  $a = R_*$ .

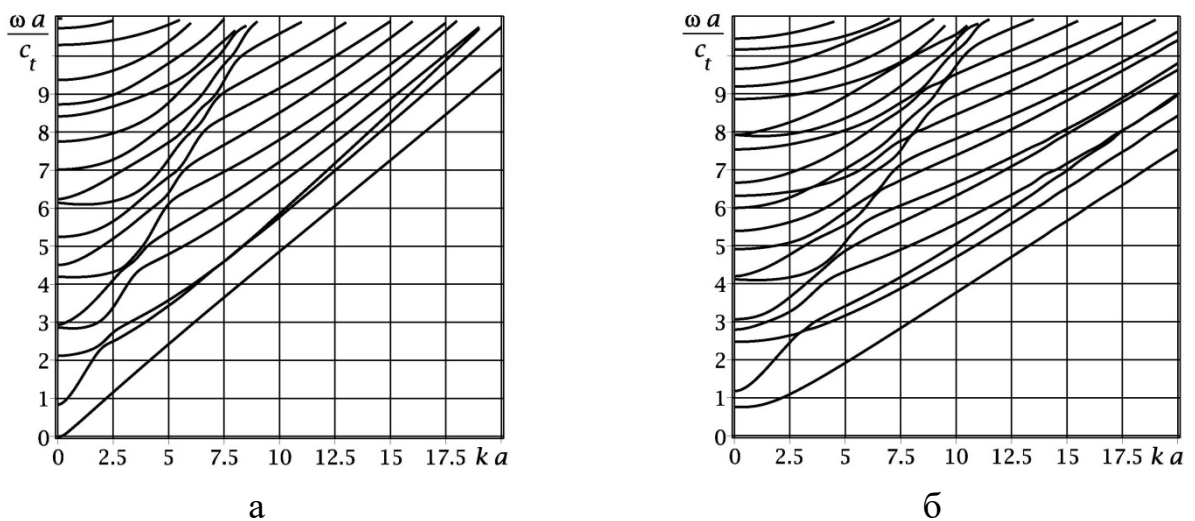


Рис. 2.12.

Характерной отличительной особенностью представленных распределений

является отсутствие в спектре для  $\tau = 2$  ветви с нулевой частотой запираения. На Рисунке 2.13 и Рисунке 2.14 представлены результаты сравнительного количественного анализа различий в поведении первых шести мод спектров для однородного ( $\lambda = 0, q = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = 2, q = 1$ ) цилиндров соответственно при  $\tau = 1$  и  $\tau = 2$ .

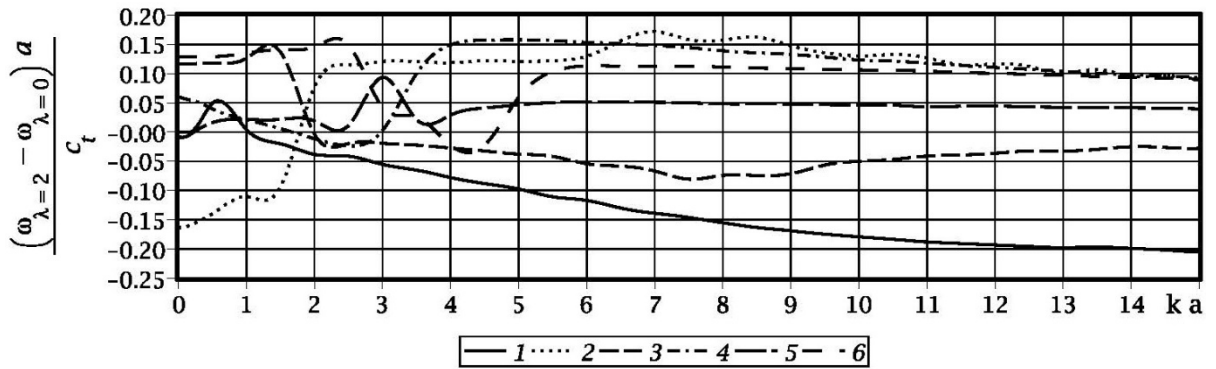


Рис. 2.13.

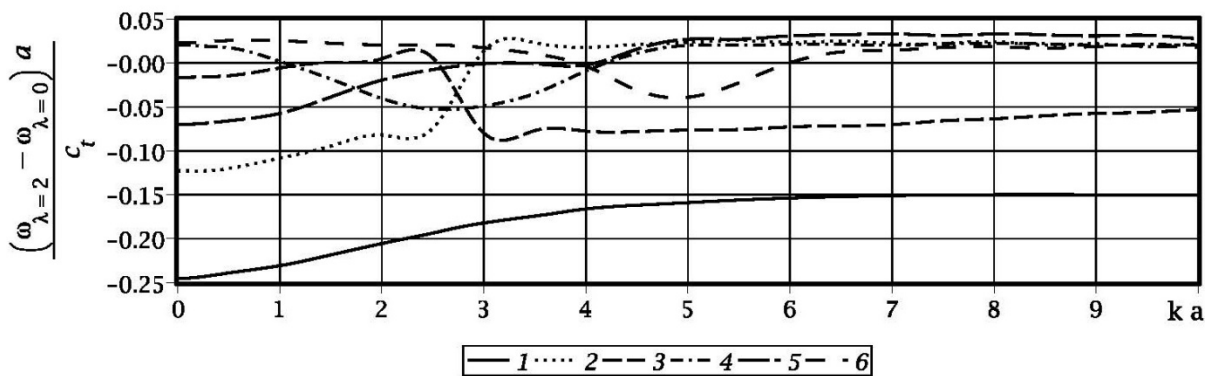


Рис. 2.14.

Можно отметить, что для  $\tau = 2$  в диапазоне  $ka > 7$  значения рассматриваемой функции для всех ветвей стабилизируются и описывают уменьшение приведенных частот волн первой и третьей моды, а также увеличение приведенных частот волн второй, четвертой, пятой и шестой моды в неоднородном цилиндре. При меньших значениях нормированного волнового числа для  $\tau = 2$  наибольшие отличия в значениях приведенных частот возникают для волн двух низших мод в длинноволновом диапазоне. Для спектров волн с  $\tau = 1$  тенденция к стабилизации значений рассматриваемой функции с ростом  $ka$  наблюдается в более коротковолновом диапазоне  $ka > 14$ , а наибольшие отличия наблюдаются для первой моды в коротковолновом диапазоне и для второй моды в

длинноволновом диапазоне.

Результаты расчетов распределений нормированных фазовых скоростей  $c_p/c_t$  для нормальных бегущих волн с  $\tau = 1$  и  $\tau = 2$  в неоднородном ( $\lambda = 2, q = 1$ ) цилиндре представлены соответственно на Рисунке 2.15-а и Рисунке 2.15-б.

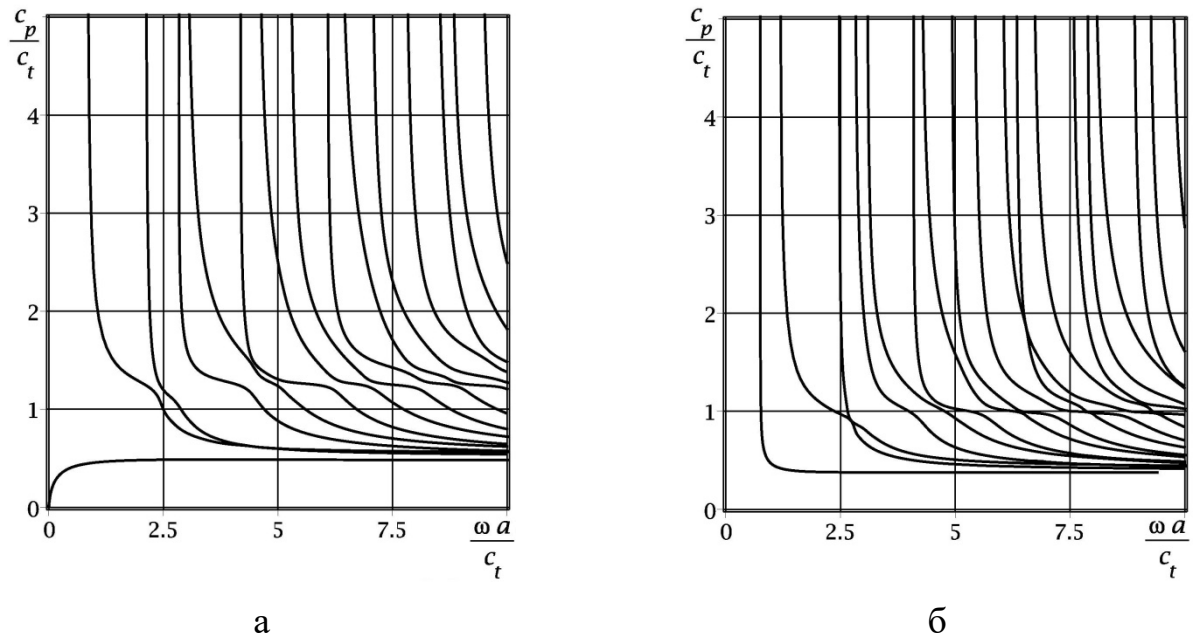


Рис. 2.15.

Наиболее существенные отличия, обусловленные увеличением показателя изменяемости в окружном направлении, заключаются в снижении приведенной частоты формирования «платообразного» участка распределения при  $\tau = 2$ .

## Вводы к разделу 2

В разделе решена задача разработки теоретической численно-аналитической методики исследования характеристик распространения нормальных упругих волн в радиально неоднородных трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения со свободной либо жестко закрепленной граничной поверхностью. В рамках реализованных исследований:

1. Разработана методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндров кругового поперечного сечения с

экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью для краевых задач о спектрах осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн.

2. В замкнутой форме с использованием функций Уиттекера построены базисные системы частных решений волновых уравнений для задач о распространении нормальных крутильных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндрах кругового сечения для двух частных случаев экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала.

3. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов решения рассматриваемых задач, с применением которых проведен сравнительный анализ топологического строения дисперсионных спектров, распределений фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных осесимметричных и неосесимметричных волн в однородных и радиально неоднородных трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных протяженных цилиндрах кругового поперечного сечения для случаев свободной и жестко закрепленной граничной поверхности, проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики параметров экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала волновода.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [145, 148, 150-152, 163, 185].

**РАЗДЕЛ 3**

**ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-  
ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ СЕКТОРНО-КРУГОВОГО  
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ: СЛУЧАЙ ГИБКОГО НЕРАСТЯЖИМОГО  
ПОКРЫТИЯ РАДИАЛЬНЫХ УЧАСТКОВ**

**3.1. Решения вспомогательной спектральной задачи в случае  
трансверсально-изотропного материала**

Рассматривается волновод, имеющий в поперечном сечении форму сектора (Рисунок 1.2), занимающий в безразмерных цилиндрических координатах  $Or\theta z$  область  $V_2$  (1.4) с граничной поверхностью  $G_2$  (1.9). Функциональный закон радиальной неоднородности трансверсально изотропного материала задается соотношениями (1.35), (1.36). Математическая модель включает: уравнения (1.14), (1.16) и (1.20); условия на радиальных участках граничной поверхности (1.23); условия на цилиндрическом участке граничной поверхности (1.24) или (1.25). В рамках рассматриваемой модели остаются справедливыми соотношения (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.14), (2.17), (2.19) в которых из геометрических соображений снимается ограничение  $\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ , а ограничения на параметры  $\eta_j$  в представлениях (2.14) и (2.17) определяются в форме

$$\begin{aligned} \eta = -1 \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > -1, \text{ если } \left[ \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta)} \right]_3 = 0, \\ \eta = 0 \text{ или } \operatorname{Re}(\eta) > 0, \text{ если } \left[ \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta)} \right]_3 \neq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

обеспечивающей физическую корректность решений волновых уравнений, заключающуюся в ограниченности плотности описываемых решениями энергетических потоков в окрестности сингулярной точки  $r = 0$  границы сечения волновода [175]. Таким образом, в рассматриваемом волноводе с учетом представлений (1.38), (2.1), (2.7) подлежат независимому исследованию волны  $S$ -

типа ( $\beta = 0$ ) и волны А-типа ( $\beta = \pi/2$ ).

Представления (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8) и граничные условия (1.23) определяют вспомогательную спектральную задачу построения решений уравнений (1.14), (1.16) и (1.20), удовлетворяющих на радиальных участках граничной поверхности волновода однородным условиям (1.23) (далее спектральные решения). Множество собственных значений указанной задачи задается уравнением

$$\cos(\tau\alpha + \beta) = 0 \quad (3.2)$$

и имеет вид

$$\tau = (\beta - \pi/2)/\alpha + \pi n/\alpha, \quad (3.3)$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Из условия разрешимости (2.22), принявшего вид (2.77), (2.78), с учетом ограничений (3.1) однозначно определяется допустимый корень уравнения (2.78)

$$\eta_3 = \tau \quad (3.4)$$

и новое ограничение на целочисленный параметр  $n$  в представлении (3.3)

$$n \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

а также полученный на основании уравнения (2.21) соответствующий  $\eta_3$  начальный коэффициент  $\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_3)}$  в разложениях векторных собственных функций (2.14), (2.17), представленный с точностью до произвольного скалярного множителя в виде

$$\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_3)} = \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ -\tilde{k} \\ 2(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})/(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{44}) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Каждому корню  $\eta_*$  уравнения (2.77) соответствует полученный из уравнения (2.21) начальный векторный коэффициент

$$\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_*)} = \begin{bmatrix} \tau((\eta_* + 2)\tilde{c}_{66} - \eta_*\tilde{c}_{11}) \\ \eta_*(\eta_* + 2)\tilde{c}_{11} - \tau^2\tilde{c}_{66} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Представление (3.7) записано с точностью до произвольного скалярного множителя. Таким образом, из четырех корней уравнения (2.77) с учетом (3.3), (3.5) только три

$$\eta_* \in \{-\tau, \tau - 2, \tau\} \quad (3.8)$$

потенциально могут удовлетворять ограничениям (3.1). Поскольку на основании представлений (3.3) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \tau > 1/2 & \text{ если } \beta = 0, \\ \tau > 1 & \text{ если } \beta = \pi/2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

следовательно, всегда однозначно определяются два допустимых корня  $\eta_j$  ( $j = \overline{1,2}$ ) уравнения (2.77) из множества (3.8). Значения указанных корней и соответствующие им начальные коэффициенты  $\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_j)}$  в разложениях векторных собственных функций, представленные с точностью до произвольного скалярного множителя, записываются в следующем виде

$$\eta_1 = -\tau, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} = \begin{bmatrix} (2-\tau)\tilde{c}_{66} + \tau\tilde{c}_{11} \\ -((2-\tau)\tilde{c}_{11} + \tau\tilde{c}_{66}) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ если } 1/2 < \tau < 1,$$

$$\eta_1 = \tau - 2, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ если } \tau \geq 1; \quad (3.10)$$

$$\eta_2 = \tau, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_2)} = \begin{bmatrix} (2+\tau)\tilde{c}_{66} - \tau\tilde{c}_{11} \\ (2+\tau)\tilde{c}_{11} - \tau\tilde{c}_{66} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Для  $\eta = \eta_j$  ( $j = \overline{2,3}$ ) справедливы соотношения (2.81), а для  $\eta = \eta_1$  когда  $1/2 < \tau < 1$  справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta_j, 1)}) &= m^2 (m+2)(m-2\tau)^2 (m+2(1-\tau))\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44}\tilde{c}_{66} \neq 0 \\ & (m \geq 1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Следовательно, в указанных случаях с учетом (3.3) – (3.6), (3.10) и (3.11)



справедливы явные рекуррентные представления (2.82) – (2.84) для определения последующих коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)}$  ( $m = \overline{1, \infty}$ ) в разложениях (2.14), (2.17) векторных собственных функций. При  $\eta = \eta_1$  когда  $\tau \geq 1$ , как это уже отмечалось ранее, определитель (2.85) системы линейных уравнений обращается в нуль на  $m = 2$  шаге решения рекуррентных уравнений (2.23) и, соответственно, условием существования решения указанной системы линейных уравнений является выполнение требования (2.89). Следовательно, в данном случае явные рекуррентные представления (2.92) с учетом (2.82), (2.84), (2.86), (2.90), (3.3), (3.5), (3.10) для определения последующих коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_1)}$  ( $m = \overline{1, \infty}$ ) в разложениях (2.14), (2.17) векторных собственных функций окажутся справедливыми, если будут выполняться следующие ограничения

$$\begin{aligned} \alpha \in (0, \pi), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \beta \in \{0, \pi/2\} \quad \text{если } q \neq 1, \\ \alpha = \pi/2, \quad n = 1, \quad \beta = 0 \quad \text{если } q = 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Окончательно, решение спектральной задачи с учетом ограничений (3.13) совместно с (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.14), (2.17), (2.93), (3.3) и (4.5) представимо через базисные решения в общем случае  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  соотношениями (2.94), а в частном случае  $q = 0$  также и соотношениями (2.103) – (2.105).

Для представленной модели в поле напряжений на ребре  $r = 0$  может возникать сингулярность, вид которой отражается в Таблице 3.1.

Таблица 3.1.

Тип волны	$n$	$\tau$	$\pi/4 < \alpha < \pi/2$	$\pi/2 < \alpha \leq 3\pi/4$	$3\pi/4 < \alpha < \pi$
S-тип	1	$\pi/(2\alpha)$	$r^{\tau-2}$	$r^{-\tau}, r^{\tau-1}$	$r^{-\tau}, r^{\tau-1}$
	2	$3\pi/(2\alpha)$	-	-	$r^{\tau-2}$
A-тип	1	$\pi/\alpha$	-	$r^{\tau-2}$	$r^{\tau-2}$

### 3.2. Решения вспомогательной спектральной задачи в случае цилиндрически ортотропного материала

Волновые процессы исследуются в протяженном цилиндре секторного поперечного сечения (Рисунок 1.2), функциональный закон радиальной неоднородности цилиндрически ортотропного материала задается соотношениями (1.35), (1.36). Область  $V_2$  волновода определяется соотношениями (1.4), а его граничная поверхность  $G_2$  – соотношениями (1.9). Математическая модель включает уравнения (1.14), (1.18), (1.20), а также граничные условия на радиальных (1.23) и цилиндрическом (1.24) либо (1.25) участках граничной поверхности. Остаются справедливыми для рассматриваемой модели соотношения (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.14), (2.17). В представлениях (2.17) матрицы  $\mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 1)}(r)$  определяются соотношениями (2.19), матрицы  $\mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r)$  – соотношениями (2.108). Для параметра  $\eta$  сохраняются ограничения (3.1), а множество собственных значений параметра  $\tau$  определяются соотношениями (3.3), (3.5).

Сходство моделей в случаях трансверсально изотропного и цилиндрически ортотропного материалов волновода обеспечивает в рассматриваемом случае анизотропии как справедливость определенных ранее соотношений (3.1) – (3.3), так и возможность независимого исследования волн  $S$ -типа ( $\beta = 0$ ) и  $A$ -типа ( $\beta = \pi/2$ ).

Из условия разрешимости (3.22), принявшего вид (2.127), (2.128), представлениями (2.130) с учетом ограничений (3.1) определяются три допустимых значения параметра  $\eta_j$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) и ограничение (3.5) на значения целочисленного параметра  $n$  в представлении (3.3), а также определяемые соотношениями (2.131) соответствующие указанным параметрам  $\eta_j$  начальные значения векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_0^{(\tau, \eta_j)}$  ( $j = \overline{1, 3}$ ) в разложениях векторных собственных функций (2.14) и (2.17).

При  $\tau = 1$  ( $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $n = 1$ ) соотношения (2.134) обеспечивают возможность построения физически непротиворечивого решения вспомогательной спектральной задачи, поскольку для любых материалов справедливы соотношения

$$\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22} > 2\tilde{c}_{12}, \quad \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} > \tilde{c}_{12}^2, \quad (3.14)$$

а, значит, и соотношения

$$\eta_1 = -1, \quad \eta_2 > 0, \quad \eta_3 > 0. \quad (3.15)$$

В случае  $\tau \neq 1$  выполнение условия (2.136), как уже отмечалось, вполне оправданного как для любых изотропных и трансверсально изотропных материалов, так и применительно к представленным в литературе наборам упругих характеристик цилиндрически ортотропных материалов [196, 287, 361, 382, 383], обеспечивает не только вещественность параметров  $\eta_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) и их удовлетворение ограничениям (3.1), но и линейную независимость формирующих базис трех частных решений, поскольку

$$\eta_1 > -1, \quad \eta_2 > 0 \quad (\eta_1 < \eta_2), \quad \eta_3 > 0. \quad (3.16)$$

Если же для  $\tau \neq 1$  выполняется условие (2.140), при котором  $\eta_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) удовлетворяют требованиям (3.1) для любых поставляемых соотношением (3.3), (3.5) значениях параметра  $\tau$ , то при выполнении обеспечивающего справедливость  $d > 0$  ограничения (2.142) соотношения (3.16) также останутся справедливыми, а при выполнении обеспечивающего справедливость  $d < 0$  ограничения (2.143) окажутся справедливыми соотношения (2.144). Таким образом, более мягкое, чем (2.136) ограничение

$$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}/\tilde{c}_{12} \quad (3.17)$$

совместно с вполне обоснованным ограничением (2.148) обеспечивают возможность построения физически непротиворечивого решения спектральной задачи при любых поставляемых соотношением (3.3), (3.5) значениях параметра  $\tau$ . Наконец в случае выполнения (2.146) вопрос о существовании физически непротиворечивого решения спектральной задачи при  $\tau \neq 1$  сводится к прямой

проверке, с одной стороны, удовлетворения требованиям (3.1) поставляемых соотношениями (2.130) с учетом представлений (3.3), (3.5) значений параметров  $\eta_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ), с другой, выполнения требования  $d \neq 0$  (2.147). Здесь величина  $d$  определяется в соотношениях (2.133) с учетом (2.129).

Окончательно, соответствующие параметрам  $\eta_j$  искомые векторные коэффициенты  $\mathbf{X}_m^{(\tau, \eta_j)}$  ( $j = \overline{1,3}; m = \overline{1, \infty}$ ) в разложениях векторных собственных функций (2.14) и (2.17) определяются из явных рекуррентных представлений (2.83), матричные коэффициенты  $\mathbf{W}_m^{(\tau, \eta, p)}$  ( $p = \overline{1,5}$ ) которых задаются соотношениями (2.84), а входящие в (2.84) матрицы  $\mathbf{Q}_m^{(\tau, \eta, p)}$  ( $p = \overline{1,5}$ ) определяются в (2.109). Решение спектральной задачи с учетом рассмотренных групп ограничений на величины  $\tilde{c}_{jp}$  нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала совместно с (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.93), (3.3), (3.5) записываются через матричные базисные представления (2.94) в которых прямоугольные матрицы  $\mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 1)}(r)$  и  $\mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r)$  определяются соответственно соотношениями (2.19) и (2.108).

В рамках представленной модели для рассматриваемого случая анизотропии в поле напряжений на ребре  $r=0$  также может возникать сингулярность. Для  $\tau = 1$ , как следует из (3.15), при

$$\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55} < 1 \quad (3.18)$$

сингулярность имеет вид

$$r^{\eta_3 - 1}. \quad (3.19)$$

Для  $\tau \neq 1$  наряду с сингулярностью вида (3.19), если выполняется условие

$$\tau < \sqrt{\tilde{c}_{55}/\tilde{c}_{44}}, \quad (3.20)$$

возникает также сингулярность вида

$$r^{\eta_1}, \quad (3.21)$$

если выполняется совместно с (2.136) или с (2.140) и (2.142) ограничение

$$\tau < \sqrt{2 + (\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66})) / (\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66})}, \quad (3.22)$$

или сингулярность вида

$$r^{\eta_1}, \quad r^{\eta_2}, \quad (3.23)$$

если выполняется совместно (2.140) и (2.143) ограничение

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{(b + \sqrt{d})} / (2a)\right) < 1. \quad (3.24)$$

Вопрос о сингулярности помимо (3.19) с условием (3.20), которая может породиться в рамках рассматриваемой модели при  $\tau \neq 1$  в случае выполнения ограничения (2.146) требует отдельного исследования для конкретных собственных значений  $\tau$  (3.3), (3.5) и величин  $\tilde{c}_{jp}$  нормированных модулей упругости однородного цилиндрически ортотропного материала. В Таблице 3.2 систематизирован для  $\tau \neq 1$  определяемой соотношениями (3.19), (3.21) и (3.23) характер сингулярности, возникающей в поле напряжений на ребре  $r = 0$  при различных сочетаниях рассмотренных выше ограничений.

Таблица 3.2.

		$\tau < \sqrt{2 + \frac{\zeta}{\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}}}$	$\operatorname{Re}\left(\sqrt{\frac{b + \sqrt{d}}{2a}}\right) < 1$	$\tau < \sqrt{\frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{44}}}$
$\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}}$		$r^{\eta_1}$		$r^{\eta_3-1}$
$\sqrt{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}} < \tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66} \leq \frac{\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}}{\tilde{c}_{12}}$	$\tau < \sqrt{-\frac{s + \sqrt{s^2 - 4hv}}{2h}}$	$r^{\eta_1}$		$r^{\eta_3-1}$
	$\tau > \sqrt{-\frac{s + \sqrt{s^2 - 4hv}}{2h}}$		$r^{\eta_1}, r^{\eta_2}$	$r^{\eta_3-1}$

Используемые в Таблице 3.2 параметры  $\zeta$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $s$ ,  $h$ ,  $v$  определяются соотношениями (2.129) и (2.133).

### 3.3. Получение дисперсионных соотношений и результаты численных экспериментов

Результатом представленных в предыдущих подразделах исследований

является получение в аналитическом виде решений вспомогательных спектральных задач с однородными условиями на радиальных участках граничной поверхности (1.23) для моделей волновых процессов в протяженных цилиндрах секторного поперечного сечения из трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных материалов. Следующим этапом решения задачи является удовлетворение однородным краевым условиям на свободном (1.24) либо жестко закрепленном (1.25) цилиндрическом участке граничной поверхности.

Применительно к геометрии волновода в рассматриваемой задаче строятся дисперсионные соотношения, определяющие независимые спектры волн  $S$ -типа ( $\beta = 0$ ) и  $A$ -типа ( $\beta = \pi/2$ ) для граничных условий вида (2.153).

Особенностью анализируемых волновых процессов в протяженных анизотропных цилиндрах является полная идентичность их моделей для случая волновода секторного сечения со свободным либо жестко закрепленным цилиндрическим участком граничной поверхности при  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $n = 1$  и моделей распространения нормальных волн с круговым волновым числом  $\tau = 1$  ( $\beta = 0$ ) вдоль цилиндрического волновода кругового поперечного сечения соответственно со свободной либо жестко закрепленной граничной поверхностью. Этот факт используется для численной верификации результатов расчетов с использованием программных модулей, разработанных для реализации построенных аналитических решений. В рамках исследований проведен расчет фрагмента спектра мод распространяющихся нормальных волн в однородном ( $\lambda = 0$ ,  $q = 0$ ) трансверсально-изотропном цилиндре секторного поперечного сечения угловой меры  $\alpha = \pi/2$  из описываемого в подразделе 2.4 материала М4 для случая свободного цилиндрического участка граничной поверхности и волн  $S$ -типа ( $\beta = 0$ ), характеризуемых спектральным параметром  $\tau = 1$ . Сопоставляемые результаты ранее проводившихся исследований даны в работе [278]. Сравнение результатов выполненных расчетов показало их полное соответствие.

Для исследования факторов влияния величины показателей радиальной неоднородности  $(\lambda, q)$  и угловой меры секторного выреза  $\alpha$  на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн при численном эксперименте рассматривались цилиндры из введенных в рассмотрение в подразделе 2.4 материалов М1 – М4. Расчет фрагментов дисперсионных спектров бегущих нормальных волн осуществлялся в диапазонах изменения параметров приведенной частоты  $\Omega \in [0, 45]$  и продольного нормализованного волнового числа  $ka \in [0, 30]$  ( $a = R_*$ ) для значений угловой меры секторного сечения  $\alpha = \pi/3$  ( $\tau = 3/2, \beta = 0$ ) и  $\alpha = 5\pi/6$  ( $\tau = 3/5, \beta = 0$ ) в случаях однородного ( $\lambda = 0, q = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = \ln(2), q = 6$ ) цилиндров со свободным участком цилиндрической граничной поверхности. Для сопоставительного анализа влияния радиальной неоднородности материала волновода на распределение действительных ветвей в исследуемых спектрах, аналогично тому, как это сделано в п.п. 2.4, вводится параметр нормализованной частоты  $\omega a/c_t$ . Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости при визуализации на Рисунках 3.1–3.6 спектров для однородных и неоднородных цилиндров с одинаковыми наборами параметров  $\tilde{c}_{js}$  определялся из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты в дисперсионном спектре соответствующего однородного волновода.

Результаты расчета дисперсионных спектров для неоднородных волноводов ( $\lambda = \ln(2), q = 6$ ) из материала М4 представлены на Рисунке 3.1 ( $\alpha = \pi/3, \tau = 3/2, \beta = 0$ ) и на Рисунке 3.3 ( $\alpha = 5\pi/6, \tau = 3/5, \beta = 0$ ). Результаты расчета дисперсионных спектров для неоднородных волноводов ( $\lambda = \ln(2), q = 6$ ) из материала М1 представлены на Рисунке 3.2 ( $\alpha = \pi/3, \tau = 3/2, \beta = 0$ ) и на Рисунке 3.4 ( $\alpha = 5\pi/6, \tau = 3/5, \beta = 0$ ). Одной из особенностей представленных распределений является выраженное сближение критических частот для двух низших мод бегущих нормальных волн в цилиндре с угловым размером сечения

$\alpha = \pi/3$  ( $\tau = 3/2, \beta = 0$ ) в неоднородном цилиндре с параметрами ( $\lambda = \ln(2), q = 6$ ) из материала М1.

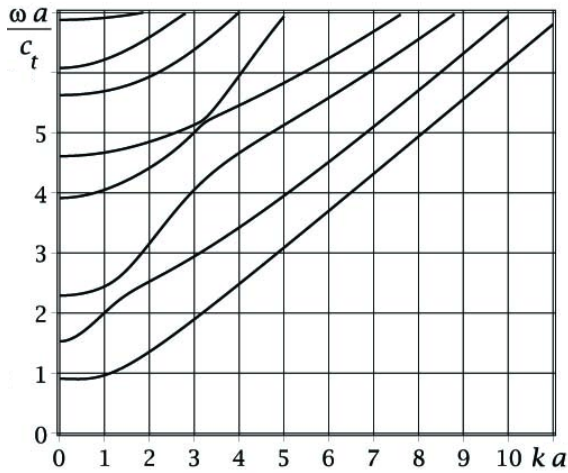


Рис. 3.1.

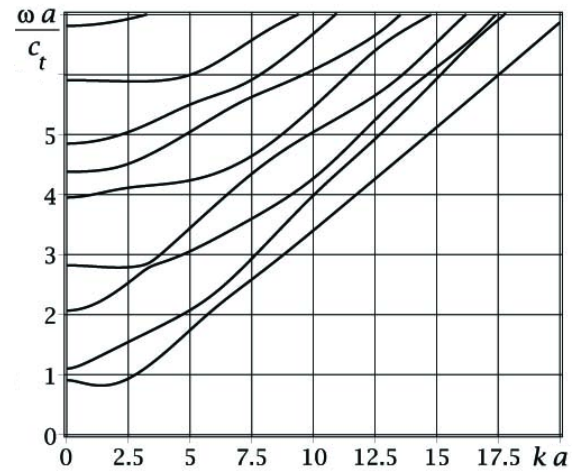


Рис. 3.2.

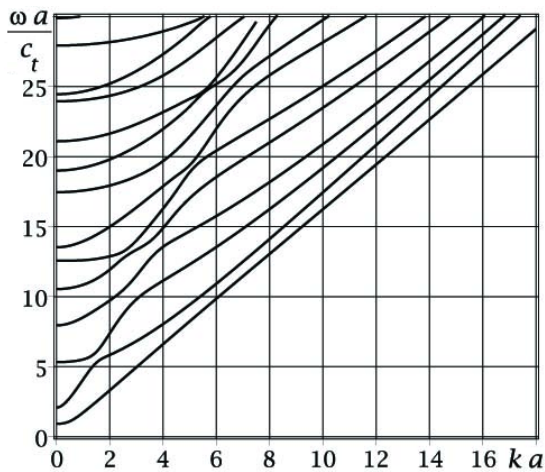


Рис. 3.3.

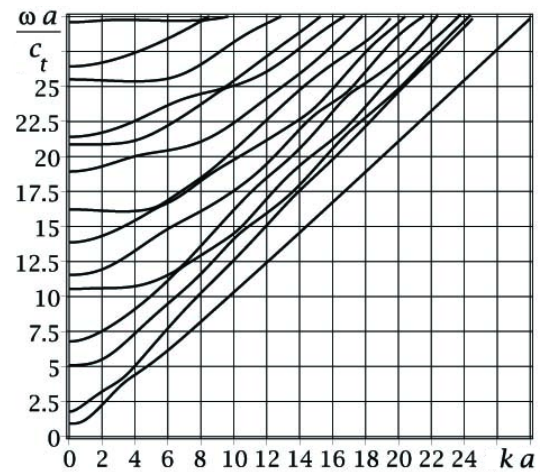


Рис. 3.4.

На Рисунке 3.5 ( $\alpha = \pi/3, \tau = 3/2, \beta = 0$ ) и Рисунке 3.6 ( $\alpha = 5\pi/6, \tau = 3/5, \beta = 0$ ) представлены результаты сравнительного количественного анализа различий в поведении первых шести мод спектров для однородного ( $\lambda = 0, q = 0$ ) и неоднородного ( $\lambda = \ln(2), q = 6$ ) цилиндров из материала М1 для различных значений угловой меры секторного выреза. В качестве количественной меры отличий в распределениях действительных ветвей сопоставляемых спектров использовалась функция (2.156) сравнения для мод с одинаковыми номерами в соответствующих спектрах, характеризующая эффекты относительного уменьшения либо увеличения нормализованных частот для



принадлежащих сопоставляемым модам волн равной относительной длины в неоднородном и однородном волноводах.

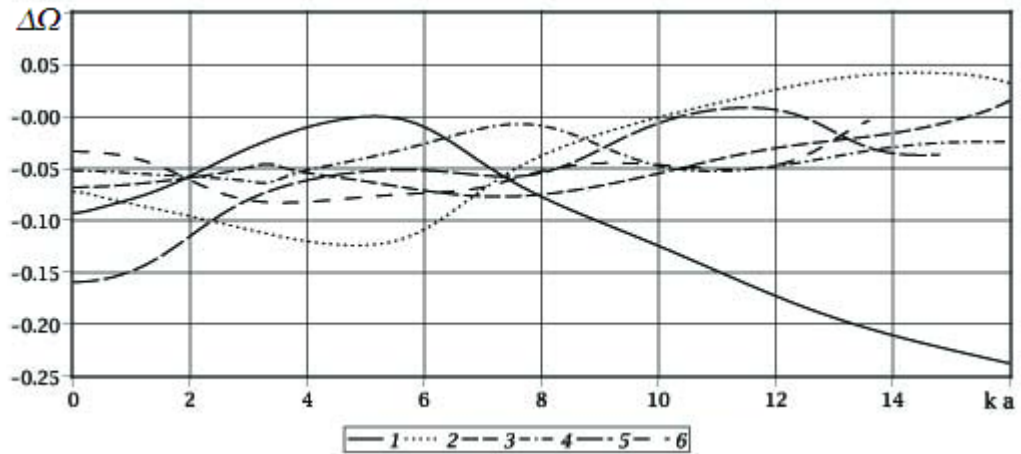


Рис. 3.5.

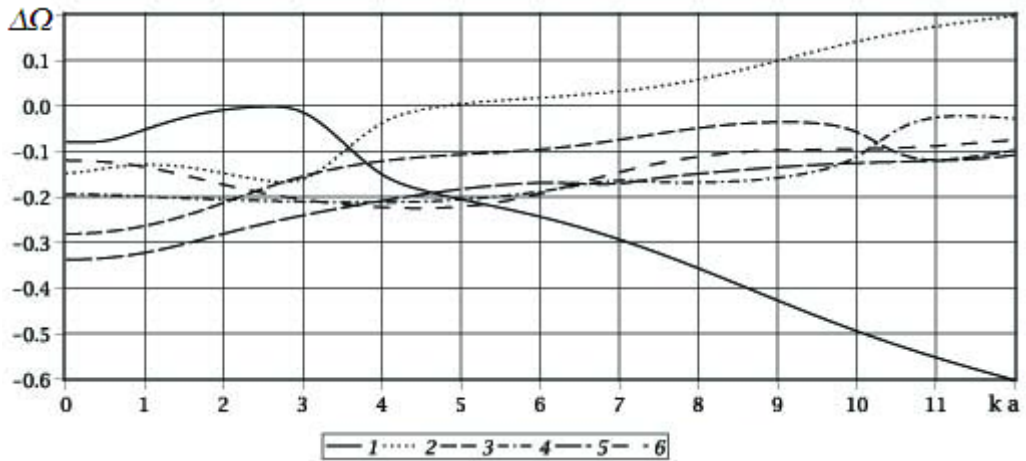


Рис. 3.6.

Здесь можно отметить общую закономерность относительного снижения нормализованных частоты для волн из первых шести мод спектра неоднородных волноводов в длинноволновом диапазоне (соответственно при  $ka < 10.0$  для случая  $(\alpha = \pi/3, \tau = 3/2, \beta = 0)$  и при  $ka < 4.8$  для  $(\alpha = 5\pi/6, \tau = 3/5, \beta = 0)$ . Указанная тенденция сохраняется при этом для волн первой моды и в оставшейся части диапазона относительных длин.

Результаты расчетов нормализованных фазовых скоростей для распространяющихся нормальных волн в неоднородном ( $\lambda = \ln(2), q = 6$ ) цилиндре из материала M1 при различных значениях угловой меры секторной

области сечения представлены на Рисунке 3.7 ( $\alpha = \pi/3, \tau = 3/2, \beta = 0$ ) и Рисунке 3.8 ( $\alpha = 5\pi/6, \tau = 3/2, \beta = 0$ ). Применительно к данным распределениям использовался нормирующий параметр  $c_0 = \sqrt{c_*/\rho_*}$  с размерностью скорости.

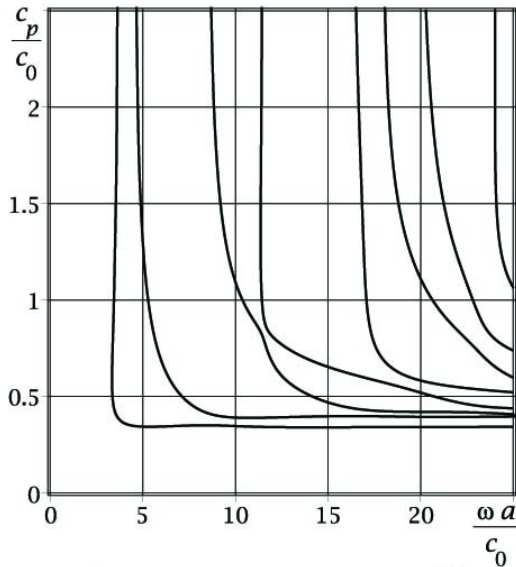


Рис. 3.7.

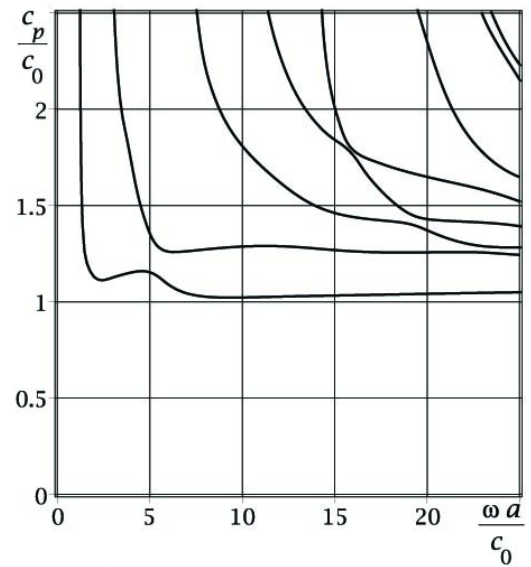


Рис. 3.8.

В качестве различий, выявленных при сопоставлении Рисунка 3.8 ( $\alpha = 5\pi/6$ ) и Рисунка 3.7 ( $\alpha = \pi/3$ ), отмечается, что при указанном увеличении угловой меры сектора в поперечном сечении волновода наблюдаются ряд эффектов. Это увеличение более чем в два раза асимптотического значения для нормированной фазовой скорости низшей моды спектра; “сдвиг” зоны устойчивого асимптотического поведения всех исследованных мод спектров в более высокочастотную область; трансформация эффекта сближения-расталкивания третьей и четвертой моды при  $\omega a/c_0 \approx 11$  в эффект сближения-расталкивания первой и второй мод при  $\omega a/c_0 \approx 5$ .

В качестве объектов для численного исследования эффектов влияния параметров геометрии  $\alpha$  и радиальной неоднородности  $(\lambda, q)$  цилиндрически-ортотропного материала волновода на топологические картины спектров бегущих нормальных упругих волн были выбраны свободные на цилиндрическом участке граничной поверхности волновода, поперечное сечение которых представляет собой секторы угловой меры  $\alpha = 5\pi/11$  и  $\alpha = 10\pi/11$ . Радиально неоднородный

цилиндрически-ортотропный материал волноводов задавался параметрами  $\tilde{c}_{js}$ , соответствующими введенному в рассмотрение в подразделе 2.4 материалу М5. Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных волн  $S$ -типа проводился для окружного волнового числа  $\tau$ , соответствующего  $n=1$  в соотношениях (3.3), в диапазонах изменения нормализованной частоты  $\omega a/c_t \in [0; 50]$  и нормализованного продольного волнового числа  $ka \in [0; 20]$  ( $a = R_*$ ) для случаев однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  и неоднородных  $(\lambda, q) \in \{(-\ln(2), 6), (\ln(3/2), 6)\}$  материалов волновода. Выбор указанных значений параметров функциональной неоднородности определялся задачей исследования эффектов влияния на структуру дисперсионных спектров вида локализации зон неоднородности материала в теле волновода. Так, случай  $q=6$  определяет зону локализации неоднородности у внешней поверхности волновода, и при этом задание величин параметров  $\lambda = -\ln(2)$  и  $\lambda = \ln(3/2)$  соответствует локальному уменьшению либо увеличению на 50% величин физико-механических характеристик материала. Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости для всей группы рисунков, относящихся к волноводам с одинаковой угловой мерой сектора в поперечном сечении, имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты (мода с порядковым номером 1 в спектре) в случае однородного материала волновода. В частности,  $\Omega_{0,0}^{(1)}(0) \approx 0.6969$  при  $\alpha = 5\pi/11$ ;  $\Omega_{0,0}^{(1)}(0) \approx 0.5292$  при  $\alpha = 10\pi/11$ .

Ниже представлены спектры бегущих нормальных волн  $S$ -типа для неоднородных волноводов с параметрами неоднородности  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  при  $\alpha = 5\pi/11$  (соответственно Рисунок 3.9 и Рисунок 3.10) и  $\alpha = 10\pi/11$  (соответственно Рисунок 3.11 и Рисунок 3.12). Места визуального контакта мод подставляют собой зоны их локального сближения и расталкивания. Для анализа количественных различий в распределениях действительных ветвей сопоставляемых спектров использовалась функция (2.156).

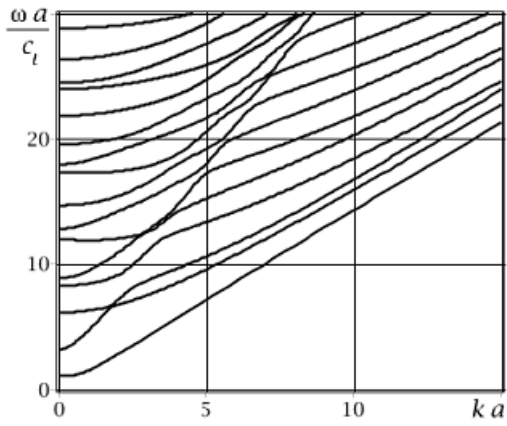


Рис. 3.9.

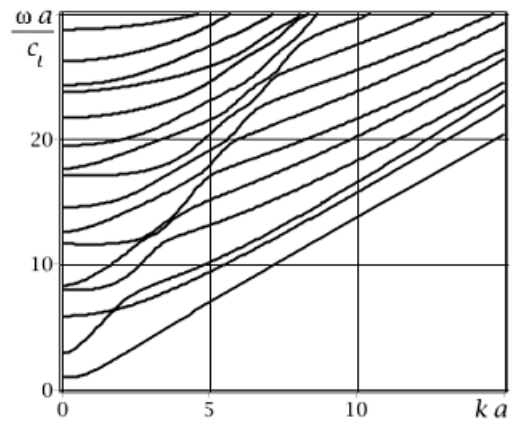


Рис. 3.10.

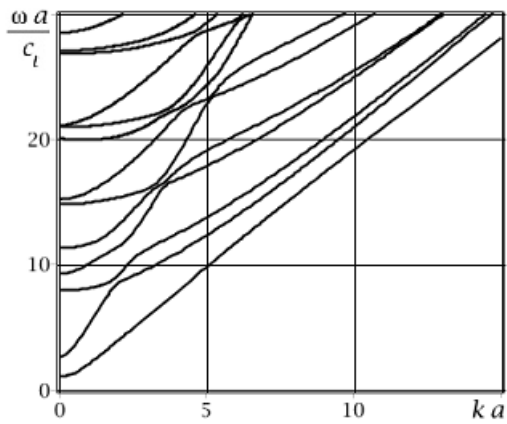


Рис. 3.11.

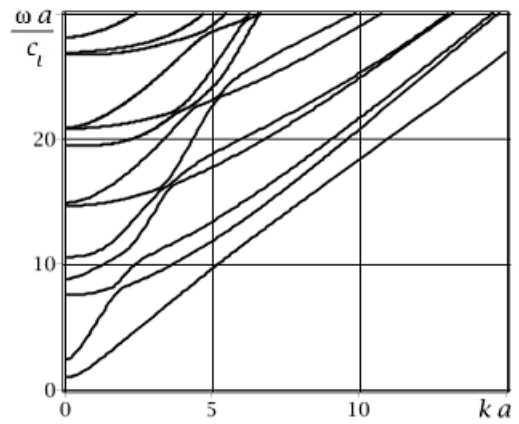


Рис. 3.12.

Результаты расчетов функции сравнения для пяти низших мод в однородных и неоднородных цилиндрах со сходной геометрией и краевыми условиями соответственно приведены на Рисунке 3.13 и Рисунке 3.14 применительно к волноводам угловых размеров  $\alpha = 5\pi/11$  с параметрами неоднородности  $(\lambda, q) = (\ln(1/2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ ,

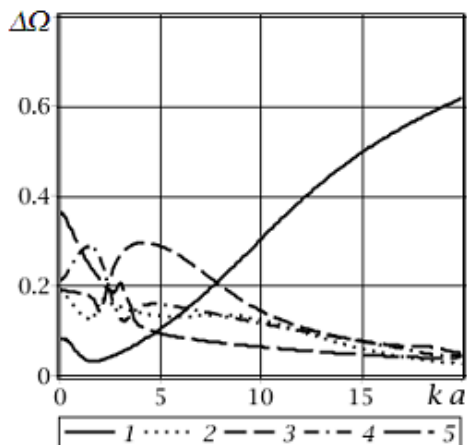


Рис. 3.13.

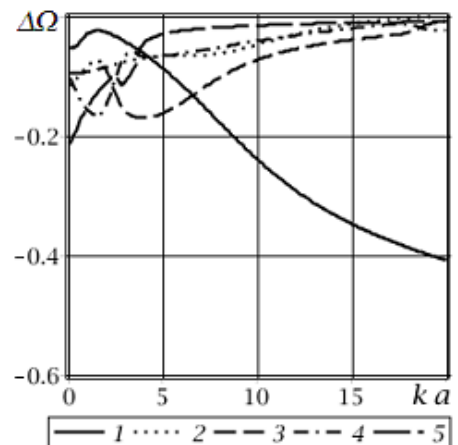


Рис. 3.14.

а также на Рисунке 3.15 и Рисунке 3.16 применительно к волноводам угловых размеров  $\alpha = 10\pi/11$  с параметрами неоднородности  $(\lambda, q) = (\ln(1/2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ .

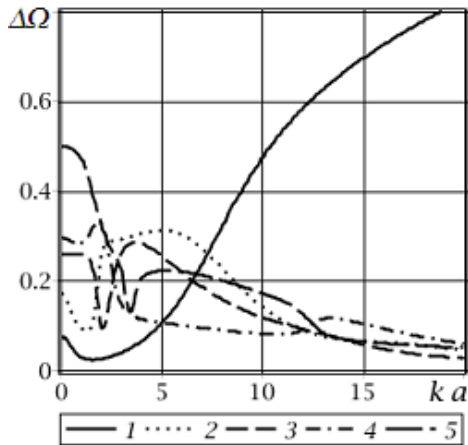


Рис. 3.15.

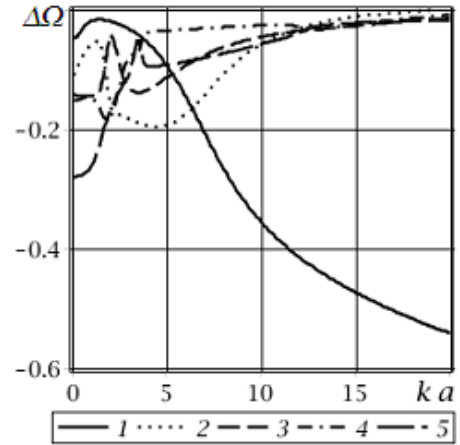


Рис. 3.16.

Как и в ранее представленных в п.п. 2.4 случаях расчетов подобной функции, результаты для мод с каждым рассматриваемым номером изображаются отдельным типом указываемой в подрисуночной надписи кривой. В качестве общей тенденции в поведении функции сравнения для рассматриваемых случаев может быть отмечено существенное влияние фактора неоднородности на траектории первых ветвей спектров в диапазоне волн со средней относительной длиной  $ka \in [5, 10]$  и, особенно в коротковолновом  $ka \in [10, 20]$  диапазоне. На поведение мод, начиная со второй, фактор неоднородности сказывается, в первую очередь, в длинноволновом диапазоне  $ka \in [0, 5]$ , а в коротковолновом диапазоне  $ka \in [10, 20]$  степень его влияния монотонно снижается. Для рассматриваемых случаев максимально влияние неоднородности на поведение старших мод проявляется для пятой моды при  $ka \rightarrow 0$ . Это свойство отмечается для всех рассмотренных значений параметров неоднородности  $(\lambda, q)$  и угловых размеров сектора в поперечном сечении волновода. Общими эффектами являются также смещение траекторий всех рассматриваемых мод в область меньших частот при увеличении параметра неоднородности ( $\lambda = \ln(3/2)$ ) физико-механических характеристик материала и альтернативное смещение траекторий всех

рассматриваемых мод в область увеличивающихся частот при уменьшении величины параметра неоднородности ( $\lambda = \ln(1/2)$ ).

В ходе исследований также рассчитаны графики распределений нормализованных фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных волн в цилиндрах с параметром неоднородности  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$ . Для волноводов с угловыми размерами секторного сечения  $\alpha = 5\pi/11$  и  $\alpha = 10\pi/11$  фазовые скорости соответственно приведены на Рисунке 3.17 и Рисунке 3.18, а групповые на Рисунке 3.19 и Рисунке 3.20.

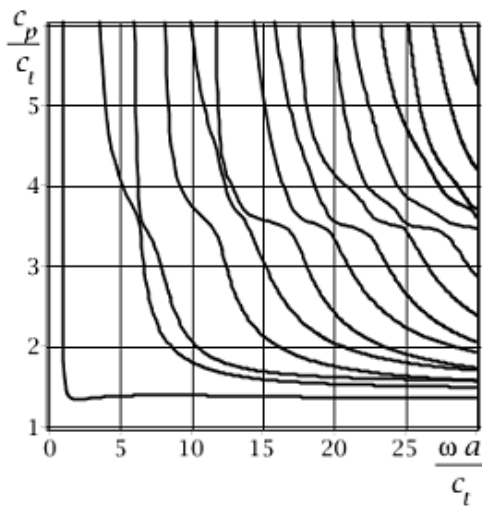


Рис. 3.17.

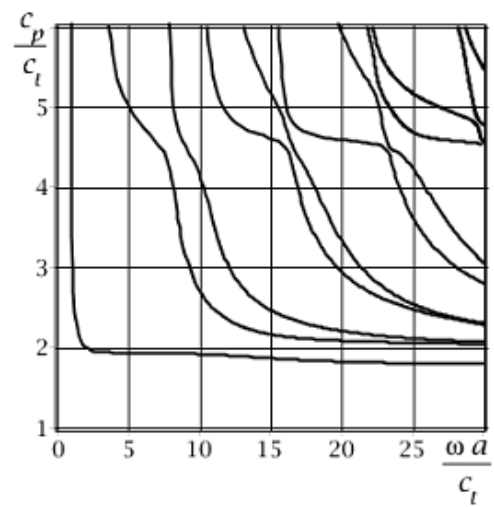


Рис. 3.18.

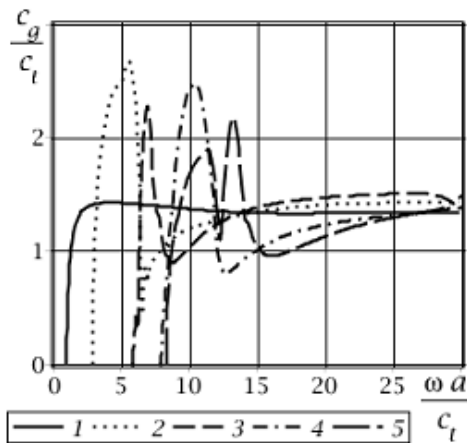


Рис. 3.19.

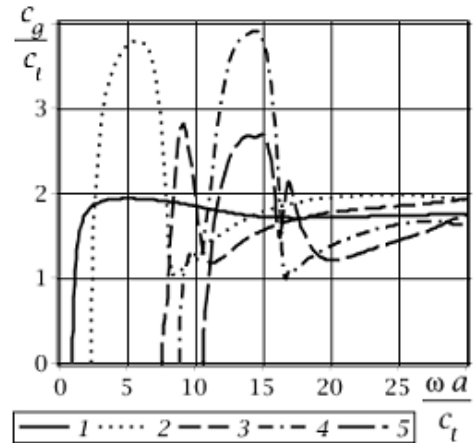


Рис. 3.20.

### Выводы к разделу 3

В разделе решена задача разработки теоретической численно-

аналитической методики исследования процессов распространения нормальных упругих волн в радиально неоднородных трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных протяженных цилиндрах секторно-кругового поперечного сечения со свободным либо жестко закрепленным цилиндрическим участком граничной поверхности при наличии гибкого нерастяжимого покрытия на ее радиальных участках.

В рамках осуществленных исследований:

1. Поставлены и решены две вспомогательные спектральные задачи для исследования проблемы распространения нормальных волн  $S$ -типа и  $A$ -типа в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных протяженных цилиндрах с радиальной неоднородностью материала экспоненциально-степенного типа, имеющих поперечные сечения в виде кругового сектора при наличии гибкого нерастяжимого покрытия на радиальных участках граничной поверхности; построены базисные множества частных аналитических решений указанных спектральных задач и исследованы их асимптотические свойства.

2. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов вычислений, связанных с получением аналитических представлений частных решений указанных спектральных задач.

3. Проведен сравнительный анализ топологического строения исследуемых дисперсионных спектров, распределений действительных ветвей бегущих нормальных волн  $S$ -типа, их фазовых и групповых скоростей в однородных и радиально неоднородных трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных протяженных цилиндрах, имеющих поперечные сечения в виде кругового сектора различной угловой меры в случае свободного цилиндрического участка граничной поверхности; проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики параметров экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала и угловой меры сектора в сечении волновода.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [105, 134, 140, 149, 162, 188, 293, 320].

## РАЗДЕЛ 4

**ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ СВОБОДНЫХ ЛИБО ЖЕСТКО  
ЗАКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРАХ СЕКТОРНО-КРУГОВОГО  
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

**4.1. Постановка и решение вспомогательных спектральных задач для волноводов со свободной граничной поверхностью**

Рассматривается протяженный трансверсально изотропный цилиндр, занимающий область  $V_2$  (1.4) с граничной поверхностью  $G_2$  (1.9), имеющий в поперечном сечении форму сектора (Рисунок 1.2) Функциональный закон радиальной неоднородности материала волновода задается соотношениями (1.35), (1.36). Математическая модель включает: уравнения (1.14), (1.16), (1.20) и однородные условия на гладких участках граничной поверхности (1.26) либо (1.27). Частные решения уравнений (1.14), (1.16), (1.20) с учетом снятого из геометрических соображений для параметра  $\tau$  ограничения  $\tau \in \mathbb{Z}$  совместно с (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.93) выражаются в общем случае  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  с использованием матричных представлений (2.80), (2.82) – (2.84), (2.86), (2.90), (2.92), (2.94), а в частном случае  $q=0$  также и с использованием матричных представлений (2.103) – (2.105). При этом в указанных для общего случая  $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  соотношениях на определяемые представлениями (2.79) параметры  $\eta_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) накладываются ограничения (3.1), обеспечивающие физическую корректность решений волновых уравнений, заключающуюся в ограниченности плотности описываемых решениями энергетических потоков в окрестности сингулярной точки  $r=0$  границы сечения волновода.

Ставятся две вспомогательные спектральные задачи  $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$   $\beta \in \{0, \pi/2\}$  – построить для заданного типа симметрии волновых движений  $\beta=0$  и  $\beta=\pi/2$



множества решений уравнений (1.14), (1.16), (1.20), удовлетворяющие однородным условиям свободных радиальных участков  $G_2^{(\pm)}$  граничной поверхности волновода (1.26).

На первом этапе с использованием представлений (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8), (2.80), (2.82) – (2.84), (2.86), (2.90), (2.92) на основе трех линейно независимых частных решений уравнений (1.14), (1.16), (1.20) определяются базисные решения, которые далее используются для построения искомого решения поставленных спектральных задач. С этой целью соотношения (2.79), определяющие зависимости между параметрами  $\eta_j$  и  $\tau_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) записываются в параметрическом виде

$$\eta_j(\xi) = \xi \quad (j = \overline{1,3}), \quad \tau_1(\xi) = \xi + 2, \quad \tau_2(\xi) = \xi, \quad \tau_3(\xi) = \xi. \quad (4.1)$$

Тогда ограничения (3.1) соответственно принимают такой вид

$$\begin{aligned} \xi = -1 \text{ или } \operatorname{Re}(\xi) > -1, \text{ если } \left[ \mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi)} \right]_3 = 0, \\ \xi = 0 \text{ или } \operatorname{Re}(\xi) > 0, \text{ если } \left[ \mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi)} \right]_3 \neq 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

На основании соотношений (1.38), (2.1), (2.7), (2.14), (2.17) указанные частные решения записываются в таком виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(\xi, j)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{U}^{(\xi, j)}(r, \theta), \\ \mathbf{E}^{(\xi, j)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{E}^{(\xi, j)}(r, \theta), \\ \mathbf{S}^{(\xi, j)}(r, \theta, z, t) &= \exp((1 - \delta) f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{S}^{(\xi, j)}(r, \theta) \\ &\quad (j = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В представлениях (4.3) используются амплитудные составляющие частных решений

$$\mathbf{U}^{(\xi, j)}(r, \theta) = \mathbf{T}_1^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(\xi,j)}(r,\theta) &= \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi),\xi,1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi),\xi)}, \\
\mathbf{S}^{(\xi,j)}(r,\theta) &= \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi),\xi,2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi),\xi)} \\
&\quad (j=\overline{1,3}).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь и далее термин амплитудные составляющие применяется к части решения без учета экспоненциального множителя  $\exp(-\delta f_{\lambda,q}(r))$  или  $\exp((1-\delta)f_{\lambda,q}(r))$  соответственно. Тогда матричные базисные решения для поставленных спектральных задач определяются так

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(\xi,B)}(r,\theta,z,t) &= \exp(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{U}^{(\xi,B)}(r,\theta), \\
\mathbf{E}^{(\xi,B)}(r,\theta,z,t) &= \exp(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{E}^{(\xi,B)}(r,\theta), \\
\mathbf{S}^{(\xi,B)}(r,\theta,z,t) &= \exp((1-\delta)f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{S}^{(\xi,B)}(r,\theta).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Входящие в соотношения (4.5) матричные амплитудные составляющие базисных решений с использованием соотношений (4.4) определяются в следующем виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(\xi,B)}(r,\theta) &= \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi,0)}(\theta), \\
\mathbf{E}^{(\xi,B)}(r,\theta) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi,1)}(r,\theta), \\
\mathbf{S}^{(\xi,B)}(r,\theta) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi,2)}(r,\theta) \\
&\quad q \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{0\}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь  $\mathbf{Z}_m^{(\xi,0)}(\theta)$  и  $\mathbf{Z}_m^{(\xi,j)}(r,\theta)$  ( $j=\overline{1,2}$ ) – матрицы размерности соответственно  $3 \times 3$  и  $6 \times 3$  такого вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_m^{(\xi,0)}(\theta) &= \left[ \mathbf{T}_1^{(\tau_1(\xi))}(\theta) \mathbf{X}_m^{(\tau_1(\xi),\xi)}, \mathbf{T}_1^{(\tau_2(\xi))}(\theta) \mathbf{X}_m^{(\tau_2(\xi),\xi)}, \mathbf{T}_1^{(\tau_3(\xi))}(\theta) \mathbf{X}_m^{(\tau_3(\xi),\xi)} \right], \\
\mathbf{Z}_m^{(\xi,j)}(r,\theta) &= \left[ \mathbf{T}_2^{(\tau_1(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_1(\xi),\xi,j)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau_1(\xi),\xi)}, \mathbf{T}_2^{(\tau_2(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_2(\xi),\xi,j)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau_2(\xi),\xi)}, \right.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_2^{(\tau_3(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_3(\xi), \xi, j)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau_3(\xi), \xi)} \Big] \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (4.7)$$

Матрицы  $\mathbf{T}_j^{(\tau)}(\theta)$ ,  $\mathbf{A}_j(r)$  и  $\mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, j)}(r)$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) в приведенных соотношениях определяются в (1.44), (2.4), (2.16), (2.18), (2.19). Случай  $q=1$  в представлениях (4.6) исключается, поскольку в рамках рассматриваемой модели, как указано в ограничениях (2.91), построение решения для  $q=1$  возможно только при  $\tau=1$ . Искомые векторные решения поставленных спектральных задач (далее спектральные решения) строятся в виде линейных комбинаций базисных решений (4.5), (4.6) с произвольными векторными коэффициентами третьего порядка. Вводятся следующие представления

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(\gamma, S)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{U}^{(\gamma, S)}(r, \theta), \\ \mathbf{E}^{(\gamma, S)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{E}^{(\gamma, S)}(r, \theta), \\ \mathbf{S}^{(\gamma, S)}(r, \theta, z, t) &= \exp((1-\delta) f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{S}^{(\gamma, S)}(r, \theta). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь  $\mathbf{U}^{(\gamma, S)}(r, \theta)$ ,  $\mathbf{E}^{(\gamma, S)}(r, \theta)$ ,  $\mathbf{S}^{(\gamma, S)}(r, \theta)$  – векторные амплитудные составляющие решений спектральных задач

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(\gamma, S)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}^{(\gamma+n, B)}(r, \theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)}, \\ \mathbf{E}^{(\gamma, S)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}^{(\gamma+n, B)}(r, \theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)}, \\ \mathbf{S}^{(\gamma, S)}(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{S}^{(\gamma+n, B)}(r, \theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В приведенных соотношениях  $\gamma$  ( $\gamma \in \mathbb{C}$ ) и  $\{\mathbf{B}_n^{(\gamma)}\}_{n=0}^{\infty}$  – подлежащие определению из соответствующих спектральной задаче однородных граничных условий собственное значение и отвечающий ему набор векторных коэффициентов разложения собственной векторной функции. При этом ограничения на собственные значения  $\gamma$  с учетом (2.16), (2.18), (2.19), (4.2), (4.6), (4.7), (4.9) принимают такой вид

$$\begin{aligned} \gamma = -1 \text{ или } \operatorname{Re}(\gamma) > -1, \text{ если } \left[ \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \right]_3 &= 0, \\ \gamma = 0 \text{ или } \operatorname{Re}(\gamma) > 0, \text{ если } \left[ \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \right]_3 &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Далее полагается, что ряды в соотношениях (4.9) сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке  $r \in [r_0, 1]$  ( $0 < r_0 < 1$ ).

Из граничных условий (1.24) на радиальных участках  $G_2^{(\pm)}$  с учетом (4.8) получается функциональное уравнение

$$\left[ \mathbf{S}^{(\gamma, S)}(r, \alpha) \right]_{(6,2,4)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in (0, 1]). \quad (4.11)$$

С учетом представлений (2.19) получаются соотношения

$$\left[ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2)}(r) \right]_{(6,2,4), (1,2,3)} = \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2, 0)} + r^2 \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2, 1)} + r^q \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2, 2)} \quad (m = \overline{0, \infty}), \quad (4.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2, 0)} &= \begin{bmatrix} -\tau c_{66} & (\eta + m) c_{66} & 0 \\ (\eta + m + 1) c_{12} + c_{11} & \tau c_{11} & -k c_{13} \\ 0 & 0 & -\tau c_{44} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2, 1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k c_{44} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_m^{(\tau, \eta, 2, 2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \lambda q c_{66} & 0 \\ -\delta \lambda q c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Тогда на основании соотношений (4.7), (4.12) получается

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{Z}_m^{(\xi, 2)}(r, \theta) \right]_{(6,2,4), (1,2,3)} &= \mathbf{Z}_m^{(\xi, 2, 0)}(\theta) + r^2 \mathbf{Z}_m^{(\xi, 2, 1)}(\theta) + r^q \mathbf{Z}_m^{(\xi, 2, 2)}(\theta) \\ &\quad (m = \overline{0, \infty}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 2, j)}(\theta) &= \left[ \mathbf{T}_2^{(\tau_1)}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_1, \eta_1, 2, j)} \mathbf{X}_m^{(\tau_1, \eta_1)}, \mathbf{T}_2^{(\tau_2)}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_2, \eta_2, 2, j)} \mathbf{X}_m^{(\tau_2, \eta_2)}, \right. \\ &\quad \left. \mathbf{T}_2^{(\tau_3)}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_3, \eta_3, 2, j)} \mathbf{X}_m^{(\tau_3, \eta_3)} \right] \quad (j = \overline{0, 2}; m = \overline{0, \infty}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь  $\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) = \left[ \mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta) \right]_{(6,2,4), (6,2,4)}$ . Таким образом, с учетом соотношений (4.6),

(4.14), (4.15) функциональное уравнение (4.11) переписывается так

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{n=0}^p \left( \mathbf{Z}_{p-n}^{(\gamma+n,2,0)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-2}^{(\gamma+n,2,1)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-q}^{(\gamma+n,2,2)}(\alpha) \right) \mathbf{B}_n^{(\gamma)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0,1]). \quad (4.16)$$

В (4.16) полагается, что в дополнение к (4.15) выполняются также соотношения

$$\mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j)}(\theta) = \mathbf{O} \quad (j = \overline{0,2}; m < 0). \quad (4.17)$$

Требование выполнения (4.16) в точке  $r = 0$  порождает однородное уравнение

$$\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha) \mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \hat{\mathbf{O}}, \quad (4.18)$$

определяющее, во-первых, уравнение для искомого множества собственных значений  $\gamma$

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)) = 0, \quad (4.19)$$

во-вторых, с точностью до произвольного скалярного множителя соответствующий каждому собственному значению векторный коэффициент  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$ . Элементы матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)$  равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{1,1} &= -2c_{66}(1+\gamma)\sin((2+\gamma)\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{1,2} &= 2c_{66}(c_{11} - c_{66})\gamma(1+\gamma)\sin(\gamma\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{1,3} &= -2c_{66}k\gamma\sin(\gamma\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{2,1} &= -2c_{66}(1+\gamma)\cos((2+\gamma)\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{2,2} &= 2c_{66}(c_{11} - c_{66})(2+\gamma)(1+\gamma)\cos(\gamma\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{2,3} &= 2k(c_{11}c_{44} - ((2+\gamma)c_{13} + (1+\gamma)c_{44})c_{66})\cos(\gamma\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{3,1} &= [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{3,2} = 0, \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\alpha)]_{3,3} &= -2c_{44}(c_{11} + c_{66})\gamma\sin(\gamma\alpha + \beta)/(c_{13} + c_{44}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

В начале рассматривается случай  $\alpha = \pi/2$ . При  $\gamma = -1$  ранг матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(-1,2,0)}(\pi/2)$  равен 1. Следовательно, уравнение (4.18) имеет два линейно

независимых решения. С точностью до произвольного скалярного множителя указанные решения записываются в следующем виде

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma_1)} = [1, 0, 0]^{(T)}, \quad \mathbf{B}_0^{(\gamma_2)} = [0, 1, 0]^{(T)} \quad (\gamma_1 = \gamma_2 = -1). \quad (4.21)$$

Установлено, что собственные векторные функции, соответствующие этим начальным векторным коэффициентам являются нетривиальными и линейно зависимыми. При  $\gamma = 0$  ранг матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(0,2,0)}(\pi/2)$  равен 1. Следовательно, уравнение (4.18) имеет два линейно независимых решения. При этом установлено, что соответствующие этим двум решениям в случае  $\beta = \pi/2$

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma_1)} = [0, 1, 0]^{(T)}, \quad \mathbf{B}_0^{(\gamma_2)} = [0, 0, 1]^{(T)} \quad (\gamma_1 = \gamma_2 = 0) \quad (4.22)$$

собственные векторные функции также являются нетривиальными и линейно зависимыми. Из структуры матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0)}(\pi/2)$  следует, что уравнение (4.19) распадается на два независимых уравнения (корни  $\gamma = -1$  и  $\gamma = 0$  при  $\beta = \pi/2$  кратности 1, а также  $\gamma = 0$  при  $\beta = 0$  кратности 2 здесь учитываются)

$$\sin(\pi\gamma/2) \cos(\pi\gamma/2) = 0 \quad (\gamma \geq -1), \quad (4.23)$$

$$\sin(\pi\gamma/2 + \beta) = 0 \quad (\gamma \geq 0). \quad (4.24)$$

Определяются два множества корней, порождаемых уравнениями  $\sin(\pi\gamma/2) = 0$  и  $\cos(\pi\gamma/2) = 0$  в области  $\gamma \in [0, \infty)$  соответственно

$$\Xi^{(\sin)} = \{2(j-1)\}_{j=1}^{\infty}, \quad \Xi^{(\cos)} = \{-1+2j\}_{j=1}^{\infty}. \quad (4.25)$$

Тогда с учетом сделанных выше замечаний и соотношений (4.25) окончательно записываются представления для коэффициентов  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$  в таком виде

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} (c_{11} - c_{66})(\gamma \sin(\beta + \pi\gamma/2) + (\gamma + 2)\cos(\beta + \pi\gamma/2)) \\ -\sin(\beta + \pi\gamma/2) - \cos(\beta + \pi\gamma/2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\pi/2, \beta)}),$$

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} 0 \\ k(((2+\gamma)c_{13} + (1+\gamma)c_{44})c_{66} - c_{11}c_{44}) \\ (1+\gamma)(2+\gamma)c_{66}(c_{11} - c_{66})(c_{13} + c_{44}) \end{bmatrix} \quad (\gamma \in \Xi_2^{(\pi/2, \beta)}). \quad (4.26)$$

Здесь используются два множества собственных значений, определяемые уравнениями (4.23) и (4.24) соответственно

$$\left( \Xi_1^{(\pi/2, \beta)} = \{-1\} \cup \Xi^{(\sin)} \cup \Xi^{(\cos)} \right) \quad \beta \in \{0, \pi/2\} \quad (4.27)$$

и

$$\left( \Xi_2^{(\pi/2, 0)} = \Xi^{(\sin)} \text{ при } \beta=0, \quad \Xi_2^{(\pi/2, \pi/2)} = \Xi^{(\cos)} \text{ при } \beta=\pi/2 \right). \quad (4.28)$$

Следующим рассматривается случай  $\alpha \neq \pi/2$ . Как уже отмечалось, уравнение (4.19) распадается на два независимых уравнения, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} (1+\gamma)^2 \left( (1+\gamma) \sin(2\alpha) + \sin((1+\gamma)2\alpha + 2\beta) \right) &= 0 \\ (\gamma = -1 \text{ или } \operatorname{Re}(\gamma) > -1) & \end{aligned} \quad (4.29)$$

и

$$\gamma \sin(\gamma\alpha + \beta) = 0 \quad (\gamma \geq 0). \quad (4.30)$$

Отдельно рассматриваются случаи для корня уравнения (4.29)  $\gamma = -1$ , а также для общего корня уравнений (4.29) и (4.30) при  $\beta = \pi/2$   $\gamma = 0$ . Ранг матриц  $\mathbf{Z}_0^{(-1, 2, 0)}(\alpha)$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) и  $\mathbf{Z}_0^{(0, 2, 0)}(\alpha)$  ( $\beta = \pi/2$ ) равен 1. Следовательно, уравнение (4.18) в указанных случаях имеет два линейно независимых решения. Как и в случае  $\alpha = \pi/2$ , эти решения имеют вид соответственно (4.21) и (4.22). Установлено, что собственные векторные функции, соответствующие начальным векторным коэффициентам в соотношениях (4.21) и (4.22) также являются нетривиальными и попарно линейно зависимыми. Таким образом, для рассматриваемых вспомогательных спектральных задач множество собственных значений окончательно определяется так

$$\Xi^{(\alpha, \beta, \sigma)} = \Xi_1^{(\alpha, \beta)} \cup \Xi_2^{(\alpha, \beta)}, \quad (4.31)$$

где  $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$  и

$$\Xi_2^{(\alpha, \beta)} = \left\{ (\beta + (j-1)\pi) / \alpha \right\}_{j=1}^{\infty} \quad (4.32)$$

соответственно множества корней уравнений

$$(1+\gamma)\sin(2\alpha)+\sin((1+\gamma)2\alpha+2\beta)=0 \quad (\gamma=-1 \text{ или } \operatorname{Re}(\gamma)>-1) \quad (4.33)$$

и

$$\sin(\gamma\alpha+\beta)=0 \quad (\gamma\geq 0). \quad (4.34)$$

Поскольку при выполнении (4.34) уравнение (4.33) преобразуется к виду  $(2+\gamma)\sin(2\alpha)=0$ , следовательно, справедливо утверждение

$$\Xi_1^{(\alpha,\beta)} \cap \Xi_2^{(\alpha,\beta)} = \emptyset \quad (\alpha \neq \pi/2, \beta \in \{0, \pi/2\}). \quad (4.35)$$

Соответствующие собственным значениям из множества  $\Xi^{(\alpha,\beta,\sigma)}$  решения уравнения (4.18) с точностью до произвольного скалярного множителя записываются так

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} \gamma(c_{11}-c_{66})\sin(\gamma\alpha+\beta) \\ \sin((2+\gamma)\alpha+\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\alpha,\beta)}), \quad (4.36)$$

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} 0 \\ k(((2+\gamma)c_{13}+(1+\gamma)c_{44})c_{66}-c_{11}c_{44}) \\ (1+\gamma)(2+\gamma)c_{66}(c_{11}-c_{66})(c_{13}+c_{44}) \end{bmatrix} \quad (\gamma \in \Xi_2^{(\alpha,\beta)}). \quad (4.37)$$

Следует отметить три утверждения, справедливые при любых  $\alpha \in (0, \pi)$ . Во-первых, уравнение (4.33) совпадает с уравнением для определения собственных значений в задаче статики при плоской деформации свободного на радиальных полуплоскостях изотропного [354, 389] клина. Во-вторых, корень  $\gamma=-1$  уравнения (4.33), в отличие от задач статики, определяет нетривиальную собственную векторную функцию, порождающую отличные от нуля значения компонент вектора перемещений на ребре. В-третьих, множество собственных значений  $\Xi_2^{(\alpha,\pi/2)}$  и определяемое им множество собственных векторных функций в условно антисимметричном случае ( $\beta=\pi/2$ ) соответствующего аналога в статическом случае не имеют.

Уравнение (4.33) подробно исследовалось при решении задач статики для клиновидных областей [354]. Установлено, что это уравнение в области



$\operatorname{Re}(\gamma) > -1$  имеет конечное число вещественных и счетное множество пар комплексно сопряженных корней. При этом для рассматриваемого диапазона изменения угловой меры клина  $\alpha \in (0, \pi)$  в области  $-1 < \operatorname{Re}(\gamma) \leq 1/2$  уравнение (4.33) вообще не имеет корней, а в области  $-1/2 < \operatorname{Re}(\gamma) < 0$  может иметь не более одного вещественного корня. Условия наличия такого корня выглядят так [354]

$$\begin{aligned} \pi/2 < \alpha < \pi, & \text{ если } \beta = 0, \\ \alpha_* < \alpha < \pi, & \text{ если } \beta = \pi/2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где  $\alpha_* \approx 2.2467$  – первый положительный корень уравнения

$$\tan(2\alpha) = 2\alpha. \quad (4.39)$$

Следует отметить, что при  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \pi/2$  корень  $\gamma = 0$  уравнения (4.33) имеет кратность 2, но в рамках рассматриваемой модели представления решений спектральных задач в виде линейных комбинаций обобщенно степенных функций второго линейно независимого решения спектральной задачи построить невозможно. Для задач статики установлено [353], что для построения указанного решения необходимо привлекать дополнительно модель представления решений в виде линейных комбинаций обобщенно степенных функций с логарифмическими множителями. В основу положен тот факт, что уравнения равновесия не зависят от параметра разделения переменных, следовательно, частная производная по этому параметру от любого частного решения также является решением указанных уравнений [353, 354]. В рассматриваемой модели распространения нормальных волн вдоль протяженного цилиндра секторного поперечного сечения уравнения (1.14), (1.16), (1.20) также не зависят от параметра разделения переменных  $\xi$  в представлениях для частных решений (4.1), (4.3), (4.4). Следовательно, вторая группа частных решений будет иметь такой вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{U}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta), \\ \mathbf{E}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{E}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta), \\ \mathbf{S}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp((1-\delta)f_{\lambda, p}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{S}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta) \quad (j = \overline{1, 3}). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь используются амплитудные составляющие частных решений

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta) &= \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \left( \mathbf{T}_1^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)} + \right. \\
&\quad \left. + \left( \mathbf{T}_1^{(\tau_j(\xi))}(\theta) + \ln(r) \mathbf{T}_1^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \right) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)} \right), \\
\mathbf{E}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \left( \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)} + \right. \\
&\quad + \left( \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1)}(r) + \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1)}(r) + \right. \\
&\quad \left. + \ln(r) \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1)}(r) \right) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)} \Big), \\
\mathbf{S}^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \left( \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2)}(r) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)} + \right. \\
&\quad + \left( \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2)}(r) + \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2)}(r) + \right. \\
&\quad \left. + \ln(r) \mathbf{T}_2^{(\tau_j(\xi))}(\theta) \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2)}(r) \right) \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)} \Big) \\
&\quad (j = \overline{1, 3}). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

В соотношениях (4.41)

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}, \quad \mathbf{T}_n^{(\tau_j(\xi))}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{T}_n^{(\tau_j(\xi))}(\theta), \\
\mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, n)}(r) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{H}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, n)}(r) \quad (j = \overline{1, 3}; n = \overline{1, 2}; m = \overline{0, \infty}). \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Поскольку вычисление  $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$  в аналитическом виде на основании явных рекуррентных соотношений (2.80), (2.82) – (2.84), (2.86), (2.90), (2.92) даже для небольших значений  $m$  является чрезвычайно трудоемким, предлагается методика непосредственного построения векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$  и  $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$ , используемых в соотношениях (4.41). В результате подстановки соотношений (4.40), (4.41) в систему дифференциальных уравнений движения (1.14) получается матричное функциональное уравнение, которое преобразуется в рекуррентную последовательность матричных алгебраических уравнений для

определения векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$  и  $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi)}$  ( $j=\overline{1,3}$ ;  $m=\overline{0, \infty}$ ) следующего вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)} \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2, \ln)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 3, \ln)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} + \\ & + \mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 4, \ln)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} + \mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 5, \ln)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m=0, 1, \dots; j=\overline{1,3}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Здесь

$$\mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (n < 0), \quad (4.44)$$

$$\mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi)} \\ \mathbf{X}_n^{(\tau_j(\xi), \xi)} \end{bmatrix} \quad (n \geq 0), \quad (4.45)$$

$$\mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)} & \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)} \end{bmatrix} \quad (p=\overline{1,5}; n \geq 0), \quad (4.46)$$

$$(j=\overline{1,3}).$$

В соотношениях (4.46)  $\mathbf{Q}_n^{(\tau_j(\xi), \xi, p)}$  – квадратные матрицы третьего порядка, определяющиеся соотношениями (2.24). При  $m=0$  из соотношений (4.43) получается уравнение

$$\mathbf{Q}_0^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)} \mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (j=\overline{1,3}) \quad (4.47)$$

для определения начальных векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi, \ln)}$  и условие нетривиальной разрешимости

$$\det(\mathbf{Q}_0^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)}) = 0 \quad (j=\overline{1,3}), \quad (4.48)$$

которое определяет уже известное множество корней (4.1). При этом каждый корень из указанного множества имеет кратность 2. С учетом этого вводится расширенное множество допустимых значений параметров  $\eta_j$  и  $\tau_j$  ( $j=\overline{1,6}$ )

$$\eta_j = \xi \quad (j=\overline{1,6}), \quad \tau_1 = \tau_4 = \xi + 2, \quad \tau_2 = \tau_5 = \xi, \quad \tau_3 = \tau_6 = \xi. \quad (4.49)$$

Тогда из уравнения (4.47) с точностью до произвольного скалярного множителя

определяется шесть линейно независимых начальных векторных коэффициентов

$$\mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi)} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau_{j+3}(\xi), \xi, j+3, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi)} \\ \mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi)} \end{bmatrix} \quad (j = \overline{1, 3}). \quad (4.50)$$

При этом первые три начальных векторных коэффициента определяют уже известные частные решения, не содержащие логарифмического сомножителя. Далее модель, опирающаяся на определяемые соотношениями (4.49), (4.50) шесть частных решений уравнений (1.14), (1.16), (1.20) в представлениях базисных решений для поставленных спектральных задач будет называться интегрированной, а в соотношениях (4.43), (4.44) и (4.46) с учетом представлений (4.49), (4.50) будет полагаться, что  $j = \overline{1, 6}$ .

Для  $\tau_j(\xi)$  ( $j = 2, 3, 5, 6$ ) рекуррентные уравнения (4.43) с учетом того, что

$$\det(\mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)}) = \left( m^2 (m+2)(m+2\xi)^2 (m+2(\xi+1)) c_{11} c_{44} c_{66} \right)^2 \neq 0 \quad (\xi \geq 0; m \geq 1) \quad (4.51)$$

совместно с (4.44), (4.50) преобразуются в явные рекуррентные представления для определения последующих векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)}$  ( $m = \overline{1, \infty}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} &= \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} + \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2, \ln)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} + \\ &+ \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 3, \ln)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} + \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 4, \ln)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} \quad (m = 1, 2, \dots), \\ &(j = 2, 3, 5, 6). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Здесь

$$\mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, p, \ln)} = -\left( \mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)} \right)^{-1} \mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, p+1, \ln)} \quad (p = \overline{1, 4}; m = \overline{1, \infty}). \quad (4.53)$$

Для  $\tau_j = \xi + 2$  ( $j = 1, 4$ )

$$\det(\mathbf{Q}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)}) = \left( m(m-2)^2 (m+2(\xi+2))(m+2(\xi+1))^2 c_{11} c_{44} c_{66} \right)^2 \quad (\xi \geq 0; m \geq 1). \quad (4.54)$$

Значит при  $m=2$  определитель неоднородной системы линейных уравнений,

порождаемой рекуррентными уравнениями (4.43), обращается в нуль. Следовательно, требуется отдельное рассмотрение случаев  $m=1$ ,  $m=2$  и  $m \geq 3$ . Поскольку полагается, что  $q \neq 1$ , при  $m=1$  сразу получается

$$\mathbf{X}_1^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (j=1,4). \quad (4.55)$$

При  $m=2$  ранги матрицы  $\mathbf{Q}_2^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)}$  ( $j=1,4$ ) и расширенной матрицы

$$\left[ \mathbf{Q}_2^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)}, -\mathbf{Q}_2^{(\tau_j(\xi), \xi, 2, \ln)} \mathbf{X}_0^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} - \mathbf{Q}_2^{(\tau_j(\xi), \xi, 3, \ln)} \mathbf{X}_{2-q}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} \right] \quad (j=1,4)$$

совпадают и равняются 2. Следовательно, указанная система имеет нетривиальное решение, которое может быть записано так

$$\mathbf{X}_2^{(\tau_1(\xi), \xi, 1, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2^{(\tau_1(\xi), \xi)} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2^{(\tau_4(\xi), \xi, 4, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2^{(\tau_1(\xi), \xi)} \\ \mathbf{X}_2^{(\tau_1(\xi), \xi)} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Здесь вектора  $\mathbf{X}_2^{(\tau_1(\xi), \xi)}$  определяется соотношениями (2.90). При  $m \geq 3$   $\mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)}$  ( $j=1,4$ ) вычисляются на основе явных рекуррентных представлений

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} &= \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)} \mathbf{X}_{m-2}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} + \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2, \ln)} \mathbf{X}_{m-q}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} + \\ &+ \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 3, \ln)} \mathbf{X}_{m-2-q}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} + \mathbf{W}_m^{(\tau, \eta_j, 4, \ln)} \mathbf{X}_{m-2q}^{(\tau_j(\xi), \xi, j, \ln)} \quad (m=3,4,\dots), \\ &\quad (j=1,4). \end{aligned} \quad (4.57)$$

При этом справедливость следующих асимптотических оценок при  $m \rightarrow \infty$  для норм матричных коэффициентов (4.53) в рекуррентных представлениях (4.52), (4.57)

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 1, \ln)} \right\| &\approx m^{-1} \sqrt{2} |k| (1 + c_{13}/c_{44}), \quad \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 2, \ln)} \right\| \approx m^{-1} q \sqrt{6} |\lambda(1-2\delta)|, \\ \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 3, \ln)} \right\| &\approx m^{-2} q \sqrt{2} |\lambda k (\delta(1 + c_{13}/c_{44}) - 1)|, \\ \left\| \mathbf{W}_m^{(\tau_j(\xi), \xi, 4, \ln)} \right\| &\approx m^{-2} \lambda^2 q^2 \sqrt{6} |\delta(1-\delta)| \quad (j=\bar{1}, \bar{3}) \end{aligned} \quad (4.58)$$

обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость разложений в (4.41) на любом конечном отрезке  $r \in [r_0, r_1]$  ( $0 < r_0 < r_1 < \infty$ ).

Искомые векторные решения спектральной задачи  $\Upsilon^{(\pi/2, \sigma)}$  ( $\alpha = \alpha_*$ ) для

$\gamma=0$  в рамках интегрированной модели определяются как частная производная по  $\gamma$  от линейной комбинации базисных решений (4.5), (4.6) с векторными коэффициентами  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta,z,t) &= \exp(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{U}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta), \\ \mathbf{E}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta,z,t) &= \exp(-\delta f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{E}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta), \\ \mathbf{S}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta,z,t) &= \exp((1-\delta)f_{\lambda,q}(r) - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{S}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta),\end{aligned}\quad (4.59)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbf{U}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)} + \mathbf{U}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) \mathbf{B}_n'^{(\gamma)} \right), \\ \mathbf{E}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbf{E}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)} + \mathbf{E}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) \mathbf{B}_n'^{(\gamma)} \right), \\ \mathbf{S}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \mathbf{S}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma)} + \mathbf{S}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) \mathbf{B}_n'^{(\gamma)} \right).\end{aligned}\quad (4.60)$$

В соотношениях (4.60)  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  – векторные коэффициенты, определяемые на основании соотношений (4.16), (4.36) при  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \pi/2$ ,  $\gamma = 0$ ;

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathbf{U}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta), \quad \mathbf{E}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) = \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathbf{E}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta), \\ \mathbf{S}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathbf{S}^{(\gamma+n,B)}(r,\theta), \quad \mathbf{B}_n'^{(\gamma)} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \mathbf{B}_n^{(\gamma)}.\end{aligned}\quad (4.61)$$

Поскольку вычисление  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  в аналитическом виде, как это будет показано ниже, даже для небольших значений  $n$  является чрезвычайно трудоемким, предлагается методика непосредственного построения векторных коэффициентов  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  и  $\mathbf{B}_n'^{(\gamma)}$ . На основе шести линейно независимых частных решений (4.40), (4.41), построенных в рамках интегрированной модели и определяемых вспомогательными соотношениями (4.44), (4.46), (4.49), (4.50), (4.52), (4.53), (4.55) – (4.57), по аналогии с соотношениями (4.5) – (4.7) определяются базисные решения для спектральной задачи

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{U}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta), \\
\mathbf{E}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{E}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta), \\
\mathbf{S}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp((1-\delta)f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{S}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta), \quad (4.62)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta) &= \mathbf{A}_1(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln)}(\theta), \\
\mathbf{E}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 1, \ln)}(r, \theta), \\
\mathbf{S}^{(\xi, B, \ln)}(r, \theta) &= \mathbf{A}_2(r) \sum_{m=0}^{\infty} r^{m+\xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 2, \ln)}(r, \theta) \\
q &\in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{0\}. \quad (4.63)
\end{aligned}$$

В представлениях (4.63)  $\mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln)}(r, \theta)$  и  $\mathbf{Z}_m^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta)$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) – матрицы размерности соответственно  $3 \times 6$  и  $6 \times 6$  следующего вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln)}(r, \theta) &= \left[ \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\theta), \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\theta) + \ln(r) \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\theta) \right], \\
\mathbf{Z}_m^{(\xi, j, \ln)}(r, \theta) &= \left[ \mathbf{Z}_m^{(\xi, j)}(r, \theta), \mathbf{Z}_m^{(\xi, j)}(r, \theta) + \ln(r) \mathbf{Z}_m^{(\xi, j)}(r, \theta) \right] \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (4.64)
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\theta), \quad \mathbf{Z}_m^{(\xi, j)}(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{Z}_m^{(\xi, j)}(r, \theta) \quad (j = \overline{1, 2}). \quad (4.65)$$

Тогда искомые второе векторные решения спектральной задачи для кратного собственного значения  $\gamma = 0$  при  $\alpha = \alpha_*$  и  $\beta = \pi/2$  в рамках интегрированной модели строятся в виде линейной комбинации базисных решений (4.62), (4.63) с произвольными векторными коэффициентами шестого порядка в таком виде

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{(\gamma, S, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{U}^{(\gamma, S, \ln)}(r, \theta), \\
\mathbf{E}^{(\gamma, S, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{E}^{(\gamma, S, \ln)}(r, \theta), \\
\mathbf{S}^{(\gamma, S, \ln)}(r, \theta, z, t) &= \exp((1-\delta)f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{S}^{(\gamma, S, \ln)}(r, \theta) \quad (\gamma = 0), \quad (4.66)
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{U}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta)$ ,  $\mathbf{E}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta)$ ,  $\mathbf{S}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta)$  – векторные амплитудные составляющие

$$\mathbf{U}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{U}^{(\gamma+n,B,\ln)}(r,\theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma,\ln)},$$

$$\mathbf{E}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}^{(\gamma+n,B,\ln)}(r,\theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma,\ln)},$$

$$\mathbf{S}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{S}^{(\gamma+n,B,\ln)}(r,\theta) \mathbf{B}_n^{(\gamma,\ln)} \quad (\gamma=0). \quad (4.67)$$

В представлениях (4.67)  $\left\{ \mathbf{B}_n^{(\gamma,\ln)} \right\}_{n=0}^{\infty} (\gamma=0)$  – искомый набор векторных коэффициентов. Из граничных условий (1.26) на радиальных участках  $G_2^{(\pm)}$  с учетом (4.66) получается функциональное уравнение

$$\left[ \mathbf{S}^{(\gamma,S,\ln)}(r,\alpha) \right]_{(6,2,4)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in (0,1], \gamma=0), \quad (4.68)$$

из которого с использованием соотношений (4.14) – (4.16), (4.67) получается уравнение

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{n=0}^p \left( \mathbf{Z}_{p-n}^{(\gamma+n,2,0,\ln)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-2}^{(\gamma+n,2,1,\ln)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-q}^{(\gamma+n,2,2,\ln)}(\alpha) \right) \mathbf{B}_n^{(\gamma,\ln)} = \hat{\mathbf{O}} \\ (r \in (0,1], \gamma=0). \quad (4.69)$$

Здесь  $\mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j,\ln)}(\alpha)$  – матрицы размерности  $3 \times 6$  такого вида

$$\mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j,\ln)}(\alpha) = \mathbf{O} \quad (m < 0), \\ \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j,\ln)}(\alpha) = \left[ \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j)}(\alpha), \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j)}(\alpha) + \ln(r) \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j)}(\alpha) \right] \quad (m \geq 0) \\ (j = \overline{0,2}). \quad (4.70)$$

С учетом соотношений (4.70) уравнение (4.69) переписывается в виде

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{n=0}^p \left( \mathbf{Z}_{p-n}^{(\gamma+n,2,0,\ln,*)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-2}^{(\gamma+n,2,1,\ln,*)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{p-n-q}^{(\gamma+n,2,2,\ln,*)}(\alpha) \right) \mathbf{B}_n^{(\gamma,\ln)} = \hat{\mathbf{O}} \\ (r \in [0,1], \gamma=0). \quad (4.71)$$



где  $\mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j,\ln,*)}(\alpha)$  – матрицы размерности  $6 \times 6$  следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j,\ln,*)}(\alpha) &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \\ \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j,\ln,*)}(\alpha) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j)}(\alpha) & \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j)'}(\alpha) \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z}_m^{(\xi,2,j)}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (m \geq 0) \\ &\quad (j = \overline{0,2}). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Из условия выполнения (4.71) в точке  $r=0$ , как и в случае модели не учитывающей логарифмические множители, получается однородное уравнение

$$\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0,\ln,*)}(\alpha) \mathbf{B}_0^{(\gamma,\ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (\gamma=0), \quad (4.73)$$

определяющее уравнение, корнем которого является  $\gamma=0$  при  $\alpha = \alpha_*$  и  $\beta = \pi/2$

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma,2,0,\ln,*)}(\alpha)) = \det(\mathbf{Z}_m^{(\gamma,2,0)}(\alpha))^2 = 0 \quad (\gamma=0), \quad (4.74)$$

а также с точностью до произвольного скалярного множителя соответствующий собственному значению  $\gamma=0$  ( $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \pi/2$ ) векторный коэффициент  $\mathbf{B}_0^{(0,\ln)}$

$$\mathbf{B}_0^{(0,\ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(\gamma)}|_{\gamma=0} \\ \mathbf{B}_0^{(0)} \end{bmatrix} \quad (\alpha = \alpha_*, \beta = \pi/2). \quad (4.75)$$

Здесь  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$  определяется соотношением (4.36).

С учетом рассмотренных двух моделей представления решений поставленных спектральных задач упорядоченное по возрастанию вещественной части корня множество  $\Xi_1^{(\alpha,\beta)}$  может быть окончательно представлено так

$$\begin{aligned} \Xi_1^{(\alpha,\beta)} &= \{\gamma_j\}_{j=1}^p \cup \{\gamma_j, \bar{\gamma}_j\}_{j=p+1}^\infty, \quad \operatorname{Re}(\gamma_{j-1}) \leq \operatorname{Re}(\gamma_j) \quad (j = \overline{2, \infty}), \\ \operatorname{Im}(\gamma_j) &= 0 \quad (j = \overline{1, p}), \quad \operatorname{Im}(\gamma_j) > 0 \quad (j = \overline{p+1, \infty}). \end{aligned} \quad (4.76)$$

В соотношениях (4.76) в случае  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = \pi/2$  учитывается кратный (кратность 2) корень  $\gamma=0$  уравнения (4.33). Во всех остальных случаях кратных корней во множестве  $\Xi_1^{(\alpha,\beta)}$  нет.

Дальнейшие шаги по определению векторных коэффициентов  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  и  $\mathbf{B}_n^{(\gamma,\ln)}$

$(\alpha = \alpha_*, \beta = \pi/2, \gamma = 0)$  для  $n = \overline{1, \infty}$  связаны с решением функциональных уравнений соответственно (4.11) либо (4.16) и (4.71). Поскольку выполняется соотношение (4.35), значит

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 2, 0)}(\alpha)) \neq 0, \quad \det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 2, 0, \text{ln}, *)}(\alpha)) \neq 0 \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\alpha, \beta)}; n = \overline{1, \infty}). \quad (4.77)$$

Покажем, что для  $\gamma \in \Xi_1^{(\alpha, \beta)}$  решения уравнений (4.16) и (4.71) могут быть построены в области  $r \in [0, \infty)$ . Уравнение (4.16) на спектре  $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$  с учетом соотношений (4.77) преобразуется в рекуррентную последовательность уравнений следующего вида

$$\sum_{p=0}^n (\mathbf{Z}_{n-p}^{(\gamma+p, 2, 0)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{n-p-2}^{(\gamma+p, 2, 1)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{n-p-q}^{(\gamma+p, 2, 2)}(\alpha)) \mathbf{B}_p^{(\gamma)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.78)$$

Тогда искомые векторные коэффициенты  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  с учетом представлений (4.36) для начального векторного коэффициента  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$  определяются из явных рекуррентных соотношений

$$\mathbf{B}_n^{(\gamma)} = -(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 2, 0)}(\alpha))^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} (\mathbf{Z}_{n-p}^{(\gamma+p, 2, 0)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{n-p-2}^{(\gamma+p, 2, 1)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{n-p-q}^{(\gamma+p, 2, 2)}(\alpha)) \mathbf{B}_p^{(\gamma)} \\ (n = 1, 2, \dots), \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\alpha, \beta)}). \quad (4.79)$$

Соответственно векторные коэффициенты  $\mathbf{B}_n^{(0, \text{ln})}$  с учетом представлений (4.75) определяются из полученных аналогичным образом явных рекуррентных соотношений

$$\mathbf{B}_n^{(\gamma, \text{ln})} = -(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 2, 0, \text{ln}, *)}(\alpha))^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} (\mathbf{Z}_{n-p}^{(\gamma+p, 2, 0, \text{ln}, *)}(\alpha) + \\ + \mathbf{Z}_{n-p-2}^{(\gamma+p, 2, 1, \text{ln}, *)}(\alpha) + \mathbf{Z}_{n-p-q}^{(\gamma+p, 2, 2, \text{ln}, *)}(\alpha)) \mathbf{B}_p^{(\gamma, \text{ln})} \\ (n = 1, 2, \dots), \quad (\alpha = \alpha_*, \beta = \pi/2, \gamma = 0). \quad (4.80)$$

Утверждение 1. Для  $\gamma \in \Xi_2^{(\alpha, \beta)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) построить решение уравнений (4.16) в области  $r \in [0, \infty)$  не представляется возможным.

Доказательство. Для  $\gamma \in \Xi_2^{(\alpha, \beta)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) справедливо соотношение

$$\sin((\gamma+n)\alpha + \beta) = \pm \sin(n\alpha). \quad (4.81)$$

Следовательно, если положить, что  $\alpha = p\pi/s$ , где  $p/s$  ( $p, s \in \mathbb{N}$ ) рациональное число, получается  $\sin((\gamma+n)\alpha + \beta) = \pm \sin(np\pi/s)$ . Значит

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 2, 0)}(\alpha)) = 0 \quad (\gamma \in \Xi^{(2)}; n = sj; j = \overline{1, \infty}). \quad (4.82)$$

Таким образом, на каждом шаге  $n_j = sj$  ( $j = \overline{1, \infty}$ ) неоднородная система линейных уравнений (4.78), будет иметь вырожденную матрицу. Если же положить, что  $\alpha = \nu\pi$ , где  $\nu$  иррациональное число, то на основании теоремы Гурвица [186] для каждого иррационального числа  $\nu$  существует бесконечное множество решений  $(p, s)$  неравенства

$$|\nu - p/s| < 1/(s^2\sqrt{5}) \quad (p, s \in \mathbb{N}). \quad (4.83)$$

Указанное множество решений может быть упорядочено так

$$\Theta = \left\{ (p_j, s_j) \right\}_{j=1}^{\infty}, \quad s_{j-1} < s_j \quad (j = \overline{2, \infty}). \quad (4.84)$$

Тогда на основании (4.81) при  $n_j = s_j$  получается

$$|n_j\nu\pi - p_j\pi| < \pi/(n_j\sqrt{5}) \quad (j = \overline{1, \infty}). \quad (4.85)$$

Поскольку функция  $\sin(x)$  на интервале  $x \in (0, \pi/\sqrt{5})$  является возрастающей, следовательно, справедливо неравенство

$$|\sin(n_j\nu\pi - p_j\pi)| < \sin(\pi/(n_j\sqrt{5})) \quad (j = \overline{1, \infty}), \quad (4.86)$$

а, значит, и неравенство

$$|\sin(n_j\nu\pi)| < \sin(\pi/(n_j\sqrt{5})) \quad (j = \overline{1, \infty}). \quad (4.87)$$

С учетом (4.81) получается оценка

$$|\sin((\gamma+n_j)\alpha + \beta)| < \sin(\pi/(n_j\sqrt{5})) \quad (j = \overline{1, \infty}) \quad (4.88)$$

из которой сразу следует, что

$$\left| \det \left( \mathbf{Z}_0^{(\gamma+n_j, 2, 0)}(\alpha) \right) \right| < \chi/n_j \quad \left( \gamma \in \Xi^{(2)}; n_j = s_j; j = \overline{1, \infty} \right). \quad (4.89)$$

Здесь  $\chi$  – фиксированная постоянная. Таким образом, если  $\gamma \in \Xi^{(2)}$ , то в последовательности рекуррентных уравнений (4.78) выделяется подпоследовательность  $n_j = s_j$  ( $j = \overline{1, \infty}$ ) для которой справедливо

$$\left| \det \left( \mathbf{Z}_0^{(\gamma+n_j, 2, 0)}(\alpha) \right) \right|_{j \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4.90)$$

С целью определения коэффициентов  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) для  $\gamma \in \Xi_2^{(\alpha, \beta)}$  однородное функциональное уравнение (4.11) с учетом соотношений (4.9) при заданных соотношением (4.36) значениях коэффициента  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$  преобразуется в неоднородное функциональное уравнение следующего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{S}_*^{(\gamma+n, B)}(r, \alpha) \mathbf{B}_n^{(\gamma)} = -\mathbf{S}_*^{(\gamma, B)}(r, \alpha) \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \quad (r \in (0, 1]). \quad (4.91)$$

Здесь  $\mathbf{S}_*^{(\xi, B)}(r, \alpha) = \mathbf{S}_{(6, 2, 4), (1, 2, 3)}^{(\xi, B)}(r, \alpha)$  – квадратные матричные функции третьего порядка. Для построения решения уравнения (4.91) применяется интегральный метод наименьших квадратов. В разложениях (4.9) и, соответственно, (4.91) ограничивается числом  $N$  верхний предел суммирования. Тогда из уравнения (4.91) с учетом представления (4.36) получается неоднородная система линейных уравнений для определения элементов искомым векторных коэффициентов  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) следующего вида

$$\mathbf{JF} = \mathbf{K}. \quad (4.92)$$

Здесь  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{F}, \mathbf{K}$  – соответственно матрица и вектор-столбцы клеточной структуры

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left\langle \left( \mathbf{S}_*^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha) \right)^T \mathbf{S}_*^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha) \right\rangle & \dots & \left\langle \left( \mathbf{S}_*^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha) \right)^T \mathbf{S}_*^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha) \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \left( \mathbf{S}_*^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha) \right)^T \mathbf{S}_*^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha) \right\rangle & \dots & \left\langle \left( \mathbf{S}_*^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha) \right)^T \mathbf{S}_*^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha) \right\rangle \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(\gamma)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_N^{(\gamma)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = - \begin{bmatrix} \langle (\mathbf{S}_*^{(\gamma+1,B)}(r, \alpha))^T \mathbf{S}_*^{(\gamma,B)}(r, \alpha) \rangle \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \\ \vdots \\ \langle (\mathbf{S}_*^{(\gamma+N,B)}(r, \alpha))^T \mathbf{S}_*^{(\gamma,B)}(r, \alpha) \rangle \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

В приведенных соотношениях используется интегральный оператор

$$\langle f(r) \rangle = \int_0^1 f(r) dr. \quad (4.94)$$

## 4.2. Постановка и решение вспомогательных спектральных задач для волноводов с жестко закрепленной граничной поверхностью

Ставятся две вспомогательные спектральные задачи  $\Upsilon^{(\beta, u)}$   $\beta \in \{0, \pi/2\}$  – построить для заданного типа симметрии волновых движений  $\beta=0$  и  $\beta=\pi/2$  множества решений уравнений (1.14), (1.16), (1.20), удовлетворяющие однородным условиям жестко закрепленных радиальных участков  $G_2^{(\pm)}$  (1.27) граничной поверхности  $G_2$  (1.9) волновода, занимающего область  $V_2$  (1.4) (Рисунок 1.2).

Из граничных условий (1.27) с учетом представлений (4.8) получается функциональное уравнение

$$\mathbf{U}^{(\gamma, S)}(r, \alpha) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, 1]). \quad (4.95)$$

На основании соотношений (4.6), (4.7), (4.9) уравнение (4.95) переписывается так

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{n=0}^p \mathbf{Z}_{p-n}^{(\gamma+n, 0)}(\alpha) \mathbf{B}_n^{(\gamma)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, 1]). \quad (4.96)$$

Из условия выполнения (4.96) в точке  $r=0$  получается однородное уравнение

$$\mathbf{Z}_0^{(\gamma, 0)}(\alpha) \mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \hat{\mathbf{O}}, \quad (4.97)$$

определяющее уравнение для нахождения, удовлетворяющего ограничениям (4.10) множества собственных значений  $\gamma$

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha))=0, \quad (4.98)$$

а также получаемый с точностью до произвольного скалярного множителя соответствующий каждому собственному значению начальный векторный коэффициент  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$  в разложениях (4.9) собственных векторных функций.

Элементы матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)$  равны

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{1,1} &= \cos((2+\gamma)\alpha + \beta), & [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{1,2} &= ((2+\gamma)c_{66} - \gamma c_{11})\cos(\gamma\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{1,3} &= \bar{k}\cos(\gamma\alpha + \beta), & [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{2,1} &= -\sin((2+\gamma)\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{2,2} &= ((2+\gamma)c_{11} - \gamma c_{66})\sin(\gamma\alpha + \beta), & [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{2,3} &= -\bar{k}\sin(\gamma\alpha + \beta), \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{3,1} &= [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{3,2} = 0, \\ [\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\alpha)]_{3,3} &= 2(c_{11} + c_{66})\cos(\gamma\alpha + \beta)/(c_{13} + c_{44}). \end{aligned} \quad (4.99)$$

В начале, как и для спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta,\sigma)}$ , рассматривается случай  $\alpha = \pi/2$ . При  $\gamma = -1$  ранг матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(-1,0)}(\pi/2)$  равен 1. Однако с учетом ограничений (4.10) уравнение (4.97) имеет только одно допустимое решение, с точностью до произвольного скалярного множителя записанное в следующем виде

$$\mathbf{B}_0^{(-1)} = [c_{11} + c_{66}, -\cos(2\beta), 0]^{(T)}. \quad (4.100)$$

Установлено, что соответствующая этому начальному коэффициенту собственная векторная функция являются тривиальной. При  $\gamma = 0$  и  $\beta = \pi/2$  ранг матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(0,0)}(\pi/2)$  равен 1. Следовательно, уравнение (4.97) имеет два линейно независимых решения, которые с точностью до произвольного скалярного множителя записываются так

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma_1)} = [2c_{11}, -1, 0]^{(T)}, \quad \mathbf{B}_0^{(\gamma_2)} = [\bar{k}, 0, 1]^{(T)} \quad (\gamma_1 = \gamma_2 = 0). \quad (4.101)$$

Установлено, что соответствующая второму начальному коэффициенту в соотношениях (4.101) собственная векторная функция являются тривиальной. Из

структуры матрицы  $\mathbf{Z}_0^{(\gamma,0)}(\pi/2)$  следует, что уравнение (4.98) распадается на два независимых уравнения, которые с учетом сделанных замечаний записываются в таком виде

$$\sin(\pi\gamma/2)\cos(\pi\gamma/2)=0 \quad (\gamma > -1) \quad (4.102)$$

и

$$\cos(\pi\gamma/2+\beta)=0 \quad (\gamma > 0). \quad (4.103)$$

Определяются два множества корней, порождаемых уравнениями  $\sin(\pi\gamma/2)=0$  и  $\cos(\pi\gamma/2)=0$  в области  $\gamma \in (0, \infty)$  соответственно

$$\Xi^{(\sin)} = \{2j\}_{j=1}^{\infty}, \quad \Xi^{(\cos)} = \{-1+2j\}_{j=1}^{\infty}. \quad (4.104)$$

На основании соотношений (4.104) окончательно определяются два множеств собственных значений, порождаемых уравнениями (4.102) и (4.103) соответственно

$$\left( \Xi_1^{(\pi/2,\beta)} = \{0\} \cup \Xi^{(\sin)} \cup \Xi^{(\cos)} \right) \quad (4.105)$$

и

$$\left( \Xi_2^{(\pi/2,0)} = \Xi^{(\cos)} \text{ при } \beta=0, \quad \Xi_2^{(\pi/2,\pi/2)} = \Xi^{(\sin)} \text{ при } \beta=\pi/2 \right). \quad (4.106)$$

Определяются также с точностью до произвольного скалярного множителя соответствующие множествам собственных значений (4.105) и (4.106) решения уравнения (4.97)

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} \left( (2+\gamma)c_{66} - \gamma c_{11} \right) \cos(\gamma\pi/2 + \beta) + \left( (2+\gamma)c_{11} - \gamma c_{66} \right) \sin(\gamma\pi/2 + \beta) \\ \cos(\gamma\pi/2 + \beta) - \sin(\gamma\pi/2 + \beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left( \gamma \in \Xi_1^{(\pi/2,\beta)} \right) \quad (4.107)$$

и

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\kappa} \\ \left( (2+\gamma)c_{11} - \gamma c_{66} \right) \end{bmatrix} \quad \left( \gamma \in \Xi_2^{(\pi/2,\beta)} \right). \quad (4.108)$$

Следующим рассматривается случай  $\alpha \neq \pi/2$ . Уравнение (4.98) с учетом (4.10), (4.99) распадается на два независимых уравнения следующего вида

$$\begin{aligned} \chi(1+\gamma)\sin(2\alpha) - \sin((1+\gamma)2\alpha + 2\beta) &= 0, \\ \chi &= (c_{11} - c_{66}) / (c_{11} + c_{66}) \quad (\operatorname{Re}(\gamma) > -1) \end{aligned} \quad (4.109)$$

и

$$\cos(\gamma\alpha + \beta) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (4.110)$$

В уравнениях (4.109) и (4.110) исключаются корни соответственно  $\gamma = -1$  и  $\gamma = 0$ , поскольку установлено, что соответствующие им собственные векторные функции тривиальны. Здесь также учитываются ограничения (4.10) и полученные на основании (4.97) значения для начальных векторных коэффициентов  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} ((2+\gamma)c_{66} - \gamma c_{11})\cos(\gamma\alpha + \beta) \\ -\cos((2+\gamma)\alpha + \beta) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\alpha, \beta)}) \quad (4.111)$$

и

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ ((2+\gamma)c_{11} - \gamma c_{66}) \end{bmatrix} \quad (\gamma \in \Xi_2^{(\alpha, \beta)}). \quad (4.112)$$

В соотношениях (4.111) и (4.112) представления для  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$  приведены с точностью до произвольного скалярного множителя. В указанных соотношениях также используются два, определяемые из уравнений (4.109) и (4.110) множества собственных значений соответственно  $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$  и

$$\Xi_2^{(\alpha, \beta)} = \{(\beta - \pi/2 + \pi j) / \alpha\}_{j=1}^{\infty}. \quad (4.113)$$

Таким образом, для вспомогательных спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta, u)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) множество собственных значений окончательно определяется так

$$\Xi^{(\alpha, \beta, u)} = \Xi_1^{(\alpha, \beta)} \cup \Xi_2^{(\alpha, \beta)}. \quad (4.114)$$

Поскольку при выполнении (4.110) уравнение (4.109) преобразуется к виду



$$\left(\gamma + 4c_{11}/(c_{11} + c_{12})\right)\left((c_{11} + c_{12})/(3c_{11} - c_{12})\right)\sin(2\alpha) = 0, \quad (4.115)$$

следовательно, в рассматриваемом случае  $\alpha \neq \pi/2$  для множеств собственных значений  $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$  и  $\Xi_2^{(\alpha, \beta)}$  также выполняется соотношение (4.35).

Следует отметить, что уравнение (4.109) совпадает с уравнением для определения собственных значений в задаче статики при плоской деформации жестко закрепленного на радиальных полуплоскостях клина, а множество собственных значений  $\Xi_2^{(\alpha, 0)}$  и соответствующий ему набор собственных векторных функций в случае условно симметричных волновых движений ( $\beta = 0$ ), как и в случае спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$  не имеют соответствующего аналога в статическом случае.

Уравнение (4.109) для  $\chi \in (0, 1]$  также подробно исследовалось при решении задач статики для клиновидных областей. Установлено, что это уравнение для указанного диапазона изменения параметра  $\chi$  в области  $\text{Re}(\gamma) > -1$  имеет конечное число вещественных и счетное множество пар комплексно сопряженных корней. При этом в рассматриваемом диапазоне угловой меры клина  $\alpha \in (0, \pi)$  в области  $-1 < \text{Re}(\gamma) \leq 1/2$  уравнение (4.109) корней вообще не имеет, а в области  $-1/2 < \text{Re}(\gamma) < 0$  может иметь не более одного вещественного корня. Условие наличия указанного корня выглядит так [354]:

$$\begin{aligned} \pi/2 < \alpha < \pi, \text{ если } \beta = 0 \text{ и } \chi \in (0, 1), \text{ либо } \beta \in \pi/2 \text{ и } \chi \in (0, 1], \\ \alpha_* < \alpha < \pi, \text{ если } \beta = 0 \text{ и } \chi = 1. \end{aligned} \quad (4.116)$$

Здесь  $\alpha_*$  – первый положительный корень уравнения (4.39). Как и в случае спектральной задачи  $\Upsilon^{(\pi/2, \sigma)}$  ( $\alpha = \alpha_*$ ), при  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = 0$  и  $\chi = 1$  для построения второго линейно независимого решения, соответствующего кратному корню  $\gamma = 0$  уравнения (4.109), также необходимо привлекать модель, учитывающую наличие в искомым решениях обобщенно степенных функций с логарифмическим множителем [353, 354]. Указанная интегрированная модель определяется соотношениями (4.40) – (4.67).

Из граничных условий (1.27) на радиальных участках  $G_2^{(\pm)}$  с учетом (4.66) получается функциональное уравнение

$$\mathbf{U}^{(\gamma, S, \ln)}(r, \alpha) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in (0, 1], \gamma = 0), \quad (4.117)$$

которое с учетом соотношений (4.67) преобразуется в уравнение

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{n=0}^p \mathbf{Z}_{p-n}^{(\gamma+n, 0, \ln)}(\alpha) \mathbf{B}_n^{(\gamma, \ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in (0, 1], \gamma = 0). \quad (4.118)$$

Здесь  $\mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln)}(\alpha)$  – матрицы размерности  $3 \times 6$  такого вида

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln)}(\alpha) &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \\ \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln)}(\alpha) &= \left[ \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\alpha), \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\alpha) + \ln(r) \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\alpha) \right] \quad (m \geq 0). \end{aligned} \quad (4.119)$$

Наконец, с учетом соотношений (4.119) уравнение (4.118) записывается так:

$$\sum_{p=0}^{\infty} r^p \sum_{n=0}^p \mathbf{Z}_{p-n}^{(\gamma+n, 0, \ln, *)}(\alpha) \mathbf{B}_n^{(\gamma, \ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in [0, 1], \gamma = 0). \quad (4.120)$$

Здесь  $\mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln, *)}(\alpha)$  – матрицы размерности  $6 \times 6$  следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln, *)}(\alpha) &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \\ \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0, \ln, *)}(\alpha) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\alpha) & \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\alpha) \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z}_m^{(\xi, 0)}(\alpha) \end{bmatrix} \quad (m \geq 0). \end{aligned} \quad (4.121)$$

Из условия выполнения (4.120) в точке  $r = 0$  получается однородное уравнение

$$\mathbf{Z}_0^{(\gamma, 0, \ln, *)}(\alpha) \mathbf{B}_0^{(\gamma, \ln)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (\gamma = 0), \quad (4.122)$$

определяющее уравнение, корнем которого является  $\gamma = 0$  при  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = 0$  и  $\chi = 1$

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma, 2, 0, \ln, *)}(\alpha)) = \det(\mathbf{Z}_m^{(\gamma, 2, 0)}(\alpha))^2 = 0 \quad (\gamma = 0), \quad (4.123)$$

а также с точностью до произвольного скалярного множителя соответствующий собственному значению  $\gamma = 0$  ( $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = 0$ ,  $\chi = 1$ ) векторный коэффициент

$$\mathbf{B}_0^{(\gamma, \ln)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \\ \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \end{bmatrix} \quad (\gamma = 0, \alpha = \alpha_*, \beta = 0, \chi = 1). \quad (4.124)$$

Здесь  $\mathbf{B}_0^{(\gamma)}$  определяется соотношением (4.111).

Таким образом, с учетом рассмотренных двух моделей представления решений спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta, u)}$   $\beta \in \{0, \pi/2\}$ , как и для спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$   $\beta \in \{0, \pi/2\}$ , упорядоченное по возрастанию вещественной части корня множество  $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$  может быть окончательно представлено соотношением (4.76) в котором при  $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = 0$ ,  $\chi = 1$  учитывается кратный (кратность 2) корень  $\gamma = 0$  уравнения (4.109).

Искомые множеств векторных коэффициентов коэффициентом  $\{\mathbf{B}_n^{(\gamma)}\}_{n=0}^{\infty}$  и  $\{\mathbf{B}_n^{(\gamma, \ln)}\}_{n=0}^{\infty}$  ( $\alpha = \alpha_*$ ,  $\beta = 0$ ,  $\chi = 1$ ,  $\gamma = 0$ ) строятся в результате решения функциональных уравнений соответственно (4.95) либо (4.96) и (4.120) с учетом представлений для начального векторного коэффициента (4.111). На основании соотношения

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 0)}(\alpha)) \neq 0, \quad \det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 0, \ln, *)}(\alpha)) \neq 0 \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\alpha, \beta)}; n = \overline{1, \infty}), \quad (4.125)$$

как и в случае спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$   $\beta \in \{0, \pi/2\}$ , для собственных значений из множества  $\Xi_1^{(\alpha, \beta)}$  искомые векторные коэффициенты  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  и  $\mathbf{B}_n^{(\gamma, \ln)}$  ( $n = \overline{0, \infty}$ ) с учетом представлений (4.111) и (4.124) определяются из полученных на основании уравнений (4.96) и (4.120) явных рекуррентных соотношений

$$\mathbf{B}_n^{(\gamma)} = -(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+p, 0)}(\alpha))^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \mathbf{Z}_{n-p}^{(\gamma+p, 0)}(\alpha) \mathbf{B}_p^{(\gamma)} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (\gamma \in \Xi_1^{(\alpha, \beta)}), \quad (4.126)$$

$$\mathbf{B}_n^{(\gamma, \ln)} = -(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+p, 0, \ln, *)}(\alpha))^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \mathbf{Z}_{n-p}^{(\gamma+p, 0, \ln, *)}(\alpha) \mathbf{B}_p^{(\gamma, \ln)}$$

$$(n = 1, 2, \dots), \quad (\alpha = \alpha_*, \beta = 0, \chi = 1, \gamma = 0). \quad (4.127)$$

При этом, определяемые соотношениями (4.126) и (4.127) векторные коэффициенты в разложениях собственных функций (4.9) и (4.67) обеспечивают справедливость уравнений (4.96) и (4.120) в области  $r \in [0, \infty)$ .

Утверждение 2. Для  $\gamma \in \Xi_2^{(\alpha, \beta)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) построить решение уравнений (4.96) в области  $r \in [0, \infty)$  не представляется возможным.

Доказательство данного утверждения аналогично доказательству, приведенному при рассмотрении спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ). При этом в процессе доказательства вместо соотношений (4.81), (4.82), (4.88) используются соответственно соотношения

$$\cos((\gamma+n)\alpha + \beta) = \pm \sin(n\alpha), \quad (4.128)$$

$$\det(\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n, 0)}(\alpha)) = 0 \quad (\gamma \in \Xi^{(2)}; n = sj; j = \overline{1, \infty}), \quad (4.129)$$

$$|\cos((\gamma+n_j)\alpha + \beta)| < \sin(\pi/(n_j\sqrt{5})) \quad (j = \overline{1, \infty}), \quad (4.130)$$

а в соотношениях (4.89), (4.90) вместо  $\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n_j, 2, 0)}(\alpha)$  используется  $\mathbf{Z}_0^{(\gamma+n_j, 0)}(\alpha)$ .

Методика построения решения уравнения (4.95) на множестве  $\Xi_2^{(\alpha, \beta)}$ , как и в случае спектральных задач  $\Upsilon^{(\beta, \sigma)}$   $\beta \in \{0, \pi/2\}$ , проводится с использованием интегрального метода наименьших квадратов. В разложениях (4.9) ограничивается верхний предел суммирования значением  $N \in \mathbb{N}$ . В результате для определения элементов искомым векторных коэффициентов  $\mathbf{B}_n^{(\gamma)}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) получается неоднородная система линейных уравнений (4.92) в которой матрица  $\mathbf{J}$  и вектор-столбец  $\mathbf{K}$  имеют следующий вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle (\mathbf{U}^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha))^T \mathbf{U}^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha) \rangle & \dots & \langle (\mathbf{U}^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha))^T \mathbf{U}^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha) \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle (\mathbf{U}^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha))^T \mathbf{U}^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha) \rangle & \dots & \langle (\mathbf{U}^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha))^T \mathbf{U}^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha) \rangle \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} \langle (\mathbf{U}^{(\gamma+1, B)}(r, \alpha))^T \mathbf{U}^{(\gamma, B)}(r, \alpha) \rangle \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \\ \vdots \\ \langle (\mathbf{U}^{(\gamma+N, B)}(r, \alpha))^T \mathbf{U}^{(\gamma, B)}(r, \alpha) \rangle \mathbf{B}_0^{(\gamma)} \end{bmatrix}. \quad (4.131)$$

### 4.3. Получение дисперсионных соотношений

Рассмотренные в данном разделе математические модели волновых процессов в протяженных цилиндрах секторного поперечного сечения из трансверсально изотропных материалов наряду с выполненными для построенных решений поставленных четырех вспомогательных спектральных задач соответствующих однородных граничных условий на радиальных участках граничной поверхности включают также соответствующие однородные условия на цилиндрическом участке граничной поверхности. Поскольку множества решений каждой спектральной задачи  $\Upsilon^{(\beta,\sigma)}$  и  $\Upsilon^{(\beta,u)}$  построены независимо для двух типов симметрии волновых движений относительно биссекторной полуплоскости  $\beta=0$  и  $\beta=\pi/2$ , следовательно, постановка дисперсионных задач для указанных типов симметрии также реализуется независимо.

Известно [96], что определяемые бесконечными множествами собственных значений  $\Xi^{(\alpha,\beta,\sigma)}$  либо  $\Xi^{(\alpha,\beta,u)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) наборы решений эллиптических спектральных задач соответственно  $\Upsilon^{(\beta,\sigma)}$  либо  $\Upsilon^{(\beta,u)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) обладают трехкратной полнотой, обеспечивающей возможность удовлетворить любым трем граничным условиям на цилиндрическом участке граничной поверхности волновода. Исходя из этого, ставятся четыре независимые дисперсионные задачи  $D^{(\beta,\sigma)}$  и  $D^{(\beta,u)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ): на множестве решений соответствующей спектральной задачи  $\Upsilon^{(\beta,\sigma)}$  либо  $\Upsilon^{(\beta,u)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ) в виде их линейной комбинации с произвольными скалярными коэффициентами построить решения (далее дисперсионные решения), удовлетворяющие однородным граничным условиям на цилиндрическом участке граничной поверхности  $G_2^{(1)}$  соответственно (1.26) либо (1.27). Из соотношений (4.38) и (4.116) непосредственно следует, что при угловой мере  $2\alpha \leq \pi$  сектора в поперечном сечении свободного либо жестко закрепленного волновода сингулярность в поле напряжений на ребре  $\{r=0, z \in (-\infty, \infty)\}$  не возникает. Значит, можно сделать

вывод об отсутствии сингулярности в поле напряжений на двух других ребрах волновода  $\{r=1, \theta=\pm\alpha, z\in(-\infty, \infty)\}$ . Этот факт позволяет утверждать, что любую заданную точность удовлетворения дисперсионными решениями граничных условий на цилиндрическом участке граничной поверхности  $G_2^{(1)}$  соответственно (1.26) либо (1.27) можно обеспечить линейной комбинацией конечного подмножества решений соответствующих вспомогательных спектральных задач. Исходя из этого при решении поставленных дисперсионных задач с учетом соотношений (4.8), (4.9), (4.59), (4.60) вводятся следующие представления

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{(D)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{U}^{(D)}(r, \theta), \\ \mathbf{E}^{(D)}(r, \theta, z, t) &= \exp(-\delta f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{E}^{(D)}(r, \theta), \\ \mathbf{S}^{(D)}(r, \theta, z, t) &= \exp((1-\delta)f_{\lambda, q}(r) - i\omega t + ikz) \mathbf{S}^{(D)}(r, \theta).\end{aligned}\quad (4.132)$$

Амплитудные составляющие дисперсионных решений в соотношениях (4.132) определяются так:

$$\mathbf{\Phi}^{(D)}(r, \theta) = \sum_{m=1}^M b_m \mathbf{F}_m^{(S)}(r, \theta), \quad (4.133)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_m^{(S)}(r, \theta) &= \mathbf{\Phi}^{(\gamma_m^{(1)}, S)}(r, \theta) \quad (m=\overline{1, p_1}), \\ \mathbf{F}_{p_1+m}^{(S)}(r, \theta) &= \mathbf{\Phi}^{(\gamma_{p_1+m}^{(1)}, S)}(r, \theta) \quad (m=\overline{1, p_2}), \\ \mathbf{F}_{p_1+p_2+m}^{(S)}(r, \theta) &= \mathbf{\Phi}^{(\tilde{\gamma}_{p_1+m}^{(1)}, S)}(r, \theta) \quad (m=\overline{1, p_2}), \\ \mathbf{F}_{p_1+2p_2+m}^{(S)}(r, \theta) &= \mathbf{\Phi}^{(\gamma_m^{(2)}, S)}(r, \theta) \quad (m=\overline{1, p_3}).\end{aligned}\quad (4.134)$$

Здесь  $b_m \in \mathbb{C}$  ( $m=\overline{1, M}$ ) – искомые коэффициенты;  $\gamma_m^{(1)} \in \mathbb{R}$  ( $m=\overline{1, p_1}$ ) – вещественные собственные значения из множества  $\Xi_1^{(\alpha, \beta)} \subset \Xi^{(\alpha, \beta, p)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ;  $p \in \{\sigma, u\}$ );  $\gamma_{p_1+m}^{(1)} \in \mathbb{C}$  ( $m=\overline{1, p_2}$ ) – лежащие в первой четверти

комплексные корни из множества  $\Xi_1^{(\alpha,\beta)} \subset \Xi^{(\alpha,\beta,p)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ;  $p \in \{\sigma, u\}$ );  $\gamma_m^{(2)} \in \mathbb{R}$  ( $m = \overline{1, p_3}$ ) – корни из множества  $\Xi_2^{(\alpha,\beta)} \subset \Xi^{(\alpha,\beta,p)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ;  $p \in \{\sigma, u\}$ );  $p_1$  и  $p_2$  – количество соответственно вещественных и используемых комплексных (из первой четверти) корней множества  $\Xi_1^{(\alpha,\beta)} \subset \Xi^{(\alpha,\beta,p)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ;  $p \in \{\sigma, u\}$ );  $p_3$  – количество используемых корней множества  $\Xi_2^{(\alpha,\beta)} \subset \Xi^{(\alpha,\beta,p)}$  ( $\beta \in \{0, \pi/2\}$ ;  $p \in \{\sigma, u\}$ );  $M = p_1 + 2p_2 + p_3$  – общее количество решений соответствующей спектральной задачи, используемых в искомом дисперсионном решении. В соотношениях (4.133), (4.134) для имени амплитудной составляющей векторного спектрального и дисперсионного решений используется унифицированное обозначение  $\Phi \in \{\mathbf{U}, \mathbf{E}, \mathbf{S}\}$ , при этом в случае дисперсионных задач  $D^{(\pi/2, \sigma)}$  ( $\alpha = \alpha_*$ ) или  $D^{(0, u)}$  ( $\alpha = \alpha_*$ ,  $\chi = 1$ ) для кратного вещественного собственного значения  $\gamma = 0$  из множества соответственно  $\Xi_1^{(\alpha_*, \pi/2)} \subset \Xi^{(\alpha_*, \pi/2, \sigma)}$  или  $\Xi_1^{(\alpha_*, 0)} \subset \Xi^{(\alpha_*, 0, u)}$  в соотношениях (4.134) помимо векторных функций  $\Phi^{(\gamma_m^{(1)}, S)}(r, \theta)$  присутствуют также определяемые в рамках интегрированной модели векторные функции  $\Phi^{(\gamma_m^{(1)}, S, \ln)}(r, \theta)$ .

Следует отметить, что при  $\tilde{k} \in \mathbb{R}$  для любых  $\gamma \in \mathbb{C}$  справедливыми являются соотношения

$$\Phi^{(\bar{\gamma}, S)}(r, \theta) = \overline{\Phi^{(\gamma, S)}(r, \theta)}, \quad \Phi^{(\bar{\gamma}, S, \ln)}(r, \theta) = \overline{\Phi^{(\gamma, S, \ln)}(r, \theta)}. \quad (4.135)$$

Следовательно, при решении поставленных дисперсионных задач в случае исследования бегущих нормальных волн в представлениях амплитудных составляющих дисперсионных решений (4.133) допустимо полагать, что  $b_m \in \mathbb{R}$  ( $m = \overline{1, M}$ ). Тогда вместо (4.134) должны использоваться следующие соотношения

$$\mathbf{F}_m^{(S)}(r, \theta) = \Phi^{(\gamma_m^{(1)}, S)}(r, \theta) \quad (m = \overline{1, p_1}),$$

$$\mathbf{F}_{p_1+m}^{(S)}(r, \theta) = \operatorname{Re} \left( \Phi^{(\gamma_{p_1+m}^{(1)}, S)}(r, \theta) \right) \quad (m = \overline{1, p_2}),$$

$$\mathbf{F}_{p_1+p_2+m}^{(S)}(r, \theta) = \text{Im} \left( \Phi^{(\gamma_{p_1+m}^{(1)}, S)}(r, \theta) \right) \quad (m = \overline{1, p_2}),$$

$$\mathbf{F}_{p_1+2p_2+m}^{(S)}(r, \theta) = \Phi^{(\gamma_m^{(2)}, S)}(r, \theta) \quad (m = \overline{1, p_3}). \quad (4.136)$$

Для решения поставленных дисперсионных задач применяется интегральный метод наименьших квадратов. Получается однородная система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}\mathbf{B} = \mathbf{O}. \quad (4.137)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  – вектор-столбец с элементами  $[\mathbf{B}]_m = b_m \quad (m = \overline{1, M})$ ;  $\mathbf{J}$  квадратная матрица с сингулярными числами  $\chi$ , элементы которой в случае соотношений (4.133), (4.134) либо (4.133), (4.136) имеют соответственно вид

$$[\mathbf{J}]_{m,n} = \int_0^\alpha \left( \sum_{j=1}^3 [\overline{\mathbf{F}_m^{(S)}(1, \theta)}]_j [\mathbf{F}_n^{(S)}(1, \theta)]_j \right) d\theta \quad (m, n = \overline{1, M}); \quad (4.138)$$

$$[\mathbf{J}]_{m,n} = \int_0^\alpha \left( \sum_{j=1}^3 [\mathbf{F}_m^{(S)}(1, \theta)]_j [\mathbf{F}_n^{(S)}(1, \theta)]_j \right) d\theta \quad (m, n = \overline{1, M}). \quad (4.139)$$

Целевое дисперсионное соотношение  $\min_{(\vec{k}, \Omega) \in \Theta} \left( \chi^{(\min)}(\vec{k}, \Omega) / \chi^{(\max)}(\vec{k}, \Omega) \right)$ .

#### 4.4. Результаты численных экспериментов

При проведении численных экспериментов значение параметра  $\delta$  рассматривалось как фиксированное  $\delta = 1/2$ , а в качестве радиально неоднородного материала волновода выбирался введенный в рассмотрение в п.п. 2.4 трансверсально-изотропный материал М1.

Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных волн проводился для значения углового параметра  $\alpha = 97\pi/113$  в дисперсионной задаче  $D^{(0, \sigma)}$  при диапазонах изменения нормализованной частоты  $\omega a c_t^{-1} \in [0; 9]$  и нормализованного волнового числа  $ka \in [0; 2,5]$ , а также в дисперсионной задаче  $D^{(0, u)}$  соответственно при  $\omega a c_t^{-1} \in [0; 12]$  и  $ka \in [0; 3]$ . Нормирующие параметры



$a$  и  $c_t$ , имеющие соответственно размерности длины и скорости, для всех вариантов расчетов имеют фиксированное значение  $a = R_*$  и  $c_t = \sqrt{c_*/\rho}$ .

В результате получено описание ряда эффектов, обусловленных варьированием параметров неоднородности на структуру и свойства анализируемых дисперсионных спектров. Ниже представлены результаты сравнительного анализа дисперсионных спектров бегущих нормальных волн  $S$ -типа ( $\beta=0$ ) в неоднородных  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 2)$  и однородных  $(\lambda, q) = (0, 0)$  цилиндрах с круговым сектором в поперечном сечении указанной угловой меры. Спектры для неоднородного (сплошная линия) и однородного (пунктирная линия) волноводов со свободной ( $D^{(0,\sigma)}$ ) и жестко закрепленной ( $D^{(0,u)}$ ) граничной поверхностью представлены соответственно на Рисунке 4.1 и Рисунке 4.2.

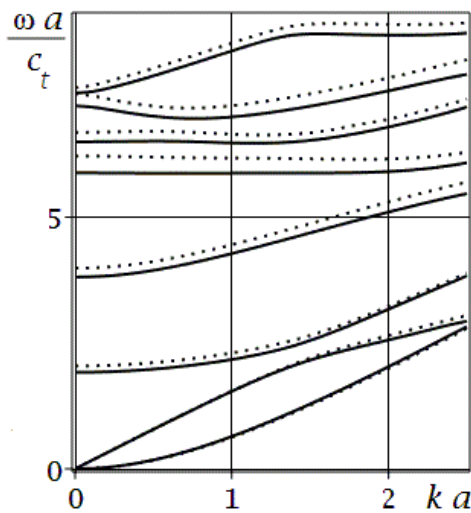


Рис. 4.1.

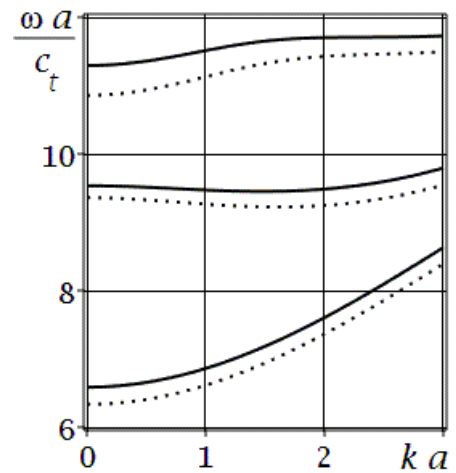


Рис. 4.2.

Установлено, что для рассматриваемых волноводов со свободной границей в низкочастотном длинноволновом диапазоне нормальные волны низшей моды с нулевой частотой заперения по форме являются квазиизгибными, а волны второй моды с нулевой частотой заперения – квазипродольными. Дисперсионные спектры для однородного и неоднородного цилиндров по топологической структуре имеют высокие степени подобия в обоих случаях задания краевых условий. Для анализа локальных количественных различий в поведении отдельных мод полученных спектров используется рассматривавшаяся в

предшествующих разделах функция сравнения (2.156) для мод с одинаковыми номерами в соответствующих сопоставляемых спектрах. Результаты для сравниваемых пар волноводов "неоднородный – однородный цилиндр" представлены на Рисунке 4.3 и Рисунке 4.4. Порядковый номер сопоставляемых мод указывается в подрисуночных надписях с соответствующим типом линий.

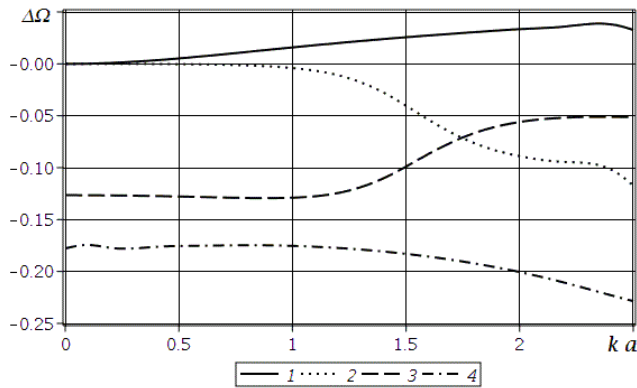


Рис. 4.3.

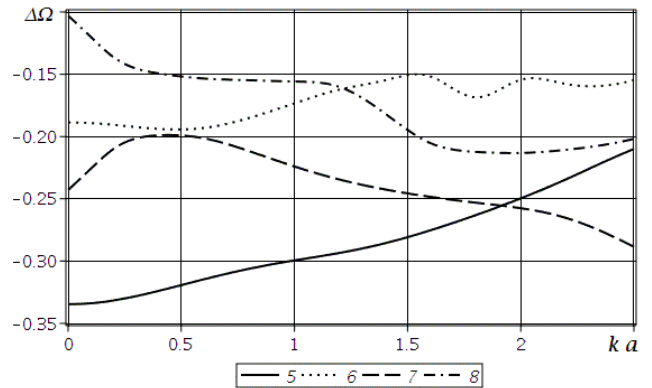


Рис. 4.4.

В качестве общей тенденции отмечается, что для неоднородного волновода со свободной границей высшие моды спектра, начиная со второй, сохраняя подобие траекторий, расположены выше дисперсионных кривых для однородного свободного цилиндра, и соответственно, нормальные волны одинаковой длины в неоднородном цилиндре имеют относительно большие скорости, а для цилиндров с закрепленной граничной поверхностью описанная тенденция для всех исследованных мод меняется на противоположную. Сохраняется также эффект различия типов влияния неоднородности на сопоставительные показатели отличия для мод однородных и неоднородных волноводов на участках сближения и расталкивания дисперсионных кривых. Например, это первая и вторая моды в свободном волноводе на участке  $ka \in [2,4; 2,5]$ , вторая и третья моды на участке  $ka \in [1,7; 1,8]$ .

Ниже на Рисунках 4.5 – 4.7 представлены примеры анализа кинематических характеристик нормальных волн в неоднородных волноводах, осуществляемого на базе расчетов форм амплитудных распределений компонентов вектора волновых перемещений по области сечения цилиндра с закрепленной граничной

поверхностью  $(D^{(0,u)})$  для волны с параметрами  $\tilde{k}=0.2$ ,  $\Omega \approx 6.59678366$  из нижней моды спектра при  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 2)$ . Графики масштабированы по условию  $[\mathbf{U}^{(D)}(0.7, 1, 0, 0)]_1 = 1$ .

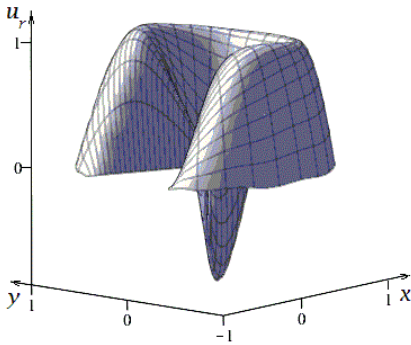


Рис. 4.5.

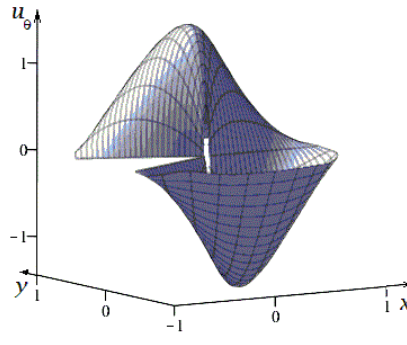


Рис. 4.6.

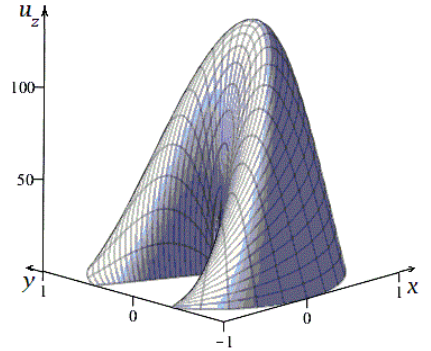


Рис. 4.7.

#### Выводы к разделу 4

В разделе решена задача разработки теоретической численно-аналитической методики исследования процессов распространения нормальных упругих волн в радиально неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрических телах секторно-кругового поперечного сечения со свободной либо жестко закрепленной граничной поверхностью, учитывающей все возможные типы особенностей в поле напряжений в окрестности сингулярных точек границы волновода.

В рамках реализованных исследований:

1. Поставлены и решены четыре вспомогательные спектральные задачи для исследования проблемы распространения нормальных волн  $S$ -типа и  $A$ -типа в трансверсально-изотропных цилиндрах с радиальной неоднородностью материала экспоненциально-степенного типа, имеющих поперечные сечения в виде кругового сектора со свободными либо жестко закрепленными радиальными участками граничной поверхности; построены базисные множества аналитических и численно-аналитических решений указанных спектральных задач, исследованы асимптотические свойства их базисных частных решений.

2. Разработана методика построения дисперсионных соотношений для задач о распространении нормальных волн в свободных и жестко закрепленных трансверсально-изотропных волноводах секторно-кругового сечения с радиальной неоднородностью материала экспоненциально степенного типа, решена задача учета в дисперсионных соотношениях членов, порождающих все возможные типы особенностей в поле напряжений в окрестности сингулярных точек границы волновода.

3. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов вычислений, связанных с получением аналитических и численно-аналитических частных решений указанных спектральных задач.

4. Проведен сравнительный анализ топологического строения дисперсионных спектров бегущих нормальных волн  $S$ -типа в однородных и радиально неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах, имеющих поперечные сечения в виде кругового сектора для случаев свободных и жестко закрепленных граничных поверхностей, исследован ряд амплитудно-частотных зависимостей для кинематических характеристик в нормальных волнах из низшей моды дисперсионного спектра, проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики вида граничных условий, а также фактора радиальной неоднородности анизотропного материала волновода.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [129, 131, 141, 142, 164].

## РАЗДЕЛ 5

**ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-  
ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ КОЛЬЦЕВОГО И СЕКТОРНО-  
КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ**

**5.1. Интегрирование уравнений волнового деформирования  
цилиндрически ортотропного протяженного цилиндра кольцевого сечения**

**5.1.1. Сведение к задаче решения системы рекуррентных уравнений.**

Рассматривается протяженный волновод, имеющий в поперечном сечении форму концентрического кругового кольца (Рисунок 1.3), занимающий в безразмерной цилиндрической системе координат  $Or\theta z$  двусвязную область  $V_3$  (1.5) с граничной поверхностью  $G_3$  (1.10). Функциональный закон радиальной неоднородности цилиндрически ортотропного материала определяется соотношениями (1.35), (1.37). Математическая модель включает уравнения (1.14), (1.18) и (1.20), условия на граничной поверхности (1.28) или (1.29), а также представления для безразмерных компонент вектора упругих перемещений (1.38), (1.40), (1.42), (1.44) в которых на окружное волновое число  $\tau$  из геометрических соображений накладываются ограничения вида  $\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . В рассматриваемом волноводе подлежат независимому исследованию осесимметричные продольно-сдвиговые ( $\tau = 0, \beta = 0$ ) и крутильные ( $\tau = 0, \beta = \pi/2$ ) волны, а также неосесимметричные ( $\tau \in \mathbb{N}, \beta = 0$ ) волны. В последнем случае, как и для сплошного цилиндра кругового сечения, варианты  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi/2$  эквивалентны с точностью до поворота цилиндрической системы координат в плоскости  $(r\theta)$  на угол  $\pi/(2\tau)$ .

Из соотношений (1.20), (1.38), (1.40), (1.42), (1.44) с учетом выражения (1.37) в матричной форме получаются комплексные представления для вектор-столбца с компонентами тензора упругих деформаций  $\mathbf{E}(r, \theta, z, t)$  (2.1) – (2.4) в

которых компоненты вектор-столбца  $\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r)$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) \right]_1 &= D(r) \tilde{u}_r^{(\tau)}(r), \quad \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) \right]_2 = r^{-1} \left( \tilde{u}_r^{(\tau)}(r) + \tau \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r) \right), \\ \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) \right]_3 &= -\tilde{k} \tilde{u}_z^{(\tau)}(r), \quad \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) \right]_4 = \tilde{k} \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r) - \tau r^{-1} \tilde{u}_z^{(\tau)}(r), \\ \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) \right]_5 &= \tilde{k} \tilde{u}_r^{(\tau)}(r) + D(r) \tilde{u}_z^{(\tau)}(r), \\ \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r) \right]_6 &= -\tau r^{-1} \tilde{u}_r^{(\tau)}(r) + \left( D(r) - r^{-1} \right) \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(r). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $D(r) = d_r - \delta \lambda q h^{-q} (r-1)^{q-1}$  ( $d_r = d/dr$ ). Тогда на основании соотношений закона Гука для цилиндрически ортотропного материала (1.18) и выражений (1.35), (1.37), (2.1) – (2.4), (5.1) получаются комплексные представления для вектор-столбца с безразмерными компонентами тензора напряжений  $\mathbf{S}(r, \theta, z, t)$  (2.7) – (2.9) в которых вектор-столбец  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$  определяется соотношениями

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{C}}^{(ort)} \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r), \quad (5.2)$$

где

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(ort)} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{23} & \tilde{c}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{66} \end{bmatrix}.$$

Из дифференциальных уравнений движения (1.14) с учетом соотношений (1.35), (1.37), (1.38), (1.40), (1.42), (1.44), (2.7) – (2.9), (5.2) получается однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно компонент вектора  $\mathbf{U}^{(\tau)}(r)$  следующего вида

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(r) &= \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in (r_0, r_1)), \\ [1-h, 1+h] &\subset (r_0, r_1) \subset (0, 2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь  $h$  – определяемый соотношениями (1.2) параметр;  $\mathbf{M}_1^{(\tau)}(r)$  – квадратный

матричный дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned}
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,1} = \tilde{c}_{11} r^2 d_r^2 + \tilde{c}_{11} \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \right) r d_r - \tilde{c}_{22} - \tau^2 \tilde{c}_{66} + \\
& + \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55} \right) r^2 + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left( \delta \left( 1 - q r - (1 - \delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^q \right) \tilde{c}_{11} + (r-1) \tilde{c}_{12} \right) \\
& , \\
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,2} = \tau \left( (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \left( (1 - \delta) \tilde{c}_{12} - \delta \tilde{c}_{66} \right) - (\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}) \right), \\
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{1,3} = -\tilde{k} r \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \left( (1 - \delta) \tilde{c}_{13} - \delta \tilde{c}_{55} \right) + \tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23} \right), \\
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,1} = -\tau \left( (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) r d_r + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \left( (1 - \delta) \tilde{c}_{66} - \delta \tilde{c}_{12} \right) + \tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66} \right), \\
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,2} = \tilde{c}_{66} \left( r^2 d_r^2 + \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \right) r d_r - 1 \right) - \tau^2 \tilde{c}_{22} + \\
& + \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right) r^2 - \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left( 1 + \delta - (1 - \delta) q r - \delta (1 - \delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^q \right) \tilde{c}_{66}, \\
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{2,3} = \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{3,2} = \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) r, \\
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{3,1} = \tilde{k} r \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) r d_r + \tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{55} + \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \left( (1 - \delta) \tilde{c}_{55} - \delta \tilde{c}_{13} \right) \right), \\
& \left[ \mathbf{M}_1^{(\tau)}(r) \right]_{3,3} = \tilde{c}_{55} \left( r^2 d_r^2 + \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-1} \right) r d_r \right) - \tau^2 \tilde{c}_{44} + \\
& + \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} \right) r^2 + \delta \lambda q h^{-q} r (r-1)^{q-2} \left( 1 - q r - (1 - \delta) \lambda q h^{-q} r (r-1)^q \right) \tilde{c}_{55}. \quad (5.4)
\end{aligned}$$

В соотношениях (5.3) используется некоторая область  $(r_0, r_1)$  изменения переменной  $r$ . Из выражений (1.2) следует, что такая область всегда существует.

С целью построения частных решений уравнения (5.3) заменой переменных

$$r = hx + 1, \quad x \in (x_0, x_1), \quad [-1, 1] \subset (x_0, x_1) \subset (-h^{-1}, h^{-1}). \quad (5.5)$$

вводится обобщенная кольцевая координата [195]. Здесь  $x_0 = (r_0 - 1)h^{-1}$ ,  $x_1 = (r_1 - 1)h^{-1}$ . После замены переменных (5.5) соотношения (1.37), (1.38), (1.40), (1.42), (2.1) – (2.3), (2.7) – (2.9) преобразуются к следующему виду

$$\mathbf{U}(x, \theta, z, t) = \exp\left(-\delta \lambda x^q - i \omega t + i \tilde{k} z\right) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, \theta, z, t) &= \exp\left(-\delta\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z\right)\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x), \\ \mathbf{S}(x, \theta, z, t) &= \exp\left((1-\delta)\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z\right)\mathbf{T}_2^{(\tau)}(\theta)\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x),\end{aligned}\quad (5.6)$$

где  $\mathbf{U}(x, \theta, z, t)$ ,  $\mathbf{E}(r, \theta, z, t)$ ,  $\mathbf{S}(x, \theta, z, t)$  – вектор-столбцы с безразмерными компонентами в новых координатах вектора упругих перемещений, тензоров упругих деформаций и напряжений

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x, \theta, z, t) &= \left[ u_r(x, \theta, z, t), u_\theta(x, \theta, z, t), u_z(x, \theta, z, t) \right]^T, \\ \mathbf{E}(x, \theta, z, t) &= \left[ \varepsilon_{rr}(x, \theta, z, t), \varepsilon_{\theta\theta}(x, \theta, z, t), \varepsilon_{zz}(x, \theta, z, t), \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_{\theta z}(x, \theta, z, t), \varepsilon_{rz}(x, \theta, z, t), \varepsilon_{r\theta}(x, \theta, z, t) \right]^T, \\ \mathbf{S}(x, \theta, z, t) &= \left[ \sigma_{rr}(x, \theta, z, t), \sigma_{\theta\theta}(x, \theta, z, t), \sigma_{zz}(x, \theta, z, t), \right. \\ &\quad \left. \sigma_{\theta z}(x, \theta, z, t), \sigma_{rz}(x, \theta, z, t), \sigma_{r\theta}(x, \theta, z, t) \right]^T;\end{aligned}\quad (5.7)$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r)$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) &= \left[ \tilde{u}_r^{(\tau)}(x), \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(x), \tilde{u}_z^{(\tau)}(x) \right]^T, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) &= \left[ \tilde{\varepsilon}_{rr}^{(\tau)}(x), \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(\tau)}(x), \tilde{\varepsilon}_{zz}^{(\tau)}(x), \tilde{\varepsilon}_{\theta z}^{(\tau)}(x), \tilde{\varepsilon}_{rz}^{(\tau)}(x), \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^{(\tau)}(x) \right]^T, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) &= \left[ \tilde{\sigma}_{rr}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(\tau)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(\tau)}(x) \right]^T.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Представления (5.1) и (5.2) с учетом замены переменных (5.5) получают такой вид

$$\begin{aligned}\left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) \right]_1 &= \tilde{D}(x)\tilde{u}_r^{(\tau)}(x), \quad \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) \right]_2 = (hx+1)^{-1} \left( \tilde{u}_r^{(\tau)}(x) + \tau \tilde{u}_\theta^{(\tau)}(x) \right), \\ \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) \right]_3 &= -\tilde{k}\tilde{u}_z^{(\tau)}(x), \quad \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) \right]_4 = \tilde{k}\tilde{u}_\theta^{(\tau)}(x) - \tau(hx+1)^{-1}\tilde{u}_z^{(\tau)}(x), \\ \left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) \right]_5 &= \tilde{k}\tilde{u}_r^{(\tau)}(x) + \tilde{D}(x)\tilde{u}_z^{(\tau)}(x),\end{aligned}$$

$$\left[ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) \right]_6 = -\tau(hx+1)^{-1}\tilde{u}_r^{(\tau)}(x) + \left( \tilde{D}(x) - (hx+1)^{-1} \right) \tilde{u}_z^{(\tau)}(x); \quad (5.9)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) = \tilde{\mathbf{C}}^{(ort)}\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x). \quad (5.10)$$

В соотношениях (5.9)  $\tilde{D}(x) = h^{-1} \left( d_x - \delta\lambda qx^{q-1} \right)$  ( $d_x = d/dx$ ). Уравнение (5.3) и соотношения (5.4) с учетом замены переменных (5.5) также преобразуются и



принимают следующий вид

$$\mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) = \hat{\mathbf{O}} \quad (x \in (x_0, x_1)). \quad (5.11)$$

Компоненты квадратного матричного дифференциального оператора  $\mathbf{M}_2^{(\tau)}(x)$  определяются так:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{1,1} &= \tilde{c}_{11} (hx+1)^2 d_x^2 + \tilde{c}_{11} \left( h + (1-2\delta)\lambda q (hx+1)x^{q-1} \right) (hx+1) d_x - \\ &\quad - h^2 \tilde{c}_{22} - \tau^2 h^2 \tilde{c}_{66} + \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55} \right) h^2 (hx+1)^2 + \\ &\quad + \lambda q (hx+1) x^{q-2} \left( \delta \left( 1 - q(hx+1) \left( 1 + (1-\delta)\lambda x^q \right) \right) \tilde{c}_{11} + hx \tilde{c}_{12} \right), \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{1,2} &= h\tau \left( (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) (hx+1) d_x + \right. \\ &\quad \left. + \lambda q (hx+1) x^{q-1} \left( (1-\delta)\tilde{c}_{12} - \delta\tilde{c}_{66} \right) - h(\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}) \right), \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{1,3} &= -h\tilde{k} (hx+1) \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) (hx+1) d_x + \right. \\ &\quad \left. + \lambda q (hx+1) x^{q-1} \left( (1-\delta)\tilde{c}_{13} - \delta\tilde{c}_{55} \right) + h(\tilde{c}_{13} - \tilde{c}_{23}) \right), \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{2,1} &= -h\tau \left( (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}) (hx+1) d_x + \right. \\ &\quad \left. + \lambda q (hx+1) x^{q-1} \left( (1-\delta)\tilde{c}_{66} - \delta\tilde{c}_{12} \right) + h(\tilde{c}_{22} + \tilde{c}_{66}) \right), \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{2,2} &= \tilde{c}_{66} \left( (hx+1)^2 d_x^2 + \left( h + (1-2\delta)\lambda q (hx+1)x^{q-1} \right) (hx+1) d_x - h^2 \right) - \\ &\quad - h^2 \tau^2 \tilde{c}_{22} + \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right) h^2 (hx+1)^2 - \\ &\quad - \lambda q (hx+1) x^{q-2} \left( \delta - hx - \delta q (hx+1) - \delta(1-\delta)\lambda q (hx+1)x^q \right) \tilde{c}_{66}, \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{2,3} &= \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{3,2} = h^2 \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) (hx+1), \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{3,1} &= h\tilde{k} (hx+1) \left( (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) (hx+1) d_x + \right. \\ &\quad \left. + h(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{55}) + \lambda q (hx+1) x^{q-1} \left( (1-\delta)\tilde{c}_{55} - \delta\tilde{c}_{13} \right) \right), \\ \left[ \mathbf{M}_2^{(\tau)}(x) \right]_{3,3} &= \tilde{c}_{55} \left( (hx+1)^2 d_x^2 + \left( h + (1-2\delta)\lambda q (hx+1)x^{q-1} \right) (hx+1) d_x \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -h^2\tau^2\tilde{c}_{44} + \left(\Omega^2 - \tilde{k}^2\tilde{c}_{33}\right)h^2(hx+1)^2 + \\
& + \delta\lambda q(hx+1)x^{q-2}\left(1 - q(hx+1) - (1-\delta)\lambda q(hx+1)x^q\right)\tilde{c}_{55}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Искомое решение уравнения (5.11) строится в виде ряда по обобщенной кольцевой координате. Водится следующее представление

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{X}_m^{(\tau)} \quad (x \in (x_0, x_1)), \quad (5.13)$$

где  $\mathbf{X}_m^{(\tau)}$  – неизвестные векторные коэффициенты. Полагается, что ряд (5.13) сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке  $x \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$  таком, что  $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subset (x_0, x_1)$ . С учетом представления (5.13) уравнение (5.11) преобразуется в функциональное уравнение

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left( \sum_{j=0}^4 \mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{m,5+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_{m,9+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(\tau)} \right) = \hat{\mathbf{O}} \\
& (x \in (x_0, x_1)), \quad (5.14)
\end{aligned}$$

из которого получается рекуррентная последовательность алгебраических уравнений для определения векторных коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau)}$  такого вида

$$\mathbf{X}_m^{(\tau)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0); \quad (5.15)$$

$$\sum_{j=0}^4 \mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{m,5+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(\tau)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_{m,9+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(\tau)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (5.16)$$

Отличные от нуля элементы квадратных матричных коэффициентов  $\mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)}$  в уравнениях (5.16) определяются так:

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}]_{1,1} = m(m-1)\tilde{c}_{11}, \quad [\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}]_{2,2} = m(m-1)\tilde{c}_{66}, \quad [\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}]_{3,3} = m(m-1)\tilde{c}_{55}, \\
& [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{1,1} = h(m-1)(2m-3)\tilde{c}_{11}, \quad [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{1,2} = h\tau(m-1)(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}), \\
& [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{1,3} = -h\tilde{k}(m-1)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}), \quad [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{2,1} = -h\tau(m-1)(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}), \\
& [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{2,2} = h(m-1)(2m-3)\tilde{c}_{66}, \quad [\mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)}]_{3,1} = h\tilde{k}(m-1)(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{Q}_{m,1}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= h(m-1)(2m-3)\tilde{c}_{55}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= h^2 \left( (m-2)^2 \tilde{c}_{11} + \Omega^2 - \tilde{c}_{22} - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55} - \tau^2 \tilde{c}_{66} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{1,2} &= h^2 \tau \left( (m-2)\tilde{c}_{12} + (m-3)\tilde{c}_{66} - \tilde{c}_{22} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{1,3} &= -h^2 \tilde{k} \left( (2m-3)\tilde{c}_{13} + 2(m-2)\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{23} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{2,1} &= -h^2 \tau \left( (m-2)\tilde{c}_{12} + (m-1)\tilde{c}_{66} + \tilde{c}_{22} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= h^2 \left( (m-3)(m-1)\tilde{c}_{66} + \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} - \tau^2 \tilde{c}_{22} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{2,3} &= \left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{3,2} = h^2 \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{3,1} &= h^2 \tilde{k} \left( 2(m-2)\tilde{c}_{13} + (2m-3)\tilde{c}_{55} + \tilde{c}_{23} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,2}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= h^2 \left( (m-2)^2 \tilde{c}_{55} + \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} - \tau^2 \tilde{c}_{44} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= 2h^3 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55} \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{1,3} = -h^3 \tilde{k} \left( (m-2)\tilde{c}_{13} + (m-3)\tilde{c}_{55} - \tilde{c}_{23} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= 2h^3 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{2,3} = h^3 \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{3,1} &= \tilde{k} h^3 \left( (m-3)\tilde{c}_{13} + (m-2)\tilde{c}_{55} + \tilde{c}_{23} \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{3,2} = h^3 \tilde{k} \tau (\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,3}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= 2h^3 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,4}^{(\tau)} \right]_{1,1} = h^4 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,4}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= h^4 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,4}^{(\tau)} \right]_{3,3} = h^4 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,5}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= -\lambda q (q - m - \delta(1 + q - 2m)) \tilde{c}_{11}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,5}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= -\lambda q (q - m - \delta(1 + q - 2m)) \tilde{c}_{66}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,5}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= -\lambda q (q - m - \delta(1 + q - 2m)) \tilde{c}_{55}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= -\lambda q h \left( (2(1 + q - m) - \delta(5 + 2q - 4m)) \tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12} \right), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= -\lambda q h (3 + 2q - 2m - \delta(5 + 2q - 4m)) \tilde{c}_{66},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= -\lambda q h (2(1+q-m) - \delta(5+2q-4m)) \tilde{c}_{55}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tau h ((1-\delta)\tilde{c}_{12} - \delta\tilde{c}_{66}), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{2,1} = -\lambda q \tau h ((1-\delta)\tilde{c}_{66} - \delta\tilde{c}_{12}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{1,3} &= -\lambda q \tilde{k} h ((1-\delta)\tilde{c}_{13} - \delta\tilde{c}_{55}), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,6}^{(\tau)} \right]_{3,1} = \lambda q \tilde{k} h ((1-\delta)\tilde{c}_{55} - \delta\tilde{c}_{13}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= -\lambda q h^2 ((2+q-m - \delta(4+q-2m))\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= -\lambda q h^2 (3+q-m - \delta(4+q-2m))\tilde{c}_{66}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= -\lambda q h^2 (2+q-m - \delta(4+q-2m))\tilde{c}_{55}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{1,2} &= \lambda q \tau h^2 ((1-\delta)\tilde{c}_{12} - \delta\tilde{c}_{66}), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{2,1} = -\lambda q \tau h^2 ((1-\delta)\tilde{c}_{66} - \delta\tilde{c}_{12}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{1,3} &= -2\lambda q \tilde{k} h^2 ((1-\delta)\tilde{c}_{13} - \delta\tilde{c}_{55}), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,7}^{(\tau)} \right]_{3,1} = 2\lambda q \tilde{k} h^2 ((1-\delta)\tilde{c}_{55} - \delta\tilde{c}_{13}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,8}^{(\tau)} \right]_{1,3} &= -\lambda q \tilde{k} h^3 ((1-\delta)\tilde{c}_{13} - \delta\tilde{c}_{55}), \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,8}^{(\tau)} \right]_{3,1} = \lambda q \tilde{k} h^3 ((1-\delta)\tilde{c}_{55} - \delta\tilde{c}_{13}), \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,9}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{11}, \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,9}^{(\tau)} \right]_{2,2} = \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{66}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,9}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= \lambda^2 q^2 \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{55}, \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,10}^{(\tau)} \right]_{1,1} = 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{11}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,10}^{(\tau)} \right]_{2,2} &= 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{66}, \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,10}^{(\tau)} \right]_{3,3} = 2\lambda^2 q^2 h \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{55}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,11}^{(\tau)} \right]_{1,1} &= \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{11}, \quad \left[ \mathbf{Q}_{m,11}^{(\tau)} \right]_{2,2} = \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{66}, \\
\left[ \mathbf{Q}_{m,11}^{(\tau)} \right]_{3,3} &= \lambda^2 q^2 h^2 \delta (\delta - 1) \tilde{c}_{55} \quad (m = \overline{0, \infty}). \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Представления (5.9), (5.10) для векторных функций  $\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x)$  с учетом разложения (5.13) получают следующий вид

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \mathbf{X}_m^{(\tau)},$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(\tau,2)}(x) \mathbf{X}_m^{(\tau)} \quad (x \in (x_0, x_1)). \tag{5.18}$$

Отличные от нуля элементы матричного размерности  $6 \times 3$  коэффициента

$\mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x)$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{1,1} &= \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{5,3} = h^{-1} (m x^{-1} - \delta q \lambda x^{q-1}), & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{2,1} &= (hx + 1)^{-1}, \\ \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{2,2} &= \tau (hx + 1)^{-1}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{3,3} &= -\tilde{k}, & \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{4,2} &= \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{5,1} = \tilde{k}, \\ \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{4,3} &= \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{6,1} = -\tau (hx + 1)^{-1}, \\ \left[ \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \right]_{6,2} &= h^{-1} (m x^{-1} - \delta q \lambda x^{q-1}) - (hx + 1)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

а матричный размерности  $6 \times 3$  коэффициент  $\mathbf{H}_m^{(\tau,2)}(x)$  задается представлением

$$\mathbf{H}_m^{(\tau,2)}(x) = \tilde{\mathbf{C}}^{(ort)} \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x). \quad (5.20)$$

**5.1.2. Базисные решения в случае крутильных волн.** При  $\tau = 0$  и  $\beta = \pi/2$  представления (5.6) – (5.8) преобразуются к такому виду

$$\begin{aligned} u_\theta(x, z, t) &= \exp(-\delta \lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x), \\ \mathbf{E}(x, z, t) &= \exp(-\delta \lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(TW)} \tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(x), \\ \mathbf{S}(x, z, t) &= \exp((1 - \delta) \lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(TW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где  $\mathbf{T}_2^{(TW)}$  – диагональная матрица, определяемая соотношениями (2.28);  $\mathbf{E}(x, z, t)$  и  $\mathbf{S}(x, z, t)$  – вектор-столбцы с ненулевыми компонентами тензоров соответственно упругих деформаций и безразмерных напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, z, t) &= \left[ \varepsilon_{\theta z}(x, z, t), \varepsilon_{r\theta}(x, z, t) \right]^T, \\ \mathbf{S}(x, z, t) &= \left[ \sigma_{\theta z}(x, z, t), \sigma_{r\theta}(x, z, t) \right]^T; \end{aligned} \quad (5.22)$$

$\tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(x)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(x) &= \left[ \tilde{\varepsilon}_{\theta z}^{(TW)}(x), \tilde{\varepsilon}_{r\theta}^{(TW)}(x) \right]^T, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x) &= \left[ \tilde{\sigma}_{\theta z}^{(TW)}(x), \tilde{\sigma}_{r\theta}^{(TW)}(x) \right]^T. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Уравнение (5.11) с учетом (5.12), представления (5.13), (5.18) – (5.20) и рекуррентные уравнения (5.15) – (5.17) соответственно получают такой вид

$$\begin{aligned} & \left( (hx+1)^2 d_x^2 + (h + (1-2\delta)\lambda q(hx+1)x^{q-1})(hx+1)d_x - h^2 + \kappa_3^2 h^2 (hx+1)^2 + \right. \\ & \left. + \lambda q(hx+1)x^{q-2} \left( \delta - hx - \delta q(hx+1) - \delta(1-\delta)\lambda q(hx+1)x^q \right) \right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(x) = 0 \\ & \quad (x \in (x_0, x_1)); \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m X_m^{(TW)} \quad (x \in (x_0, x_1)); \quad (5.25)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m X_m^{(TW)} \mathbf{H}_m^{(TW,1)}(x),$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m X_m^{(TW)} \mathbf{H}_m^{(TW,2)}(x) \quad (x \in (x_0, x_1)); \quad (5.26)$$

$$\mathbf{H}_m^{(TW,1)}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{k} \\ \nu - (hx+1)^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_m^{(TW,2)}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{k} \tilde{c}_{44} \\ (\nu - (hx+1)^{-1}) \tilde{c}_{66} \end{bmatrix}; \quad (5.27)$$

$$X_m^{(TW)} = 0 \quad (m < 0),$$

$$\sum_{j=0}^4 Q_{m,j}^{(TW)} X_{m-j}^{(TW)} + \sum_{j=0}^3 Q_{m,5+j}^{(TW)} X_{m-q-j}^{(TW)} + \sum_{j=0}^2 Q_{m,9+j}^{(TW)} X_{m-2q-j}^{(TW)} = 0 \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (5.28)$$

В соотношениях (5.24) – (5.28)  $X_m^{(TW)}$  – искомые скалярные коэффициенты разложений;  $\kappa_3$  – определяющийся соотношением (2.35) параметр;

$\nu = h^{-1} (mx^{-1} - \delta q \lambda x^{q-1})$ ;  $Q_{m,j}^{(TW)}$  – скалярные коэффициенты следующего вида

$$Q_{m,0}^{(TW)} = m(m-1)\tilde{c}_{66}, \quad Q_{m,1}^{(TW)} = h(m-1)(2m-3)\tilde{c}_{66},$$

$$Q_{m,2}^{(TW)} = h^2 \left( (m-3)(m-1)\tilde{c}_{66} + \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} - \tau^2 \tilde{c}_{22} \right),$$

$$Q_{m,3}^{(TW)} = 2h^3 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right), \quad Q_{m,4}^{(TW)} = h^4 \left( \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right),$$

$$Q_{m,5}^{(TW)} = -\lambda q (q - m - \delta(1 + q - 2m)) \tilde{c}_{66},$$

$$Q_{m,6}^{(TW)} = -\lambda q h (3 + 2q - 2m - \delta(5 + 2q - 4m)) \tilde{c}_{66},$$

$$Q_{m,7}^{(TW)} = -\lambda q h^2 (3 + q - m - \delta(4 + q - 2m)) \tilde{c}_{66}, \quad Q_{m,8}^{(\tau)} = 0,$$

$$Q_{m,9}^{(TW)} = \lambda^2 q^2 \delta(\delta - 1) \tilde{c}_{66}, \quad Q_{m,10}^{(TW)} = 2\lambda^2 q^2 h \delta(\delta - 1) \tilde{c}_{66},$$

$$Q_{m,11}^{(TW)} = \lambda^2 q^2 h^2 \delta(\delta - 1) \tilde{c}_{66} \quad (m = \overline{0, \infty}). \quad (5.29)$$

Уравнения (5.28) при  $m=0$  и  $m=1$  для любых  $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  с учетом (5.29) принимают такой вид

$$0 \cdot X_0^{(TW)} = 0 \quad (m=0), \quad 0 \cdot X_1^{(TW)} = 0 \quad (m=1). \quad (5.30)$$

Поскольку  $Q_{m,0}^{(TW)} \neq 0$  ( $m \geq 2$ ), следовательно, из уравнений (5.28) с учетом (5.30) с точностью до произвольного скалярного множителя определяются два множества коэффициентов  $\{X_m^{(TW,s)}\}_{m=0}^{\infty}$  ( $s = \overline{1,2}$ )

$$X_m^{(TW,1)} = 0 \quad (m < 0), \quad X_0^{(TW,1)} = 1, \quad X_1^{(TW,1)} = 0, \quad X_0^{(TW,2)} = 0, \quad X_1^{(TW,2)} = 1,$$

$$X_m^{(TW,s)} = \sum_{j=1}^4 A_{m,j}^{(TW)} X_{m-j}^{(TW,s)} + \sum_{j=0}^3 A_{m,5+j}^{(TW)} X_{m-q-j}^{(TW,s)} + \sum_{j=0}^2 A_{m,9+j}^{(TW)} X_{m-2q-j}^{(TW,s)}$$

$$(m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1,2}). \quad (5.31)$$

Здесь

$$A_{m,j}^{(TW)} = -Q_{m,j}^{(TW)} / Q_{m,0}^{(TW)} \quad (j = \overline{1,11}; m = \overline{2, \infty}). \quad (5.32)$$

Тогда представления (5.25) с учетом (5.31) определяют два линейно независимых частных решения уравнения (5.24) и, соответственно, общее решение уравнения (5.24) может быть представлено через матричное базисное решение так:

$$\tilde{u}_{\theta}^{(TW)}(x) = \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x) \mathbf{B}, \quad (5.33)$$

где  $\mathbf{B}$  – произвольный векторный коэффициент второго порядка;  $\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x)$  – матричное размерности  $1 \times 2$  решение следующего вида

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[ X_m^{(TW,1)}, X_m^{(TW,2)} \right] \quad (x \in (x_0, x_1)). \quad (5.34)$$

По аналогии с выражением (5.33) вводятся представления для векторных функций  $\tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(x)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x)$

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(x) = \tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(x) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(x) = \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x) \mathbf{B} \quad (5.35)$$

в которых используются полученные с учетом соотношений (5.26), (5.34) матричные размерности  $2 \times 2$  решения следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[ X_m^{(TW,1)} \mathbf{H}_m^{(TW,1)}(x), X_m^{(TW,2)} \mathbf{H}_m^{(TW,1)}(x) \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[ X_m^{(TW,1)} \mathbf{H}_m^{(TW,2)}(x), X_m^{(TW,2)} \mathbf{H}_m^{(TW,2)}(x) \right] \quad (x \in (x_0, x_1)). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Для коэффициентов  $A_{m,j}^{(TW)}$  в рекуррентных соотношениях (5.31) получены следующие асимптотические при  $m \rightarrow \infty$  оценки

$$\begin{aligned} |A_{m,1}^{(TW)} + 2h| &\leq m^{-1} 3h, \quad |A_{m,2}^{(TW)} + h^2| \leq m^{-1} 3h^2, \\ |A_{3,j}^{(TW)}| &\leq m^{-2} 2h^3 \left| \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right| / \tilde{c}_{66}, \quad |A_{4,j}^{(TW)}| \leq m^{-2} h^4 \left| \Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44} \right| / \tilde{c}_{66} \\ |A_{5,j}^{(TW)}| &\leq m^{-1} q |\lambda(2\delta - 1)|, \quad |A_{6,j}^{(TW)}| \leq m^{-1} 2qh |\lambda(2\delta - 1)|, \\ |A_{7,j}^{(TW)}| &\leq m^{-1} qh^2 |\lambda(2\delta - 1)|, \quad |A_{8,j}^{(TW)}| = 0, \quad |A_{9,j}^{(TW)}| \leq m^{-2} \lambda^2 q^2 |\delta(\delta - 1)|, \\ |A_{10,j}^{(TW)}| &\leq m^{-2} 2\lambda^2 q^2 h |\delta(\delta - 1)|, \quad |A_{9,j}^{(TW)}| \leq m^{-2} \lambda^2 q^2 h^2 |\delta(\delta - 1)|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Следовательно, асимптотическое при  $m \rightarrow \infty$  представление для рекуррентных соотношений (5.31) имеет вид

$$X_m^{(TW,s)} = -2hX_{m-1}^{(TW,s)} - h^2 X_{m-2}^{(TW,s)}. \quad (5.38)$$

Характеристическое уравнение для соотношений (5.38)

$$\zeta^2 + 2h\zeta + h^2 = 0 \quad (5.39)$$

имеет кратный корень  $\zeta = -h$ , определяющий для разложения (5.25), (5.26), (5.34), (5.36) радиус сходимости  $h^{-1} > 1$ . Таким образом, заложенное в соотношениях ограничение  $(x_0, x_1) \subset (-h^{-1}, h^{-1})$  обеспечивает справедливость исходного положения об абсолютной и равномерной сходимости указанных разложений на любом отрезке  $x \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$  таком, что  $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subset (x_0, x_1)$ .

В случае крутильных волн уравнение (5.3) преобразуется к виду

$$\left( r^2 d_r^2 + \left( 1 + (1 - 2\delta) \lambda q h^{-q} r (r - 1)^{q-1} \right) r d_r - 1 + \kappa_3^2 r^2 + \right.$$



$$\begin{aligned}
& +\lambda q h^{-q} r(r-1)^{q-2} \left(1 + \delta - (1 - \delta q)r - \delta(1 - \delta)\lambda q h^{-q} r(r-1)^q\right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = 0 \\
& \left(r \in (r_0, r_1)\right), \tag{5.40}
\end{aligned}$$

где  $\kappa_3$  – определяемый соотношением (2.35) параметр. В частных случаях  $q = 0$  (однородный материал),  $q = 1$  и  $q = 2$  (неоднородный материал) общее решение этого уравнения представляется в замкнутой форме с использованием специальных функций.

При  $q = 0$  уравнение (5.40) представляет собой классическое уравнение Бесселя [2] (2.37). Следовательно, базисные матричные решения уравнений модели с учетом соотношений (1.37), (2.25) – (2.28) могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}
& \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r)\mathbf{B}, \\
& \tilde{\mathbf{E}}^{(TW)}(r) = \tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(r)\mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(TW)}(r) = \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(r)\mathbf{B}; \tag{5.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r) = \kappa_3 \left[ \mathbf{Y}_0^{(TW)}(r) \right]_{2,1..2}, \\
& \mathbf{E}^{(TW,B)}(r) = \mathbf{P}_0^{(TW,1)}(r) \mathbf{Y}_0^{(TW)}(r), \\
& \mathbf{S}^{(TW,B)}(r) = \mathbf{P}_0^{(TW,2)}(r) \mathbf{Y}_0^{(TW)}(r). \tag{5.42}
\end{aligned}$$

В представлениях (5.41), (5.42)  $\mathbf{P}_0^{(TW,s)}$  ( $s = \overline{1,2}$ ) – определяемые соотношениями (2.39) матрицы;  $\mathbf{B}$  – произвольный вектор-столбец второго порядка;  $\mathbf{Y}_0^{(TW)}(r)$  – матричная функция вида

$$\mathbf{Y}_0^{(TW)}(r) = \begin{bmatrix} J_0(\kappa_3 r) & Y_0(\kappa_3 r) \\ J_1(\kappa_3 r) & Y_1(\kappa_3 r) \end{bmatrix}. \tag{5.43}$$

Здесь  $J_n(z)$  и  $Y_n(z)$  – функции Бесселя.

При  $q = 1$  ( $\lambda \neq 0$ ) уравнение (5.40) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \left(d_r^2 + \left((1 - 2\delta)\lambda h^{-1} + r^{-1}\right)d_r + \kappa_3^2 - \delta(1 - \delta)\lambda^2 h^{-2} - (1 + \delta)\lambda h^{-1}r^{-1} - r^{-2}\right) \tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = 0 \\
& \left(r \in (r_0, r_1)\right). \tag{5.44}
\end{aligned}$$

Рассматриваются два случая. Если

$$\lambda^2 h^{-2} \neq 4\kappa_3^2, \quad (5.45)$$

то в уравнении (5.44) вводится замена функции

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = \left( \exp\left((\delta - 1/2)\lambda h^{-1}r\right) / \sqrt{r} \right) f(r). \quad (5.46)$$

с последующей заменой переменной  $r = \xi/\gamma$ , где

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 h^{-2} - 4\kappa_3^2}. \quad (5.47)$$

В результате (5.44) преобразуется в уравнение Уиттекера [2] (2.43) с параметрами

$$\nu = -3\lambda h^{-1}/(2\gamma), \quad \mu = 1, \quad (5.48)$$

общее решение которого записывается через функции Уиттекера [2] в виде

$$f(\xi) = b_1 M_{\nu, \mu}(\xi) + b_2 W_{\nu, \mu}(\xi). \quad (5.49)$$

Здесь  $b_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) – произвольные постоянные. Базисные решения уравнений модели с учетом соотношений (1.37), (2.25) – (2.28), (5.41) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW, B)}(r) &= \left( \exp\left((\delta - 1/2)\lambda h^{-1}r\right) / \sqrt{r} \right) [M_{\nu, \mu}(\gamma r), W_{\nu, \mu}(\gamma r)], \\ \mathbf{E}^{(TW, B)}(r) &= \left( \exp\left((\delta - 1/2)\lambda h^{-1}r\right) / \sqrt{r} \right) [\mathbf{P}_1^{(TW, 1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r), \tilde{\mathbf{P}}_1^{(TW, 1)}(r) \tilde{\mathbf{Y}}_1^{(TW)}(r)], \\ \mathbf{S}^{(TW, B)}(r) &= \left( \exp\left((\delta - 1/2)\lambda h^{-1}r\right) / \sqrt{r} \right) [\mathbf{P}_2^{(TW, 1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r), \tilde{\mathbf{P}}_2^{(TW, 1)}(r) \tilde{\mathbf{Y}}_1^{(TW)}(r)] \\ &\quad (r \in (r_0, r_1)), \end{aligned} \quad (5.50)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(TW, 1)}(r) &= \begin{bmatrix} \tilde{k} & 0 \\ (1 - \lambda h^{-1} \gamma^{-1})(\gamma - 3r^{-1})/2 & 3(1 - \lambda h^{-1} \gamma^{-1})r^{-1}/2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{P}}_1^{(TW, 1)}(r) &= \begin{bmatrix} \tilde{k} & 0 \\ (1 - \lambda h^{-1} \gamma^{-1})(\gamma - 3r^{-1})/2 & -r^{-1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_1^{(TW, 2)}(r) &= \begin{bmatrix} \tilde{k}\tilde{c}_{44} & 0 \\ (1 - \lambda h^{-1} \gamma^{-1})(\gamma - 3r^{-1})\tilde{c}_{66}/2 & 3(1 - \lambda h^{-1} \gamma^{-1})r^{-1}\tilde{c}_{66}/2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_1^{(TW,2)}(r) &= \begin{bmatrix} \tilde{k}\tilde{c}_{44} & 0 \\ (1-\lambda h^{-1}\gamma^{-1})(\gamma-3r^{-1})\tilde{c}_{66}/2 & -r^{-1}\tilde{c}_{66} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r) &= \begin{bmatrix} M_{\nu,\mu}(\gamma r) \\ M_{\nu+1,\mu}(\gamma r) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_1^{(TW)}(r) = \begin{bmatrix} W_{\nu,\mu}(\gamma r) \\ W_{\nu+1,\mu}(\gamma r) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Параметры  $\gamma$ ,  $\nu$  и  $\mu$  в соотношениях (5.51) определяются выражениями (5.47), (5.48). Если же

$$\lambda^2 h^{-2} = 4\kappa_3^2, \quad (5.52)$$

то после замены функции

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = \exp\left((\delta-1/2)\lambda h^{-1}r\right)f(r) \quad (5.53)$$

и последующей замены переменной  $r = \xi^2/6$  уравнение (5.44) преобразуется в уравнение Бесселя [2] такого вида

$$\left(d_\xi^2 + \xi^{-1}d_\xi - 4\xi^{-2} - \lambda h^{-1}\right)f(\xi) = 0, \quad (5.54)$$

общее решение которого записывается через функции Бесселя

$$f(\xi) = b_1 J_2\left(\xi\sqrt{-\lambda h^{-1}}\right) + b_2 Y_2\left(\xi\sqrt{-\lambda h^{-1}}\right). \quad (5.55)$$

Здесь  $b_j$  ( $j = \overline{1,2}$ ) – произвольные постоянные. Значит, базисные решения уравнений модели с учетом соотношений (1.37), (2.25) – (2.28), (5.41) в этом случае запишутся так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r) &= \exp\left((\delta-1/2)\lambda h^{-1}r\right) \left[ J_2\left(\sqrt{-6\lambda h^{-1}}r\right), Y_2\left(\sqrt{-6\lambda h^{-1}}r\right) \right], \\ \mathbf{E}^{(TW,B)}(r) &= \exp\left((\delta-1/2)\lambda h^{-1}r\right) \mathbf{P}_1^{(TW,1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r), \\ \mathbf{S}^{(TW,B)}(r) &= \exp\left((\delta-1/2)\lambda h^{-1}r\right) \mathbf{P}_2^{(TW,1)}(r) \mathbf{Y}_1^{(TW)}(r) \\ &\quad (r \in (r_0, r_1)), \end{aligned} \quad (5.56)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1^{(TW,1)} &= \begin{bmatrix} -\tilde{k} & 2\tilde{k}/\sqrt{-6\lambda h^{-1}r} \\ (\lambda h^{-1} + 4r^{-1})/2 & -4(\lambda h^{-1} + r^{-1})/\sqrt{-6\lambda h^{-1}r} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{P}_1^{(TW,1)} &= \begin{bmatrix} -\tilde{k}\tilde{c}_{44} & 2\tilde{k}\tilde{c}_{44}/\sqrt{-6\lambda h^{-1}r} \\ (\lambda h^{-1} + 4r^{-1})\tilde{c}_{66}/2 & -4(\lambda h^{-1} + r^{-1})\tilde{c}_{66}/\sqrt{-6\lambda h^{-1}r} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{Y}_1^{(TW)}(r) &= \begin{bmatrix} J_0(\sqrt{-6\lambda r}) & Y_0(\sqrt{-6\lambda r}) \\ J_1(\sqrt{-6\lambda r}) & Y_1(\sqrt{-6\lambda r}) \end{bmatrix}. \tag{5.57}
\end{aligned}$$

При  $q = 2$  ( $\lambda \neq 0$ ) уравнение (5.40) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\left(d_r^2 + (1 - 2\lambda h^{-2}(2\delta - 1)r(r-1))r^{-1}d_r - (1 - 2\lambda h^{-2}(\delta + 1)r - \right. \\
&\left. - (\kappa_3^2 + 2\lambda h^{-2}(2\delta((\delta - 1)\lambda h^{-2} - 1) - 1))r^2 - 4\delta\lambda^2 h^{-4}(\delta - 1)r^3(r-2))\right)\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = 0 \\
&\quad (r \in (r_0, r_1)). \tag{5.58}
\end{aligned}$$

В уравнении (5.58) вводится замена функции

$$\tilde{u}_\theta^{(TW)}(r) = r \exp((\delta - 1)\lambda h^{-2}r(r-2))f(r). \tag{5.59}$$

с последующей заменой переменной

$$r = -\xi h / \sqrt{\lambda}. \tag{5.60}$$

В результате (5.58) преобразуется в биконфлюэнтное уравнение Гойна [343]

$$\left(d_\xi^2 + (1 + \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}\xi - 2\xi^2)\xi^{-1}d_\xi + ((\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha} - 2)\xi - (\tilde{\delta} + (1 + \tilde{\alpha})\tilde{\beta})/2)\xi^{-1}\right)f(\xi) = 0 \tag{5.61}$$

с параметрами

$$\tilde{\alpha} = 2, \quad \tilde{\beta} = 2h^{-1}\sqrt{\lambda}, \quad \tilde{\gamma} = \kappa_3^2\lambda^{-1}h^2 - 4, \quad \tilde{\delta} = 6h^{-1}\sqrt{\lambda}. \tag{5.62}$$

Сингулярными точками этого уравнения являются точки  $\xi = 0$  (регулярная сингулярность) и  $\xi = \infty$  (иррегулярная сингулярность) [343]. Локальным (фробениусовским) в окрестности регулярной особой точки  $\xi = 0$  решением уравнения (5.61) является функция Гойна  $H(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \xi)$ , которая может быть

представлена в виде разложения в степенной ряд вокруг начала координат  $\xi = 0$ , сходящийся во всей комплексной плоскости [343]. Второе, линейно независимое решение уравнения (5.61) в области  $0 < |\xi| < \infty$  с учетом соотношений (5.62) может быть представлено так [343]:

$$H(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \xi) \int \exp(\xi(\xi + \beta)) \xi^{-3} H(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \xi)^{-2} d\xi. \quad (5.63)$$

Таким образом, базисные решения уравнений модели в рассматриваемом случае неоднородности с учетом соотношений (1.37), (2.25) – (2.28), (5.41), (5.59), (5.60), (5.62) может быть представлено в таком виде

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r) = r \exp\left((\delta - 1)\lambda h^{-2}r(r - 2)\right) \left[ \begin{array}{c} F(r) \\ F(r) \int \exp(\lambda h^{-2}r(r - 2)) r^{-3} F(r)^{-2} dr \end{array} \right]^T, \quad (5.64)$$

$$F(r) = H(2, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, 3\tilde{\beta}, -\tilde{\beta}r/2) \quad (r \in (r_0, r_1)).$$

Здесь параметры  $\tilde{\beta}$  и  $\tilde{\gamma}$  определяются соотношениями (5.62). Компоненты матричных функций  $\tilde{\mathbf{E}}^{(TW,B)}(x)$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(x)$  для представлений (5.41) вычисляются с использованием выражений (5.1), (5.2) и полученных на основании соотношений (5.64) явных выражений для компонент  $\tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(r)$ .

**5.1.3. Базисные решения в случае продольно-сдвиговых волн.** При  $\tau = 0$  и  $\beta = 0$  представления (5.6) – (5.8) приобретают такой вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, z, t) &= \exp(-\delta\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(LSW)} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x), \\ \mathbf{E}(x, z, t) &= \exp(-\delta\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(x), \\ \mathbf{S}(x, z, t) &= \exp((1 - \delta)\lambda x^q - i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_2^{(LSW)} \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x), \end{aligned} \quad (5.65)$$

где  $\mathbf{U}(x, z, t)$ ,  $\mathbf{E}(x, z, t)$  и  $\mathbf{S}(x, z, t)$  – вектор-столбцы с ненулевыми компонентами соответственно вектора безразмерных перемещений, тензоров упругих деформаций и безразмерных напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, z, t) &= [u_r(x, z, t), u_z(x, z, t)]^T, \\ \mathbf{E}(x, z, t) &= [\varepsilon_{rr}(x, z, t), \varepsilon_{\theta\theta}(x, z, t), \varepsilon_{zz}(x, z, t), \varepsilon_{rz}(x, z, t)]^T, \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}(x, z, t) = [\sigma_{rr}(x, z, t), \sigma_{\theta\theta}(x, z, t), \sigma_{zz}(x, z, t), \sigma_{rz}(x, z, t)]^T; \quad (5.66)$$

$\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x)$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(x)$  и  $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= [\tilde{u}_r^{(LSW)}(x), \tilde{u}_z^{(LSW)}(x)]^T, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(x) &= [\tilde{\varepsilon}_{rr}^{(LSW)}(x), \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x), \tilde{\varepsilon}_{zz}^{(LSW)}(x), \tilde{\varepsilon}_{rz}^{(LSW)}(x)]^T, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x) &= [\tilde{\sigma}_{rr}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{zz}^{(LSW)}(x), \tilde{\sigma}_{rz}^{(LSW)}(x)]^T; \end{aligned} \quad (5.67)$$

$\mathbf{T}_1^{(LSW)}$  и  $\mathbf{T}_2^{(LSW)}$  – определяемые соотношениями (2.57) диагональные матрицы.

Выражения (5.13), (5.18) – (5.20) и рекуррентные уравнения (5.15) – (5.17) соответственно получают следующие представления

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{X}_m^{(LSW)}, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(x) \mathbf{X}_m^{(LSW)}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x) \mathbf{X}_m^{(LSW)} \quad (x \in (x_0, x_1)). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Отличные от нуля элементы матричных размерности  $4 \times 2$  коэффициентов  $\mathbf{H}_m^{(LSW,j)}(x)$  ( $j = 1, 2$ ) с учетом (5.19) имеют такой вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(x)]_{1,1} &= [\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(x)]_{4,2} = \nu, \quad [\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(x)]_{2,1} = (hx+1)^{-1}, \\ [\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(x)]_{3,3} &= -\tilde{k}, \quad [\mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(x)]_{4,1} = \tilde{k}; \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{1,1} = \nu \tilde{c}_{11} + (hx+1)^{-1} \tilde{c}_{12}, \quad [\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{1,2} = -\tilde{k} \tilde{c}_{13},$$

$$[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{2,1} = \nu \tilde{c}_{12} + (hx+1)^{-1} \tilde{c}_{22}, \quad [\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{2,2} = -\tilde{k} \tilde{c}_{23},$$

$$[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{3,1} = \nu \tilde{c}_{13} + (hx+1)^{-1} \tilde{c}_{23}, \quad [\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{3,2} = -\tilde{k} \tilde{c}_{33},$$

$$[\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{4,1} = \tilde{k} \tilde{c}_{55}, \quad [\mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x)]_{4,2} = \nu \tilde{c}_{55}. \quad (5.70)$$

В соотношениях (5.69), (5.70)  $\nu = h^{-1}(mx^{-1} - \delta q \lambda x^{q-1})$ . Рекуррентные уравнения (5.15) – (5.17) записываются так:

$$\mathbf{X}_m^{(LSW)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m < 0),$$

$$\sum_{j=0}^4 \mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-j}^{(LSW)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{Q}_{m,5+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(LSW)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{Q}_{m,9+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(LSW)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (5.71)$$

Здесь  $\mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)}$  – полученные на основании соотношений (5.17) квадратные матрицы второго порядка

$$\mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)} = \left[ \mathbf{Q}_{m,j}^{(0)} \right]_{(1,3),(1,3)} \quad (j = \overline{0,11}), \quad (m = \overline{0, \infty}). \quad (5.72)$$

Уравнения (5.71) при  $m = 0$  и  $m = 1$  для любых  $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  с учетом (5.72) принимают такой вид

$$\mathbf{O} \mathbf{X}_0^{(LSW)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 0), \quad \mathbf{O} \mathbf{X}_1^{(LSW)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 1). \quad (5.73)$$

Уравнения (5.73) имеют четыре линейно независимых нетривиальных векторных решения, которые могут быть объединены в два матричных решения и записаны так:

$$\mathbf{X}_0^{(LSW,1)} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}_1^{(LSW,1)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_0^{(LSW,2)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_1^{(LSW,2)} = \mathbf{I}. \quad (5.74)$$

Представления (5.74) приведены с точностью до произвольного векторного множителя. Тогда для определения матричных размерности  $2 \times 2$  коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(LSW,s)}$  ( $s = \overline{1,2}; m \geq 2$ ) с учетом того, что  $\det(\mathbf{Q}_{m,0}^{(LSW)}) \neq 0$  ( $m \geq 2$ ) получаются явные рекуррентные представления

$$\mathbf{X}_m^{(LSW,s)} = \mathbf{O} \quad (m < 0; s = \overline{1,2}),$$

$$\mathbf{X}_m^{(LSW,s)} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-j}^{(LSW,s)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(LSW,s)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(LSW)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(LSW,s)}$$

$$(m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1,2}). \quad (5.75)$$

Здесь

$$\mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)} = -(\mathbf{Q}_{m,0}^{(LSW)})^{-1} \mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)} \quad (j = \overline{1,11}). \quad (5.76)$$

Следовательно, общие решения уравнений модели в рассматриваемом случае продольно-сдвиговых волн с учетом представлений (5.65) – (5.67) записываются через матричные базисные решения так:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW)}(x) &= \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x) \mathbf{B}, \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW)}(x) &= \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(x) \mathbf{B}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW)}(x) = \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x) \mathbf{B},\end{aligned}\quad (5.77)$$

где  $\mathbf{B}$  – произвольный векторный коэффициент четвертого порядка;  $\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x)$  и  $\tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(x)$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x)$  – матричные размерности соответственно  $2 \times 4$  и  $4 \times 4$  решения следующего вида

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[ \mathbf{X}_m^{(LSW,1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(LSW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW,1)}(x) \left[ \mathbf{X}_m^{(LSW,1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(LSW,2)}(x) \left[ \mathbf{X}_m^{(LSW,1)}, \mathbf{X}_m^{(LSW,2)} \right] \quad (x \in (x_0, x_1)).\end{aligned}\quad (5.78)$$

Для матричных коэффициентов  $\mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)}$  в рекуррентных соотношениях (5.75) получены следующие асимптотические при  $m \rightarrow \infty$  оценки

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}_{m,1}^{(LSW)} + 2h\mathbf{I}\| &\leq \kappa_1/m, \quad \|\mathbf{A}_{m,2}^{(LSW)} + h^2\mathbf{I}\| \leq \kappa_2/m, \\ \|\mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)}\| &\leq \kappa_j/m \quad (j = 3, 5, 6, 7), \quad \|\mathbf{A}_{m,j}^{(LSW)}\| \leq \kappa_j/m^2 \quad (j = 4, 8, 9, 10, 11).\end{aligned}\quad (5.79)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= h \sqrt{18 + |\tilde{k}|^2 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})^2 (\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{55}^{-2})}, \quad \kappa_2 = h^2 \sqrt{18 + 4|\tilde{k}|^2 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})^2 (\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{55}^{-2})}, \\ \kappa_3 &= h^3 |\tilde{k}| (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \sqrt{\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{55}^{-2}}, \quad \kappa_4 = h^4 \sqrt{\tilde{c}_{11}^{-2} |\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55}|^2 + \tilde{c}_{55}^{-2} |\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33}|^2}, \\ \kappa_5 &= \sqrt{2} q |\lambda(1 - 2\delta)|, \quad \kappa_6 = 2\sqrt{2} q h |\lambda(1 - 2\delta)|, \quad \kappa_7 = \sqrt{2} q h^2 |\lambda(1 - 2\delta)|, \\ \kappa_8 &= h^3 \sqrt{q |\tilde{k} \lambda| \sqrt{\tilde{c}_{11}^{-2} |(1 - \delta) \tilde{c}_{13} - \delta \tilde{c}_{55}|^2 + \tilde{c}_{55}^{-2} |(1 - \delta) \tilde{c}_{55} - \delta \tilde{c}_{13}|^2}}, \\ \kappa_9 &= \sqrt{2} \lambda^2 q^2 |\delta(1 - \delta)|, \quad \kappa_{10} = 2\sqrt{2} \lambda^2 q^2 h |\delta(1 - \delta)|,\end{aligned}$$



$$\kappa_{11} = \sqrt{2}\lambda^2 q^2 h^2 |\delta(1-\delta)|. \quad (5.80)$$

Следовательно, асимптотическое при  $m \rightarrow \infty$  представление для рекуррентных соотношений (5.75) имеет вид

$$\mathbf{X}_m^{(LSW,s)} = -2h\mathbf{X}_{m-1}^{(LSW,s)} - h^2\mathbf{X}_{m-2}^{(LSW,s)}. \quad (5.81)$$

Характеристическое уравнение для (5.81) имеет вид (5.39) и, как показано в случае крутильных волн, разложения (5.68), (5.78) сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке  $x \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$  таком, что  $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subset (x_0, x_1)$ .

**5.1.4. Базисные решения в случае неосесимметричных волн.** В неосесимметричном случае ( $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\beta = 0$ ) уравнения (5.16) для любых  $q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  с учетом соотношений (5.15), (5.17) при  $m = 0$  и  $m = 1$  принимают такой вид

$$\mathbf{O}\mathbf{X}_0^{(\tau)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 0), \quad \mathbf{O}\mathbf{X}_1^{(\tau)} = \hat{\mathbf{O}} \quad (m = 1). \quad (5.82)$$

Уравнения (5.82) имеют шесть линейно независимых нетривиальных векторных решения, которые после объединения в два матричных решения записываются так:

$$\mathbf{X}_0^{(\tau,1)} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{X}_1^{(\tau,1)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_0^{(\tau,2)} = \mathbf{O}, \quad \mathbf{X}_1^{(\tau,2)} = \mathbf{I}. \quad (5.83)$$

Матричные размерности  $3 \times 3$  представления (5.83) приведены с точностью до произвольного векторного множителя. Из выражений (5.17) следует, что  $\det(\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}) \neq 0$  ( $m \geq 2$ ). Значит, для определения матричных размерности  $3 \times 3$  коэффициентов  $\mathbf{X}_m^{(\tau,s)}$  ( $s = \overline{1,2}$ ;  $m \geq 2$ ) из уравнений (5.16) получаются явные рекуррентные представления

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^{(\tau,s)} &= \mathbf{O} \quad (m < 0), \\ \mathbf{X}_m^{(\tau,s)} &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-j}^{(\tau,s)} + \sum_{j=0}^3 \mathbf{A}_{m,5+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-q-j}^{(\tau,s)} + \sum_{j=0}^2 \mathbf{A}_{m,9+j}^{(\tau)} \mathbf{X}_{m-2q-j}^{(\tau,s)} \\ & \quad (m = 2, 3, \dots), \quad (s = \overline{1,2}). \end{aligned} \quad (5.84)$$

Здесь

$$\mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} = -\left(\mathbf{Q}_{m,0}^{(\tau)}\right)^{-1} \mathbf{Q}_{m,j}^{(\tau)} \quad (j = \overline{1,11}). \quad (5.85)$$

Тогда для заданного значения параметра  $\tau$  общие решения уравнений модели в случае неосесимметричных волн представляются соотношениями (5.6) – (5.8), в которых

$$\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau)}(x) = \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(x) \mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x) = \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau,B)}(x) \mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) = \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(x) \mathbf{V}, \quad (5.86)$$

где  $\mathbf{V}$  – произвольный векторный коэффициент шестого порядка;  $\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(x)$  и  $\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau,B)}(x)$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(x)$  – матричные размерности соответственно  $3 \times 6$  и  $6 \times 6$  решения следующего вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \left[ \mathbf{X}_m^{(\tau,1)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x) \left[ \mathbf{X}_m^{(\tau,1)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,2)} \right], \\ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} x^m \mathbf{H}_m^{(\tau,2)}(x) \left[ \mathbf{X}_m^{(\tau,1)}, \mathbf{X}_m^{(\tau,2)} \right] \quad (x \in (x_0, x_1)). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Здесь  $\mathbf{H}_m^{(\tau,s)}(x)$  ( $s = \overline{1,2}$ ) – определяемые соотношениями (5.19), (5.20) матрицы размерности  $6 \times 3$ .

Для матричных коэффициентов  $\mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)}$  в рекуррентных соотношениях (5.84) получены следующие асимптотические при  $m \rightarrow \infty$  оценки

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{A}_{m,1}^{(\tau)} + 2h\mathbf{I} \right\| &\leq \kappa_1/m, \quad \left\| \mathbf{A}_{m,2}^{(\tau)} + h^2\mathbf{I} \right\| \leq \kappa_2/m, \\ \left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} \right\| &\leq \kappa_j/m \quad (j = 3, 5, 6, 7), \quad \left\| \mathbf{A}_{m,j}^{(\tau)} \right\| \leq \kappa_j/m^2 \quad (j = 4, 8, 9, 10, 11), \end{aligned} \quad (5.88)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= h \sqrt{27 + \tau^2 (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})^2 (\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{66}^{-2}) + |\tilde{k}|^2 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})^2 (\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{55}^{-2})}, \\ \kappa_2 &= h^2 \sqrt{27 + \tau^2 (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})^2 (\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{66}^{-2}) + 4|\tilde{k}|^2 (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})^2 (\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{55}^{-2})}, \\ \kappa_3 &= h^3 |\tilde{k}| (\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \sqrt{\tilde{c}_{11}^{-2} + \tilde{c}_{55}^{-2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_4 &= h^4 \sqrt{\tilde{c}_{11}^{-2} |\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{55}|^2 + \tilde{c}_{55}^{-2} |\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{33}|^2 + \tilde{c}_{66}^{-2} |\Omega^2 - \tilde{k}^2 \tilde{c}_{44}|^2}, \\
\kappa_5 &= \sqrt{3}q |\lambda(1-2\delta)|, \quad \kappa_6 = 2\sqrt{3}qh |\lambda(1-2\delta)|, \quad \kappa_7 = \sqrt{3}qh^2 |\lambda(1-2\delta)|, \\
\kappa_8 &= h^3 \sqrt{q|\tilde{k}\lambda| \sqrt{\tilde{c}_{11}^{-2} |(1-\delta)\tilde{c}_{13} - \delta\tilde{c}_{55}|^2 + \tilde{c}_{55}^{-2} |(1-\delta)\tilde{c}_{55} - \delta\tilde{c}_{13}|^2}}, \\
\kappa_9 &= \sqrt{3}\lambda^2 q^2 |\delta(1-\delta)|, \quad \kappa_{10} = 2\sqrt{3}\lambda^2 q^2 h |\delta(1-\delta)|, \\
\kappa_{11} &= \sqrt{3}\lambda^2 q^2 h^2 |\delta(1-\delta)|.
\end{aligned} \tag{5.89}$$

На основании соотношений (5.89) получается следующее асимптотическое при  $m \rightarrow \infty$  представление для рекуррентных соотношений (5.86)

$$\mathbf{X}_m^{(\tau,s)} = -2h\mathbf{X}_{m-1}^{(\tau,s)} - h^2\mathbf{X}_{m-2}^{(\tau,s)}. \tag{5.90}$$

Характеристическое уравнение для (5.90) имеет вид (5.39) и по аналогии со случаем крутильных волн показывается, что разложения (5.13), (5.18), (5.87) сходятся абсолютно и равномерно на любом отрезке  $x \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$  таком, что  $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subset (x_0, x_1)$ .

## 5.2. Интегрирование уравнений волнового деформирования трансверсально изотропного протяженного цилиндра кольцевого сечения

**5.2.1. Базисные решения в случае осесимметричных волн.** В случае трансверсально изотропного материала вся группа соотношений (5.21) – (2.64), полученная для крутильных волн в цилиндрически ортотропных протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения остается неизменной ( $\tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2$ ), таким образом, указанные соотношения определяют решение целевой задачи для указанного типа волн и в рассматриваемом случае анизотропии.

В случае продольно-сдвиговых волн ( $\tau = 0, \beta = 0$ ) справедливыми остаются соотношения (5.65) – (5.69), (5.71), (5.73) – (5.79), (5.81). Выражение (5.72) записывается в таком виде

$$\mathbf{Q}_{m,j}^{(LSW)} = \left[ \mathbf{Q}_{m,j}^{(0)} \Big|_{\tilde{c}_{22}=\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{23}=\tilde{c}_{13}, \tilde{c}_{55}=\tilde{c}_{44}, \tilde{c}_{66}=(\tilde{c}_{11}-\tilde{c}_{12})/2} \right]_{(1,3),(1,3)} \quad (j = \overline{0,11}), \quad (m = \overline{0,\infty}), \quad (5.91)$$

а в представлениях (5.70) и (5.80) делается замена

$$\tilde{c}_{22} = \tilde{c}_{11}, \quad \tilde{c}_{23} = \tilde{c}_{13}, \quad \tilde{c}_{55} = \tilde{c}_{44}, \quad \tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2. \quad (5.92)$$

Остается также справедливым доказанное в случае цилиндрически ортотропного материала утверждение об абсолютной и равномерной сходимости разложений (5.68), (5.78) на любом отрезке  $x \in [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1]$  таком, что  $[\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subset (x_0, x_1)$ .

В рассматриваемом случае продольно-сдвиговых волн в системе дифференциальных уравнений (5.3) остаются два уравнения

$$\left[ \mathbf{M}_1^{(0)}(r) \right]_{(1,3),(1,3)} \cdot \mathbf{U}^{(LSW)}(r) = \hat{\mathbf{O}} \quad (r \in (r_0, r_1)). \quad (5.93).$$

В частном случае  $q = 0$  (однородный материал) эти уравнения имеют известное решение в функциях Бесселя. Базисные решения уравнений модели для  $q = 0$  определяются соотношениями (2.54) – (2.57), (2.64), (2.73), (2.74). При этом полагается, что в представлениях (2.64) произвольный векторный коэффициент  $\mathbf{B}$  имеет размерность 4, а в представлениях (2.73) матричная функция  $\mathbf{Y}_j^{(LSW)}(r)$  имеет вид

$$\mathbf{Y}_j^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} J_0(\kappa_j r) & Y_0(\kappa_j r) \\ J_1(\kappa_j r) & Y_1(\kappa_j r) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2). \quad (5.94)$$

Здесь  $\kappa_j$  ( $j = 1, 2$ ) – определяемые соотношениями (2.72) параметры;  $J_n(z)$  и  $Y_n(z)$  – функции Бесселя.

**5.2.2. Базисные решения в случае неосесимметричных волн.** В неосесимметричном случае ( $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\beta = 0$ ) остаются справедливыми ранее полученные соотношения (5.1), (5.3), (5.5) – (5.9), (5.11), (5.13) – (5.16), (5.18), (5.19), (5.82) – (5.88), (5.90). В представлениях (5.4), (5.12), (5.17), (5.89) делается замена (5.92), а выражения (5.2), (5.10) и (5.20) соответственно записываются в таком виде

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r) = \tilde{\mathbf{C}}^{(tr)} \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r), \quad (5.95)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(x) = \tilde{\mathbf{C}}^{(tr)} \tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(x), \quad (5.96)$$

$$\mathbf{H}_m^{(\tau,2)}(x) = \tilde{\mathbf{C}}^{(tr)} \mathbf{H}_m^{(\tau,1)}(x). \quad (5.97)$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(tr)} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{66} = (\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{12})/2 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемом случае неосесимметричных волн система дифференциальных уравнений (5.3) в частном случае  $q = 0$  (однородный материал) имеют известное решение в функциях Бесселя. Базисные решения уравнений модели для  $q = 0$  определяются соотношениями (1.38), (1.40), (1.42), (1.44), (2.1) – (2.4), (2.7) – (2.9), (2.93), (2.103), (2.104). При этом полагается, что в представлениях (2.93) произвольный векторный коэффициент  $\mathbf{B}$  имеет размерность 6, а в представлениях (2.103) матричная функция  $\mathbf{Y}_j^{(\tau)}(r)$  имеет вид

$$\mathbf{Y}_j^{(\tau)}(r) = \begin{bmatrix} J_\tau(\kappa_j r) & Y_\tau(\kappa_j r) \\ J_{\tau+1}(\kappa_j r) & Y_{\tau+1}(\kappa_j r) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 3). \quad (5.98)$$

Здесь  $\kappa_j$  ( $j = 1, 3$ ) – определяемые соотношениями (2/35), (2.72) параметры;  $J_n(z)$  и  $Y_n(z)$  – функции Бесселя.

### 5.3. Интегрирование уравнений волнового деформирования анизотропного протяженного цилиндра секторно-кольцевого сечения

Рассматривается волновод, имеющий в поперечном сечении форму кольцевого сектора (Рисунок 1.4), занимающий в безразмерных цилиндрических координатах  $Or\theta z$  область  $V_4$  (1.6) с граничной поверхностью  $G_4$  (1.11).

Функциональный закон радиальной неоднородности трансверсально изотропного материала задается соотношениями (1.35), (1.37). Математическая модель в случае трансверсально-изотропного материала включает уравнения (1.14), (1.16), (1.20), а в случае цилиндрически ортотропного материала – (1.14), (1.18), (1.20). Математическую модель дополняют условия на радиальных (1.30) и цилиндрических (1.31) либо (1.32) участках граничной поверхности. В рамках рассматриваемых моделей остаются справедливыми соотношения (1.38), (1.40), (1.42), (1.44), (2.1) – (2.4), (2.7) – (2.9), в которых из геометрических соображений снимается ограничение  $\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Входящие в указанные соотношения векторные функции  $\tilde{\mathbf{E}}^{(\tau)}(r)$  определяются выражениями (5.1), а  $\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau)}(r)$  – выражениями (5.2) в случае трансверсально-изотропного материала или (5.94) в случае цилиндрически ортотропного материала. В рассматриваемом волноводе с учетом представлений (1.38), (2.1), (2.7) подлежат независимому исследованию волны  $S$ -типа ( $\beta = 0$ ) и волны  $A$ -типа ( $\beta = \pi/2$ ).

Представления (1.38), (1.40), (2.1), (2.2), (2.7), (2.8) и граничные условия (1.30) определяют вспомогательную спектральную задачу построения решений уравнений соответствующей модели, удовлетворяющих на радиальных участках граничной поверхности волновода однородным условиям (1.30) (далее спектральные решения). Множество собственных значений указанных спектральных задач для обеих рассматриваемых моделей анизотропии задается уравнением (3.2) и имеет вид (3.3).

Решения уравнений модели волнового деформирования цилиндра секторно-кольцевого сечения, как и в случае цилиндра кольцевого сечения, после замены переменных (5.5) строятся в новой системе безразмерных координат  $Ox\theta z$ . При этом остаются справедливыми построенные для волноводов кольцевого поперечного сечения представления общих решений уравнений соответствующей модели через базисные решения. В случае трансверсально-изотропного материала волновода это представления (1.37), (5.6) – (5.8), (5.17), (5.19), (5.20), (5.85) – (5.89), а в случае цилиндрически ортотропного материала – представления (1.37),

(5.6) – (5.8), (5.19), (5.85) – (5.89), (5.98), (5.99). Указанные представления при выборе значений параметра  $\tau$  из множества собственных значений (3.3) определяют спектральные решения поставленных выше вспомогательных спектральных задач.

Для однородного ( $q = 0$ ) трансверсально-изотропного цилиндра секторно-кольцевого сечения общие решения уравнений модели определяются через базисные решения также соотношениями (1.38), (1.40), (1.42), (1.44), (2.1) – (2.4), (2.7) – (2.9), (2.93), (2.103), (2.104), (3.3). При этом полагается, что в представлениях (2.93) произвольный векторный коэффициент  $\mathbf{B}$  имеет размерность 6, а в представлениях (2.103) матричная функция  $\mathbf{Y}_j^{(\tau)}(r)$  задается соотношением (5.93).

#### 5.4. Получение дисперсионных соотношений

Рассмотренные математические модели волновых процессов в протяженных цилиндрах кольцевого поперечного сечения из трансверсально изотропных и цилиндрически ортотропных материалов включают единые условия свободной (1.28) либо жестко закрепленной (1.29) граничной поверхности. С учетом полученных представлений решений уравнений моделей через базисные решения каждый набор указанных однородных граничных условий порождает трансцендентное уравнение, определяющее дисперсионный спектр целевой задачи.

В случае распространения крутильных волн ( $\tau = 0, \beta = \pi/2$ ) в свободном либо жестко закрепленном протяженном цилиндре кольцевого поперечного сечения для обеих рассмотренных моделей анизотропии, базисные решения уравнений которых представлены соотношениями (5.21) – (5.23), (5.27), (5.29), (5.31) – (5.36) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) дисперсионные соотношения соответственно имеют вид

$$\det \left( \begin{bmatrix} \left[ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_0) \right]_{2,(1..2)} \right] \\ \left[ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_1) \right]_{2,(1..2)} \right] \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_0) \right] \\ \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(\tilde{x}_1) \right] \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (5.104)$$

где

$$\tilde{x}_0 = -(1 - R_1/R_*)h^{-1}, \quad \tilde{x}_1 = (R_2/R_* - 1)h^{-1}, \quad [\tilde{x}_0, \tilde{x}_1] \subseteq [-1, 1] \subset (x_0, x_1), \quad (5.105)$$

а для базисных решений, представленных соотношениями (1.37), (2.25) – (2.28), (5.41) и, либо (2.39), (5.42), (5.43) при  $q = 0$ , либо (5.45), (5.50), (5.51) или (5.52), (5.56), (5.57) при  $q = 1$  ( $\lambda \neq 0$ ), либо (5.64) при  $q = 2$  ( $\lambda \neq 0$ ) –

$$\det \left( \begin{bmatrix} \left[ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(\tilde{r}_0) \right]_{2,(1..2)} \right] \\ \left[ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(TW,B)}(\tilde{r}_1) \right]_{2,(1..2)} \right] \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(\tilde{r}_0) \right] \\ \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(TW,B)}(\tilde{r}_1) \right] \end{bmatrix} \right) = 0, \quad (5.106)$$

где

$$\tilde{r}_0 = R_1/R_*, \quad \tilde{r}_1 = R_2/R_*, \quad [\tilde{r}_0, \tilde{r}_1] \subseteq [1 - h, 1 + h] \subset (r_0, r_1). \quad (5.107)$$

В случае распространения продольно-сдвиговых волн ( $\tau = 0, \beta = 0$ ) в свободном либо жестко закрепленном протяженном цилиндре кольцевого поперечного сечения, когда базисные решения уравнений модели с трансверсально-изотропным материалом представлены соотношениями (5.65) – (5.67), (5.69), (5.70), (5.72), (5.74) – (5.78) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), а базисные решения уравнений модели с цилиндрически ортотропным материалом представлены соотношениями (5.65) – (5.67), (5.69), (5.100), (5.101), (5.74) – (5.78) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), дисперсионные соотношения соответственно получают представление

$$\det \left( \begin{bmatrix} \left[ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0) \right]_{(1,4),(1..4)} \right] \\ \left[ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_1) \right]_{(1,4),(1..4)} \right] \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0) \right] \\ \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_1) \right] \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (5.108)$$

Если же базисные решения уравнений модели с однородным ( $q = 0$ ) трансверсально-изотропным материалом представлены соотношениями (1.37), (2.54) – (2.57), (2.64), (2.73), (2.74), (5.83), то дисперсионные соотношения



соответственно записываются так:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_0) \right]_{(1,4),(1..4)} \\ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_1) \right]_{(1,4),(1..4)} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_0) \right] \\ \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_1) \right] \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (5.109)$$

В случае распространения неосесимметричных волн ( $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\beta = 0$ ) в свободном либо жестко закрепленном протяженном цилиндре кольцевого поперечного сечения, когда базисные решения уравнений модели с трансверсально-изотропным материалом представлены соотношениями (5.6) – (5.8), (5.17), (5.19), (5.20), (5.85) – (5.89) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), а базисные решения уравнений модели с цилиндрически ортотропным материалом представлены соотношениями (5.6) – (5.8), (5.19), (5.85) – (5.89), (5.98), (5.99) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), дисперсионные соотношения имеют вид

$$\det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0) \right]_{(1,5,6),(1..6)} \\ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_1) \right]_{(1,5,6),(1..6)} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0) \right] \\ \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_1) \right] \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (5.110)$$

Когда же базисные решения уравнений модели с однородным ( $q = 0$ ) трансверсально-изотропным материалом представлены соотношениями (1.37), (2.54) – (2.57), (2.64), (2.73), (2.74), (5.83) – дисперсионные соотношения соответственно записываются так:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_0) \right]_{(1,5,6),(1..6)} \\ \left[ \tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_1) \right]_{(1,5,6),(1..6)} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \text{либо} \quad \det \left( \begin{bmatrix} \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_0) \right] \\ \left[ \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_1) \right] \end{bmatrix} \right) = 0. \quad (5.111)$$

Рассмотренные в данном разделе математические модели волновых процессов в протяженных цилиндрах секторно-кольцевого поперечного сечения из трансверсально изотропных и цилиндрически ортотропных материалов, построенные аналитические спектральные решения вспомогательных спектральных задач для которых удовлетворяют уравнениям соответствующей модели и обеспечивают точное выполнение однородных условий на радиальных

участках граничной поверхности (1.30), включают также однородные условия свободных (1.31) либо жестко закрепленных (1.32) цилиндрических участков граничной поверхности. Учитывая, что указанные спектральные решения опираются на представления базисных решений для волноводов кольцевого поперечного сечения, дисперсионные соотношения, определяющие независимые спектры волн  $S$ -типа ( $\beta = 0$ ) и  $A$ -типа ( $\beta = \pi/2$ ) в протяженных цилиндрах секторно-кольцевого поперечного сечения, изготовленных из материалов рассмотренных классов анизотропии, записанные в терминах спектральных решений, будут иметь вид (5.110) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) либо (5.111) ( $q = 0$ ), где значения параметра  $\tau$  определяются выражением (3.3).

Следует также отметить, что особенностью представленных моделей волновых процессов в протяженных цилиндрах секторно-кольцевого поперечного сечения со свободными либо жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности является их полная идентичность при  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$  и  $n = 1$  моделям распространения нормальных волн с круговым волновым числом  $\tau = 1$  ( $\beta = 0$ ) вдоль протяженных цилиндров кольцевого поперечного сечения соответственно со свободной либо жестко закрепленной граничной поверхностью. Этот факт может использоваться для численной верификации построенных аналитических решений.

## 5.5. Результаты численных экспериментов

Для крутильных волн в полом анизотропном цилиндре специфика рассмотренного варианта закона радиальной неоднородности физико-механических свойств материала волновода (1.35), (1.37) влечет за собой характерную, описанную в п.п. 2.3, структуру спектра бегущих нормальных волн как множества кривых вида (2.154). Форма дисперсионного соотношения (5.104) позволяет последовательно использовать результаты анализа параметрической зависимости  $\delta(\lambda)$  и соотношения (2.155) для исследования факторов влияния

параметра неоднородности  $\lambda$  ( $q=1$ ) и показателя степени механической анизотропии материала цилиндра  $\eta = c_{44}^{(0)} / c_{66}^{(0)}$  ( $c_* = \tilde{c}_{66}$ ) на структуры дисперсионных спектров изучаемых волн. Результаты расчетов зависимостей  $\delta(\lambda)$  в диапазоне  $\lambda \in [-2, 2]$  для цилиндра с закрепленной граничной поверхностью и приведенными геометрическими параметрами  $r \in [2/3, 4/3]$  ( $h = 1/3$ ) показаны на Рисунке 5.1-а. Представленные зависимости являются немонотонными, что в большей степени характерно для случая волн низшей моды. Их анализ показывает, что в рассмотренном интервале изменения параметра неоднородности  $\lambda$  его влияние является достаточно мягким и существенно снижается по мере роста номера моды бегущих волн. Рост значений  $\delta(2)$  по отношению к  $\delta(-2)$  составляет в случае первой моды спектра 32.0%, в случае второй моды – 9.9%, а в случае пятой моды – лишь 1.7%. Различия в топологических картинах распределений пяти низших действительных ветвей спектров для закрепленных цилиндров с идентичными параметрами  $\lambda = 2$  и различающимися показателями механической анизотропии  $\eta = 1/3$  и  $\eta = 3$  характеризуют соответственно Рисунок 5.1-б и Рисунок 5.1-в.

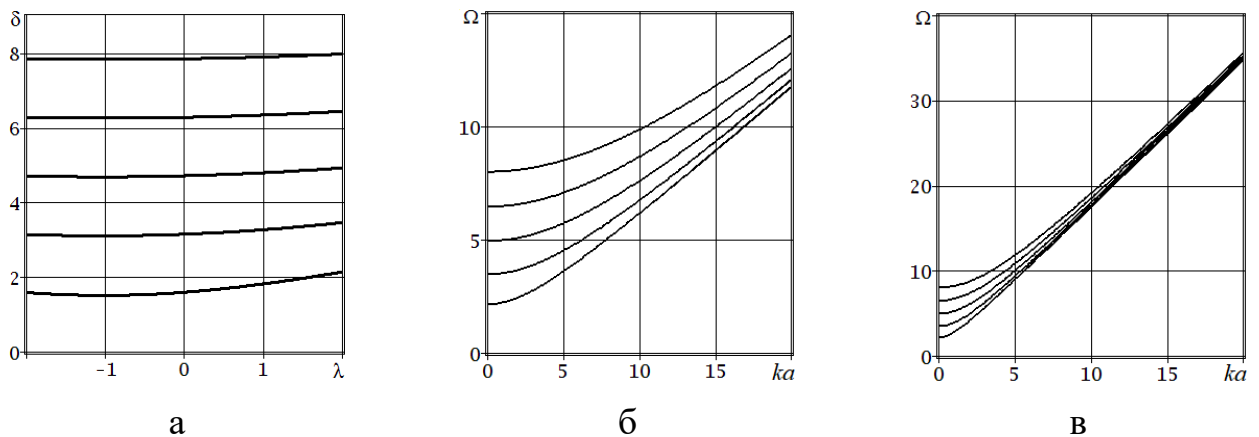


Рис. 5.1.

Специфика рассмотренного варианта закона неоднородности физико-механических свойств материала волновода влечет за собой неизменность параметров скоростей объемных сдвиговых волн при любых значениях показателя  $\lambda$ . В свою очередь, это обуславливает идентичность асимптотик мод распространяющихся нормальных волн кручения в высокочастотном

коротковолновом диапазоне при любых значениях показателя  $\lambda$ .

Различия кинематических форм упругих колебательных перемещений в исследуемых волнах для цилиндров с различными показателями экспоненциальной неоднородности характеризуют, в частности, распределения относительных интенсивностей динамических крутильных перемещений  $V_\theta(x) = \tilde{u}_\theta(x) / \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{u}_\theta(x)|$  в сечении волновода для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний. Подобные распределения в цилиндрах с альтернативными показателями радиальной неоднородности  $\lambda = -2.0$  (сплошная линия) и  $\lambda = 2.0$  (пунктирная линия) соответственно приведены на Рисунке 5.2-а для волн первой моды и на Рисунке 5.2-б для волн пятой моды.

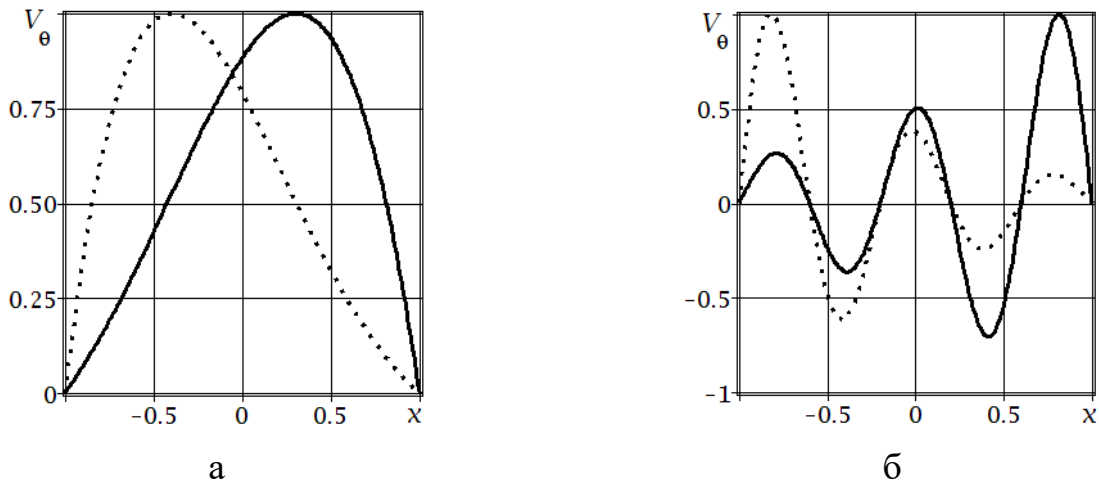


Рис. 5.2.

Особенностью приведенных распределений, дающих представление об изменениях локализации областей повышенной интенсивности волновых колебаний, является неизменность положения узловых точек анализируемых форм.

Для численного исследования факторов влияния параметров радиальной неоднородности  $(\lambda, q)$  и значений окружного волнового числа  $\tau$  на топологическую картину спектра бегущих нормальных волн в полом радиально неоднородном свободном цилиндре нормированной толщины  $2h = 0,4$  в качестве материала волновода выбирался введенный в рассмотрение в п.п. 2.4 трансверсально-изотропный материал М1. Расчет фрагментов спектров

проводились для окружного волнового числа  $\tau = 1$  в диапазонах изменения нормализованной частоты  $\omega a / c_t \in [0; 20]$  и нормализованного продольного волнового числа  $ka \in [0; 30]$  ( $a = R_*$ ) для случаев однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  и неоднородных  $(\lambda, q) \in \{(\ln(2), 6), (-\ln(2), 6), (\ln(2), 7)\}$  материалов цилиндра. На Рисунке 5.3-а и Рисунке 5.3-б представлены спектры распространяющихся нормальных волн для неоднородных волноводов с параметрами неоднородности соответственно  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ .

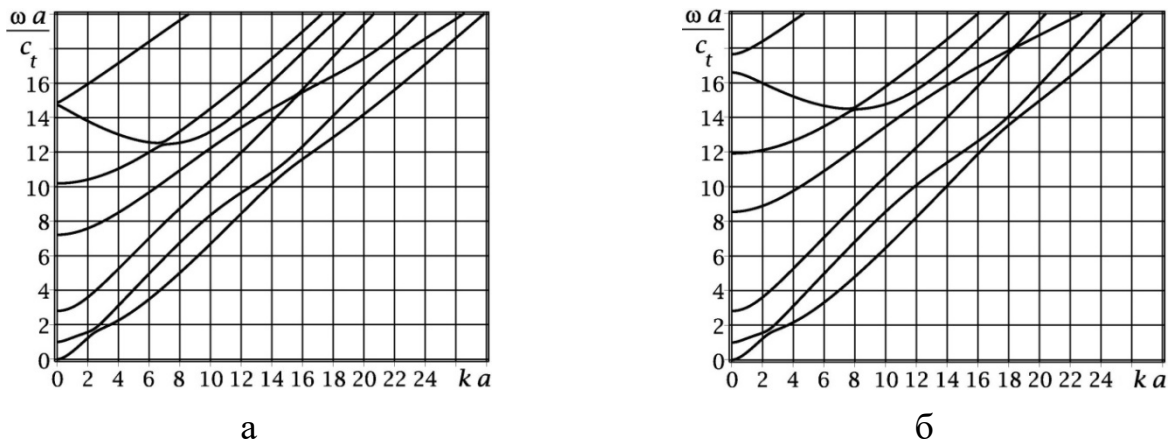


Рис. 5.3.

Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости для всех рисунков представленного исследования имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты (мода с порядковым номером в спектре 2) в случае однородного волновода ( $\Omega_{0,0}^{(2)}(0) \approx 1,956596$ ). Для анализа количественных различий в спектрах однородного и неоднородного волноводов используется функция сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод (2.156). Ниже приведены результаты сравнений для пяти низших мод в паре волноводов, когда неоднородные материалы цилиндров в соответствующей паре задавались параметрами  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  (Рисунок 5.4-а),  $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$  (Рисунок 5.4-б). Порядковый номер сопоставляемых мод визуализировался уникальным в рамках рисунка типом линии. В качестве основных результатов отмечается, что неоднородность вида  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  практически не сказывается на поведении

трех низших мод в длинноволновом диапазоне  $ka \in [0; 2]$  в то время как на моды с последующими номерами влияние существенным образом сказывается на всем исследованном диапазоне варьирования волнового числа.

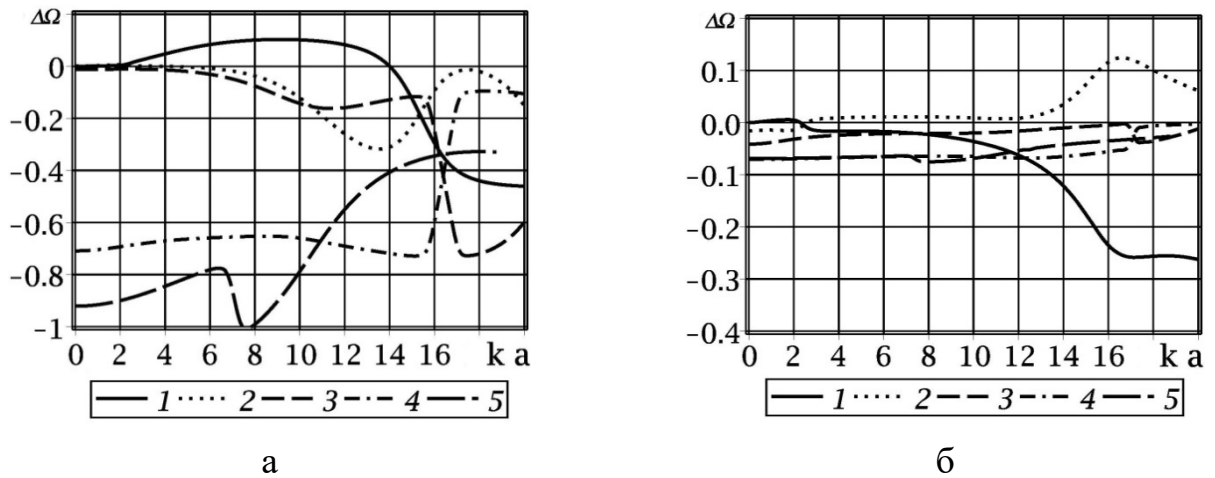


Рис. 5.4.

При этом отмеченное влияние проявляется, в первую очередь, в системном смещении указанных мод в область меньших частот  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$ . Влияние неоднородности вида  $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$  проявляется в гораздо меньшей степени, преимущественно для двух низших мод и только начиная с  $ka \approx 14$ .

На Рисунке 5.5-а и Рисунке 5.5-б представлены графики нормализованных фазовых скоростей бегущих нормальных волн в цилиндрах, материалы которых имеют параметры неоднородности соответственно  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ .

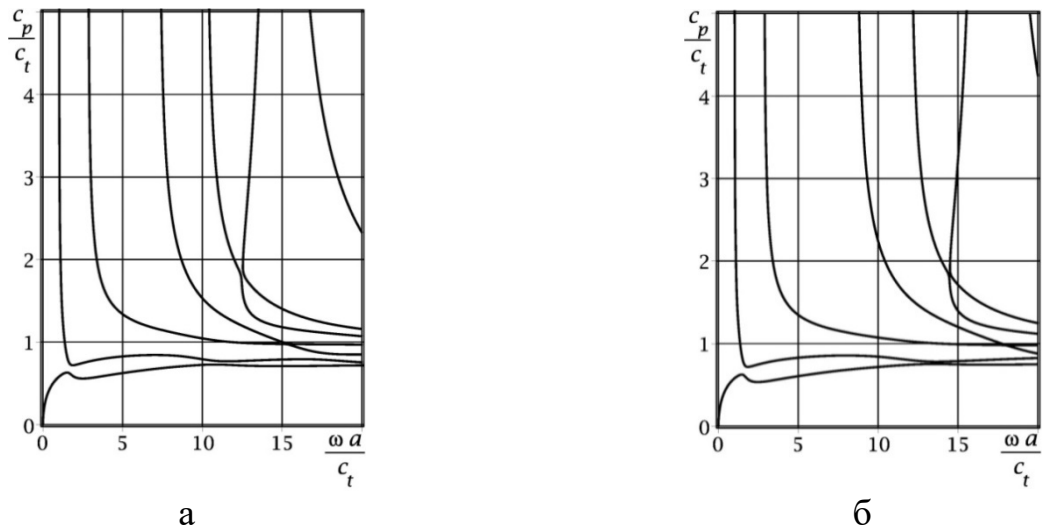


Рис. 5.5.

Наибольшее влияние радиальной неоднородности на картину распределения фазовых скоростей выявлено в случаях  $(\lambda, q) = (\pm \ln(2), 6)$  для мод начиная с четвертой, в то время как для случая неоднородности  $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$  в исследованной области частот визуальных различий с картиной распределения фазовых скоростей для однородного цилиндра не наблюдалось.

На Рисунке 5.6-а и Рисунке 5.6-б представлены графики нормализованных групповых скоростей бегущих нормальных волн в цилиндрах, материал которых имеет параметры  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$  соответственно.

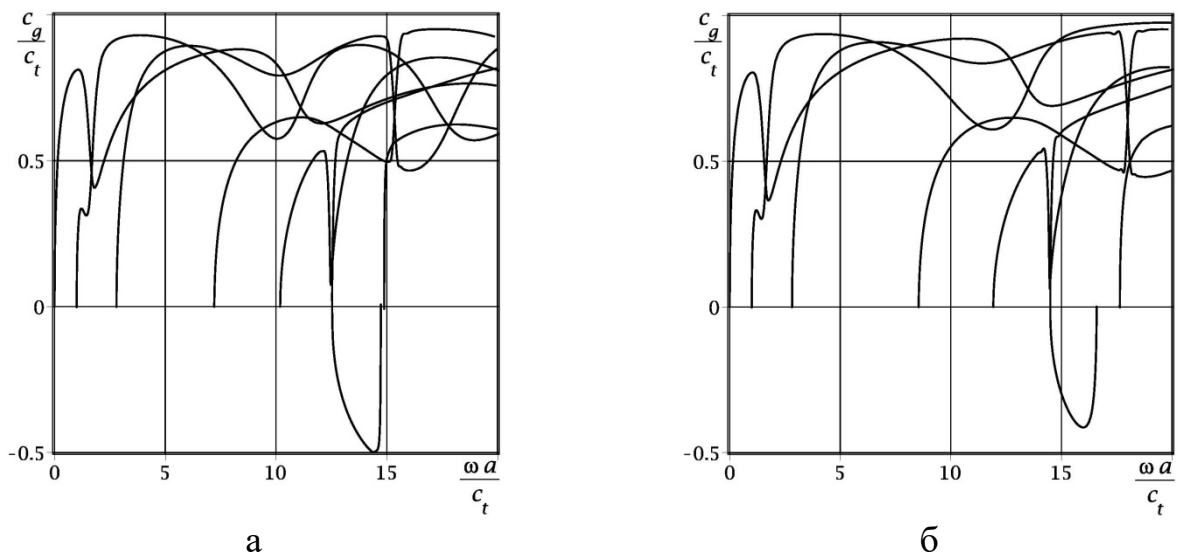


Рис. 5.6.

Наибольшее влияние неоднородности материала волновода проявилось на распределении групповых скоростей мод на участках существования обратной волны именно для представленных типов неоднородности. Так, для шестой моды область отрицательных значений групповой скорости при локализованном возрастании значений физико-механических параметров материала цилиндра у его граничных поверхностей (Рисунок 5.6-а) сместилась в сторону уменьшения частоты с одновременным увеличением абсолютных значений групповой скорости, в то время как локализованное уменьшение значений физико-механических параметров материала цилиндра у его граничных поверхностей (Рисунок 5.6-б) привело к обратному эффекту. Асимметричный относительно серединной поверхности цилиндра характер радиальной неоднородности

$(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$  практически не сказался на топологической картине распределения групповых скоростей в исследованном диапазоне частот.

Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных волн в полном свободном цилиндре проводился также в случае выбора в качестве радиально неоднородного материала волновода введенного в рассмотрение в п.п. 2.4 цилиндрически ортотропного материал М5 для окружного волнового числа  $\tau = 1$  в диапазонах изменения нормализованной частоты  $\omega a/c_t \in [0; 30]$  и нормализованного продольного волнового числа  $ka \in [0; 40]$  ( $a = R_2$ ) для случаев однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  и неоднородного  $(\lambda, q) \in \{(-\ln(2), 6), (\ln(3/2), 6)\}$  материала. Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости для всех рисунков представленного исследования имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты (мода с порядковым номером в спектре 2) в случае однородного материала ( $\Omega_{0,0}^{(2)}(0) \approx 1.2385$  при  $R_* = R_2$ ). Для исследования влияния на спектральную картину характера локализации в теле цилиндра неоднородности материала расчет проводился для случаев:  $R_* = R_1$  ( $r \in [1, 4/3], h = 1/3, x \in [0, 1]$ ), характеризующегося зоной локализации неоднородности у внешней поверхности цилиндра;  $R_* = R_2$  ( $r \in [3/4, 1], h = 1/4, x \in [-1, 0]$ ), характеризующегося зоной локализации неоднородности у внутренней поверхности цилиндра. При этом для  $\lambda = -\ln(2)$  в зоне локализации имело место уменьшение на 50% физико-механических характеристик материала, а для  $\lambda = \ln(3/2)$  – на те же 50% увеличение. Сравнительный анализ построенных спектров показал относительную стабильность общей качественной топологической картины мод распространяющихся волн. На Рисунке 5.7 представлен спектр распространяющихся нормальных волн для неоднородного волновода с параметрами неоднородности  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  в случаях локализации неоднородности у внутренней поверхности цилиндра. Для анализа



количественных различий в спектрах однородного и неоднородного волноводов используется функция сравнения парных по номеру в соответствующих спектрах мод (2.156). Ниже приведены результаты сравнений для пяти низших мод, когда неоднородный материал цилиндра в соответствующей паре сопоставляемых спектров задавался

параметрами  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  в случаях локализации неоднородности у внешней (соответственно Рисунок 5.8-а и Рисунок 5.8-б) и внутренней (соответственно Рисунок 5.9-а и Рисунок 5.9-б) поверхностей цилиндра.

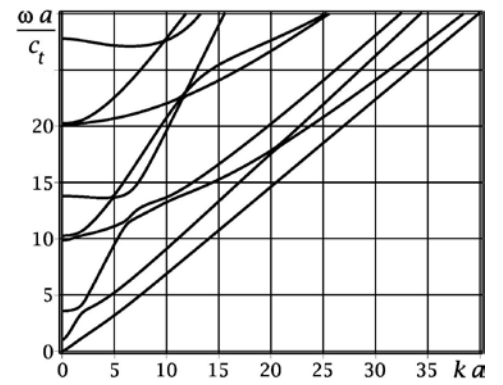
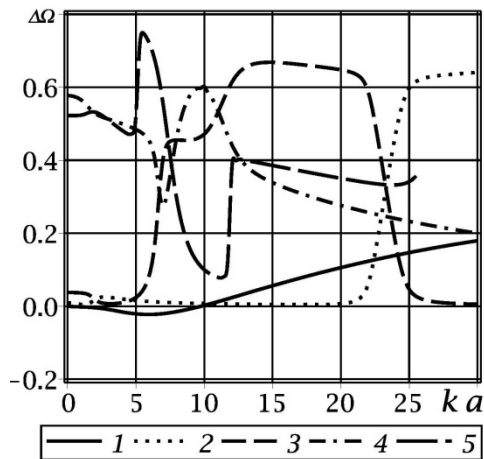
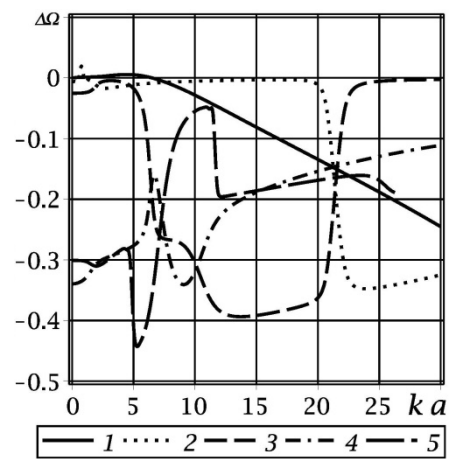


Рис. 5.7.

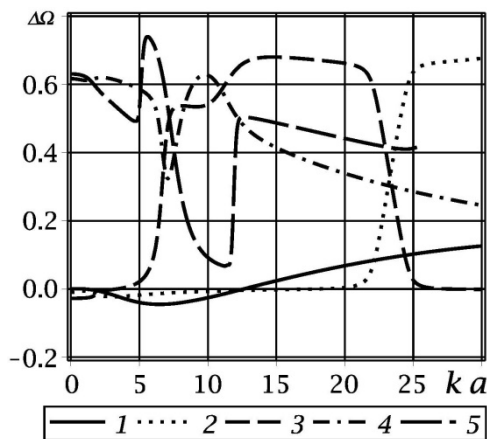


а

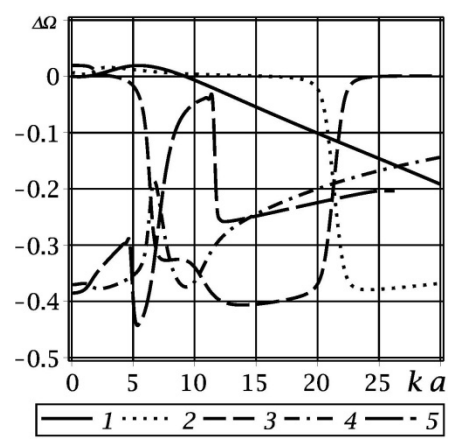


б

Рис. 5.8.



а



б

Рис. 5.9.

В качестве основных результатов отмечается, что изменение, как относительного максимального уровня локализации ( $\lambda = 0, \lambda = -\ln(2), \lambda = \ln(3/2)$ ), так и зоны локализации ( $R_* = R_1, R_* = R_2$ ) практически не сказались на поведении трех низших мод в длинноволновом диапазоне  $ka \in [0; 5]$ , при этом диапазон изменения нормализованного волнового числа, в котором различий в поведении двух низших мод практически не наблюдалось, оказался зависимым от указанных факторов:  $ka \in [0; 10]$  для  $\lambda = -\ln(2), R_* = R_1$  и  $\lambda = \ln(3/2), R_* = R_2$ ;  $ka \in [0; 8]$  для  $\lambda = \ln(3/2), R_* = R_1$ ;  $ka \in [0; 12]$  для  $\lambda = -\ln(2), R_* = R_2$ . На старшие моды влияние указанных факторов существенным образом сказались на всем исследованном диапазоне изменения нормализованного волнового числа, и проявилось это, в первую очередь, в системном смещении указанных мод в область меньших частот при локальном увеличении физико-механических характеристик материала ( $\lambda = \ln(3/2)$ ) и соответственно в область больших частот при локальном уменьшении физико-механических характеристик материала ( $\lambda = -\ln(2)$ ). Отраженные на Рисунках 5.8-5.9 тенденции в целом указывают на стремление асимптотических значений фазовых скоростей данных волн к соответствующим значениям для однородного цилиндра. При этом траектория второй дисперсионной кривой, как показывают результаты расчетов, в данном диапазоне относительных длин вначале совпадает с траекторией соответствующей кривой для однородного цилиндра, а затем в области локального сближения с третьей модой ( $ka \approx 21$ ) почти скачкообразно переходит на параллельную этой кривой траекторию.

Распределения нормализованных фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных волн из четырех низших мод спектра для неоднородных цилиндров  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  с зоной локализации неоднородности у внутренней поверхности волновода представлены соответственно на Рисунке 5.10 и Рисунке 5.11.

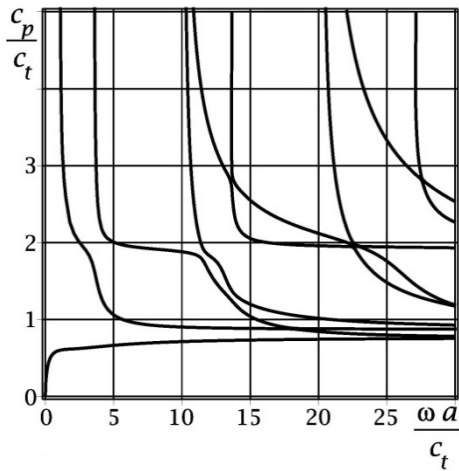


Рис. 5.10.

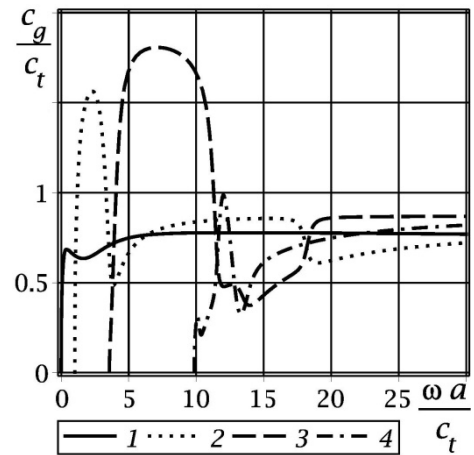


Рис. 5.11.

Для анализа эффектов влияния параметров неоднородности, частоты, окружного волнового числа и механической анизотропии на структуру и свойства дисперсионных спектров бегущих нормальных волн в функционально-градиентных цилиндрах секторно-кольцевого сечения реализованы исследования ряда вариантов задачи рассматриваемого типа с использованием разработанного и верифицированного программного приложения. Одним из приемов верификации для исследуемых случаев наличия гибких нерастяжимых покрытий на участках секторного выреза  $G_4^{(\pm)}$  явилось свойство физической эквивалентности волнового поля в цилиндре с вырезом угловой меры  $\alpha = \pi/2$  и поля волн в цилиндре замкнутого кругового сечения. При численных расчетах в качестве радиально неоднородного материала волновода выбирался введенный в рассмотрение в п.п. 2.4 трансверсально-изотропный материал М1. Расчет фрагментов спектров бегущих нормальных волн проводился для случаев  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 1$  и  $\alpha = 9\pi/10$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 5/9$  в диапазонах изменения нормализованной частоты  $\omega a/c_t \in [0; 7]$  и нормализованного продольного волнового числа  $ka \in [0; 70]$  ( $a = R_* = (R_1 + R_2)/2$ ,  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = 3$ ) для однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  и неоднородного  $(\lambda, q) = (\pm \ln(3/2), 6)$  материала волновода нормированной толщины  $2h = 2/5$  со свободными цилиндрическими участками граничной поверхности. На Рисунке 5.12 представлен спектр бегущих нормальных волн в

радиально неоднородном  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  цилиндре с мерой кольцевого сектора в его сечении  $\alpha = 9\pi/10$ . Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице нормализованной критической частоты первой моды спектра для однородного волновода в случае  $\alpha = \pi/2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\tau^{(1)} = 1$  ( $\Omega_{0,0}^{(1)}(0) \approx 15,3639$ ). Для количественной оценки влияния параметров волновода на характер поведения отдельных мод используется функция сравнения парных по номеру мод в спектрах неоднородного и однородного волноводов (2.156). На Рисунке 5.13 представлены для случая  $\alpha = 9\pi/10$  результаты сопоставления спектров неоднородного  $(\lambda, q) = (\ln(3/2), 6)$  и однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  волноводов.

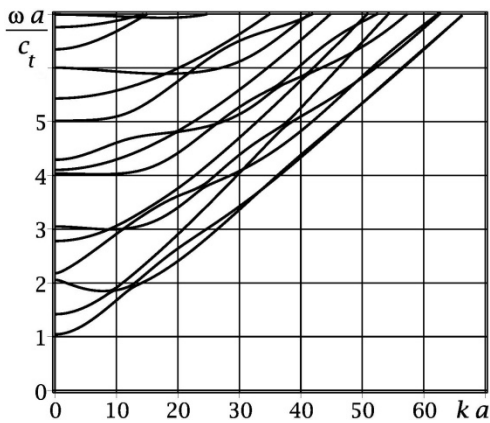


Рис. 5.12.

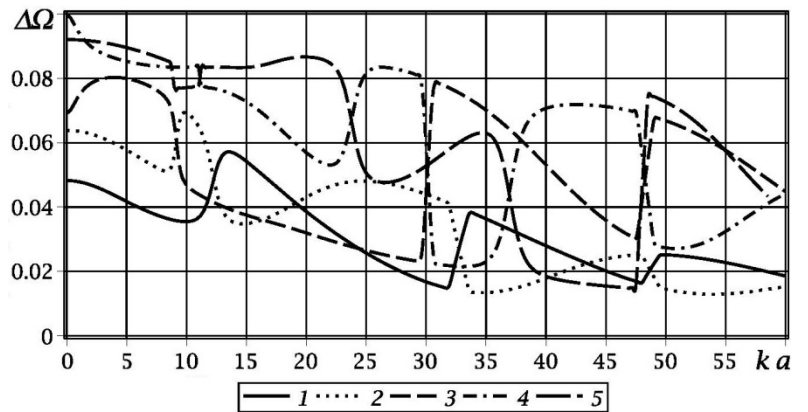


Рис. 5.13.

Представленные зависимости указывают на усложнение картины влияния фактора неоднородности в случае волноводов с данной геометрией сечений, для которых топологическая структура спектров характеризуется большим числом узких частотных диапазонов локального сближения и расталкивания смежных мод спектра с выраженной картиной «обмена» групповыми скоростями соответствующих этим модам нормальных бегущих волн. Общей тенденцией в распределениях дисперсионных кривых в этих областях является резкое сближение верхней из сходящихся кривых после прохождения точки расталкивания с траекторией соответствующей кривой для однородного цилиндра и противоположный эффект «отдаления» нижней из сходящихся кривых после расталкивания от траектории соответствующей моды однородного цилиндра.

Данный эффект для областей «сближения-расталкивания» для мод с номерами в спектре 4 – 6, 10 – 12 и 13 – 15 соответственно проиллюстрирован на Рисунках 14 – 16.

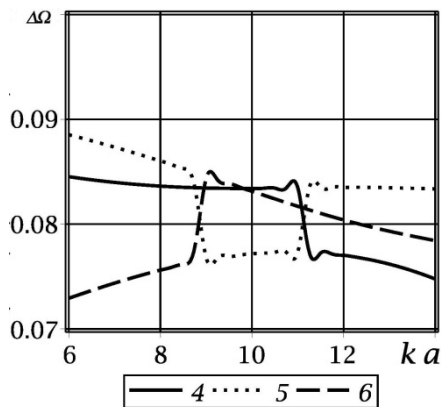


Рис. 5.14.

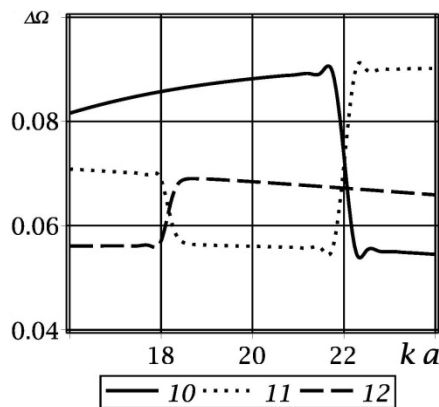


Рис. 5.15.

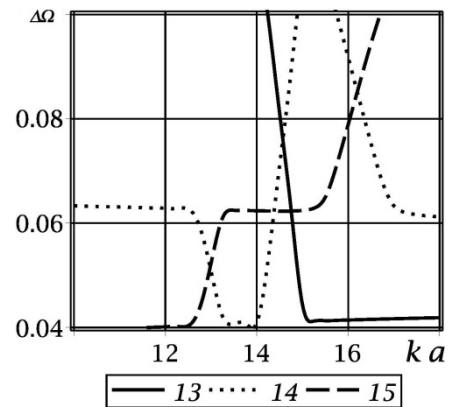


Рис. 5.16.

### Выводы к разделу 5

В разделе решена задача разработки теоретической численно-аналитической методики исследования процесса распространения нормальных упругих волн в радиально неоднородных трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных протяженных цилиндрах кольцевого и секторно-кольцевого поперечного сечения со свободной либо жестко закрепленной граничной поверхностью.

В рамках реализованных исследований:

1. Разработана методика построения базисных множеств частных решений уравнений волнового деформирования трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндров кольцевого поперечного сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью для краевых задач о спектрах осесимметричных и неосесимметричных нормальных упругих волн.

2. Для задач о распространении нормальных крутильных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндрах кольцевого сечения для двух специальных случаев экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала в замкнутой форме построены базисные наборы частных решений уравнений волновой динамики, представленные через

функции Уиттекера и интегралы биконфлюэнтного уравнения Гойна.

3. Поставлены и решены две вспомогательные спектральные задачи для исследования проблемы распространения нормальных волн  $S$ -типа и  $A$ -типа в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных протяженных цилиндрах с радиальной неоднородностью материала экспоненциально-степенного типа, имеющих поперечные сечения в виде кольцевого сектора при наличии гибкого нерастяжимого покрытия на радиальных участках граничной поверхности; построены базисные множества аналитических решений указанных спектральных задач.

4. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов вычисления аналитических частных решений указанных спектральных задач.

5. Проведен сравнительный анализ топологического строения дисперсионных спектров, распределений фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных волн в однородных и радиально неоднородных трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных протяженных цилиндрах кольцевого и секторно-кольцевого поперечного сечения для случаев свободных и жестко закрепленных цилиндрических участков граничной поверхности и наличия гибкого нерастяжимого покрытия на радиальных участках граничной поверхности волноводов секторно-кольцевого сечения, проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики параметров экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала волновода.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [137, 139, 146, 153, 156, 157, 161, 165].

## РАЗДЕЛ 6

**ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ И  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИ ОРТОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-  
ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРАХ КОЛЬЦЕВОГО ПОПЕРЕЧНОГО  
СЕЧЕНИЯ С ЖИДКОСТНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

**6.1. Получение дисперсионных соотношений в рамках модели гидродинамики для потенциальных движений невязкой слабосжимаемой жидкости**

Рассматривается протяженный цилиндр концентрического кольцевого сечения с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$ , занимающий в системе безразмерных цилиндрических координат  $Or\theta z$  область  $V_3$  (1.5) (Рисунок 1.3). Закон радиальной неоднородности трансверсально изотропного или цилиндрически ортотропного материала цилиндра задается соотношениями (1.35), (1.37). Внутренняя полость цилиндра заполнена невязкой слабосжимаемой жидкостью. Область заполнителя в указанной системе координат имеет вид

$$V_0 = \{r \in [0, R_1/R_*]; \theta \in [-\pi, \pi]; z \in (-\infty, \infty)\}. \quad (6.1)$$

Граничными поверхностями анизотропного полого цилиндра и тела заполнителя соответственно являются  $G_3$  и  $G_0$ , при этом  $G_0 = G_3^{(1)}$  (1.10).

Задача анализа спектров и свойств нормальных упругих волн, распространяющихся вдоль рассматриваемого волновода, формулируется в системе нормированных безразмерных цилиндрических координат с использованием соотношений пространственной линейной математической модели динамического напряженно-деформированного состояния упругих тел с усложненными физико-механическими свойствами в области полого цилиндра  $V_3$  (1.14), (1.16) или (1.18), (1.20), (1.35), (1.37), а также уравнений гидродинамики для идеальной слабосжимаемой жидкости в области заполнителя  $V_0$ . Данные уравнения рассматриваются в области  $V_0$  для проекций на оси цилиндрической

системы координат безразмерного вектора скоростей  $\vec{v}$  с компонентами  $(v_r, v_\theta, v_z)$ , отнесенными к скорости объемных волн в заполнителе  $C_0$ , а также для безразмерной функции давления  $p$ , отнесенного к нормирующему параметру  $c_*$ .

Волновое поле в акустической невязкой жидкости определяется линейризованными уравнениями сохранения и динамики, в которых пренебрегаются эффекты гравитации [117, 341]

$$\begin{aligned} (\rho_0 R_* C_0 / c_*) \partial_t \vec{v} + \vec{\nabla} p &= \vec{0}, \\ \partial_t p + \frac{\rho_0 C_0^3}{c_* R_*} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Предполагая, что плотность  $\rho_0$  во всей области заполнителя  $V_0$  однородна ( $\rho_0 = const$ ), получается  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$  и, значит, волновые движения в заполнителе являются безвихревыми [117]. Следовательно, скорость  $\vec{v}$  может быть представлена как градиент скалярного потенциала  $\varphi$

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi. \quad (6.3)$$

В результате подстановки представления (6.3) в уравнения (6.2) получается соотношение для определения давления

$$p = -(\rho_0 R_* C_0 / c_*) \partial_t \varphi \quad (6.4)$$

и уравнение для определения потенциала скорости  $\varphi$

$$\left( \nabla^2 - (R_*^2 / C_0^2) \partial_t^2 \right) \varphi = 0. \quad (6.5)$$

Здесь  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

В представленной модели гидродинамики для потенциальных движений невязкой слабосжимаемой жидкости для исследуемых нормальных волн с круговой частотой  $\omega$ , нормированным параметром  $R_*$  продольным волновым числом  $\tilde{k}$  ( $\tilde{k} \in \mathbb{C}$ ) и окружным волновым числом  $\tau$  ( $\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ) в матричной форме вводятся комплексные представления, которые в случае распространения волн в теле заполнителя вдоль оси  $Oz$  имеют вид

$$\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z) \mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta) \tilde{\mathbf{V}}^{(\tau)}(r), \quad (6.6)$$



где  $\mathbf{V}(r, \theta, z, t)$  – вектор-столбец с безразмерными компонентами вектора скоростей

$$\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = [v_r(r, \theta, z, t), v_\theta(r, \theta, z, t), v_z(r, \theta, z, t)]^T; \quad (6.7)$$

$\tilde{\mathbf{V}}^{(\tau)}(r)$  – вектор-столбцы с элементами

$$\tilde{\mathbf{V}}^{(\tau)}(r) = [\tilde{v}_r^{(\tau)}(r), \tilde{v}_\theta^{(\tau)}(r), \tilde{v}_z^{(\tau)}(r)]^T; \quad (6.8)$$

$\mathbf{T}_1^{(\tau)}(\theta)$  ( $\beta = 0$ ) – заданная соотношениями (1.44) диагональная матрица. С учетом представления для компонент вектора скоростей (6.6.) для каждого заданного окружным волнового числа  $\tau$  ( $\tau \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ) регулярное в области, содержащей точку  $r = 0$  решение уравнения (6.5) записывается через функции Бесселя

$$\varphi(r, \theta, z, t) = i \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z) \cos(\tau\theta) J_\tau(\kappa_0 r), \quad (6.9)$$

где  $\kappa_0^2 = \Omega^2 c_* / (\tilde{\rho} C_0^2) - \tilde{k}^2$ . Здесь  $\tilde{\rho}$  – параметр в представлении (1.35) для функции плотности радиально неоднородного материала полого цилиндра. Тогда с учетом представления (6.6.) на основании соотношения (6.3) получается выражение для вектора  $\tilde{\mathbf{V}}^{(\tau)}(r)$

$$\tilde{\mathbf{V}}^{(\tau)}(r) = [i((\tau/r)J_\tau(\kappa_0 r) - \kappa_0 J_{\tau+1}(\kappa_0 r)), -i(\tau/r)J_\tau(\kappa_0 r), i\tilde{k}J_\tau(\kappa_0 r)]^T, \quad (6.10)$$

а на основании соотношения (6.4) – выражение для функции давления  $p$

$$p(r, \theta, z, t) = \exp(-i\omega t + i\tilde{k}z) \cos(\tau\theta) \tilde{p}(r),$$

$$\tilde{p}(r) = -\Omega(\rho_0 C_0 / \sqrt{\tilde{\rho} c_*}) J_\tau(\kappa_0 r). \quad (6.11)$$

Описанная модель распространения нормальных волн в полом цилиндре с жидкостным заполнителем включает условия сопряжения на внутренней поверхности протяженного цилиндра

$$\sigma_{r\theta}|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(1)}} = \sigma_{rz}|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(1)}} = (\sigma_{rr} + p)|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(1)}} = ((R_*/C_0)\partial_t u_r - v_r)|_{(r,\theta,z) \in G_3^{(1)}} = 0 \quad (6.12)$$

и граничные условия на его внешней поверхности, которые в случае свободной или жестко закрепленной поверхности соответственно имеют вид

$$\sigma_{rr}|_{(r,\theta,z)\in G_3^{(2)}} = \sigma_{r\theta}|_{(r,\theta,z)\in G_3^{(2)}} = \sigma_{rz}|_{(r,\theta,z)\in G_3^{(2)}} = 0, \quad (6.13)$$

$$u_r|_{(r,\theta,z)\in G_3^{(2)}} = u_\theta|_{(r,\theta,z)\in G_3^{(2)}} = u_z|_{(r,\theta,z)\in G_3^{(2)}} = 0. \quad (6.14)$$

В случае распространения осесимметричных волн ( $\tau = 0, \beta = 0$ ), когда базисные решения уравнений модели для полого цилиндра из трансверсально-изотропного материала представлены соотношениями (5.65) – (5.67), (5.69), (5.70), (5.72), (5.74) – (5.78) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), а базисные решения уравнений модели для полого цилиндра из цилиндрически ортотропного материала представлены соотношениями (5.65) – (5.67), (5.69), (5.100), (5.101), (5.74) – (5.78) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), дисперсионные соотношения в случаях сводной либо жестко закрепленной внешней поверхности волновода соответственно получают представления

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0)]_{1,(1..4)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(LSW)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0)]_{(1,4),(1..4)} \\ \hat{\mathbf{O}} & [\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_1)]_{(1,4),(1..4)} \end{pmatrix} = 0, \quad (6.15)$$

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0)]_{1,(1..4)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(LSW)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_0)]_{(1,4),(1..4)} \\ \hat{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{x}_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (6.16)$$

Если же базисные решения уравнений модели для полого цилиндра из однородного ( $q = 0$ ) трансверсально-изотропного материала представлены соотношениями (1.37), (2.54) – (2.57), (2.64), (2.73), (2.74), (5.83), то дисперсионные соотношения в случаях сводной либо жестко закрепленной внешней поверхности волновода соответственно записываются так:

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_0)]_{1,(1..4)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(LSW)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}\tilde{r}_0]_{(1,4),(1..4)} \\ \hat{\mathbf{O}} & [\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_1)]_{(1,4),(1..4)} \end{pmatrix} = 0; \quad (6.17)$$

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_0)]_{1,(1..4)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(LSW)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_0)]_{(1,4),(1..4)} \\ \hat{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(LSW,B)}(\tilde{r}_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (6.18)$$

В случае распространения неосесимметричных волн ( $\tau \in \mathbb{N}$ ,  $\beta = 0$ ), когда базисные решения уравнений модели для полого цилиндра из трансверсально-изотропного материала представлены соотношениями (5.6) – (5.8), (5.17), (5.19), (5.20), (5.85) – (5.89) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), а базисные решения уравнений модели для полого цилиндра из цилиндрически ортотропного материала представлены соотношениями (5.6) – (5.8), (5.19), (5.85) – (5.89), (5.98), (5.99) ( $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), дисперсионные соотношения в случаях сводной либо жестко закрепленной внешней поверхности волновода соответственно имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0)]_{1,(1..6)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0)]_{(1,5,6),(1..6)} \\ \hat{\mathbf{O}} & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_1)]_{(1,5,6),(1..6)} \end{pmatrix} = 0; \quad (6.19)$$

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0)]_{1,(1..6)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_0)]_{(1,5,6),(1..6)} \\ \hat{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{x}_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (6.20)$$

Когда же базисные решения уравнений модели для полого цилиндра из однородного ( $q = 0$ ) трансверсально-изотропного материала представлены соотношениями (1.37), (2.54) – (2.57), (2.64), (2.73), (2.74), (5.83) – дисперсионные

соотношения в случаях сводной либо жестко закрепленной внешней поверхности волновода соответственно записываются так:

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_0)]_{1,(1..6)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_0)]_{(1,5,6),(1..6)} \\ \hat{\mathbf{O}} & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_1)]_{(1,5,6),(1..6)} \end{pmatrix} = 0; \quad (6.21)$$

$$\det \begin{pmatrix} \chi \tilde{v}_r^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_0)]_{1,(1..6)} \\ \tilde{\mathbf{P}}^{(\tau)}(\tilde{r}_0) & [\tilde{\mathbf{S}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_0)]_{(1,5,6),(1..6)} \\ \hat{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{U}}^{(\tau,B)}(\tilde{r}_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (6.22)$$

В соотношениях (6.15) – (6.22)  $\chi = -i(C_0/\Omega)\sqrt{\tilde{\rho}/c_*}$ ,

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(LSW)}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{p}(r) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega(\rho_0 C_0 / \sqrt{\tilde{\rho} c_*}) J_0(\kappa_0 r) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(\tau)}(r) = \begin{bmatrix} \tilde{p}(r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega(\rho_0 C_0 / \sqrt{\tilde{\rho} c_*}) J_\tau(\kappa_0 r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

## 6.2. Результаты численных экспериментов

Для проведения численных экспериментов в качестве радиально неоднородного материала волновода выбирался введенный в рассмотрение в п.п. 2.4 трансверсально-изотропный материал М1, а в качестве заполнителя – вода  $\{\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3; C_0 = 1500 \text{ м/с}\}$ . Параметр  $\delta$  имел фиксированное значение  $\delta = 1/2$ . Расчет фрагментов спектров осесимметричных бегущих нормальных волн в составном волноводе проводился в диапазонах изменения нормализованной частоты  $\omega a/c_t \in [0; 20]$  и нормализованного продольного

волнового числа  $ka \in [0; 65]$  ( $a = R_*$ ) для случаев неоднородного  $(\lambda, q) \in \{(\ln(2), 6); (-\ln(2), 6); (\ln(2), 7)\}$  и однородного  $(\lambda, q) = (0, 0)$  цилиндров нормированной толщины  $2h = 0,4$  со свободной внешней поверхностью.

На Рисунках 6.1-6.2 представлены ветви спектра распространяющихся нормальных волн в имеющих жидкостное заполнение волноводах с параметрами неоднородности соответственно  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  и  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$ .

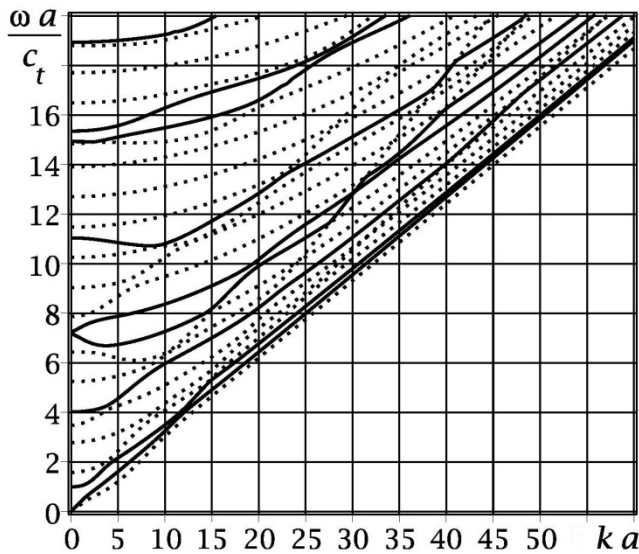


Рис. 6.1.

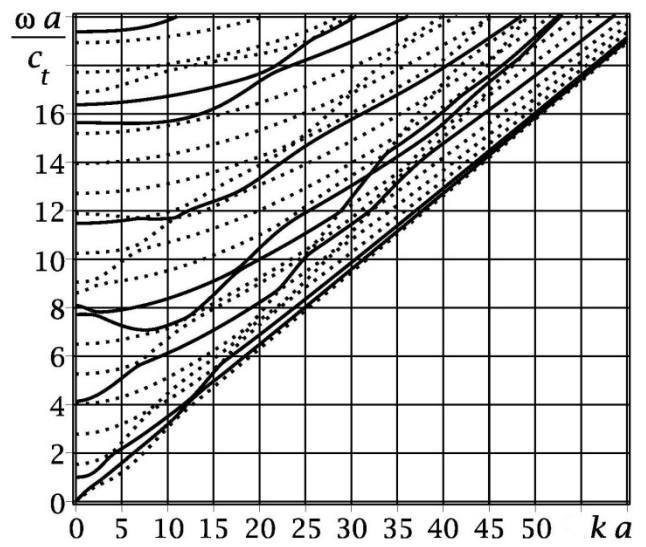


Рис. 6.2.

Во всех рассмотренных случаях дисперсионные спектры для заполненных цилиндров включают ветви, являющиеся в определенной мере трансформированными ветвями соответствующих спектров для цилиндров без заполнения со свободными граничными поверхностями (эти ветви на приведенных рисунках изображаются сплошными линиями) и ветви, наличие которых в спектре связано именно с появлением жидкостного заполнителя во внутренней полости упругого цилиндра (изображаемые на диаграммах дисперсионных кривых пунктирными линиями). Нормирующий параметр  $c_t$  с размерностью скорости для всех представленных на рисунках диаграмм дисперсионных кривых имеет фиксированное значение, определяемое из условия равенства единице низшей ненулевой нормализованной критической частоты ветвей спектра, то есть критической частоты для волн моды с порядковым номером три в рассматриваемых спектрах в случае заполненного водой

однородного цилиндрического волновода ( $\Omega_{0,0}^{(3)}(0) \approx 4,00893$ ).

Сравнительный анализ спектров для рассмотренных параметров неоднородности материала цилиндра свидетельствует об относительной стабильности общей качественной картины распределения действительных ветвей спектра, отвечающих модам распространяющихся волн. При этом отмечается локальное качественное влияние на характер поведения отдельных мод в конкретных частотных диапазонах, в частности, для мод с порядковыми номерами 8, 9 (пунктирные линии) и мод с порядковыми номерами 10, 11 (сплошные линии) в относительно длинноволновом диапазоне значений приведенного волнового параметра  $ka \in [0;10]$ .

Для количественного анализа различий в рассчитанных спектрах используется введенная и описанная в предыдущих подразделах функция сравнения (2.156) для мод с одинаковыми номерами в сопоставляемых спектрах. С целью выявления парциального влияния фактора неоднородности на распределения «возмущенных мод полого цилиндра» и «мод, возникающих как следствие появления заполнителя», результаты сравнительного анализа для каждой конкретной пары сопоставляемых мод в спектрах однородных и функционально-градиентных цилиндров с заполнителем представлены в отдельности для первых пяти мод первого типа и первых пяти мод второго типа. Соответствие номеров мод и типов линий на графиках отражено в подрисуночных подписях.

Ниже представлены результаты расчета функций сравнения для случаев задания параметров неоднородности материала  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  (Рисунок 6.3),  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$  (Рисунок 6.4),  $(\lambda, q) = (\ln(2), 7)$  (Рисунок 6.5). В исследованном диапазоне изменения нормализованного продольного волнового числа  $ka \in [0;65]$  практически для всех ветвей спектра характерно смещение в сторону пониженных нормализованных частот в случае неоднородности с ростом значений физико-механических параметров материала цилиндра к его граничным поверхностям (Рисунок 6.3).

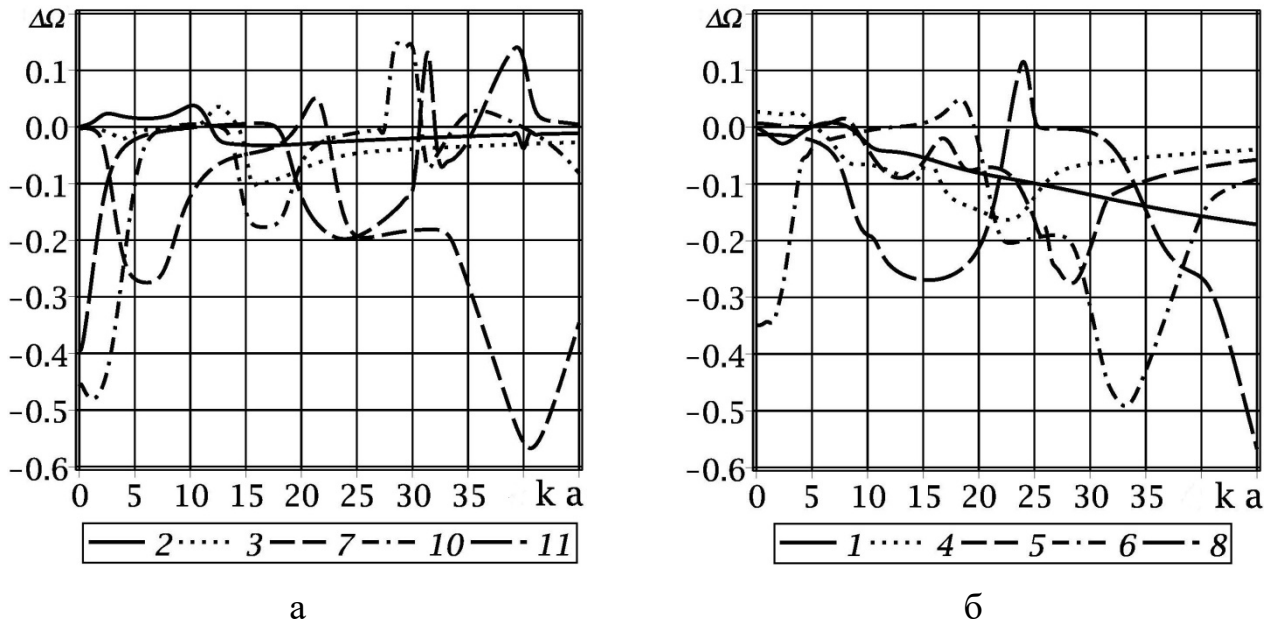


Рис. 6.3.

При относительном уменьшении физико-механических параметров материала цилиндра вблизи его граничных поверхностей в дисперсионном спектре наблюдается смещение действительных ветвей в сторону повышенных нормализованных частот (Рисунок 6.4).

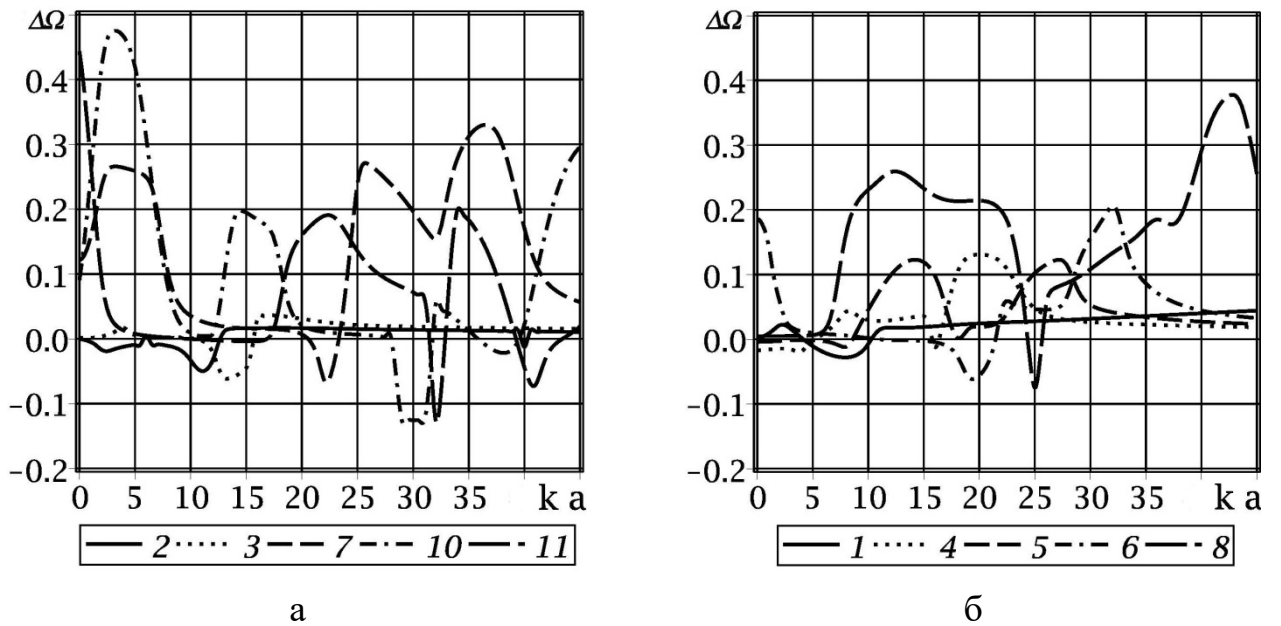


Рис. 6.4.

Отмечается также факт относительно малого влияния фактора асимметричной относительно серединной поверхности цилиндра радиальной неоднородности его материала в длинноволновом диапазоне  $ka \in [0; 20]$  на траектории действительных ветвей спектра (Рисунок 6.5).

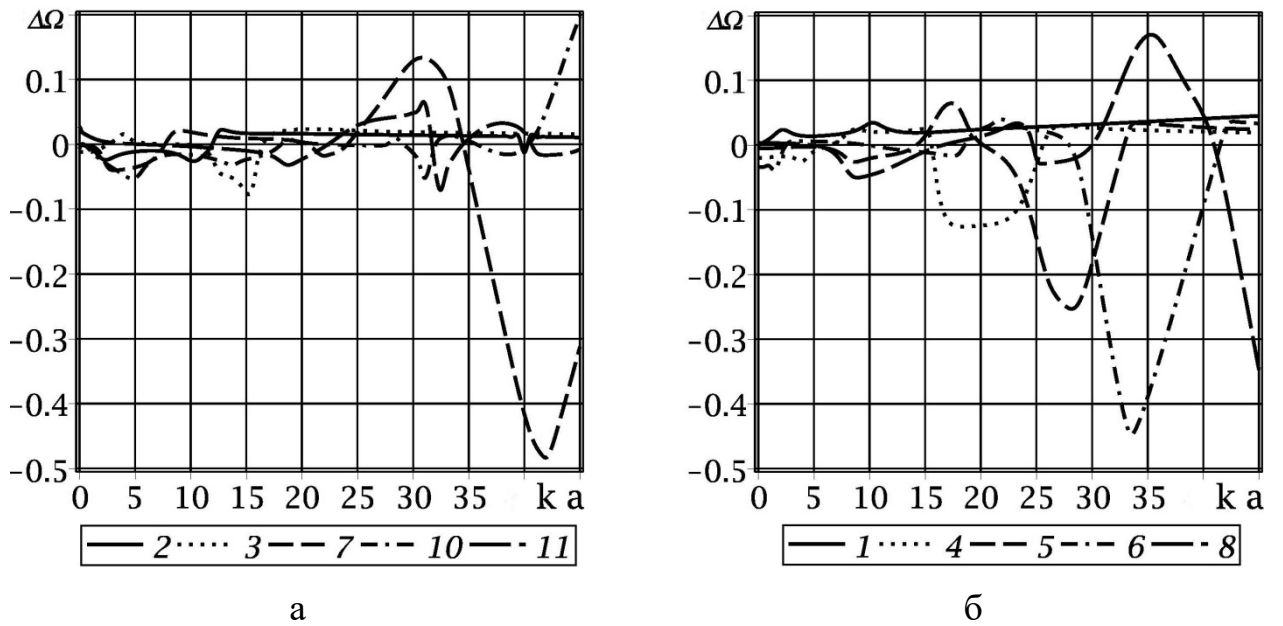


Рис. 6.5.

На Рисунке 6.6 представлены графики нормализованных фазовых скоростей бегущих нормальных волн в рассматриваемых составных цилиндрических волноводах, материалы которых характеризуются параметрами  $(\lambda, q) = (\ln(2), 6)$  (Рисунок 6.6-а) и  $(\lambda, q) = (-\ln(2), 6)$  (Рисунок 6.6-б).

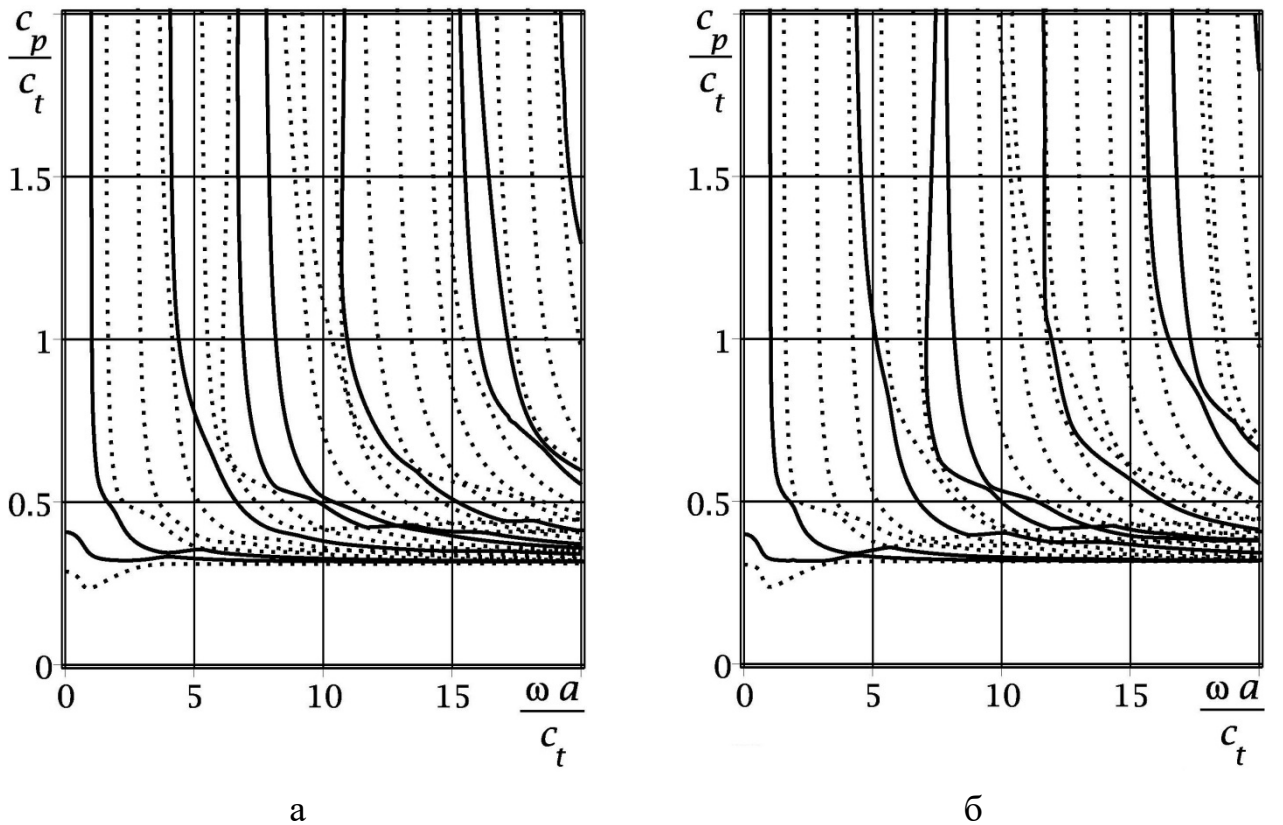


Рис. 6.6.



## Выводы к разделу 6

В разделе решена задача получения и исследования дисперсионных соотношений для осесимметричных нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах кольцевого сечения с экспоненциальной радиальной неоднородностью, имеющих свободные либо жестко закрепленные внешние поверхности и внутренние полости, заполненные идеальной слабосжимаемой жидкостью. С применением разработанной методики получен ряд данных об особенностях распределений действительных ветвей дисперсионных спектров, обусловленных влиянием фактора неоднородности.

В рамках реализованных исследований:

1. С привлечением гидродинамической модели потенциальных движений невязкой слабосжимаемой жидкости дана формулировка краевых задач определения дисперсионных спектров для осесимметричных нормальных волн, распространяющихся вдоль трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных протяженных радиально-неоднородных волноводов кольцевого сечения со свободной либо жестко закрепленной внешней поверхностью и заполнением внутренней полости жидкостью указанного типа.

2. Разработаны программные приложения для реализации численных исследований в рамках предложенных методик.

3. Исследованы эффекты влияния параметров радиальной неоднородности материала анизотропного полого цилиндра с жидкостным заполнением на топологию действительных ветвей дисперсионных спектров и на распределения фазовых скоростей бегущих осесимметричных нормальных волн.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [126-128, 130, 132, 155, 158].

**РАЗДЕЛ 7****ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АНГАРМОНИЧЕСКИХ  
ЭФФЕКТОВ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В  
ЦИЛИНДРАХ С УСЛОЖНЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ****7.1. Модель малых нелинейных эффектов при распространении  
нормальных волн деформаций в трансверсально-изотропных  
цилиндрических телах**

Как было отмечено выше, к числу неисследованных актуальных задач волновой механики деформируемых сред на сегодняшний день принадлежит проблема анализа малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении нормальных упругих волн в анизотропных цилиндрических телах пространственной геометрии с различными типами краевых условий на боковой поверхности с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования. Представляемый в диссертационной работе этап исследований по данной проблематике включает:

- формулировку краевых задач определения нелинейных ангармонических возмущений для осесимметричных монохроматических принадлежащих различным модам соответствующего дисперсионного спектра нормальных крутильных волн, распространяющихся вдоль трансверсально-изотропных протяженных цилиндров кругового сечения со свободной, фиксированной либо с имеющей абсолютно гибкое нерастяжимое (мембранное) покрытие боковой поверхностью;

- разработку теоретических алгоритмов получения аналитических решений неоднородных краевых задач относительно вторых гармоник монохроматических нормальных крутильных волн в рассматриваемых классах трансверсально-изотропных цилиндрических волноводов;

- получение аналитических представлений для комплексных амплитудных функций нелинейных волновых упругих перемещений во вторых гармониках

монохроматических нормальных волн кручения для рассматриваемых классов трансверсально-изотропных цилиндрических волноводов;

- исследование амплитудно-частотных зависимостей для функций волновых упругих смещений во вторых гармониках монохроматических волн кручения в рассматриваемых волноводах и обобщение ряда ведущих закономерностей в анализируемых волновых процессах.

Таким образом, в данном разделе работы исследуется распространение осесимметричных нормальных упругих волн кручения вдоль совпадающего с осью изотропии продольного направления  $Oz$  в протяженном трансверсально-изотропном цилиндре кругового сечения с радиусом  $R$  (Рисунок 1.8). Подходом, применяемым для исследования рассматриваемого класса нелинейных волновых эффектов, является разработанная и апробированная в работах [106, 118, 184, 357 – 359, 388] методология определения малых нелинейных «отклонений» (ангармонических возмущений, высших гармоник) для линейных гармонических упругих волн малой интенсивности, распространяющихся в деформируемых телах с высокой жесткостью, в соответствии с которой для функций волновых упругих перемещений вводятся представления в виде разложений по степеням малого параметра. В исследовании полагается, что компоненты вектора волновых упругих перемещений  $u_\alpha$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ) в цилиндрических координатах отнесены к нормирующему параметру вида  $u_* = \max_{\{r, \theta, z, t, \alpha\}} |\tilde{u}_\alpha(r, \theta, z, t)|$  с линейной размерностью. Отношение  $\delta = u_*/R_*$  согласно гипотезе о малости исследуемых нелинейных волновых эффектов [106, 118] интерпретируется как малый параметр  $\delta \ll 1$ . Данный параметр отражает соотношение максимальной амплитуды рассматриваемой упругой волны к некоторому имеющему линейную размерность характерному параметру задачи. В случае нормальных волн в цилиндрических волноводах это отношение их амплитуды к характерному геометрическому размеру сечения, как правило, к радиусу цилиндра  $R$ .

Возможности введения и корректного определения того или иного числа слагаемых в разложениях функций волновых перемещений по малому параметру

$\delta$  связаны с рядом аспектов применяемой методологии.

В первую очередь, это вид используемого представления для упругого потенциала материала цилиндра, и, соответственно, порядок слагаемых в представлении потенциала по степеням упругих деформаций. Для описания нелинейного волнового динамического деформирования цилиндра из трансверсально-изотропного материала с ориентированной вдоль  $Oz$  осью упругой симметрии в реализуемом исследовании используется модель, базирующаяся на тензорной форме упругого потенциала (1.45) с квадратичными и кубическими членами по конечным деформациям (1.46). При использовании введенного представления упругого потенциала с квадратичным и кубическими членами по деформациям в рамках данного подхода корректно могут быть определены [106, 118] только два низших слагаемых в представлениях волновых перемещений рядами по степеням  $\delta$ .

В рамках применяемой методологии компоненты вектора упругих волновых перемещений  $u_\alpha$  ( $\alpha = r, \theta, z$ ) представляются в виде суммы

$$u_\alpha = u_\alpha^{(l)} + \delta u_\alpha^{(n)} \quad (\alpha = r, \theta, z), \quad (7.1)$$

включающей линейные составляющие  $u_\alpha^{(l)}$  и нелинейные ангармонические возмущения  $u_\alpha^{(n)}$ . Выражения для компонентов тензора динамических напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$  для трансверсально-изотропного материала цилиндра, соответствующие такому варианту представления  $u_\alpha$ , являются суммами линейных и квадратичных членов по степеням параметра  $\delta$

$$\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha) = \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(l)})\delta + \left( \sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(n)}) + \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha^{(l)}) \right) \delta^2 \quad (\alpha, \beta = r, \theta, z), \quad (7.2)$$

а входящие в эти представления характеристики  $\sigma_{\alpha\beta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)})$  ( $q = l; n$ ) и  $\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}(u_\alpha)$  для случая осесимметричного нелинейного деформирования трансверсально-изотропного цилиндра имеют вид

$$\sigma_{rr}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{13} \partial_z u_z^{(q)} + c_{12} r^{-1} u_r^{(q)} + c_{11} \partial_r u_r^{(q)},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(l)}(u_\alpha^{(q)}) = c_{13} \partial_z u_z^{(q)} + c_{11} r^{-1} u_r^{(q)} + c_{12} \partial_r u_r^{(q)},$$

$$\sigma_{zz}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{33}\partial_z u_z^{(q)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{13}\partial_r u_r^{(q)},$$

$$\sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\left(\partial_r u_\theta^{(q)} - r^{-1}u_\theta^{(q)}\right),$$

$$\sigma_{rz}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(l)}\left(u_\alpha^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_\theta^{(q)} \quad (q=l;n); \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(n)} = & -\frac{k^2}{2}(c_{133} + c_{13})u_3^2 + \frac{ik}{r}c_{123}u_r u_3 + \left(\frac{1}{2r^2}(c_{112} + c_{12}) - \frac{k^2}{2}(c_{155} + c_{11})\right)u_r^2 + \\ & + \left(\frac{1}{8r^2}(c_{111} - c_{112} + 4c_{11}) - \frac{k^2}{2}(c_{144} + c_{12})\right)u_\theta^2 + ik(c_{155} + c_{44})u_r \frac{\partial}{\partial r}u_3 + \\ & + \frac{1}{2}(c_{155} + c_{13} + 2c_{44})\left(\frac{\partial}{\partial r}u_3\right)^2 + ik(c_{113} + c_{13})u_3 \frac{\partial}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}(c_{112} + c_{12})u_r \frac{\partial}{\partial r}u_r + \\ & + \frac{1}{2}(c_{111} + 3c_{11})\left(\frac{\partial}{\partial r}u_r\right)^2 + \frac{1}{4r}(c_{112} - c_{111} - 2c_{11} + 2c_{12})u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_\theta + \\ & + \frac{1}{8}(c_{111} - c_{112} + 4c_{11})\left(\frac{\partial}{\partial r}u_\theta\right)^2, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(n)} = & -\frac{k^2}{2}(c_{133} + c_{13})u_3^2 + \frac{ik}{r}(c_{113} + c_{13})u_r u_3 + \\ & + \left(\frac{1}{2r^2}(c_{111} + 3c_{11}) - \frac{k^2}{2}(c_{144} + c_{12})\right)u_r^2 + \\ & + \left(\frac{1}{8r^2}(c_{111} - c_{112} + 4c_{11}) - \frac{k^2}{2}(c_{155} + c_{11})\right)u_\theta^2 + \\ & + ikc_{144}u_r \frac{\partial}{\partial r}u_3 + \frac{1}{2}(c_{144} + c_{13})\left(\frac{\partial}{\partial r}u_3\right)^2 + \\ & + ikc_{123}u_3 \frac{\partial}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}(c_{112} + c_{12})u_r \frac{\partial}{\partial r}u_r + \frac{1}{2}(c_{112} + c_{12})\left(\frac{\partial}{\partial r}u_r\right)^2 + \\ & + \frac{1}{4r}(c_{112} - c_{111} - 2c_{11} + 2c_{12})u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_\theta + \frac{1}{4r}(c_{111} - c_{112} + 2c_{11} - 2c_{12})\frac{\partial}{\partial r}u_r \frac{\partial}{\partial r}u_\theta + \\ & + \frac{1}{8}(c_{111} - c_{112} + 4c_{11})\left(\frac{\partial}{\partial r}u_\theta\right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(n)} &= -\frac{k^2}{2}(c_{333} + 3c_{33})u_3^2 + \frac{ik}{r}(c_{133} + c_{13})u_r u_3 + \\
&+ \left( \frac{1}{2r^2}(c_{113} + c_{13}) - \frac{k^2}{2}(c_{344} + c_{13} + 2c_{44}) \right) u_r^2 + \\
&+ \left( \frac{1}{4r^2}(c_{113} - c_{123} + 2c_{13}) - \frac{k^2}{2}(c_{344} + c_{13} + 2c_{44}) \right) u_\theta^2 + \\
&\quad + ik(c_{344} + c_{44})u_r \frac{\partial}{\partial r} u_3 + \\
&+ \frac{1}{2}(c_{344} + c_{33}) \left( \frac{\partial}{\partial r} u_3 \right)^2 + ik(c_{133} + c_{13})u_3 \frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{1}{r}c_{123}u_r \frac{\partial}{\partial r} u_r + \\
&+ \frac{1}{2}(c_{113} + c_{13}) \left( \frac{\partial}{\partial r} u_r \right)^2 + \frac{1}{2r}(c_{123} - c_{113})u_\theta \frac{\partial}{\partial r} u_\theta + \frac{1}{4}(c_{113} - c_{123} + 2c_{13}) \left( \frac{\partial}{\partial r} u_\theta \right)^2, \\
\sigma_{r\theta}^{(n)} &= \left( \frac{k^2}{2}(c_{144} - c_{155} - c_{11} + c_{12}) + \frac{1}{4r^2}(c_{112} - c_{111} - 2c_{11} + 2c_{12}) \right) u_r u_\theta + \\
&+ \frac{ik}{2}(c_{155} - c_{144} + 2c_{44})u_\theta \frac{\partial}{\partial r} u_3 + \frac{1}{4r}(c_{112} - c_{111} - 2c_{11} + 2c_{12})u_\theta \frac{\partial}{\partial r} u_r + \\
&+ \frac{ik}{2}(c_{113} - c_{123} + 2c_{13})u_3 \frac{\partial}{\partial r} u_\theta + \frac{1}{4r}(c_{111} - c_{112} + 4c_{11})u_r \frac{\partial}{\partial r} u_\theta + \\
&+ \frac{ik}{2r}(c_{123} - c_{113})u_3 u_\theta + \frac{1}{4}(c_{111} - c_{112} + 4c_{11}) \frac{\partial}{\partial r} u_r \frac{\partial}{\partial r} u_\theta, \\
\sigma_{rz}^{(n)} &= -k^2(c_{344} + c_{44})u_3 u_r + \frac{ik}{r}c_{144}u_r^2 + \frac{ik}{2r}(c_{144} - c_{155})u_\theta^2 + \\
&\quad + ik(c_{344} + c_{33})u_3 \frac{\partial}{\partial r} u_3 + \frac{1}{r}(c_{144} + c_{13})u_r \frac{\partial}{\partial r} u_3 + \\
&\quad + ik(c_{155} + c_{44})u_r \frac{\partial}{\partial r} u_r + (c_{155} + c_{13} + 2c_{44}) \frac{\partial}{\partial r} u_3 \frac{\partial}{\partial r} u_r + \\
&\quad + \frac{ik}{2}(c_{155} - c_{144} + 2c_{44})u_\theta \frac{\partial}{\partial r} u_\theta, \\
\sigma_{\theta z}^{(n)} &= -k^2(c_{344} + c_{44})u_3 u_\theta + \frac{ik}{2r}(c_{144} + c_{155})u_r u_\theta + \frac{1}{2r}(c_{144} - c_{155} - 2c_{44})u_\theta \frac{\partial}{\partial r} u_3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + ikc_{144}u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_r + \frac{ik}{2}(c_{155} - c_{144})u_r \frac{\partial}{\partial r}u_\theta + \frac{1}{2}(c_{155} - c_{144} + 2c_{44})\frac{\partial}{\partial r}u_3 \frac{\partial}{\partial r}u_\theta, \\
\sigma_{\theta r}^{(n)} & = \left( \frac{k^2}{2}(c_{144} - c_{155} - c_{11} + c_{12}) + \frac{1}{4r^2}(c_{112} - c_{111} - 4c_{11}) \right) u_r u_\theta + \\
& + \frac{ik}{2}(c_{155} - c_{144})u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_3 + \frac{1}{4r}(c_{112} - c_{111} - 4c_{11})u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_r + \\
& + \frac{ik}{2}(c_{113} - c_{123})u_3 \frac{\partial}{\partial r}u_\theta + \frac{1}{4r}(c_{111} - c_{112} + 2c_{11} - 2c_{12})u_r \frac{\partial}{\partial r}u_\theta + \\
& + \frac{ik}{2r}(c_{123} - c_{113} + 2c_{13})u_3 u_\theta + \frac{1}{4}(c_{111} - c_{112} + 2c_{11} - 2c_{12})\frac{\partial}{\partial r}u_r \frac{\partial}{\partial r}u_\theta \\
\sigma_{zr}^{(n)} & = -k^2(c_{344} + c_{13} + 2c_{44})u_3 u_r + \frac{ik}{r}(c_{144} + c_{12})u_r^2 + \frac{ik}{2r}(c_{144} - c_{155} - c_{11} + c_{12})u_\theta^2 + \\
& + ik(c_{344} + c_{44})u_3 \frac{\partial}{\partial r}u_3 + \frac{1}{r}c_{144}u_r \frac{\partial}{\partial r}u_3 + ik(c_{155} + c_{11})u_r \frac{\partial}{\partial r}u_r + \\
& + (c_{155} + c_{44})\frac{\partial}{\partial r}u_3 \frac{\partial}{\partial r}u_r + \frac{ik}{2}(c_{155} - c_{144} + c_{11} - c_{12})u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_\theta, \\
\sigma_{z\theta}^{(n)} & = -k^2(c_{344} + c_{13} + 2c_{44})u_3 u_\theta + \frac{ik}{2r}(c_{144} + c_{155} + c_{11} + c_{12})u_r u_\theta + \\
& + \frac{1}{2r}(c_{144} - c_{155})u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_3 + ik(c_{144} + c_{12})u_\theta \frac{\partial}{\partial r}u_r + \\
& + \frac{ik}{2}(c_{155} - c_{144} + c_{11} - c_{12})u_r \frac{\partial}{\partial r}u_\theta + \frac{1}{2}(c_{155} - c_{144} + 2c_{44})\frac{\partial}{\partial r}u_3 \frac{\partial}{\partial r}u_\theta. \quad (7.4)
\end{aligned}$$

Подстановка общих представлений для компонентов тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}(u_\alpha)$  в виде сумм линейных и квадратичных членов по степеням параметра  $\delta$  в уравнения движения (1.14) а также в соотношения рассматриваемых вариантов граничных условий на боковой поверхности цилиндра (1.50) – (1.52) и последующее приравнивание слагаемых одинакового порядка малости по степеням малого параметра  $\delta$  приводит к рекуррентной последовательности краевых задач определения амплитудных составляющих для комплексных функций перемещений  $u_\alpha^{(l)}$  и  $u_\alpha^{(n)}$ .

## 7.2. Анализ краевых задач для определения вторых гармоник монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрах

В случае определения вторых гармоник для уединенных монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения с круговой частотой  $\omega$  в трансверсально-изотропном цилиндре кругового сечения после введения исходных представлений

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(l)} &= u_{\theta}^{(0,l)}(r) \exp(-i(\omega t - kz)), \quad u_r^{(l)} = u_z^{(l)} = 0, \\ u_{\alpha}^{(n)} &= u_{\alpha}^{(0,n)}(r) \exp(-2i(\omega t - kz)) \quad (\alpha = r, \theta, z) \end{aligned} \quad (7.5)$$

задача сводится к последовательному нахождению амплитудных составляющих  $u_{\theta}^{(0,l)}(r)$ ,  $u_{\alpha}^{(0,n)}(r)$  из следующих граничных задач:

– граничной задачи первого линейного приближения относительно  $u_{\theta}^{(0,l)}(r)$  для уравнения

$$r^2 \left( u_{\theta}^{(0,l)} \right)'' + r \left( u_{\theta}^{(0,l)} \right)' + \left( (\beta r)^2 - 1 \right) u_{\theta}^{(0,l)} = 0 \quad (7.6)$$

с краевыми условиями

$$u_{\theta}^{(0,l)}(1) = 0 \quad (7.7)$$

для цилиндра с закрепленной либо мембранированной боковой поверхностью и краевым условием

$$\sigma_{r\theta} \left( u_{\theta}^{(0,l)}(1) \right) = 0 \quad (7.8)$$

для цилиндра со свободной боковой поверхностью;

– граничной задачи второго нелинейного приближения относительно  $u_{\alpha}^{(0,n)}(r)$  ( $\alpha = r, z$ ) для системы уравнений

$$\left( \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} r^{-2} \right) u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)} r^{-1} \left( u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{14}^{(1)} \left( u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{15}^{(1)} \left( u_r^{(0,n)} \right)'' =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta_1^{n1}}{r^3} u_\theta^2 + \frac{\Delta_2^{n1}}{r} u_\theta^2 + \Delta_3^{n1} u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\Delta_4^{n1}}{r^2} u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\Delta_5^{n1}}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{\Delta_6^{n1}}{r} u_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \Delta_7^{n1} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}, \\
&\Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} r^{-1} u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)} \left( u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{24}^{(1)} r^{-1} \left( u_z^{(0,n)} \right)' + \Delta_{25}^{(1)} \left( u_z^{(0,n)} \right)'' = \\
&= \Delta_1^{n2} u_\theta^2 + \frac{\Delta_2^{n2}}{r^2} u_\theta^2 + \frac{\Delta_3^{n2}}{r} u_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \Delta_4^{n2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \Delta_5^{n2} u_\theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}, \\
&\Delta_1^{n1} = \frac{c_{111} - c_{112} + 4c_{11}}{4}, \quad \Delta_2^{n1} = \frac{k^2(2c_{144} - 2c_{155} - c_{11} + c_{12})}{2}, \\
&\Delta_3^{n1} = \frac{k^2(c_{144} + c_{155} + 2c_{12} + 2c_{44})}{2}, \quad \Delta_4^{n1} = \frac{c_{112} - c_{111} - 3c_{11} + c_{12}}{2}, \\
&\Delta_5^{n1} = \frac{c_{111} - c_{112} + 2c_{11} - 2c_{12}}{4}, \quad \Delta_6^{n1} = \frac{c_{111} - c_{112} + 2c_{11} - 2c_{12}}{4}, \\
&\Delta_7^{n1} = \frac{c_{112} - c_{111} - 4c_{11}}{4}, \quad \Delta_1^{n2} = \frac{ik^3(c_{344} + c_{13} + 2c_{44})}{2}, \\
&\Delta_2^{n2} = \frac{ik(c_{123} - c_{113} - 2c_{13})}{4}, \quad \Delta_3^{n2} = \frac{ik(c_{113} - c_{123} - c_{144} + c_{155} + c_{11} - c_{12})}{2}, \\
&\Delta_4^{n2} = \frac{ik(c_{123} - c_{113} + 2c_{144} - 2c_{155} - 2c_{11} + 2c_{12} - 2c_{13})}{4}, \\
&\Delta_5^{n2} = \frac{ik(c_{144} - c_{155} - c_{11} + c_{12})}{2}. \tag{7.9}
\end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$u_r^{(0,n)}(1) = 0, \quad u_z^{(0,n)}(1) = 0 \tag{7.10}$$

для цилиндра с закрепленной боковой поверхностью; краевыми условиями

$$u_z^{(0,n)}(1) = 0, \quad \left( \sigma_{r\alpha}^{(n)} \left( u_\theta^{(0,l)} \right) \right)_{r=1} + \left( \sigma_{r\alpha}^{(l)} \left( u_r^{(0,n)}, u_z^{(0,n)} \right) \right)_{r=1} = 0 \tag{7.11}$$

для цилиндра с мембранированной боковой поверхностью и краевыми условиями

$$\left( \sigma_{r\alpha}^{(n)} \left( u_\theta^{(0,l)} \right) \right)_{r=1} + \left( \sigma_{r\alpha}^{(l)} \left( u_r^{(0,n)}, u_z^{(0,n)} \right) \right)_{r=1} = 0 \quad (\alpha = r, z) \tag{7.12}$$

для цилиндра со свободной боковой поверхностью. В соотношении (7.6) введено

обозначение  $\beta = \sqrt{\Omega^2 - 2c_{44}k^2 / (c_{11} - c_{12})}$ , где  $\Omega = \sqrt{2\rho\omega^2 / (c_{11} - c_{12})}$ , а величины  $\Delta_{ij}^{(p)}$  в соотношениях (7.9) выражаются через упругие постоянные материала цилиндра, параметры приведенной частоты и нормированного волнового числа следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{(1)} &= \Omega^2 - c_{44}k^2, \quad \Delta_{12}^{(1)} = -c_{11}, \quad \Delta_{13}^{(1)} = c_{11}, \quad \Delta_{14}^{(1)} = ik(c_{13} + c_{44}), \\ \Delta_{15}^{(1)} &= c_{11}, \quad \Delta_{11}^{(2)} = c_{11}, \quad \Delta_{12}^{(2)} = k^2(c_{12} - c_{11})/2, \\ \Delta_{13}^{(2)} &= k^2(c_{12} + c_{44})/2, \quad \Delta_{14}^{(2)} = (c_{12} - 3c_{11})/2, \quad \Delta_{15}^{(2)} = (c_{11} - c_{12})/2, \\ \Delta_{16}^{(2)} &= (c_{11} - c_{12})/2, \quad \Delta_{17}^{(2)} = -c_{11}, \quad \Delta_{21}^{(1)} = \Omega^2 - c_{33}k^2, \\ \Delta_{22}^{(1)} &= ik(c_{13} + c_{44}), \quad \Delta_{23}^{(1)} = ik(c_{13} + c_{44}), \quad \Delta_{24}^{(1)} = c_{44}, \quad \Delta_{25}^{(1)} = c_{44}, \\ \Delta_{21}^{(2)} &= ik^3(c_{44} - c_{13}/2), \quad \Delta_{22}^{(2)} = -ic_{13}k/2, \quad \Delta_{23}^{(2)} = ik(c_{11} - c_{12})/2, \\ \Delta_{24}^{(2)} &= ik(c_{12} - c_{11} - c_{13})/2, \quad \Delta_{25}^{(2)} = ik(c_{12} - c_{11})/2. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Базисные решения задач первого приближения (7.6), (7.7), описывающих моды крутильных волн с номером  $p$  в закрепленных и мембранированных на боковой поверхности цилиндрах, имеют вид  $u_{\theta}^{(0,l)}(r) = u^{(0)}\beta_p^* J_1(\beta_p^* r)$ , где  $\beta_p^* (p = \overline{1, \infty})$  – корни трансцендентного дисперсионного уравнения  $J_1(\beta_p^*) = 0$ ; решения задачи первого приближения (7.6), (7.8), описывающей моды крутильных волн с номером  $p$  в свободных по боковой поверхности цилиндрах, имеют вид  $u_{\theta}^{(0,l)}(r) = u^{(0)}\beta_p^* J_1(\beta_p^* r)$ , где  $\beta_p^* (p = \overline{1, \infty})$  – корни трансцендентного дисперсионного уравнения  $\beta^* J_0(\beta^*) - 2J_1(\beta^*) = 0$ . Структура соотношений краевой задачи (7.9), (7.10); краевой задачи (7.9), (7.11); краевой задачи (7.9), (7.12) показывает, что во всех рассматриваемых случаях задания краевых условий на боковой поверхности цилиндра искомые вторые гармоники априори являются осесимметричными волнами продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой.

Низшие ветви диаграмм дисперсионных кривых для волн кручения в цилиндрических волноводах рассматриваемого типа с закрепленной и со

свободной боковой поверхностью соответственно представлены на Рисунках 7.1 и 7.2. Здесь используется обозначение  $k_n^{(*)} = k_n \sqrt{(c_{11} - c_{12}) / (2c_{44})}$ .

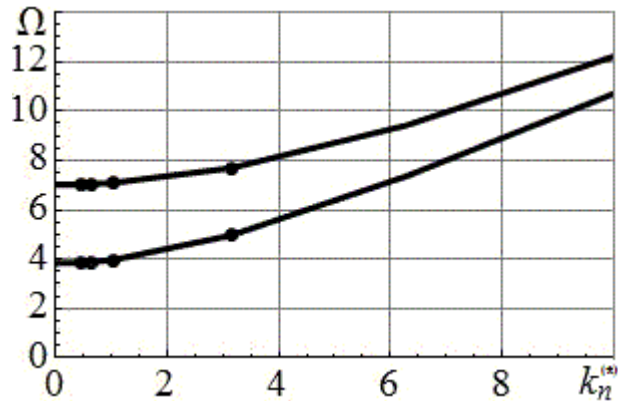


Рис. 7.1. Низшие действительные ветви спектра осесимметричных крутильных волн в закрепленном трансверсально-изотропном цилиндре

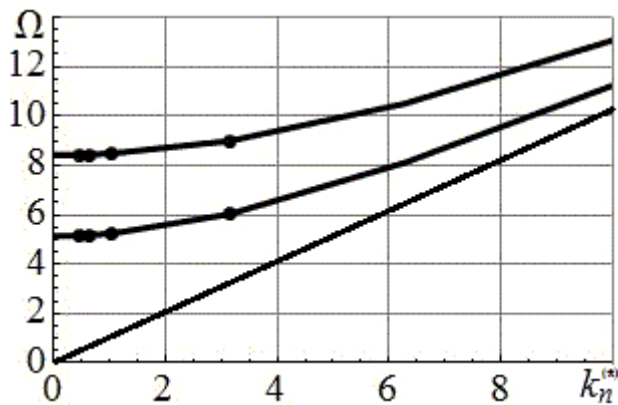


Рис.7.2. Низшие действительные ветви спектра осесимметричных крутильных волн в свободном трансверсально-изотропном цилиндре

Для построения частных решений системы неоднородных дифференциальных уравнений (7.9) используется прием замены их правых частей степенными рядами по переменной  $r$  с использованием абсолютно сходящихся степенных разложений для входящих в выражение  $u_{\theta}^{(0,l)}(r)$  цилиндрических функций Бесселя первого рода. В результате система (7.9) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left( \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} r^{-2} \right) u_r^{(0,n)} + \Delta_{13}^{(1)} r^{-1} \left( u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{14}^{(1)} \left( u_z^{(0,n)} \right)' + \\ & + \Delta_{15}^{(1)} \left( u_r^{(0,n)} \right)'' = \left( u^{(0)} \right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p r^p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta_{21}^{(1)} u_z^{(0,n)} + \Delta_{22}^{(1)} r^{-1} u_r^{(0,n)} + \Delta_{23}^{(1)} \left( u_r^{(0,n)} \right)' + \Delta_{24}^{(1)} r^{-1} \left( u_z^{(0,n)} \right)' + \\ & + \Delta_{25}^{(1)} \left( u_z^{(0,n)} \right)'' = \left( u^{(0)} \right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p r^p. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Для коэффициентов  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  в представлениях (7.14) с использованием средств компьютерной алгебры получены крайне громоздкие аналитические представления.

Таким образом, полное решение системы дифференциальных уравнений (7.9) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} &= \left( -D_1 \xi_1 J_1(\xi_1 r) - D_2 \xi_2 J_1(\xi_2 r) + \left( u^{(0)} \right)^2 F_1(r) \right) Q(t, z), \\ u_z^{(n)} &= \left( D_1 \eta_1 J_0(\xi_1 r) + D_2 \eta_2 J_0(\xi_2 r) + \left( u^{(0)} \right)^2 F_2(r) \right) Q(t, z), \end{aligned} \quad (7.15)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_j &= \sqrt{\frac{-B - (-1)^j \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}, \quad \eta_j = \frac{ik \xi_j^2 (c_{13} + c_{44})}{\Omega^2 - c_{33} k^2 - c_{44} \xi_j^2} \quad (j=1, 2), \\ A &= c_{11} c_{44}, \quad B = -(c_{11} + c_{44}) \Omega^2 - (c_{13}^2 + 2c_{13} c_{44} - c_{11} c_{33} k^2), \\ C &= (\Omega^2 - c_{33} k^2) (\Omega^2 - c_{44} k^2), \quad Q(t, z) = \exp(-2i(\omega t - kz)), \end{aligned} \quad (7.16)$$

$D_j$  – произвольные постоянные коэффициенты;  $F_j(r)$  – частные решения системы уравнений (7.9) в виде рядов  $F_1(r) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p$ ,  $F_2(r) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p r^p$  с коэффициентами, определяемыми из рекуррентных формул

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \\ a_i &= \frac{\alpha_i - \Delta_1^{l1} a_{i-2} - \Delta_4^{l1} b_{i-1} (i-2)}{\Delta_2^{l1} + \Delta_3^{l1} (i-1) + \Delta_5^{l1} (i-1)(i-2)}, \quad b_i = \frac{\beta_{i-1} - \Delta_1^{l2} b_{i-2} - (\Delta_2^{l2} + \Delta_3^{l2} (i-2)) a_{i-1}}{\Delta_4^{l2} (i-1) + \Delta_5^{l2} (i-1)(i-2)} \\ & \quad (i = \overline{3, \infty}) \end{aligned} \quad (7.17)$$

В результате подстановки представлений (7.16) в краевые условия (7.10), (7.11) либо (7.12) в предположении о том, что точки  $(2k, 2\Omega)$  не принадлежат

соответственно рассматриваемому случаю краевых условий какой-либо из мод дисперсионного спектра линейных осесимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа в закрепленном, мембранированном либо свободном цилиндре, определяются выражения для коэффициентов  $D_j$ , записываемые в виде

$$D_1 = (u^0)^2 \frac{\chi_{12}P_2 - \chi_{22}P_1}{\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{12}\chi_{21}}, \quad D_2 = (u^0)^2 \frac{\chi_{11}P_2 - \chi_{21}P_1}{\chi_{11}\chi_{22} - \chi_{12}\chi_{21}}, \quad (7.18)$$

где в случае закрепленного по границе цилиндра

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= -\xi_1 J_1(\xi_1), \quad \chi_{12} = -\xi_2 J_1(\xi_2), \quad \chi_{21} = \eta_1 J_0(\eta_1), \quad \chi_{22} = \eta_2 J_0(\eta_2), \\ P_1 &= -F_1(1), \quad P_2 = -F_2(1); \end{aligned} \quad (7.19)$$

в случае цилиндра с мембранным покрытием границы

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= 2ikc_{13}J_0(\xi_1) - (c_{11} + c_{12})\xi_1 J_1(\xi_1) + c_{11}\xi_1^2 J_2(\xi_1), \\ \chi_{12} &= 2ikc_{13}J_0(\xi_2) - (c_{11} + c_{12})\xi_2 J_1(\xi_2) + c_{11}\xi_2^2 J_2(\xi_2), \\ \chi_{21} &= \eta_1 J_0(\eta_1), \quad \chi_{22} = \eta_2 J_0(\eta_2), \\ P_1 &= -(c_{11}F_1'(1) + c_{12}F_1(1) + 2ikc_{13}F_2(1)), \quad P_2 = -F_2(1); \end{aligned} \quad (7.20)$$

в случае свободного по границе цилиндра

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= 2ikc_{13}J_0(\xi_1) - (c_{11} + c_{12})\xi_1 J_1(\xi_1) + c_{11}\xi_1^2 J_2(\xi_1), \\ \chi_{12} &= 2ikc_{13}J_0(\xi_2) - (c_{11} + c_{12})\xi_2 J_1(\xi_2) + c_{11}\xi_2^2 J_2(\xi_2), \\ \chi_{21} &= -(2ikc_{44} + c_{44}\eta_1)\xi_1 J_1(\xi_1), \quad \chi_{22} = -(2ikc_{44} + c_{44}\eta_2)\xi_2 J_1(\xi_2), \\ P_1 &= -(c_{11}F_1'(1) + c_{12}F_1(1) + 2ikc_{13}F_2(1)), \quad P_2 = -(c_{44}F_2'(1) + 2ikc_{44}F_1(1)). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Полученная аналитическая форма представлений комплексных функций волновых перемещений во вторых гармониках монохроматических осесимметричных нормальных волн кручения позволяет провести анализ ряда амплитудно-частотных эффектов в ангармонических возмущениях.

### 7.3. Частный случай учета эффектов геометрической нелинейности

В исследованиях моделей нелинейного упругого деформирования существует практика анализа предельных частных случаев, в которых в

отдельности учитывается один из двух представленных в рассмотренной выше модели факторов нелинейности – учет фактора геометрической нелинейности, отражаемый в использовании представлений для конечных деформаций Коши с квадратичными составляющими по упругим перемещениям и выборе упругого потенциала, содержащего только квадратичные члены по деформациям, либо учет фактора физической нелинейности при использовании в модели представлений для малых линейных деформаций наряду с представлением упругого потенциала, содержащим квадратичные и кубические по деформациям члены.

В рамках осуществленного в работе исследования частной модели анализа вторых гармоник нормальных волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре при учете только одного фактора геометрической нелинейности определяющие соотношения получены в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) &= c_{13}\partial_z u_z^{(q)} + c_{12}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{11}\partial_r u_r^{(q)}, \\ \sigma_{r\theta}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\left(\partial_r u_{\theta}^{(q)} - r^{-1}u_{\theta}^{(q)}\right), \\ \sigma_{rz}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) &= c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)}, \quad \sigma_{\theta z}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_{\theta}^{(q)}, \\ \sigma_{\theta r}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\left(\partial_r u_{\theta}^{(q)} - r^{-1}u_{\theta}^{(q)}\right), \quad \sigma_{zr}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) = c_{44}\partial_z u_r^{(q)} + c_{44}\partial_r u_z^{(q)}, \\ \sigma_{z\theta}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) &= c_{44}\partial_z u_{\theta}^{(q)}, \quad \sigma_{zz}^{(l)}\left(u_{\alpha}^{(q)}\right) = c_{33}\partial_z u_z^{(q)} + c_{13}r^{-1}u_r^{(q)} + c_{13}\partial_r u_r^{(q)} \quad (q = l, n); \\ \sigma_{rr}^{(n)}\left(u_{\alpha}^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left(c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + c_{11}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 + c_{12}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 + c_{12}\left(\partial_z u_{\theta}^{(l)}\right)^2 + \right. \\ &+ c_{11}r^{-2}\left(u_{\theta}^{(l)}\right)^2 + 2c_{44}\partial_z u_r^{(l)}\partial_r u_z^{(l)} + (c_{13} + 2c_{44})\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}\partial_z u_z^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + \\ &+ 2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + 3c_{11}\left(\partial_r u_r^{(l)}\right)^2 - (c_{11} + c_{12})r^{-1}u_{\theta}^{(l)}\partial_r u_{\theta}^{(l)} + c_{11}\left(\partial_r u_{\theta}^{(l)}\right)^2 \left. \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(n)}\left(u_{\alpha}^{(l)}\right) &= \frac{1}{2}\left(c_{13}\left(\partial_z u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{13}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_z u_r^{(l)} + c_{12}\left(\partial_z u_r^{(l)}\right)^2 + 3c_{11}r^{-2}\left(u_r^{(l)}\right)^2 + \right. \\ &+ c_{11}\left(\partial_z u_{\theta}^{(l)}\right)^2 + c_{11}r^{-2}\left(u_{\theta}^{(l)}\right)^2 + c_{13}\left(\partial_r u_z^{(l)}\right)^2 + 2c_{12}r^{-1}u_r^{(l)}\partial_r u_r^{(l)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c_{12} \left( \partial_r u_r^{(l)} \right)^2 - (c_{11} - c_{12}) r^{-1} u_\theta^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} + c_{11} \left( \partial_r u_\theta^{(l)} \right)^2, \\
\sigma_{zz}^{(n)} \left( u_\alpha^{(l)} \right) &= \frac{1}{2} \left( 3c_{33} \left( \partial_z u_z^{(l)} \right)^2 + 2c_{13} r^{-1} u_r^{(l)} \partial_z u_z^{(l)} + (c_{13} + 2c_{44}) \left( \partial_z u_r^{(l)} \right)^2 + \right. \\
& + c_{13} r^{-2} \left( u_r^{(l)} \right)^2 + (c_{13} + 2c_{44}) \left( \partial_z u_\theta^{(l)} \right)^2 + c_{13} r^{-2} \left( u_\theta^{(l)} \right)^2 + c_{44} \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_z^{(l)} + \\
& + c_{33} \left( \partial_r u_z^{(l)} \right)^2 + 2c_{13} \partial_z u_z^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + c_{13} \left( \partial_r u_r^{(l)} \right)^2 + c_{13} \left( \partial_r u_\theta^{(l)} \right)^2, \\
\sigma_{r\theta}^{(n)} \left( u_\alpha^{(l)} \right) &= \frac{1}{2} \left( (c_{12} - c_{11}) \partial_z u_r^{(l)} \partial_z u_\theta^{(l)} + (c_{12} - c_{11}) r^{-2} u_r^{(l)} u_\theta^{(l)} + 2c_{44} \partial_z u_\theta^{(l)} \partial_r u_z^{(l)} + \right. \\
& + (c_{12} - c_{11}) r^{-1} u_\theta^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + 2c_{13} \partial_z u_z^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11} r^{-1} u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{11} \partial_r u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} \left. \right), \\
\sigma_{rz}^{(n)} \left( u_\alpha^{(l)} \right) &= c_{44} \partial_z u_z^{(l)} \partial_z u_r^{(l)} + c_{33} \partial_z u_z^{(l)} \partial_r u_z^{(l)} + c_{13} r^{-1} u_r^{(l)} \partial_r u_z^{(l)} + \\
& + c_{44} \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + (c_{13} + 2c_{44}) \partial_r u_z^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + c_{44} \partial_z u_\theta^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)}, \\
\sigma_{\theta z}^{(n)} \left( u_\alpha^{(l)} \right) &= c_{44} \partial_z u_z^{(l)} \partial_z u_\theta^{(l)} - c_{44} r^{-1} u_\theta^{(l)} \partial_r u_z^{(l)} + c_{44} \partial_r u_z^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)}, \\
\sigma_{\theta r}^{(n)} \left( u_\alpha^{(l)} \right) &= \frac{1}{2} \left( -2c_{13} r^{-1} u_\theta^{(l)} \partial_z u_z^{(l)} + (c_{12} - c_{11}) \partial_z u_r^{(l)} \partial_z u_\theta^{(l)} - 2c_{11} r^{-2} u_r^{(l)} u_\theta^{(l)} \right. \\
& \left. - 2c_{11} r^{-1} u_\theta^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12}) r^{-1} u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} + (c_{11} - c_{12}) \partial_r u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} \right), \\
\sigma_{zr}^{(n)} \left( u_\alpha^{(l)} \right) &= \frac{1}{2} \left( 2(c_{13} + 2c_{44}) \partial_z u_z^{(l)} \partial_z u_r^{(l)} + 2c_{12} r^{-1} \left( \partial_z u_r^{(l)} \right)^2 + (c_{12} - c_{11}) r^{-1} \left( \partial_z u_r^{(l)} \right)^2 + \right. \\
& + 2c_{44} \partial_z u_z^{(l)} \partial_r u_z^{(l)} + 2c_{11} \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + 2c_{44} \partial_r u_z^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12}) \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} \left. \right), \\
\sigma_{z\theta}^{(n)} \left( u_\alpha^{(l)} \right) &= \frac{1}{2} \left( 2(c_{13} + 2c_{44}) \partial_z u_z^{(l)} \partial_z u_\theta^{(l)} + (c_{11} + c_{12}) r^{-1} u_r^{(l)} u_\theta^{(l)} + \right. \\
& \left. + 2c_{12} \partial_z u_\theta^{(l)} \partial_r u_r^{(l)} + (c_{11} - c_{12}) \partial_z u_r^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} + 2c_{44} \partial_r u_z^{(l)} \partial_r u_\theta^{(l)} \right), \tag{7.22}
\end{aligned}$$

а в сохраняющих для данного случая свою структуру уравнениях (7.9) параметры

$\Delta_q^{nj}$  принимают вид

$$\begin{aligned}
\Delta_1^{n1} &= c_{11}, \quad \Delta_2^{n1} = k^2 (c_{12} - c_{11}) / 2, \quad \Delta_3^{n1} = k^2 (c_{12} + c_{44}) / 2, \quad \Delta_4^{n1} = (c_{12} - 3c_{11}) / 2, \\
\Delta_5^{n1} &= (c_{11} - c_{12}) / 2, \quad \Delta_6^{n1} = (c_{11} - c_{12}) / 2, \quad \Delta_7^{n1} = -c_{11},
\end{aligned}$$

$$\Delta_1^{n2} = ik^3 (c_{44} - c_{13} / 2), \quad \Delta_2^{n2} = -ic_{13}k / 2,$$

$$\Delta_3^{n2} = ik(c_{11} - c_{12}) / 2, \quad \Delta_4^{n2} = ik(c_{12} - c_{11} - c_{13}) / 2, \quad \Delta_5^{n2} = ik(c_{12} - c_{11}) / 2. \quad (7.23)$$

Соответствующие коррекции выражений  $\Delta_q^{nj}$  изменения происходят в сохраняющих свою структуру представлениях для коэффициентов  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  в уравнениях (7.14), а также в представлениях коэффициентов рядов  $F_1(r) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p$ ,  $F_2(r) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p r^p$ , определяемых из сохраняющих свой вид рекуррентных соотношений (7.17). В итоге, функции волновых перемещений во вторых гармониках монохроматических нормальных волн кручения, определяемые в рамках модели учета эффектов геометрической нелинейности, сохраняют представления вида (7.15) – (7.21), в которых учитываются изменения параметров  $\Delta_q^{nj}$ .

#### **7.4. Численная реализация алгоритмов исследования вторых гармоник нормальных упругих волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрических волноводах**

С применением построенного теоретического алгоритма решения задач о нелинейных ангармонических возмущениях при распространении нормальных волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрических волноводах с различными вариантами задания краевых условий на боковой граничной поверхности осуществлено численное исследование кинематических характеристик вторых гармоник осесимметричных монохроматических нормальных волн кручения, в рамках которого проведен параметрический анализ амплитудно-частотных распределений вдоль радиальной координаты в области сечения волноводов для отнесенных к величине  $(u^{(0)})^2$  нормированных волновых перемещений в нелинейных ангармонических возмущениях.

Представленные на Рисунках 7.3 – 7.6 результаты расчетов относятся к случаям распространения нормальных крутильных волн с варьируемой



относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 2\pi/(\tilde{k}R)$  из нижней действительной ветви дисперсионного спектра трансверсально-изотропного цилиндра из гадолиния с закрепленной граничной поверхностью.

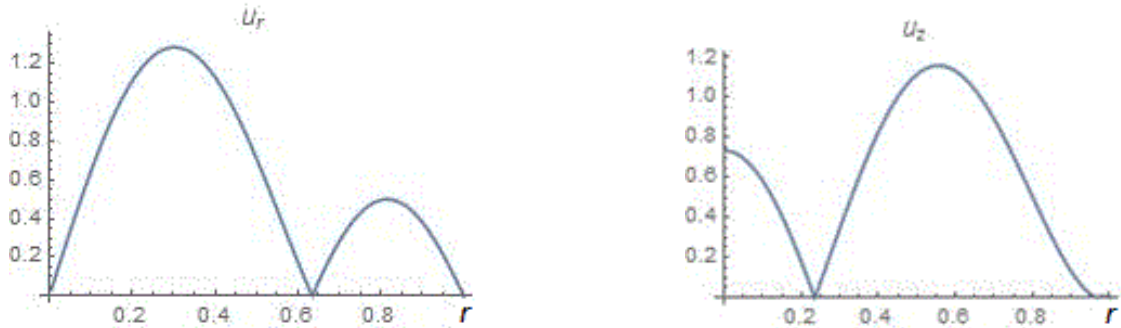


Рис.7.3. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.1$  из первой моды спектра для цилиндра с закрепленной границей

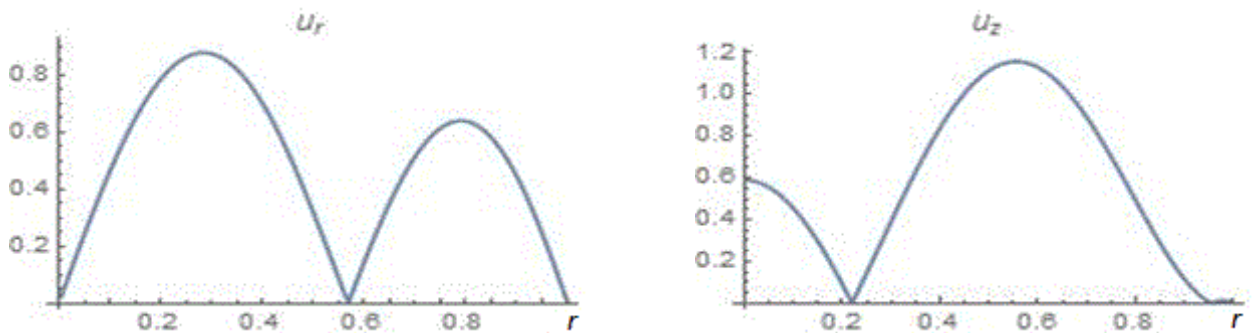


Рис.7.4. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.3$  из первой моды спектра для цилиндра с закрепленной границей

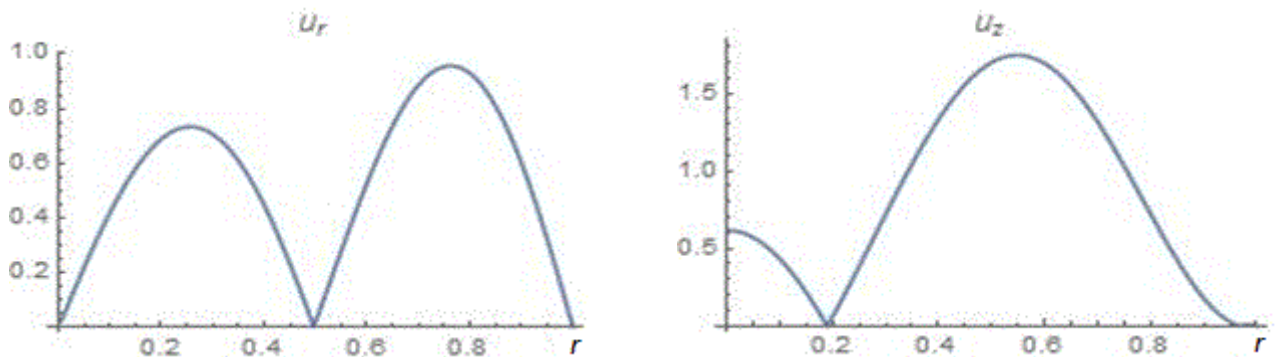


Рис.7.5. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.8$  из первой моды спектра для цилиндра с закрепленной границей

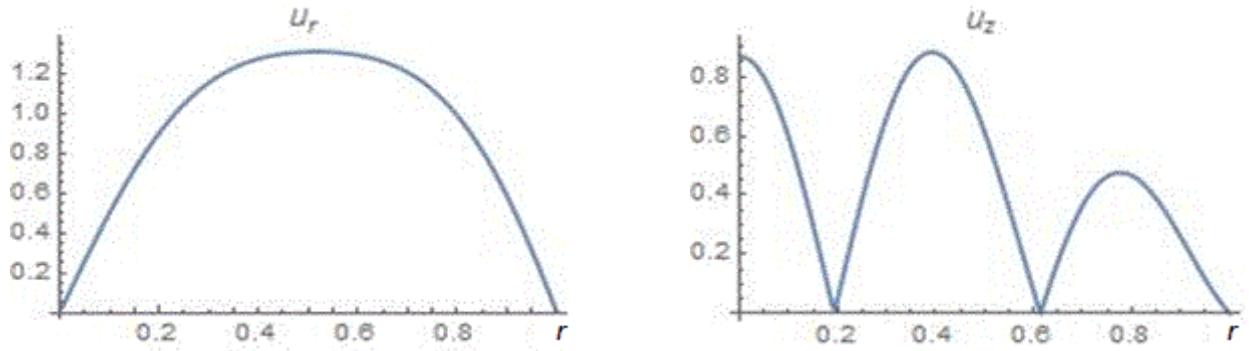


Рис.7.6. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 5.0$  из первой моды спектра для цилиндра с закрепленной границей

На Рисунках 7.7 – 7.10 представлены результаты расчетов для рассматриваемого цилиндра при тех же значениях относительной длины нормальных волн в случае, когда его боковая поверхность имеет мембранное покрытие.

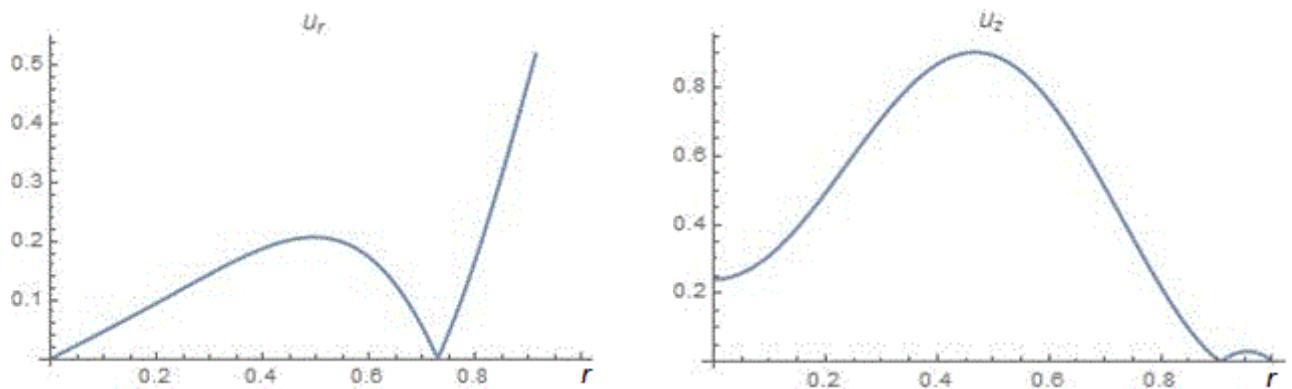


Рис.7.7. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.1$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей

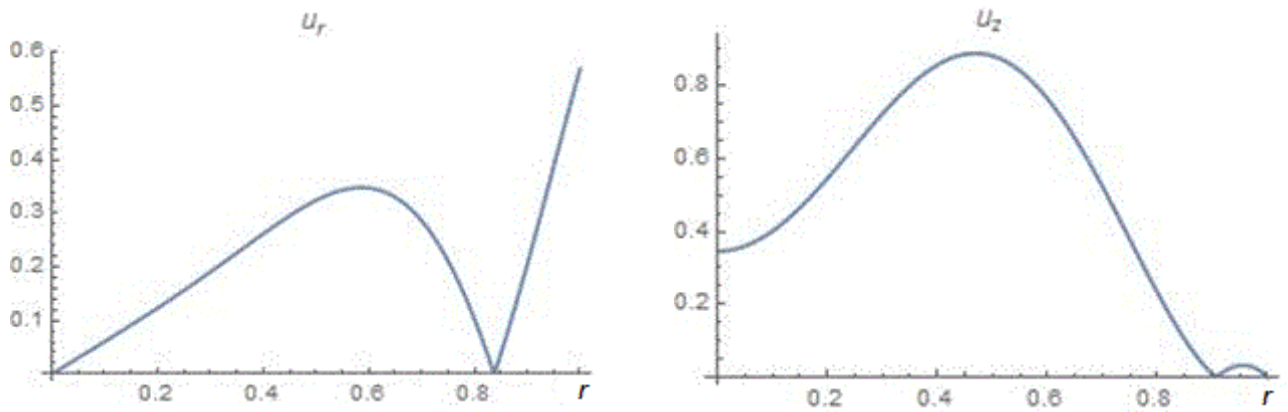


Рис.7.8. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.3$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей

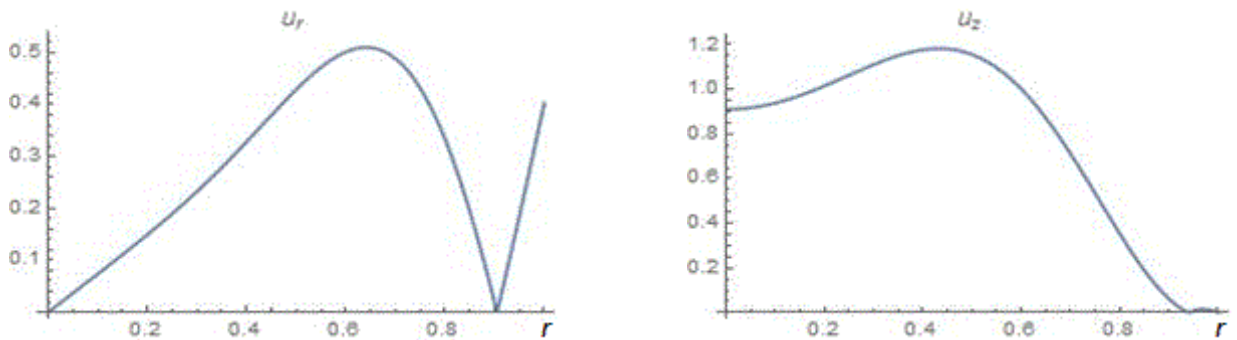


Рис.7.9. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.8$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей

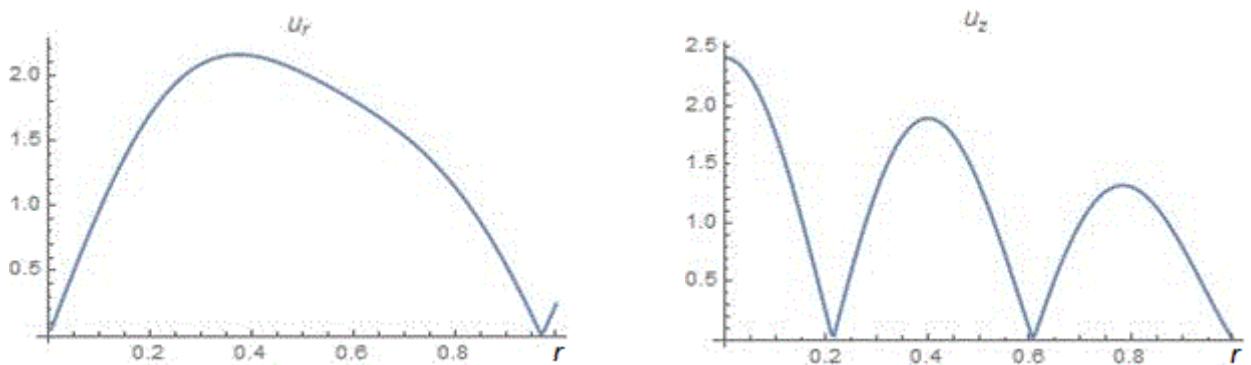


Рис.7.10. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 5.0$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей

Результаты расчетов на Рисунках 7.11 – 7.14 отвечают случаю, когда для рассматриваемого цилиндра с мембранированной граничной поверхностью при исследовании используется модель учета только фактора геометрической нелинейности.

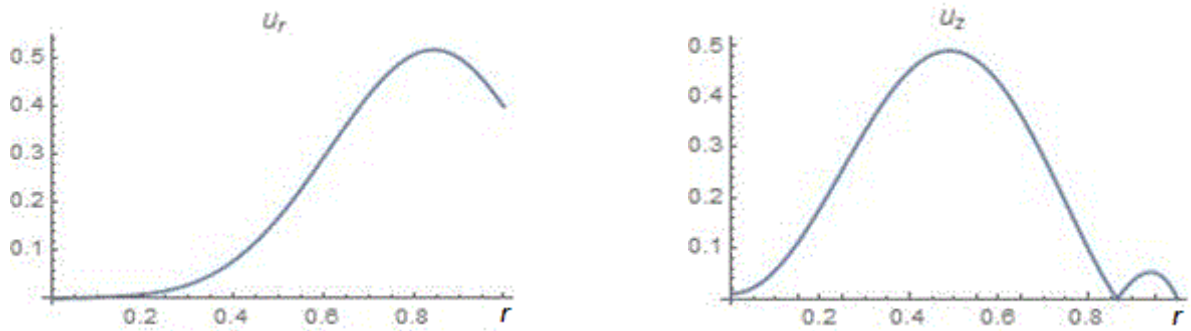


Рис.7.11. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.1$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей (модель учета фактора геометрической нелинейности)

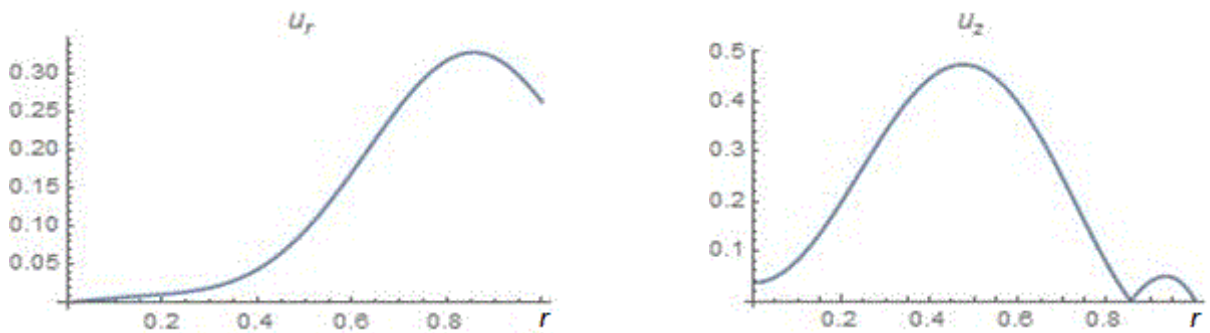


Рис.7.12. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.3$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей (модель учета фактора геометрической нелинейности)

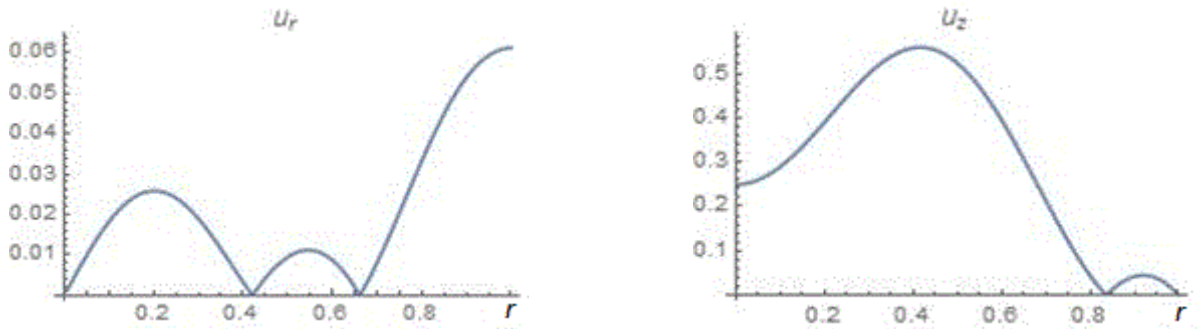


Рис.7.13. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 1.8$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей (модель учета фактора геометрической нелинейности)

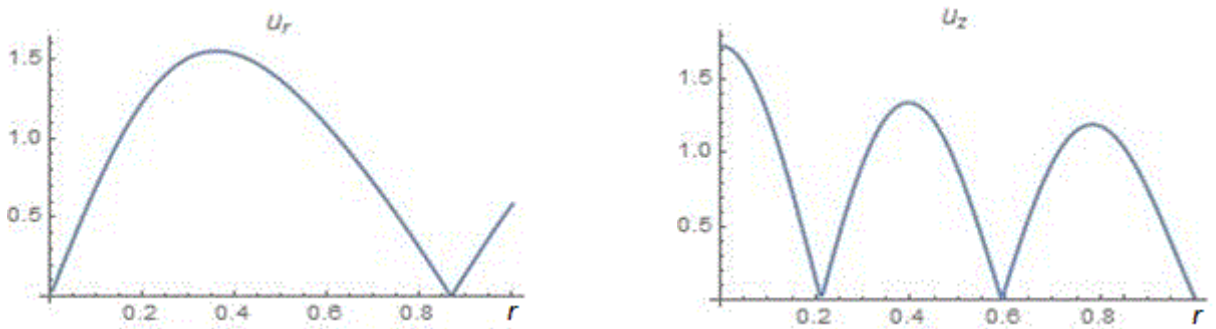


Рис.7.14. Распределение амплитудных характеристик волновых смещений во вторых гармониках волн кручения с относительной длиной  $\tilde{\lambda} = 5.0$  из первой моды спектра для цилиндра с мембранированной границей (модель учета фактора геометрической нелинейности)

Независимые безразмерные матричные механические характеристики второго и третьего порядка  $c_{jq}$  и  $c_{jql}$  для гадолиния, отнесенные к нормирующему параметру  $c_* = 10^{10} Pa$ , имеют значения [391]

$$c_{11} = 7.669, \quad c_{12} = 1.883, \quad c_{13} = 1.553, \quad c_{33} = 7.081, \quad c_{44} = 1.862;$$

$$c_{111} = -125.059, \quad c_{112} = -19.828, \quad c_{113} = -3.982, \quad c_{123} = -5.061, \quad c_{133} = -23.917,$$

$$c_{144} = -5.897, \quad c_{155} = -3.931, \quad c_{344} = -22.422, \quad c_{333} = -85.240.$$

Параметр плотности гадолиния равен  $\rho = 7.895 \cdot 10^3 kg$ .

Анализ представленных результатов численного анализа позволяет, в

частности, сделать следующие выводы относительно характера влияния факторов относительной длины нормальных крутильных волн и типа граничных условий на поверхности цилиндра на амплитудные уровни характеристик нелинейных ангармонических возмущений, представляющих собой осесимметричные волны продольно сдвигового типа с радиальными  $u_r$  и осевыми  $u_z$  нормированными компонентами волновых колебательных перемещений.

Для цилиндрического волновода с закрепленной границей в рассмотренном диапазоне относительных длин крутильных волн максимальные уровни амплитуд компонентов ангармонических возмущений изменяются незначительно; при этом максимальные уровни амплитуд  $u_z$  осевых перемещений монотонно возрастают с уменьшением  $\tilde{\lambda}$ , а максимальные значения  $u_r$  при снижении  $\tilde{\lambda}$  от 5.0 до 1.3 убывают, однако для  $\tilde{\lambda} = 1.1$  вновь наблюдается их рост. При уменьшении параметра относительной длины волны  $\tilde{\lambda}$  в радиальных распределениях  $u_r$  появляется узловая линия, радиус которой увеличивается, а зона возникновения максимальных значений  $u_r$  при  $r \approx 0.3$  становится более выраженной. В формах радиальных распределений  $u_z$  напротив, с уменьшением  $\tilde{\lambda}$  одна из имеющихся при  $\tilde{\lambda} = 1.1$  узловых линий исчезает, и радиус центра зоны возникновения максимальных осевых перемещений уменьшается; радиус узловой линии распределения изменяется мало, с постепенным монотонным возрастанием и стабилизацией в диапазоне  $0.5 < r < 0.6$ .

Для волновода с мембранированной поверхностью все формы радиальных распределений  $u_r$  имеют узловую линию, радиус которой уменьшается с уменьшением  $\tilde{\lambda}$ , и при этом максимум  $u_r$  выражено локализуется у граничной поверхности. В формах радиальных распределений для  $u_z$  при  $\tilde{\lambda} = 5.0$  имеются две узловые линии, а для всех остальных рассматриваемых меньших значений  $\tilde{\lambda}$  число этих линий уменьшается до одной, и ее положение  $r \approx 0.9$  стабилизируется; максимум  $u_z$  при  $\tilde{\lambda} = 5.0$  достигается в центре сечения, а затем смещается в зону  $r \approx 0.5$ .

Сопоставление распределений на Рисунках 7.7 – 7.10 и 7.11 – 7.14 показывает, что учет в модели лишь одного из факторов нелинейности – геометрической, приводит к существенным качественным расхождениям в формах радиальных распределений и относительных количественных уровнях характеристик  $u_r$ ,  $u_z$  ангармонических возмущений. Если для относительно длинных волн с  $\tilde{\lambda} = 5.0$  в сопоставляемых формах можно найти элементы подобия, со снижением уровня максимальных значений на 20 – 25% для модели учета только геометрической нелинейности, то с уменьшением  $\tilde{\lambda}$  возникают качественные различия в формах  $u_r$ , степень подобия в формах  $u_z$  снижается, а оценки максимумов  $u_z$  при учете только фактора геометрической нелинейности снижаются примерно в 1.5 раза. При этом формы  $u_r$  полностью утрачивают подобие, а количественные оценки максимумов  $u_r$  являются заниженными; при  $\tilde{\lambda} = 1.8$  это занижение примерно в 10 раз, а меньших рассматриваемых значений  $\tilde{\lambda}$  сопоставления обнаруживают двукратное занижение.

### **Выводы к разделу 7**

В разделе решена актуальная научная задача разработки теоретической численно-аналитической методики исследования нелинейных ангармонических эффектов при распространении осесимметричных нормальных упругих волн крутильного типа в протяженных трансверсально-изотропных цилиндрических телах со свободной, жестко закрепленной либо имеющей абсолютно гибкое нерастяжимое мембранное покрытие боковой поверхностью, а также получения с применением разработанной методики ряда данных о кинематических свойствах нелинейных вторых гармоник для уединенных монохроматических нормальных упругих волн крутильного типа в цилиндрах из реального материала рассматриваемого типа.

В рамках реализованных исследований:

1. В рамках геометрически- и физически-нелинейной модели волновых

процессов, базирующейся на теории конечных деформаций и представлении упругого потенциала для трансверсально-изотропной упругой среды с квадратичными и кубическими членами по деформациям, дана формулировка краевых задач определения нелинейных ангармонических возмущений для осесимметричных монохроматических нормальных крутильных волн, распространяющихся вдоль протяженных трансверсально-изотропных цилиндров кругового сечения.

2. Разработаны алгоритмы получения аналитических решений неоднородных краевых задач определения вторых гармоник монохроматических нормальных волн кручения в рассматриваемых классах анизотропных цилиндрических волноводов с использованием средств компьютерной алгебры.

3. Разработаны программные приложения для реализации алгоритмов аналитических преобразований и численных исследований в рамках построенных методик.

4. Построены численно-аналитические решения пространственных краевых задач определения нелинейных ангармонических возмущений для случаев распространения осесимметричных монохроматических нормальных волн крутильного типа в протяженных трансверсально-изотропных круговых цилиндрах со свободной, жестко закрепленной либо имеющей абсолютно гибкое нерастяжимое мембранное покрытие боковой поверхностью

5. Построены численно-аналитические решения пространственных краевых задач определения нелинейных ангармонических возмущений для случаев распространения осесимметричных монохроматических нормальных волн крутильного типа в протяженных трансверсально-изотропных круговых цилиндрах с рассматриваемыми граничными условиями в рамках частной версии используемой модели динамического деформирования, учитывающей только фактор геометрически нелинейности.

6. Исследован ряд амплитудно-частотных зависимостей для кинематических характеристик нелинейных ангармонических возмущений в нормальных волнах кручения из низших мод нормальных волн в волноводах с



закрепленными и мембранированными граничными поверхностями, включая отдельные закономерности трансформации форм вторых гармоник в трансверсально-изотропных волноводах из гадолиния; проанализированы и описаны эффекты влияния на указанные характеристики вида граничных условий, а также варианта используемой модели учета факторов нелинейного деформирования.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [82-86, 154, 159, 160, 166, 187, 321].

## РАЗДЕЛ 8

**МЕТОДОЛОГИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО  
ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ НИЗКОСИММЕТРИЧНЫХ  
АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ВОЛНОВОЙ  
МЕХАНИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ**

**8.1. Сведение уравнений волнового деформирования к системе дифференциальных уравнений специального вида**

Рассматривается волновод, занимающий в нормированной безразмерной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  область  $V_5$  (1.7) с граничной поверхностью  $G_5$  (1.12), имеющий в поперечном сечении конечную односвязную выпуклую область  $\bar{U} \subset \mathbb{R}^2$  с гладкой по Гельдеру границей  $\gamma$  (Рисунок 1.5). Полагается, что, область  $\bar{U}$  содержит точку начала координат. Математическая модель включает уравнения (1.13), (1.17), (1.19), условия на граничной поверхности волновода (1.33) либо (1.34), а также представления для безразмерных компонент вектора упругих перемещений (1.39).

В результате последовательной подстановки соотношений (1.19) в (1.17) с последующей подстановкой в уравнения движения (1.13) и граничные условия (1.33) либо (1.34) с учетом представлений (1.39), (1.41), (1.43) получается граничная задача относительно амплитудных составляющих безразмерного вектора перемещений  $\tilde{U}(x_1, x_2)$ , включающая систему трех дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа

$$\mathbf{D} \cdot \tilde{U}(x_1, x_2) = \hat{\mathbf{O}} \quad ((x_1, x_2) \in \bar{\tilde{U}}) \quad (8.1)$$

и условие на границе

$$\mathbf{M} \cdot \tilde{U}(x_1, x_2) \Big|_{(x_1, x_2) \in \gamma} = \hat{\mathbf{O}}. \quad (8.2)$$

В уравнении (8.1)  $\bar{\tilde{U}}$  – некоторая область такая, что  $\bar{\tilde{U}} \subset \tilde{U}$  ( $\bar{\tilde{U}} = \tilde{U} \cup \gamma$ );  $\mathbf{D}$  – матричный дифференциальный оператор с элементами

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D}]_{1,1} &= \tilde{c}_{11}\partial_{x_1}^2 + \tilde{c}_{66}\partial_{x_2}^2 + \Omega^2 - \tilde{c}_{55}\tilde{k}^2, & [\mathbf{D}]_{2,2} &= \tilde{c}_{66}\partial_{x_1}^2 + \tilde{c}_{22}\partial_{x_2}^2 + \Omega^2 - \tilde{c}_{44}\tilde{k}^2, \\
[\mathbf{D}]_{3,3} &= \tilde{c}_{55}\partial_{x_1}^2 + \tilde{c}_{44}\partial_{x_2}^2 + \Omega^2 - \tilde{c}_{33}\tilde{k}^2, & [\mathbf{D}]_{2,1} &= [\mathbf{D}]_{1,2} = (\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})\partial_{x_1x_2}^2, \\
[\mathbf{D}]_{3,1} &= [\mathbf{D}]_{1,3} = i\tilde{k}(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55})\partial_{x_1}, & [\mathbf{D}]_{3,2} &= [\mathbf{D}]_{2,3} = i\tilde{k}(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44})\partial_{x_2}.
\end{aligned}$$

В уравнении (8.2)  $\mathbf{M} = \mathbf{I}$ , если имеют место условия жесткого закрепления граничной поверхности, либо

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 \partial_{x_1} + \mathbf{M}_2 \partial_{x_2} + \mathbf{M}_3, \\
\mathbf{M}_1 &= \begin{bmatrix} \alpha\tilde{c}_{11} & \beta\tilde{c}_{66} & 0 \\ \beta\tilde{c}_{12} & \alpha\tilde{c}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\tilde{c}_{55} \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} \beta\tilde{c}_{66} & \alpha\tilde{c}_{12} & 0 \\ \alpha\tilde{c}_{66} & \beta\tilde{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta\tilde{c}_{44} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{M}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & i\tilde{k}\alpha\tilde{c}_{13} \\ 0 & 0 & i\tilde{k}\beta\tilde{c}_{23} \\ i\tilde{k}\alpha\tilde{c}_{55} & i\tilde{k}\beta\tilde{c}_{44} & 0 \end{bmatrix}, & & (8.3)
\end{aligned}$$

если граничная поверхность является свободной. Здесь  $\alpha = \cos(n, 1)$ ,  $\beta = \cos(n, 2)$  ( $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ) – косинусы направления нормали к площадке на границе  $\gamma$  области  $\bar{\Omega}$  в точке  $(x_1, x_2) \in \gamma$ .

В уравнении (8.1) вводится замена неизвестной векторной функции

$$\tilde{\mathbf{U}}(x, y) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{V}(x_1, x_2), \quad (8.4)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \mathbf{N}_1 \partial_{x_1} + \mathbf{N}_2 \partial_{x_2} + \mathbf{N}_3, \\
\mathbf{N}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{N}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{N}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\tilde{k} \end{bmatrix}. & (8.5)
\end{aligned}$$

В результате получается уравнение

$$(\mathbf{G}_1 \partial_{x_1}^2 + \mathbf{G}_2 \partial_{x_2}^2 + \mathbf{G}_3) \cdot \mathbf{V}(x_1, x_2) = \hat{\mathbf{O}}. \quad (8.6)$$

Здесь

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66} & \tilde{c}_{66} & 0 \\ \tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55} & 0 & \tilde{c}_{55} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{66} & \tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{22} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44} & \tilde{c}_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} \Omega^2 - \tilde{c}_{55}\tilde{k}^2 & 0 & -\tilde{k}^2(\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}) \\ 0 & \Omega^2 - \tilde{c}_{44}\tilde{k}^2 & -\tilde{k}^2(\tilde{c}_{23} + \tilde{c}_{44}) \\ 0 & 0 & \Omega^2 - \tilde{c}_{33}\tilde{k}^2 \end{bmatrix}.$$

Ставится задача определить две неособенные квадратные матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{P}$  такие, что

$$\mathbf{R}\mathbf{G}_1\mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{R}\mathbf{G}_2\mathbf{P} = \mathbf{J}, \quad (8.7)$$

где  $\mathbf{J}$  – диагональная матрица. Из первого уравнения (8.7) определяется

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}_1^{-1}$$

и далее из второго уравнения (8.7) для определения  $\mathbf{P}$  получается уравнение

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P} = \mathbf{J}. \quad (8.8)$$

Здесь  $\mathbf{H} = \mathbf{G}_1^{-1}\mathbf{G}_2$ . Уравнение (8.8) определяет классическую задачу нахождения для заданной матрицы  $\mathbf{H}$  ее нормальной жордановой формы  $\mathbf{J}$  и преобразующей неособенной матрицы  $\mathbf{P}$ . Характеристические числа матрицы  $\mathbf{H}$  равны

$$\lambda_1 = \tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}, \quad \lambda_{2,3} = \left( a \pm \sqrt{bd} \right) / (2\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{66}),$$

$$a = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}), \quad b = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}^2, \quad d = \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - (\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66})^2. \quad (8.9)$$

Поскольку для любых материалов выполняется соотношение

$$\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}^2 > 0$$

следовательно, условие

$$\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - (\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66})^2 \neq 0 \quad (8.10)$$

является необходимым, чтобы нормальная форма  $\mathbf{J}$  была диагональной матрицей. Данное требование легко проверяется. При невыполнении условия (8.10) отличные от нуля элементы нормальной формы  $\mathbf{J}$  с точностью до перестановки диагональных компонент равны

$$[\mathbf{J}]_{1,1} = \tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55}, \quad [\mathbf{J}]_{2,2} = [\mathbf{J}]_{3,3} = \tilde{c}_{22}/(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}), \quad [\mathbf{J}]_{2,3} = 1.$$

Условие (8.10), в частности, не выполняется для трансверсально изотропных (ось анизотропии совпадает с осью  $Ox_3$ ) и изотропных материалов. В качестве достаточного условия, обеспечивающего диагональный вид матрицы  $\mathbf{J}$ , может использоваться следующее [49]

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \lambda_1 \neq \lambda_3. \quad (8.11)$$

Поскольку диагональными элементами матрицы  $\mathbf{J}$  являются представленные соотношениями (8.9) характеристические числа  $\lambda_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ), получается, что при выполнении (8.11) относительно указанных элементов справедливо соотношение

$$[\mathbf{J}]_{j,j} \in (0, \infty) \quad \text{если} \quad [\mathbf{J}]_{j,j} \in \mathbb{R} \quad (j = \overline{1,3}). \quad (8.12)$$

Поскольку при выполнении (8.11) соотношение (8.10) также выполняется, значит, справедливость (8.12) требует обоснования в двух альтернативных случаях. Если  $d > 0$  то и  $a > 0$ . Тогда  $[\mathbf{J}]_{j,j} > 0$  ( $j = \overline{1,3}$ ), так как  $a^2 - bd = 4\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22}\tilde{c}_{66}^2 > 0$ . Если же  $d < 0$ , то  $[\mathbf{J}]_{1,1} > 0$ ,  $\text{Im}([\mathbf{J}]_{j,j}) \neq 0$  ( $j = \overline{2,3}$ ). Условия (8.11) могут быть переписаны в таком виде

$$d < 0 \quad \text{либо} \quad d > 0, \quad \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}) \neq \tilde{c}_{66}(\tilde{c}_{11}\tilde{c}_{44}/\tilde{c}_{55} + \tilde{c}_{22}\tilde{c}_{55}/\tilde{c}_{44}). \quad (8.13)$$

Здесь следует отметить, что если условия (8.13) дополнить требованиями

$$\tilde{c}_{44} \neq \tilde{c}_{55},$$

$$\text{и при } d > 0 \quad \tilde{c}_{11}\tilde{c}_{22} - \tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{12} + 2\tilde{c}_{66}) \neq \tilde{c}_{66}(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{22}), \quad (8.14)$$

то элементы диагональной матрицы  $\mathbf{J}$  будут удовлетворять более сильным, чем (8.12) ограничениям следующего вида

$$[\mathbf{J}]_{j,j} \in (0,1) \cup (1, \infty) \quad \text{если} \quad [\mathbf{J}]_{j,j} \in \mathbb{R} \quad (j = \overline{1,3}). \quad (8.15)$$

Учитывая существенный фактор погрешности при определении модулей упругости реальных ортотропных материалов, можно с достаточной мерой уверенности утверждать, что физико-механические характеристики основной массы ортотропных материалов укладываются в ограничения (8.13), (8.14).

Вводится замена неизвестной векторной функции

$$\mathbf{V}(x_1, x_2) = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{V}}(x_1, x_2). \quad (8.16)$$

Тогда с учетом соотношения (8.4) граничная задача (8.1), (8.2) окончательно преобразуется к такому виду

$$\mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(x_1, x_2) = \hat{\mathbf{O}}, \quad (8.17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(x_1, x_2) \Big|_{\gamma} = \hat{\mathbf{O}}. \quad (8.18)$$

Здесь

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \partial_{x_1}^2 + \mathbf{J} \partial_{x_2}^2 + \mathbf{Q}, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \mathbf{N} \mathbf{P}, \quad (8.19)$$

а исходная неизвестная векторная функция с учетом (8.4), (8.16) определяется так:

$$\tilde{\mathbf{U}}(x, y) = \tilde{\mathbf{N}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(x_1, x_2). \quad (8.20)$$

Входящие в соотношения (8.19), (8.20) матрицы и матричные дифференциальные операторы имеют следующие представления

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{G}_3 \mathbf{P}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \mathbf{P}. \quad (8.21)$$

## 8.2. Постановка краевых задач для систем разностных уравнений

Рассматривается граничная задача, включающая уравнение (8.17) относительно области  $\tilde{\mathcal{U}}$  и граничное условие

$$\tilde{\mathbf{M}} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(x_1, x_2) \Big|_{\gamma} = \hat{\mathbf{F}}(x_1, x_2) \Big|_{\gamma}. \quad (8.22)$$

Полагается, что квадратные матрицы, входящие в определение дифференциальных операторов  $\mathbf{L}$  и  $\tilde{\mathbf{M}}$  (8.19) имеют размерность  $m \times m$ , элементы диагональной матрицы  $\mathbf{J}$  удовлетворяют аналогичным (8.15) ограничениям

$$[\mathbf{J}]_{j,j} \in (0,1) \cup (1,\infty) \text{ если } [\mathbf{J}]_{j,j} \in \mathbb{R} \quad (j = \overline{1, m}), \quad (8.23)$$

дифференциальный оператор  $\tilde{\mathbf{M}}$  и векторная функция  $\hat{\mathbf{F}}$  из граничного условия (8.22) обеспечивает существование и единственность дважды непрерывно дифференцируемого в  $\tilde{\mathcal{U}}$  решения граничной задачи (8.17), (8.22), непрерывного в  $\overline{\tilde{\mathcal{U}}}$  и удовлетворяющего условию Гёльдера на границе  $\gamma$ . Известно, что указанное

решение граничной задачи (8.17), (8.22), во-первых, является регулярным (аналитической функцией своих аргументов) в области  $\bar{\mathfrak{U}}$  [36, 73, 194], во-вторых, его можно равномерно аппроксимировать в  $\bar{\mathfrak{U}}$  линейными комбинациями функций любой полной в  $\bar{\mathfrak{U}}$  системы частных решений уравнения (8.17) [36, 48, 194]. Далее множество функций, регулярных в некоторой области  $\Theta$ , будет обозначаться  $Y_{\Theta}$ . Условие регулярности всех компонент матричной (векторной) функции в некоторой области  $\Theta$  естественным образом обобщается на регулярность матричной (векторной) функции в указанной области, а множество таких матричных (векторных) функций будет иметь обозначение  $Y_{\Theta}$ .

Вводятся на декартовой плоскости  $Ox_1x_2$  комплексные переменные

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2. \quad (8.24)$$

Рассматривая эти переменные в дальнейшем как независимые в комплексных пространствах  $\mathbb{C}$ , получается отображение пространства  $\mathbb{R}^2$  в 2-мерное комплексное пространство  $\mathbb{C}^2$

$$x_1 \rightarrow (\bar{z} + z) / 2, \quad x_2 \rightarrow i(\bar{z} - z) / 2. \quad (8.25)$$

Точки пространства  $\mathbb{C}^2$  далее обозначаются  $(z, \bar{z})$ . Для компактификации пространства  $\mathbb{C}^2$  следуя [194] вводится в  $\bar{\mathbb{C}}^2$ , где  $\bar{\mathbb{C}}$  – пополненная бесконечной точкой замкнутая комплексная плоскость, топологию с  $\rho$ -метрикой

$$\rho((z_1, \bar{z}_1), (z_2, \bar{z}_2)) = \max \{ |z_1 - z_2|, |\bar{z}_1 - \bar{z}_2| \}. \quad (8.26)$$

Введённая топология определяет бикруговые области  $\mathfrak{T} \subset \bar{\mathbb{C}}^2$  изменения независимых переменных  $(z, \bar{z})$ . Для замыкания области  $\mathfrak{T}$  далее используется обозначение  $\bar{\mathfrak{T}}$ . Ассоциировано с произвольной точкой  $z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$  определяется ее  $\varepsilon$ -окрестность  $\Sigma_{z_0}^{\varepsilon} = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ , а в пространстве  $\bar{\mathbb{C}}^2$  для произвольной точки  $(z_0, \bar{z}_0)$  на основании (8.26) определяются бикруговая  $\varepsilon$ -окрестность  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\varepsilon} = \{(z, \bar{z}) \mid \rho((z, \bar{z}), (z_0, \bar{z}_0)) < \varepsilon\}$ . Исходная область  $\bar{\mathfrak{U}}$  граничной задачи (8.17), (8.22) порождает области  $\bar{\mathfrak{U}}_1$  и  $\bar{\mathfrak{U}}_2$  соответственно с границами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$

изменения независимых комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$ . Известно [36, 48], что (8.25) определяет аналитическое продолжение всякой регулярной функции  $v(x_1, x_2) \in Y_{\tilde{\mathcal{D}}}$  в функцию  $v(z, \bar{z}) \in Y_{\tilde{\mathcal{D}}_1 \times \tilde{\mathcal{D}}_2}$  и порождает в  $\mathbb{C}^2$  следующее определение линейных дифференциальных операторов

$$\partial x_1 \rightarrow \partial/\partial z + \partial/\partial \bar{z} = \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \quad \partial x_2 \rightarrow i(\partial/\partial z - \partial/\partial \bar{z}) = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}). \quad (8.27)$$

Тогда оператор  $\mathbf{L}$  в пространстве  $\mathbb{C}^2$  независимых комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$  принимает вид

$$\mathbf{L} \rightarrow -4(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-2}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{R}), \quad (8.28)$$

где

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(\partial_z^2 + \partial_{\bar{z}}^2) - (\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^2)\partial_{z\bar{z}}^2, \quad \mathbf{R} = 1/4(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^2 \mathbf{Q}, \quad \mathbf{\Lambda} = (\sqrt{\mathbf{J}} + \mathbf{I})^{-1}(\sqrt{\mathbf{J}} - \mathbf{I}).$$

Поскольку ограничение (8.23) обеспечивает оценку

$$0 < \lambda_{\min} < \lambda_{\max} < 1, \quad \lambda_{\min} = \min_{j=1, m} \left( \left| [\mathbf{\Lambda}]_{j, j} \right| \right), \quad \lambda_{\max} = \max_{j=1, m} \left( \left| [\mathbf{\Lambda}]_{j, j} \right| \right), \quad (8.29)$$

следовательно, уравнение (8.17) в  $\mathbb{C}^2$  принимает эквивалентный вид

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}), \quad (8.30)$$

Упорядоченная система матричных функций  $\{\mathbf{F}_p(z, \bar{z})\}_{p=0}^{\infty}$ , где  $\mathbf{F}_p(z, \bar{z}) \in Y_{\mathcal{T}}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ) частные решения уравнения (8.30) далее будет называться базисной для этого уравнения относительно бикруговой области  $\mathcal{T}$ , если всякое векторное решение этого уравнения  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \in Y_{\mathcal{T}}$  может быть представлено равномерно и абсолютно сходящимися в любом замыкании из  $\mathcal{T}$  рядом

$$\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{F}_p(z, \bar{z}) \mathbf{K}_p.$$

Здесь  $\{\mathbf{K}_p\}_{p=0}^{\infty}$  – некоторые векторные коэффициенты.

Ставятся задачи построить:



(а) базисную систему  $\left\{ \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \in Y_{\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2} \right\}_{p=0}^{\infty}$  матричных частных решений уравнения

$$\Lambda \cdot \Phi_{p0}(z, \bar{z}) = \mathbf{O} \quad (8.31)$$

относительно области  $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$ ;

(б) систему наборов  $\left\{ \left\{ \Phi_{pn}(z, \bar{z}) \in Y_{\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2} \right\}_{n=1}^{\infty} \right\}_{p=0}^{\infty}$  частных решений

последовательности неоднородных уравнений

$$\Lambda \cdot \Phi_{pn}(z, \bar{z}) = \mathbf{R} \Phi_{p(n-1)}(z, \bar{z}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (8.32)$$

такую, что:

$$- \left( \Phi_p(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{pn}(z, \bar{z}) \right) \in Y_{\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2} \quad (p = \overline{0, \infty});$$

- система  $\left\{ \Phi_p(z, \bar{z}) \right\}_{p=0}^{\infty}$  является базисной для уравнения (8.30) относительно области  $\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2$ .

На множестве пар целых чисел  $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$  определяется в  $\mathbb{C}^2$  семейство функций

$$\varphi_{nk}(z, \bar{z}) = \begin{cases} 0 & \text{когда } n \leq -1 \text{ или } k \leq -1, \\ \frac{z^n \bar{z}^k}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)} & \text{когда } n \geq 0 \text{ и } k \geq 0, \end{cases} \quad (8.33)$$

где  $\Gamma(z)$  – гамма-функция. При любых целых  $n, k$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_{nk}(az, \bar{z}) &= a^n \varphi_{nk}(z, \bar{z}), & \varphi_{nk}(z, a\bar{z}) &= a^k \varphi_{nk}(z, \bar{z}), \\ \partial_z \varphi_{nk}(z, \bar{z}) &= \varphi_{(n-1)k}(z, \bar{z}), & \partial_{\bar{z}} \varphi_{nk}(z, \bar{z}) &= \varphi_{n(k-1)}(z, \bar{z}), \\ \varphi_{nk}(z, \bar{z}) &= \varphi_{kn}(\bar{z}, z), & \partial_{z\bar{z}}^2 \varphi_{n0}(z, \bar{z}) &= \partial_{z\bar{z}}^2 \varphi_{0k}(z, \bar{z}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Для произвольной ограниченной бикруговой области  $\Upsilon$  изменения комплексных переменных  $(z, \bar{z})$  обобщается в классе  $Y_{\Upsilon}$  понятие аналитического продолжения. Отождествляя всякую  $\tilde{V}(z, \bar{z}) \in Y_{\Upsilon}$  с её равномерно и абсолютно

сходящимся разложением в кратный степенной ряд в любом замыкании из некоторой бикруговой  $\varepsilon$ -окрестности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) произвольной точки  $(z_0, \bar{z}_0) \in \mathcal{T}$  [48], с учётом (8.33) получается представление

$$\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{V}}_p(z, \bar{z}), \quad (8.35)$$

где  $\tilde{\mathbf{V}}_p(z, \bar{z})$  – элементы кольца однородных полиномов  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  переменных  $z, \bar{z}$  степени  $p$  ( $p \geq 0$ ) с центром в точке  $(z_0, \bar{z}_0)$  ( $\tilde{\mathbf{V}}_p(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$ ) такого вида

$$\tilde{\mathbf{V}}_p(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^p \varphi_{(p-k)k} (z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \mathbf{C}_{pk}. \quad (8.36)$$

Здесь  $[\mathbf{C}_{pk}]_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) – соответствующие векторные коэффициенты аналогичных разложений функций  $[\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})]_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) в указанной бикруговой  $\varepsilon$ -окрестности.

Определяется следующее отображение пространства  $\mathbb{C}^2$  в пространство  $\mathbb{C}^{2m}$

$$z \rightarrow \mathbf{I}z \rightarrow \mathbf{Z}, \quad \bar{z} \rightarrow \mathbf{I}\bar{z} \rightarrow \bar{\mathbf{Z}}. \quad (8.37)$$

Вводится также обозначение  $\mathfrak{L}$  для кольца диагональных матриц размерности  $m$ . Точки пространства  $\mathbb{C}^{2m}$  будут обозначаться  $(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$ , а  $\mathbf{Z} \in \mathfrak{L}$  и  $\bar{\mathbf{Z}} \in \mathfrak{L}$  будут рассматриваться как независимые диагональные матричные комплексные переменные. Для компактификации пространства  $\mathbb{C}^{2m}$  следуя [194] вводится в  $\overline{\mathbb{C}}^{2m}$  топология с  $\rho$ -метрикой

$$\rho((\mathbf{Z}', \bar{\mathbf{Z}}'), (\mathbf{Z}'', \bar{\mathbf{Z}}'')) = \max \{ \|\mathbf{Z}' - \mathbf{Z}''\|, \|\bar{\mathbf{Z}}' - \bar{\mathbf{Z}}''\| \}. \quad (8.38)$$

Здесь используются следующие определения согласованных норм [94]: для матриц

–  $\|\mathbf{A}\| \stackrel{def}{=} \max_{k=1, m} \left( \sum_{j=1}^m |[\mathbf{A}]_{k,j}| \right)$ ; для векторов –  $\|\mathbf{A}\| \stackrel{def}{=} \max_{k=1, m} |[\mathbf{A}]_k|$ . Введённая топология

определяет бицилиндрические области  $\supset \subset \overline{\mathbb{C}}^{2m}$  изменения переменных  $(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$  как упорядоченные совокупности бикруговых областей  $[\supset]_j = \supset_j \subset \overline{\mathbb{C}}^2$  изменения переменных  $([\mathbf{Z}]_{j,j}, [\bar{\mathbf{Z}}]_{j,j})$  ( $j = \overline{1, m}$ ). В случае  $\supset_j = \mathfrak{U}_1 \times \mathfrak{U}_2$  ( $j = \overline{1, m}$ ) далее используется обозначение  $\supset = \Xi(\mathfrak{U}_1) \times \Xi(\mathfrak{U}_2)$ . Для замыкания бицилиндрической области  $\supset$  будет использоваться обозначение  $\bar{\supset}$ . При этом (8.37) отображает бикруговую  $\varepsilon$ -окрестность  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\varepsilon$  некоторой точки  $(z_0, \bar{z}_0) \in \mathbb{C}^2$  в бицилиндрическую  $\varepsilon$ -окрестность  $\Sigma_{(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0)}^\varepsilon = \{(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) \mid \rho((\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), (\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0)) < \varepsilon\}$  точки  $(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0) \in \mathbb{C}^{2m}$  ( $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{I}z_0, \bar{\mathbf{Z}}_0 = \mathbf{I}\bar{z}_0$ ). Таким образом, (8.37) определяет отображение всякой функции  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\tilde{\mathfrak{U}}_1 \times \tilde{\mathfrak{U}}_2}$ , представленной в виде (8.35), (8.36) в некоторой бикруговой  $\varepsilon$ -окрестности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) произвольной точки  $(z_0, \bar{z}_0) \in \tilde{\mathfrak{U}}_1 \times \tilde{\mathfrak{U}}_2$ , в функцию  $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$ , представленной в виде равномерно и абсолютно сходящегося разложения в кратный степенной ряд матричных диагональных комплексных переменных  $\mathbf{Z}$  и  $\bar{\mathbf{Z}}$

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{V}}_p(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}), \quad (8.39)$$

в любом замыкании из бицилиндрической  $\varepsilon$ -окрестности  $\Sigma_{(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0)}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) точки  $(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0) \in \Xi(\tilde{\mathfrak{U}}_1) \times \Xi(\tilde{\mathfrak{U}}_2)$ . Здесь  $\tilde{\mathbf{V}}_p(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) \in \mathfrak{N}_{(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0)}^p$  — элементы кольца обобщенных однородных полиномов переменных  $\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}$  степени  $p$  ( $p \geq 0$ ) с центром в точке  $(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0)$

$$\tilde{\mathbf{V}}_p(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) = \sum_{k=0}^p \varphi_{(p-k)k}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}} - \bar{\mathbf{Z}}_0) \mathbf{C}_{pk}. \quad (8.40)$$

Для функций переменных  $\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}$  естественным образом обобщается свойство регулярности. Функция  $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}})$  далее будет называться регулярной в

некоторой бицилиндрической области  $\supset \subset \overline{\mathbb{C}}^{2m}$  ( $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) \in \mathbf{Y}_{\supset}$ ), если  $\forall (\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0) \in \supset \exists \Sigma_{(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0)}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) и для разложения вида (8.39), (8.40) в этой окрестности справедливо, что  $\forall \delta > 0 \exists p_* < \infty : \forall (\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) \in \Sigma_{(\mathbf{Z}_0, \bar{\mathbf{Z}}_0)}^\varepsilon$  выполняется

$$\left\| \sum_{p=p_*}^{\infty} \tilde{\mathbf{V}}_p(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) \right\| < \delta.$$

Для функций, представляемых в области своей регулярности разложениями вида (8.39), (8.40) определяется также отображение пространства  $\mathbb{C}^{2m}$  в пространство  $\mathbb{C}^2$  следующим образом

$$\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{I}z, \quad \bar{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbf{I}\bar{z}. \quad (8.41)$$

Очевидно, что (8.41) отображает всякую бицилиндрическую область  $\Xi(\tilde{\mathcal{O}}_1) \times \Xi(\tilde{\mathcal{O}}_2)$  в соответствующую бикруговую область  $\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2$ . Тогда из теоремы единственности разложения функций  $[\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})]_j \in \mathbf{Y}_{\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2}$  ( $j = \overline{1, m}$ ) в кратный степенной ряд с заданным центром из  $\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2$  [194] с учётом компактности пространств  $\overline{\mathbb{C}}^2$  и  $\overline{\mathbb{C}}^{2m}$  следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. Для бикруговой области  $\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2$  и всякой представленной соотношениями (8.35), (8.36) в некоторой бикруговой  $\varepsilon$ -окрестности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) произвольной точки  $(z_0, \bar{z}_0) \in \tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2$  функции  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2}$  отображение (8.37) с учетом (8.41) задает в виде представлений (8.39), (8.40) аналитическое продолжение указанной функции  $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{Z}}) \in \mathbf{Y}_{\Xi(\tilde{\mathcal{O}}_1) \times \Xi(\tilde{\mathcal{O}}_2)}$ .

Вводятся в рассмотрение новые обобщённые диагональные матричные комплексные переменные  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_2$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z} + \Lambda \bar{\mathbf{Z}}, \quad \mathbf{Z}_2 = \Lambda \mathbf{Z} + \bar{\mathbf{Z}}. \quad (8.42)$$

Из оценки (8.29) следует, что каждое из равенств  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{O}$  выполняется

тогда и только тогда, когда  $\mathbf{Z} = \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{O}$ . Соотношения (8.42) определяют отображение пространства  $\mathbb{C}^{2m}$  диагональных матричных комплексных переменных  $\mathbf{Z}$  и  $\bar{\mathbf{Z}}$  в пространство  $\mathbb{C}^{2m}$  обобщенных диагональных матричных комплексных переменных  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_2$

$$\mathbf{Z} \rightarrow (\mathbf{I} - \Lambda^2)^{-1}(\mathbf{Z}_1 - \Lambda \mathbf{Z}_2), \quad \bar{\mathbf{Z}} \rightarrow (\mathbf{I} - \Lambda^2)^{-1}(\mathbf{Z}_2 - \Lambda \mathbf{Z}_1). \quad (8.43)$$

При этом (8.43) отображает бицилиндрические области  $\Xi(\tilde{\mathcal{O}}_1) \times \Xi(\tilde{\mathcal{O}}_2)$  и  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\varepsilon$  из  $\mathbb{C}^{2m}$  в бицилиндрические области из  $\mathbb{C}^{2m}$  соответственно  $\Xi_1(\tilde{\mathcal{O}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{O}}_2)$  и полиномиально выпуклую область, которая далее будет обозначаться  $\Sigma_{(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})}^\varepsilon$ .

Таким образом, суперпозиция отображений (8.37) и (8.43) определяет отображение пространства  $\mathbb{C}^2$  в пространство  $\mathbb{C}^{2m}$

$$z \rightarrow (\mathbf{I} - \Lambda^2)^{-1}(\mathbf{Z}_1 - \Lambda \mathbf{Z}_2), \quad \bar{z} \rightarrow (\mathbf{I} - \Lambda^2)^{-1}(\mathbf{Z}_2 - \Lambda \mathbf{Z}_1). \quad (8.44)$$

Тогда с учетом выше изложенного справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Для произвольной бикруговой области  $\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2$  и всякой представленной соотношениями (8.35), (8.36) в некоторой бикруговой  $\varepsilon$ -окрестности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) произвольной точки  $(z_0, \bar{z}_0) \in \tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2$  функции  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2}$  отображение (8.44) в виде равномерно и абсолютно сходящихся в любых замыканиях из  $\Sigma_{(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})}^\varepsilon \subset \Xi_1(\tilde{\mathcal{O}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{O}}_2)$  разложений

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{V}}_p(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2),$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_p(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \sum_{k=0}^p \varphi_{(p-k)k}(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)}) \mathbf{C}'_{pk}, \quad (8.45)$$

определяет аналитическое продолжение указанной функции  $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \in \mathbf{Y}_{\Xi_1(\tilde{\mathcal{O}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{O}}_2)}$ .

Указанное аналитическое продолжение функций далее будет обозначаться

так:  $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \overline{\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})}$ . Отображение (8.44) порождает в пространстве  $\mathbb{C}^{2m}$  независимых обобщённых диагональных матричных комплексных переменных  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_2$  следующее определение линейных над кольцом  $\mathfrak{N}_{(\mathbf{Z}_1^{(0)}, \bar{\mathbf{Z}}_2^{(0)})}^p$  ( $p \geq 0$ ) дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} \partial_z &\rightarrow \mathbf{I}\partial_{\mathbf{Z}_1} + \Lambda\partial_{\mathbf{Z}_2}, \quad \partial_{\bar{z}} \rightarrow \Lambda\partial_{\mathbf{Z}_1} + \mathbf{I}\partial_{\mathbf{Z}_2}, \\ \Lambda &\rightarrow \bar{\Lambda}, \quad \bar{\Lambda} = -(\mathbf{I} - \Lambda^2)^2 \partial_{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}^2. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Также с учетом (8.41), (8.42) определяется обратное отображение пространства  $\mathbb{C}^{2m}$  обобщенных диагональных матричных комплексных переменных  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_2$  в пространство  $\mathbb{C}^2$  комплексных переменных  $z$  и  $\bar{z}$  вида

$$\mathbf{Z}_1 \rightarrow \mathbf{I}z + \Lambda\bar{z}, \quad \mathbf{Z}_2 \rightarrow \Lambda z + \mathbf{I}\bar{z}. \quad (8.47)$$

Указанное отображение применительно к функциям  $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) \in \mathbf{Y}_{\Xi_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{U}}_2)}$ , представленных в некоторой бицилиндрической  $\varepsilon$ -окрестности  $\Sigma_{(\mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2^{(0)})}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) произвольной точки  $(\mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2^{(0)}) \in \Xi_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{U}}_2)$  разложениями вида (8.45), далее будет обозначаться так:  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) = \overline{\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2)}$ . С учетом введенных определений справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Для произвольной бикруговой области  $\tilde{\mathcal{U}}_1 \times \tilde{\mathcal{U}}_2$  и всякой представленной соотношениями (8.35), (8.36) в некоторой бикруговой  $\varepsilon$ -окрестности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) произвольной точки  $(z_0, \bar{z}_0) \in \tilde{\mathcal{U}}_1 \times \tilde{\mathcal{U}}_2$  функции  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\tilde{\mathcal{U}}_1 \times \tilde{\mathcal{U}}_2}$  справедливы соотношения

$$\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \equiv \overline{\overline{\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})}}, \quad \Lambda \cdot \tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) = \overline{\overline{\Lambda \cdot \tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})}}. \quad (8.48)$$

Для операторов  $\partial_{\mathbf{Z}_1}$  и  $\partial_{\mathbf{Z}_2}$  с учетом соотношений (8.33) справедливы аналогичные (8.34) свойства

$$\partial_{\mathbf{Z}_1} \varphi_{nk}(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)}) = \varphi_{(n-1)k}(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)}),$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{Z}_2} \varphi_{nk} \left( \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)} \right) &= \varphi_{n(k-1)} \left( \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)} \right), \\ \varphi_{nk} \left( \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)} \right) &= \varphi_{nk} \left( \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)}, \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)} \right), \\ \partial_{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}^2 \varphi_{n0} \left( \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)} \right) &= \partial_{\mathbf{Z}_1 \mathbf{Z}_2}^2 \varphi_{0k} \left( \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)} \right) \equiv \mathbf{O}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Тогда, возвращаясь к задаче (а), получается, что искомая базисная система  $\left\{ \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\tilde{\mathcal{U}}_1 \times \tilde{\mathcal{U}}_2} \right\}_{p=0}^{\infty}$  матричных частных решений уравнения (8.31) может быть определена на основе матричных решений уравнения

$$\bar{\Delta} \cdot \Psi(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{O}, \quad (8.50)$$

которые в общем виде записываются так:

$$\Psi(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}_1) + \mathbf{F}_2(\mathbf{Z}_2).$$

Здесь  $\mathbf{F}_j(\mathbf{Z}_j)$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) – произвольные в классе  $\mathbf{Y}_{\Xi_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{U}}_2)}$  матричные функции. Следовательно, распространяя теорему Рунге [36] на случай обобщенных матричных диагональных комплексных переменных  $\mathbf{Z}_1$  и  $\mathbf{Z}_2$ , в качестве полной системы частных решений уравнения (8.50) относительно области  $\Xi_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{U}}_2)$  может быть выбрана такая

$$\{\mathbf{I}\} \cup \left\{ \mathbf{Z}_1^n \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{ \mathbf{Z}_2^n \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Задаваясь целью построить базисную систему частных решений уравнения (8.50) относительно области  $\Xi_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) \times \Xi_2(\tilde{\mathcal{U}}_2)$ , выбираются некоторая точка  $(z_0, \bar{z}_0) \in \tilde{\mathcal{U}}_1 \times \tilde{\mathcal{U}}_2$  и  $\eta > 0$  такие, что

$$\bar{\mathcal{U}}_1 \times \bar{\mathcal{U}}_2 \subset \Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}, \quad \bar{\Xi}_1(\tilde{\mathcal{U}}_1) \times \bar{\Xi}_2(\tilde{\mathcal{U}}_2) \subset \Sigma_{(\mathbf{z}_1^{(0)}, \mathbf{z}_2^{(0)})}^{\eta},$$

$$\mathbf{Z}_1^{(0)} = \mathbf{I} z_0 + \Lambda \bar{z}_0, \quad \mathbf{Z}_2^{(0)} = \Lambda z_0 + \mathbf{I} \bar{z}_0.$$

Тогда для любых  $\mathbf{F}_j(\mathbf{Z}_j) \in \mathbf{Y}_{\Sigma_{(\mathbf{z}_1^{(0)}, \mathbf{z}_2^{(0)})}^{\eta}}$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) система функций

$$\{\mathbf{I}\} \cup \left\{ \left( \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{ \left( \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (8.51)$$

будет базисной относительно области  $\Sigma_{(\mathbf{z}_1^{(0)}, \mathbf{z}_2^{(0)})}^\eta$  ( $\eta > 0$ ) [36]. С учётом соотношений (8.33), (8.49), (8.51) базисная система частных решений уравнения (8.50) относительно области  $\Sigma_{(\mathbf{z}_1^{(0)}, \mathbf{z}_2^{(0)})}^\eta$  ( $\eta > 0$ ) может быть окончательно представлена так:

$$\Phi_{p0}(\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2) = \begin{cases} \varphi_{n0}(\mathbf{Z}_1 - (\mathbf{I} z_0 + \Lambda \bar{z}_0), \mathbf{I}), \text{ при } p = 2n \\ \varphi_{0n}(\mathbf{I}, \mathbf{Z}_2 - (\Lambda z_0 + \mathbf{I} \bar{z}_0)), \text{ при } p = 2n - 1 \end{cases} \quad (p = \overline{0, \infty}). \quad (8.52)$$

Тогда базисная система частных решений уравнения (8.31) относительно области  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  на основании утверждения 2 определяется следующим образом

$$\Phi_{p0}(z, \bar{z}) = \begin{cases} \overline{\varphi_{n0}(\mathbf{Z}_1 - (\mathbf{I} z_0 + \Lambda \bar{z}_0), \mathbf{I})}, \text{ при } p = 2n \\ \overline{\varphi_{0n}(\mathbf{I}, \mathbf{Z}_2 - (\Lambda z_0 + \mathbf{I} \bar{z}_0))}, \text{ при } p = 2n - 1 \end{cases} \quad (p = \overline{0, \infty}),$$

или в виде эквивалентного представления так:

$$\Phi_{p0}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{\lceil (p+1)/2 \rceil} \varphi_{\lceil (p+1)/2 \rceil - k}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \mathbf{C}_{p0k} \quad (p = \overline{0, \infty}). \quad (8.53)$$

Здесь  $[x]$  – целая часть числа  $x$ ;  $\mathbf{C}_{(2n)0k} = \Lambda^k$ ,  $\mathbf{C}_{(2n-1)0k} = \Lambda^{n-k}$  ( $n = \overline{0, \infty}$ ;  $k = \overline{0, n}$ ).

Решение задачи (б) также далее строится в области  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$ . Очевидно, что

линейный над кольцом  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ) оператор  $\Lambda$  для произвольных

$(z_0, \bar{z}_0) \in \mathbb{C}^2$  и  $p \geq 2$  задаёт отображение  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p \rightarrow \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p-2}$ . С учетом того, что

$\Phi_{p0}(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\lceil (p+1)/2 \rceil}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ) построение частных решений уравнения (8.32) на

каждом шаге итерационного процесса  $n = 1, 2, 3, \dots$  ограничивается кольцом

$\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\lceil (p+1)/2 \rceil + 2n}$  (ниже будет доказана корректность наложенного ограничения с

позиций разрешимости задачи (б)). Таким образом, для матричных функций

$\Phi_{pn}(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\lceil (p+1)/2 \rceil + 2n}$  с учетом (8.53) получается представление



$$\Phi_{pn}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{[(p+1)/2]+2n} \varphi_{([(p+1)/2]+2n-k)k}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \mathbf{C}_{pnk} \\ (p = \overline{0, \infty}; n = \overline{0, \infty}). \quad (8.54)$$

В представлении (8.54)  $\mathbf{C}_{pnk}$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) – подлежащие определению матричные ( $m \times m$ ) коэффициенты. В результате подстановки представлений (8.54) в уравнения (8.32) на каждом шаге итерационного процесса  $n = 1, 2, \dots$  получается функциональное уравнение

$$\sum_{k=0}^{p'-2} \varphi_{(p'-2-k)k}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \left( \Lambda \mathbf{C}_{pnk} - (\mathbf{I} + \Lambda^2) \mathbf{C}_{pn(k+1)} + \Lambda \mathbf{C}_{pn(k+2)} - \mathbf{R} \mathbf{C}_{p(n-1)k} \right) = \mathbf{O} \\ (p' = [(p+1)/2] + 2n). \quad (8.55)$$

Равенство нулю однородных полиномов (8.55) в области  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  ( $0 < \eta$ ) при каждом  $n = 1, 2, \dots$  порождает краевую задачу для системы разностных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами [11]

$$\Lambda \mathbf{C}_{pnk} - (\mathbf{I} + \Lambda^2) \mathbf{C}_{pn(k+1)} + \Lambda \mathbf{C}_{pn(k+2)} = \mathbf{R} \mathbf{C}_{p(n-1)k} \quad (k = \overline{0, p'-2}) \quad (8.56)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{C}_{pn0} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{C}_{pn p'} = \mathbf{B}. \quad (8.57)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – произвольные матрицы размерности  $m \times m$ .

### 8.3. Построение интегрального оператора

Если учесть представления (8.54) и на каждом шаге  $n = 1, 2, \dots$  решения уравнений (8.32) положить

$$\mathbf{C}_{pnk} = \mathbf{G}_{(p''+2)k}, \quad \mathbf{R} \mathbf{C}_{p(n-1)k} = \mathbf{G}_{p''k}, \quad p'' = p' - 2, \quad (8.58)$$

то с учетом соотношений (8.56), (8.57) получится, что на каждом шаге итерационного процесса решается задача построения интегрального оператора  $\mathbf{H}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ , порождающего для всякой матричной функции  $\mathbf{W}_{p''}(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p''}$

$(p'' \geq 0)$

$$\mathbf{W}_{p''}(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{p''} \varphi_{(p''-k)k}(z - z_0, \bar{z} - \bar{z}_0) \mathbf{G}_{p''k}, \quad (8.59)$$

в виде

$$\mathbf{W}_{p''+2}(z, \bar{z}) = \mathbf{H}_{\mathbf{AB}} \circ \mathbf{W}_{p''}(z, \bar{z}) \quad (8.60)$$

все частные решения  $\mathbf{X}(z, \bar{z}) = \mathbf{W}_{p''+2}(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p''+2}$  уравнения

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{X}(z, \bar{z}) = \mathbf{W}_{p''}(z, \bar{z}). \quad (8.61)$$

Значит, краевая задача (8.56), (8.57), определяющая интегральный оператор  $\mathbf{H}_{\mathbf{AB}}$ , с учетом соотношений (8.58) – (8.61) запишется в таком виде

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{G}_{(p''+2)k} - (\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^2) \mathbf{G}_{(p''+2)(k+1)} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{G}_{(p''+2)(k+2)} = \mathbf{G}_{p''k} \quad (k = \overline{0, p''}), \quad (8.62)$$

$$\mathbf{G}_{(p''+2)0} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{G}_{(p''+2)(p''+2)} = \mathbf{B}. \quad (8.63)$$

Характеристическое уравнение для (8.62) имеет вид [51]

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{X}^2 - (\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}^2) \mathbf{X} + \mathbf{\Lambda} = \mathbf{O}. \quad (8.64)$$

Из оценки (8.29) следует, что уравнение (8.64) имеет в точности два различных корня  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{\Lambda}$  и  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{\Lambda}^{-1}$  такие, что

$$0 < \left| [\mathbf{X}_1]_{j,j} \right| < 1, \quad 0 < \left| [\mathbf{X}_2^{-1}]_{j,j} \right| < 1 \quad (j = \overline{1, m}). \quad (8.65)$$

В критерии хорошей обусловленности общих краевых задач для систем разностных уравнений на сеточном отрезке [54] указаны три необходимых и достаточных условия хорошей обусловленности задачи.

Утверждение 3. При выполнении условий (8.29) краевая задача (8.62), (8.63) при любом  $p''$  ( $p'' \geq 0$ ), для любого набора  $\{\mathbf{G}_{p''k}\}_{k=0}^{p''}$ , при любых  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  является хорошо обусловленной.

Доказательство.

1. Из оценки (8.65) непосредственно следует выполнение первого условия – неравенство единице модулей всех скалярных корней

$\{x_j\}_{j=1}^{2m} = \{[\mathbf{X}_1]_{j,j}\}_{j=1}^m \cup \{[\mathbf{X}_2]_{j,j}\}_{j=1}^m$  уравнения

$$\det(\Lambda x^2 - (\mathbf{I} + \Lambda^2)x + \Lambda) = 0. \quad (8.66)$$

2. Из оценки (8.65) также следует, что  $|\mathbf{X}_1]_{j,j}| < 1 < |[\mathbf{X}_2]_{j,j}|$  ( $j = \overline{1, m}$ ).

Значит, среди корней уравнения (8.66) будет в точности  $m$  корней, модуль которых меньше единицы и  $m$  корней, модуль которых больше единицы, следовательно, размерность матриц граничных условий (8.63) соответствует требованиям второго условия.

3. Строятся ограниченные решения краевых задач:

$$\Lambda \mathbf{G}_{(p''+2)k} - (\mathbf{I} + \Lambda^2) \mathbf{G}_{(p''+2)(k+1)} + \Lambda \mathbf{G}_{(p''+2)(k+2)} = \mathbf{O} \quad (k = \overline{0, \infty}), \quad (8.67)$$

$$\mathbf{G}_{(p''+2)0} = \mathbf{O} \quad (8.68)$$

и

$$\Lambda \mathbf{G}_{(p''+2)k} - (\mathbf{I} + \Lambda^2) \mathbf{G}_{(p''+2)(k+1)} + \Lambda \mathbf{G}_{(p''+2)(k+2)} = \mathbf{O} \quad (k = \overline{-\infty, p''}), \quad (8.69)$$

$$\mathbf{G}_{(p''+2)(p''+2)} = \mathbf{O}. \quad (8.70)$$

Общее решение уравнений (8.67) и (8.60) может быть записано в виде [51]

$$\mathbf{G}_{(p''+2)k} = \mathbf{X}_1^k \mathbf{D}_1 + \mathbf{X}_2^k \mathbf{D}_2 \quad (k = \overline{-\infty, \infty}), \quad (8.71)$$

где  $\mathbf{D}_j$  ( $j = \overline{1, 2}$ ) – произвольные матрицы размерности  $m \times m$ . Из требования ограниченности решения задачи (8.67), (8.68) при  $k \rightarrow \infty$  и оценки (8.65) следует, что в представлении (8.71)  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{O}$ . Тогда из граничного условия (8.68) следует, что и  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{O}$ . Значит, краевая задача (8.67), (8.68) не имеет ограниченного решения, отличного от  $\mathbf{O}$ . Аналогично показывается, что краевая задача (8.69), (8.70) также не имеет ограниченного решения, отличного от  $\mathbf{O}$ . Следовательно, выполнено и третье, последнее условие.

Следствие 1. При выполнении условий (8.29) для любых  $p''$  ( $p'' \geq 0$ ),

$\{\mathbf{G}_{p''k}\}_{k=0}^{p''}$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ :

1) решение краевой задачи (8.62), (8.63) существует и единственно;

2) выполняются оценки [51]

$$\sup_{k=0, p''+2} \|\mathbf{G}_{(p''+2)k}\| \leq \chi \max \left( \|\mathbf{A}\|, \|\mathbf{B}\|, \sup_{k=0, p''} \|\mathbf{G}_{p''k}\| \right), \quad (8.72)$$

где значение параметра  $\chi$  ( $0 \leq \chi < \infty$ ) фиксировано и не зависит от  $p''$  и  $\{\mathbf{G}_{p''k}\}_{k=0}^{p''}$ .

Таким образом, интегральный оператор  $\mathbf{H}_{\mathbf{A}\mathbf{B}}$  в соотношении (8.60), задающий решения уравнения (8.61)  $\mathbf{X}(z, \bar{z}) = \mathbf{W}_{p''+2}(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p''+2}$  (определяется набором  $\{\mathbf{G}_{(p''+2)k}\}_{k=0}^{p''+2}$ ), применяемый к функции  $\mathbf{W}_{p''}(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p''}$  (определяется набором  $\{\mathbf{G}_{p''k}\}_{k=0}^{p''}$ ), является правым обратным оператору  $\Lambda$  над кольцом  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p''}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ) и может быть определен как решение краевой задачи (8.62), (8.63). Тогда искомые решения уравнений (8.32) при любых  $p = \overline{0, \infty}$  могут быть представлены в следующем виде

$$\Phi_{p_n}(z, \bar{z}) = \mathbf{H}_{\mathbf{A}_n \mathbf{B}_n} \circ (\mathbf{R} \Phi_{p_{(n-1)}}(z, \bar{z})) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (8.73)$$

где матричная функция  $\Phi_{p_0}(z, \bar{z})$  определяется соотношениями (8.53).

В качестве метода решения краевой задачи (8.62), (8.63) используется метод прогонки в матричной форме. Вводятся вспомогательные матричные прогоночные коэффициенты  $\mathbf{M}_k$ ,  $\mathbf{D}_k$ . Искомое решение представляется в виде

$$\mathbf{G}_{(p''+2)k} = \mathbf{M}_k \mathbf{G}_{(p''+2)(k+1)} + \mathbf{D}_k \quad (k = \overline{0, p''+1}). \quad (8.74)$$

Для вычисления прогоночных коэффициентов  $\mathbf{M}_k$  и  $\mathbf{D}_k$  из уравнений (8.62) получаются рекуррентные соотношения

$$\mathbf{M}_{k+1} = (\mathbf{I} + \Lambda^2 - \Lambda \mathbf{M}_k)^{-1} \Lambda, \quad (8.75)$$

$$\mathbf{D}_{k+1} = (\mathbf{I} + \Lambda^2 - \Lambda \mathbf{M}_k)^{-1} (\Lambda \mathbf{D}_k - \mathbf{G}_{p''k}) \quad (k = 0, 1, \dots, p''), \quad (8.76)$$

а из первого граничного условия (8.63) их начальные значения

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{O}, \quad \mathbf{D}_0 = \mathbf{A}.$$

Рекуррентное уравнение (8.75) допускает решение в явном виде

$$\mathbf{M}_k = \Lambda (\mathbf{I} - \Lambda^{2k}) (\mathbf{I} - \Lambda^{2k+2})^{-1} \quad (k = \overline{0, p''+1}). \quad (8.77)$$

Тогда рекуррентное уравнение (8.76) получает такой вид

$$\mathbf{D}_{k+1} = (\mathbf{I} - \Lambda^{2k+2}) (\mathbf{I} - \Lambda^{2k+4})^{-1} (\Lambda \mathbf{D}_k - \mathbf{G}_{p''k}) \quad (k = 0, 1, \dots, p''). \quad (8.78)$$

Оценка (8.29) гарантирует корректность соотношений (8.77), (8.78) при любых  $k$ . Вычисление искомых матричных коэффициентов  $\mathbf{G}_{(p''+2)k}$  осуществляется обратным ходом прогонки ( $k = p''+1, p'', \dots, 1$ ) с использованием рекуррентного соотношения (8.74) и второго граничного условия (8.63) как начального. Здесь следует отметить, что следствием хорошей обусловленности граничной задачи (8.62), (8.63) является также отсутствие накопления вычислительной погрешности в методе прогонки, что в свою очередь обеспечивает отсутствие накопления возрастающих с ростом  $n$  ошибок в вычисляемых значениях коэффициентов разложений  $\Phi_{p_n}(z, \bar{z})$  в представлениях (8.73) при любых  $p = \overline{0, \infty}$ .

#### 8.4. Свойства интегрального оператора

Утверждение 4. В случае  $\mathbf{W}_p(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  и  $\mathbf{W}_p(z, \bar{z}) \equiv \mathbf{O}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ )

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{AB}} \circ \mathbf{W}_p(z, \bar{z}) &= \Phi_{(2p+4)0}(z, \bar{z}) \quad \text{при } \mathbf{A} = \mathbf{I}, \mathbf{B} = \Lambda^{p+2}; \\ \mathbf{H}_{\mathbf{AB}} \circ \mathbf{W}_p(z, \bar{z}) &= \Phi_{(2p+3)0}(z, \bar{z}) \quad \text{при } \mathbf{A} = \Lambda^{p+2}, \mathbf{B} = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

При доказательстве учитывается, что из  $\mathbf{W}_p(z, \bar{z}) \equiv \mathbf{O}$  в области  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  ( $0 < \eta$ ) непосредственно следует  $\mathbf{G}_{pk} = \mathbf{O}$  ( $k = \overline{0, p}$ ). Значит, общее решение уравнения (8.62) имеет вид (8.71). Тогда с учетом граничных условий (8.63) и представлений (8.53), (8.71) наборы значений  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{O}$  и  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{O}$ ,  $\mathbf{D}_2 = \Lambda^{p+2}$  обеспечивают справедливость соотношений (8.79).

Утверждения 3, 4 порождают следующие свойства оператора  $\mathbf{H}_{\mathbf{AB}}$ , которые

формулируются как следствия.

Следствие 2. Для любого  $p$  ( $p \geq 0$ ) и всякой  $\Psi_p(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  вариативность  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  в представлении  $\mathbf{X} = \mathbf{H}_{\mathbf{AB}} \circ \Psi_p(z, \bar{z})$  обеспечивает все решения уравнения (8.61) в кольце  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p+2}$ .

Следствие 3. Для любого  $p$  ( $p \geq 0$ ) и всякой  $\Psi_p(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathbf{AB}} \circ \Psi_p(z, \bar{z}) \Big|_{(z, \bar{z})} &= (z - z_0)^{p+2} \Gamma(p+3)^{-1} \mathbf{A}, \\ \mathbf{H}_{\mathbf{AB}} \circ \Psi_p(z, \bar{z}) \Big|_{(z_0, \bar{z})} &= (\bar{z} - \bar{z}_0)^{p+2} \Gamma(p+3)^{-1} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Ставится задача линеаризации оператора  $\mathbf{H}_{\mathbf{AB}}$  над кольцом  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  ( $p \geq 0$ ).

Для этого необходимо и достаточно потребовать, чтобы из  $(\Psi_p(z, \bar{z}) \equiv \mathbf{O}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  ( $p \geq 0$ ) следовало  $\mathbf{H}_{\mathbf{AB}} \circ \Psi_p(z, \bar{z}) \equiv \mathbf{O}$ . С учетом оценки (8.72) получается, что условие  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{O}$  обеспечивает линейность оператора  $\mathbf{H}_{\mathbf{AB}}$ . Далее соответствующий указанному условию линейный над кольцом  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  ( $p \geq 0$ ) интегральный оператор будет обозначаться  $\mathbf{H}_{\mathbf{OO}}$ . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.  $\mathbf{H}_{\mathbf{OO}}$  является линейным над кольцом  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$ , непрерывным, правым обратным оператору  $\mathbf{A}$  оператором, реализующим отображение  $\mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p \rightarrow \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^{p+2}$  ( $p \geq 0$ ).

Утверждение 6. Для всякой  $\Psi_p(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  ( $p \geq 0$ ) и любого  $0 < \eta < \infty$  справедлива оценка:

$$\sup_{\bar{\Sigma}_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta} \left\| (\mathbf{H}_{\mathbf{OO}})^n \circ \Psi_p(z, \bar{z}) \right\|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (8.81)$$

Доказательство основывается на представлении (8.59), оценке (8.72) и соотношении

$$\sum_{j=0}^n \Gamma(n-j+1)^{-1} \Gamma(j+1)^{-1} = 2^n \Gamma(n+1)^{-1}.$$

Получается, что для любого замыкания  $\bar{\Sigma}_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  и любого набора матричных коэффициентов  $\{\mathbf{C}_{pk}\}_{k=0}^p$ , определяющего представление (8.59) для  $\Psi_p(z, \bar{z})$ , выполняется следующая оценка,

$$\left\| (\mathbf{H}_{00})^n \circ \Psi_p(z, \bar{z}) \right\|_{\bar{\Sigma}_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta} \leq \chi^n (2\eta)^{p+2n} \Gamma(p+2n+1)^{-1} \sup_{k=0, p} \|\mathbf{C}_{pk}\| \quad (n \geq 1), \quad (8.82)$$

которая обеспечивает справедливость соотношения (8.81).

Утверждение 7. Для любой  $\Phi_{p0}(z, \bar{z})$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ), заданной соотношениями (8.53) справедливо

$$\left( \Phi_p(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{H}_{00} \circ \mathbf{R})^n \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \right) \in \mathbf{Y}_{\mathbb{C}^2} \quad (p = \overline{0, \infty}). \quad (8.83)$$

На основании оценки (8.82) с учётом (8.29), (8.53) для любых  $p$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ) получается

$$\left\| (\mathbf{H}_{00} \circ \mathbf{R})^n \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \right\| \leq (\chi \|\mathbf{R}\|)^n (2\eta)^{p+2n} \Gamma(p+2n+1)^{-1} = a_{pn}(\eta) \quad (n \geq 1).$$

Фактор сходимости числовых мажорантных рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{pn}(\eta)$  при любом конечном  $\eta$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ), обеспечивают справедливость соотношения (8.83).

Определение. Оператор  $\mathbf{T}$  далее будет называться несужающим область регулярности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  ( $0 < \eta$ ), если для всякой  $\Psi(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta}$  справедливо

$$(\mathbf{T} \circ \Psi(z, \bar{z})) \in \mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta}.$$

Утверждение 8. Линейный интегральный правый обратный оператору  $\Delta$  оператор  $\mathbf{T}$  из всякой базисной для некоторой бикруговой области  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  ( $0 < \eta$ )

системы решений  $\{\Phi_{p0}(z, \bar{z})\}_{p=0}^{\infty}$  уравнения (8.31) порождает в виде

$$\left\{ \Phi_p(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{T} \circ \mathbf{R})^n \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \right\}_{p=0}^{\infty} \quad (8.84)$$

базисную для  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}$  ( $0 < \eta$ ) систему решений уравнения (8.30) тогда и только тогда, когда является несужающей областью регулярности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}$  ( $0 < \eta$ ).

Доказательство. Пусть  $\{\Phi_{p0}(z, \bar{z})\}_{p=0}^{\infty}$  есть базисная система решений уравнения (8.31) для некоторой бикруговой области  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}$  ( $0 < \eta$ ).

Необходимость. Предполагается, что оператор  $\mathbf{T}$  является сужающим областью регулярности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}$  ( $0 < \eta$ ) и (8.84) есть базисная система решений уравнения (8.30) для  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}$  ( $0 < \eta$ ). Тогда для всякого векторного решения этого уравнения  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}}$  выполняется

$$\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{T} \circ \mathbf{R})^n \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \mathbf{K}_p = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{T} \circ \mathbf{R})^n \tilde{\mathbf{V}}_*(z, \bar{z}).$$

Здесь  $\left( \tilde{\mathbf{V}}_*(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \mathbf{K}_p \right) \in \mathbf{Y}_{\mathcal{T}}$ , где  $\mathcal{T}$  некоторая бикруговая область такая, что  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta} \subset \mathcal{T} \subseteq \mathbb{C}^2$ ;  $\mathbf{K}_p$  – некоторые векторные коэффициенты разложения. Но тогда с учётом утверждения 5 получается

$$\left( \mathbf{T} \circ (\mathbf{R} \tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})) = \tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) - \tilde{\mathbf{V}}_*(z, \bar{z}) \right) \in \mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}},$$

что противоречит исходному предположению.

Достаточность. Предполагается, что оператор  $\mathbf{T}$  является несужающим областью регулярности  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}$  ( $0 < \eta$ ). Рассматривается в классе функций  $\mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^{\eta}}$  оператор

$$\Theta = \mathbf{I} - \mathbf{T} \circ \mathbf{R}. \quad (8.85)$$

Ставится задача показать, что однородное уравнение



$$\Theta \circ \Psi(z, \bar{z}) = \mathbf{O} \quad (8.86)$$

в этом классе имеет единственное решение  $\Psi(z, \bar{z}) = \mathbf{O}$ . Вводится представление

$$\Psi(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \Psi_p(z, \bar{z}), \quad (8.87)$$

где  $\Psi_p(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  ( $p \geq 0$ ). После подстановки (8.87) в (8.86) с учетом утверждения 5 и соотношения (8.85) получается

$$\sum_{p=0}^{\infty} \tilde{\Psi}_p(z, \bar{z}) = \mathbf{O}, \quad (8.88)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(z, \bar{z}) &= \Psi_0(z, \bar{z}), \quad \tilde{\Psi}_1(z, \bar{z}) = \Psi_1(z, \bar{z}), \\ \tilde{\Psi}_p(z, \bar{z}) &= \Psi_p(z, \bar{z}) - (\mathbf{T} \circ \mathbf{R})\Psi_{p-2}(z, \bar{z}) \quad (p = \overline{2, \infty}). \end{aligned} \quad (8.89)$$

Поскольку  $\tilde{\Psi}_p(z, \bar{z}) \in \mathfrak{N}_{(z_0, \bar{z}_0)}^p$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ) и разложение по однородным полиномам (8.88) должно выполняться всюду в  $\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$ , следовательно,  $\tilde{\Psi}_p(z, \bar{z}) = \mathbf{O}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ). Тогда с учётом линейности оператора  $\mathbf{T}$  из уравнений (8.89) сразу получается  $\Psi_p(z, \bar{z}) = \mathbf{O}$  ( $p = \overline{0, \infty}$ ). Значит  $\Psi(z, \bar{z}) = \mathbf{O}$  – единственное решение уравнения (8.86) в указанном классе функций.

Берется произвольное векторное решение  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta}$  уравнения (8.30). Рассматривается следующее представление

$$\mathbf{F}(z, \bar{z}) = \Theta \circ \tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z}). \quad (8.90)$$

Согласно предположению  $\mathbf{F}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta}$ . Кроме того  $\mathbf{F}(z, \bar{z})$  однозначно определяется для всякой  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})$  и, согласно утверждению 5, удовлетворяет уравнению (8.31). Далее рассматривается в классе  $\mathbf{Y}_{\Sigma_{(z_0, \bar{z}_0)}^\eta}$  неоднородное

относительно  $\Psi(z, \bar{z})$  уравнение

$$\Theta \circ \Psi(z, \bar{z}) = \mathbf{G}(z, \bar{z}), \quad (8.91)$$

где  $\mathbf{G}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\Sigma(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  – произвольное векторное решение уравнения (8.31). Для построения решения уравнения (8.91) применяется метод последовательных приближений. В результате получается последовательность рекуррентных уравнений, с использованием решений которых записывается искомое представление

$$\Psi(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{T} \circ \mathbf{R})^n \mathbf{G}(z, \bar{z}). \quad (8.92)$$

С другой стороны, всякое решение  $\mathbf{G}(z, \bar{z}) \in \mathbf{Y}_{\Sigma(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  уравнения (8.31) представимо в любом замыкании из  $\Sigma(z_0, \bar{z}_0)^\eta$  равномерно и абсолютно сходящимся разложением по элементам базисной системы  $\{\Phi_{p0}(z, \bar{z})\}_{p=0}^{\infty}$  в виде

$$\mathbf{G}(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_{p0}(z, \bar{z}) \mathbf{K}_p, \quad (8.93)$$

где  $\mathbf{K}_p$  – некоторые векторные коэффициенты. С учётом (8.84), (8.93) разложение (8.92) принимает окончательный вид

$$\Psi(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(z, \bar{z}) \mathbf{K}_p. \quad (8.94)$$

Поскольку, как показано выше, соответствующее уравнению (8.91) однородное уравнение (8.86) в классе  $\mathbf{Y}_{\Sigma(z_0, \bar{z}_0)}^\eta$  не имеет решений отличных от  $\mathbf{O}$ , следовательно, представление (8.94) даёт единственное решение уравнения (8.91) в указанном классе функций. Наконец, если положить  $\mathbf{G}(z, \bar{z}) = \mathbf{F}(z, \bar{z})$  и учесть, что в этом случае именно  $\tilde{\mathbf{V}}(z, \bar{z})$  является решением (8.91), получается истинности исходного утверждения.

Следствие 4. Система функций  $\{\Phi_p(z, \bar{z}) = \mathbf{H} \circ \Phi_{p0}(z, \bar{z})\}_{p=0}^{\infty}$ , где

$\{\Phi_{p0}(z, \bar{z})\}_{p=0}^{\infty}$  определяется соотношениями (8.53) и  $\mathbf{H} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{H}_{00} \circ \mathbf{R})^n$  является базисной системой частных решений для уравнения (8.30) в классе  $\mathbf{Y}_{\mathbb{C}^2}$ .

### Выводы к разделу 8

В разделе решена актуальная научная задача разработки теоретической методики построения и исследования свойств базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрических волноводах гладкого криволинейного сечения из прямолинейно ортотропных упругих материалов.

В рамках реализованных исследований:

1. Разработана методика сведения уравнений волнового деформирования протяженных цилиндрических тел к системе дифференциальных уравнений эллиптического типа специального вида.

2. На основе системы дифференциальных уравнений эллиптического типа специального вида поставлены и решены краевые задачи для систем разностных уравнений, построен базисный набор частных решений указанной системы дифференциальных уравнений.

3. Исследованы свойства интегральных операторов, определяющих указанные базисные частные решения.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [133, 135, 136, 138, 143, 144, 147].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решена актуальная научная проблема волновой механики протяженных цилиндрических тел с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами в виде анизотропии и неоднородности, геометрической и физической нелинейности, секторно-круговой и секторно-кольцевой формы сечений с ребрами сингулярности, наличия жидкостного заполнения во внутренних полостях, заключающаяся в разработке численно-аналитических методов анализа математических моделей распространения волн деформаций в волноводах рассматриваемых классов с несколькими типами граничных условий. На основе применения разработанных методов исследованы, систематизированы и обобщены ведущие закономерности в свойствах исследуемых волновых процессов.

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Осуществлено построение и исследование свойств базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндрах кругового и кольцевого сечения с экспоненциально-степенной радиальной неоднородностью.

2. Для двух частных случаев экспоненциально-степенной радиальной неоднородности материала в замкнутой форме построены базисные наборы частных решений системы уравнений волновой механики для задач о распространении нормальных крутильных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных цилиндрах кругового сечения с использованием функций Уиттекера, кольцевого сечения – представленные через функции Уиттекера и интегралы биконфлюэнтного уравнения Гойна.

3. Осуществлено построение аналитических представлений базисных частных решений для краевых задач о спектрах нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах секторно-кругового и секторно-кольцевого сечения с экспоненциально-степенной

радиальной неоднородностью физико-механических свойств при наличии гибких нерастяжимых покрытий на радиальных участках граничной поверхности.

4. Осуществлено построение и исследование свойств базисных множеств аналитических и численно-аналитических решений вспомогательных спектральных задач для обладающих радиальной неоднородностью экспоненциально-степенного типа трансверсально-изотропных волноводов с сечением в виде кругового сектора в случае свободных либо жестко закрепленных радиальных участков граничной поверхности.

5. Проведено исследование асимптотических свойств решений рассматриваемых основных и вспомогательных спектральных задач.

6. Получены и исследованы дисперсионные соотношения для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах исследуемого геометрического строения со свободными и жестко закрепленными цилиндрическими участками граничной поверхности с радиальной неоднородностью экспоненциально степенного типа на основе использования базисных множеств решений уравнений модели и вспомогательных спектральных задач

7. Осуществлено получение и исследование дисперсионных соотношений для нормальных волн в трансверсально-изотропных и цилиндрически-ортотропных волноводах кольцевого сечения с заполнением внутренней полости идеальной слабосжимаемой жидкостью.

8. Разработана теоретическая численно-аналитическая методика исследования малых нелинейных ангармонических эффектов при распространении упругих волн кручения в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового сечения с использованием модели геометрически и физически нелинейного деформирования.

9. Осуществлено построение и исследование свойств базисных множеств аналитических частных решений уравнений волнового деформирования применительно к краевым задачам о спектрах нормальных упругих волн в сплошных цилиндрических волноводах гладкого криволинейного сечения из

прямолинейно ортотропных упругих материалов.

10. Осуществлена разработка и реализация методик анализа параметрических закономерностей в топологическом строении и составе дисперсионных спектров нормальных волн, в распределениях их фазовых и групповых скоростей, а также в кинематических характеристиках волновых движений применительно к цилиндрам с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

11. Осуществлены обобщение и систематизация полученных новых фундаментальных данных о закономерностях влияния особенностей усложненной геометрии сечений, типов граничных условий, радиальной неоднородности, анизотропии и нелинейности физико-механических свойств материалов волноводов на структуры дисперсионных спектров и особенности кинематических характеристик исследуемых нормальных волн, представляющие первоочередной интерес для сферы практических приложений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамова О.П. Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами / О.П. Абрамова, В.И. Сторожев, В.А. Шпак // Акуст. ж. – 1995. – Т. 42, №1. – С. 5 – 9.
2. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям, с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с. с илл.
3. Аксентян О.К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра / А.К. Аксентян // Прикл. механика. – 1967. – Т. 31. – № 1. – С. 178 – 186.
4. Александров В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев. – М.: Физматлит, 1993. – 224 с.
5. Александров К.С. Упругие свойства кристаллов / К.С. Александров, Т.В. Рыжова // Кристаллография. – 1961. – Т.6, №2. – С. 63 – 81.
6. Алексанян Р.К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела / Р.К. Алексанян // Докл. АН Арм. ССР, Механика. – 1975. – Т. 61., № 4. – С. 219 – 224.
7. Алтухов Е.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин: Монография. / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
8. Артоболевский И.И. Введение в акустическую динамику машин / И.И. Артоболевский, Ю.И. Бобровницкий, М.Д. Генкин. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
9. Бабич В.М. Математические методы в теории упругих волн / В.М. Бабич, Л.А. Молотков // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела / ВИНТИ. – 1977. – Т. 10. – С. 5 – 62.
10. Балакирев М.К. Волны в пьезокристаллах / М.К. Балакирев, И.А. Гишинский. – Новосибирск: Наука. – 1982. – 239 с.

11. Белман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Белман, К. Кук. М.: Мир, 1967. – 548 с.
12. Белоконь А.В. Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров / А.В. Белоконь // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233. – №1. – С. 56 – 59.
13. Белянкова Т.И. Моделирование преднапряженных функционально градиентных материалов и покрытий / Т.И. Белянкова, В.А. Лыжов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4 (5). – С. 2019 – 2021.
14. Блистанов А.А. Акустические кристаллы / А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, В.В. Чкалова / Под ред. М.П. Шаскольской. – М.: Наука, 1982. – 632 с.
15. Бобровницкий Ю.И. Соотношение ортогональности для волн Лэмба / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 1972. – Т. 17, № 4. – С. 513 – 515.
16. Бобровницкий Ю.И. Изгибные колебания шарнирно опертой полосы / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 1974. – Т. 20, № 4. – С. 503 – 510.
17. Бобровницкий Ю.И. Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин / Ю.И. Бобровницкий, М.Д. Генкин, В.П. Маслов, А.В. Римский-Корсаков. – М.: Наука, 1974. – 102 с.
18. Бобровницкий Ю.И. Колебания упругой полосы / Ю.И. Бобровницкий, М.Д. Генкин // Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций // – М.: Наука. 1975. – С. 12 – 42.
19. Бобровницкий Ю.И. Соотношения между характеристическими уравнениями для однородных элементов механических конструкций / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 1978. – Т. 24, № 4. – С. 487 – 493.
20. Бобровницкий Ю.И., Короткое М.П. Резонансы неоднородных волн в протяженных упругих структурах / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 1991. – Т. 37, Вып. 5. – С. 872 – 878.
21. Бобровницкий Ю.И. Взаимность в задаче об отражении и прохождении волн. Ч. I. Симметрия матриц коэффициентов отражения / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 2003. – Т. 49, N 1. – С. 14 – 23.



22. Бобровницкий Ю.И. Акустический метаматериал с необычными волновыми свойствами / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 2014. – Т. 60, N 4. – С. 347 – 355.
23. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 2015. – Т. 61, №3. – С. 283 – 294.
24. Бондаренко А.А. Нормальные волны в прямоугольном упругом волноводе / А.А. Бондаренко // Акустичний вісник. – 2007. – Том 10, № 4. – С. 12 – 27.
25. Боровских А.В. Распространение волн в неоднородной среде / А.В. Боровских – Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Москва. – 2006. – 337 с.
26. Боровских А.В. Интегрируемость уравнения эйконала и каскадные формы римановых метрик / А.В. Боровских // Черноземный альманах научных исследований. Москва, МГУ. – 2009. – Вып. 1 (8). – С. 28 – 57.
27. Ватульян А.О. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэластичности / А.О. Ватульян, А.Ю. Кирютенко, А.В. Наседкин // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 135 – 142.
28. Ватульян А.О., Домброва О.Б., Жиров В.Е. К определению неоднородной поляризации для электроупругого стержня / А.О. Ватульян, О.Б. Домброва, В.Е. Жиров // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. – 2002. – №4. – С. 7 – 9
29. Ватульян А.О. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами / А.О. Ватульян, А.В. Моргунова // Акустический журнал. – 2015. – Том 61, № 3. – С. 295 – 301.
30. Ватульян А.О. О дисперсионных соотношениях для полого цилиндра в поле неоднородных предварительных напряжений / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2015. – №2. – С. 22 – 29.

31. Ватульян А.О. Об обратных коэффициентных задачах для функционально-градиентных материалов / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Математический форум. Сер. "Итоги науки. Юг России" – Владикавказ. – 2015. – С. 48 – 58.
32. Ватульян А.О. Волновые процессы в поломом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – №4. – С. 183 – 192.
33. Ватульян А.О. О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Известия РАН МТТ. – 2016. – №5. – С. 85 – 93.
34. Ватульян А.О. Об особенностях идентификации неоднородных пороупругих характеристик полого цилиндра / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – №1. – С. 22 – 28.
35. Ватульян А.О., Колебания неоднородного пьезокерамического цилиндра при наличии затухания / А.О. Ватульян, В.С. Кондратьев // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, №4. – С. 406 – 414.
36. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н. Векуа. – М.-Л.: Гостехиздат. – 1948. – 296 с.
37. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов – Москва: Наука. – 1966. – 168 с.
38. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука. – 1981. – 287 с.
39. Вовк Л.П. Анализ локальных особенностей волнового поля в сингулярных точках составной области / Л.П. Вовк // Вісник Сумського держ. університету. Сер. «Фізика, математика, механіка». – 2003. – №10(56). – С. 144 – 156.
40. Вовк Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры. / Л.П. Вовк – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169 с.
41. Вовк Л.П. Исследование локальной особенности волновых характеристик около угловой точки линий раздела составного тела / Л.П. Вовк // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2004. – №2. – С. 38

- 42.
42. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267с.
  43. Вовк Л.П. О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 269 – 278.
  44. Вовк Л.П. Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 279 – 289.
  45. Вовк Л.П. Проблемы анализа прочности неоднородных деталей сложной внутренней структуры / Л.П. Вовк // Вісті Автомобільно-дорожнього інституту: науково-виробничий збірник. – 2013. – № 1(16). – С. 13–66.
  46. Волкова А.С. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе / А.С. Волкова, В.В. Провоторов // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 3. – С. 3 – 18.
  47. Ворович И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И. Ворович, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
  48. Ганнинг Р. Аналитические функции многих комплексных переменных / Р. Ганнинг, Х. Росси. – М.: Мир, 1969. – 395 с.
  49. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
  50. Геворкян С.Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел / С.Х. Геворкян // Изв. АН АрмССР, Сер. Физ.-мат. наук. – 1968. – Т. XXI, № 4. – С. 30 – 39.
  51. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 1967. – 375 с.
  52. Гетман И.П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ. – 1993. – 144 с.
  53. Гоголадзе В. Г. Упругие волны / В.Г. Гоголадзе // Механика в СССР за тридцать лет. – М.–Л.: ГИТТЛ. – 1950. – С. 206 – 276.

54. Годунов С.К. Разностные схемы (введение в теорию) / С.К. Годунов, В.С. Рябенкий. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
55. Григолюк Э.И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел / ВИНТИ. – 1973. – Т.5. – С. 1 – 126.
56. Григоренко А.Я. О распространении упругих волн в некруговом полом цилиндрическом волноводе // А.Я. Григоренко / Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – №11. – С. 29-31.
57. Григоренко А.Я. Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими радиально поляризованными слоями / А.Я. Григоренко, И.А. Лоза // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – №17. – С. 87 – 96.
58. Григоренко А.Я. Неосесимметричные электроупругие волны в полом цилиндре из функционально градиентного пьезокерамического материала, поляризованного в осевом направлении / А.Я. Григоренко, И.А. Лоза // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – №20. – С. 137–144.
59. Григоренко А.Я. Осесимметричные колебания полых цилиндров из функционально градиентных материалов / А.Я. Григоренко, И.А. Лоза // Доп. НАН України. – 2012. – № 3. – С. 57 – 64.
60. Григоренко А.Я. Свободные осесимметричные колебания полого цилиндра конечной длины из функционально-градиентного материала / А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова, Ю.А. Коротких. // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2015. – Т.58, № 2. – С. 64 – 75.
61. Грин А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир. – 1965. – 455 с.
62. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка. – 1981. – 284 с.
63. Гринченко В.Т. Свойства гармонических волн, распространяющихся вдоль ребра прямоугольного упругого клина / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко //

- Акустический журнал. – 1981. – Т. XXVII, Вып. 2. – С. 206 – 212.
64. Гринченко В.Т. Особенности волнового поля в полубесконечном упругом цилиндре (краевой резонанс) / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 81 – 89.
65. Гринченко В.Т. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова. // Прикладная механика. – 1984. – Т. 20, № 1. – С. 21-26.
66. Гринченко В.Т. Свойства нормальных неосесимметричных волн в толстостенном цилиндре, заполненном жидкостью / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова. // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 10. – С. 15-20.
67. Гринченко В.Т. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова // Акустичний вісник. – 2004. – Том 7, N 3. – С.39 – 48.
68. Гринченко В.Т. О локализации волновых полей в упругих волноводах / В.Т. Гринченко // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 9. – С. 38 – 45.
69. Гринченко В.Т. Свойства локализованных вблизи границ волновых движений в заполненном жидкостью цилиндре / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова // Акустичний вісник. – 2006. – Том 9, N 2. – С.37 – 55.
70. Гринченко В.Т. Свойства нормальных волн композитного упруго–жидкостного волновода, помещенного в жидкость / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова // Акустичний вісник. – 2006. – Том 9, N 4. – С. 17 – 34.
71. Гринченко В.Т. Волновое поле цилиндрического волновода, заполненного жидкостью и окруженного упругой средой, генерируемое источником на его поверхности / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова // Акустичний симпозіум «Консонанс–2009». – 2009. – С.148 – 153.
72. Гузь А.Н. Введение в акустоупругость / А.Н. Гузь, Ф.Г. Махорт, О.И. Гуща. – К.: Наук. думка. – 1977. – 151 с.
73. Гурвиц А. Теория функций. / А. Гурвиц, Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 618 с.
74. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах / Р.М. Дейвис – Москва: Изд–во иностр. лит. – 1961. – 104 с.

75. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе; пер. с франц. – М.: Наука. – 1982. – 424 с.
76. Елагин А.В. Кинематические свойства нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в цилиндрическом волноводе / А.В. Елагин, В.И. Сторожев // Актуальные проблемы механики деформированного твердого тела. Материалы VI Международной научной конференции. – Донецк: Юго-Восток. – 2010. – С. 141–145.
77. Елагин А.В. Кинематические характеристики волн, возникающих при нелинейном взаимодействии продольно-сдвиговой и крутильной нормальных волн в цилиндре / А.В. Елагин // Акустичний симпозиум (Київ, 27–29 вересня 2011 р.). – Київ: Інститут гідромеханіки НАН України. – 2011. – С. 117–122.
78. Елагин А.В. Ангармонические возмущения в суммарном поле двух нормальных волн кручения в изотропном цилиндре / А.В. Елагин // Труды ИПММ НАН Украины. – Том 22. – Донецк: Цифрова типографія. – 2011. – С. 81 – 90.
79. Елагин А.В. Нелинейное ангармоническое взаимодействие двух осесимметричных продольно-сдвиговых волн в закрепленном цилиндре / А.В. Елагин, В.И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 16. – С. 266 – 272.
80. Елагин А.В. Нелинейное ангармоническое взаимодействие осесимметричной продольно-сдвиговой волны и волны кручения в закрепленном цилиндре / А.В. Елагин // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2012. – №1. – С. 51 – 55.
81. Елагин А.В. Влияние типа краевых условий на уровни вторых гармоник осесимметричных нормальных волн кручения в цилиндре / А.В. Елагин, В.И. Сторожев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 20. – С. 315–324.
82. Елагин А.В. Генерирование нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в протяженном цилиндре при разнотипных краевых условиях /

- А.В. Елагин, И.А. Моисеенко // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. – 2013. – № 2. – С. 29 – 32.
83. Елагин А.В. Нелинейные вторые гармоники нормальных волн кручения в трансверсально–изотропном цилиндре / А.В. Елагин, И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // VII Всероссийская (с международным участием) конференция по механике деформируемого твердого тела: тезисы докладов (г. Ростов–на–Дону, 15–18 октября 2013 г.). – 2013. – С. 58 – 58.
84. Елагин А.В. Анализ вторых гармоник нормальных волн кручения в закрепленном трансверсально–изотропном цилиндре: модель учета геометрической нелинейности / А.В. Елагин, И.А. Моисеенко. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А. Естественные науки. – 2014. – № 1. – С. 35–42.
85. Елагин А.В. Вторые гармоники монохроматических нормальных волн кручения: учет фактора геометрической нелинейности для трансверсально–изотропного цилиндра с обобщенными смешанными граничными условиями на поверхности / А.В. Елагин, И.А. Моисеенко. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов IX Всероссийской школы–семинара (пос. Дивноморское, 26–30 мая 2014 г.). – Ростов–на–Дону: Изд. Южного федерального университета. – 2014. – С. 65–65.
86. Елагин А.В. Исследование геометрически нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в свободном трансверсально–изотропном цилиндре / А.В. Елагин, И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Вып. 8 (54). – С. 86 – 97.
87. Ерофеев В.И. Волны в стержнях. Дисперсия Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Н.П. Семерикова – М.: Физматлит, 2002. – 208с.
88. Зарембо Л.К. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах / Л.К. Зарембо, В.А. Красильников // Успехи физ. наук. – 1970. – Т. 102, Вып. 4. – С. 549 – 586.
89. Зарембо Л.К. Нелинейная акустика / Л.К. Зарембо, В.И. Тимошенко. – М.:

- Изд.–во МГУ. – 1984. – 104 с.
90. Зволинский Н.В. Динамика деформируемых твердых тел / Н.В. Зволинский, М.И. Рейтман, Г.С. Шапиро // Механика в СССР за 50 лет. – М: Наука. – 1972. – Т. 3. – С. 291 – 323.
  91. Иванов В.Б. Теория волн: курс лекций / В.Б Иванов. – Иркутск: Иркут. ун–т. – 2006. – 210 с.
  92. Каландия А.И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов / А.И. Каландия // ПММ. – 1969. – Т. 33. – Вып. 1. – С. 132–135.
  93. Калинин В.В. Динамика поверхности неоднородных сред / В.В. Калинин, Т.И. Белянкова – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 316 с.
  94. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
  95. Карпанов Б.И. Акустические методы контроля и диагностики. Часть 1: учебное пособие / Б.И. Карпанов, М.М. Коротков. – 2008. – 186 с.
  96. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов / М.В. Келдыш. // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26, № 4. – С. 15–41.
  97. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – Москва: Изд–во иностр. лит. – 1955. – 192 с.
  98. Комиссарова Г.Л. Анализ комплексных корней дисперсионного уравнения жестко защемленного цилиндра / Г.Л. Комиссарова // Доклады АН УССР. – Сер. А. – 1982. – N 8. – С. 43 – 46.
  99. Комиссарова Г.Л. К решению задачи о распространении упругих волн в цилиндре с жидкостью / Г.Л. Комиссарова // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 25-29.
  100. Комиссарова Г.Л. Распространение нормальных осесимметричных волн в заполненных и окруженных жидкостью упругих цилиндрах из податливых материалов / Г.Л. Комиссарова // Прикладная механика. – 2004. – 40, №5. – С.104-113.
  101. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с



- коническими или угловыми точками / В.А. Кондратьев // Труды Московского математ. об-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
102. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред с усложненной геометрией / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – Донецк: ДонГУ. – 1983. – 118 с.
103. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка. – 1985. – 176 с.
104. Космодамианский А.С. Спектр симметричных нормальных волн в ортотропном слое / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев, В.А. Шпак // Теорет. и прикл. механика. – 1988. – Вып.19. – С. 116 – 121.
105. Космодамианский А.С. Дисперсионный спектр анизотропного волновода секторного сечения с закреплённой границей / А.С. Космодамианский, И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян. // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 46 – 51.
106. Красильников В.А. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации / В.А. Красильников, В.Е. Лямов // Акустический журнал. – 1973. – Т. 19. Вып. 5. – С. 801 – 804.
107. Краснушкин П.Е. Резонансы в упругом бесконечном цилиндре и трансформация комплексных волн в незатухающие / П.Е. Краснушкин // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 1. – С. 44 – 48.
108. Куликовский А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова – М.: Московский лицей. – 1998. – 412 с.
109. Купрадзе В.Д. Динамические задачи теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.В. Бурчуладзе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики / ВИНТИ. – 1975. – Т.7. – С. 163 – 294.
110. Лехницкий С.Р. Теория упругости анизотропного тела / С.Р. Лехницкий. – М.:Наука. – 1977. – 416 с.
111. Лоза И.А. О неосесимметричных волнах в слоистых полых волноводах, содержащих пьезокерамические слои поляризованные в окружающем

- направлении / И.А. Лоза // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21, №1. – С. 22 – 27.
112. Лоза И.А. О неосесимметричных волнах в слоистых полых волноводах, содержащих пьезокерамические слои поляризованные в окружном направлении / И.А. Лоза // Прикладные проблемы механики и математики. – 2010. – Вып. 8. – С. 188 – 196.
113. Лоза И.А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в полом пьезокерамическом цилиндре с радиальной поляризацией / И.А. Лоза // Математические методы и физико–механические поля. – 2011. – Т. 54, №2. – С. 62 – 69.
114. Лоза И.А. Кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в полом слоистом цилиндре при механическом способе возбуждения / И.А. Лоза // Доповіді НАН України. – 2015. – №7. – С. 55 – 61.
115. Лоза И.А. О распространении осесимметричных электроупругих волн в полом слоистом цилиндре при электрическом способе возбуждения / И.А. Лоза // Доповіді НАН України. – 2015. – №8. – С. 51 – 57.
116. Лоза И.А. О распространении осесимметричных электроупругих волн в полом цилиндре из функционально градиентного пьезокерамического материала / И.А. Лоза // Доповіді Національної академії наук України. – 2015. – №3. – С. 50 – 56.
117. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
118. Лямов В.Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах / В.Е. Лямов. – М.: Изд–во Московского университета, 1983. – 224с.
119. Ляшко А.Д. О регулярности бесконечных систем для установившихся вынужденных колебаний ортотропных прямоугольных призм / А.Д. Ляшко, В.Н. Чехов // Динамические системы. – 2015. – Т. 5(33), №1-2. – С. 103 – 114.
120. Малый В.Н. Явное выражение для корней трансцендентных

- характеристических уравнений / В.Н. Малый // Изв. АН СССР. МТТ. – 1992. – № 5. – С. 56 – 57.
121. Медведєв К.В. Дисперсія акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в фібрильних нитках / К.В. Медведєв, В.М. Шульга, В.Ф. Корнієнко, І.О. Ластівка // Системные технологии. – 2008. – № 4 (57). – С. 48 – 54.
122. Мелешко В.В. Упругие волноводы: история и современность. I / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я.Ф. Ван Хейст // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 2. – С. 86 – 104.
123. Микер Т. Волноводное распространение в протяжных цилиндрах и пластинках / Т. Микер, А. Мейтцлер // Физическая акустика / Под ред. Мэзона У.П. – М.: Мир. – 1966. – Т. 1. – Ч. А. – С. 140 – 203.
124. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. - М.: Мир, 1974. – 327 с.
125. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам / С.Е. Михайлов // МТТ. – 1979. – № 5. – С. 103 – 110.
126. Моисеенко И.А. Компьютерное моделирование процессов распространения упругих волн в полом трансверсально-изотропном цилиндре с жидкостью / И.А. Моисеенко, А.И. Дзундза, В.А. Моисеенко. // Современные проблемы концентрации напряжений. Труды международной научной конференции (Донецк, 21-25 июня 1998 г.). – Донецк : ДонГУ, 1998. – С. 79-83.
127. Моисеенко В.А. Исследование структуры частотного спектра цилиндрического волновода с жидкостью / В.А. Моисеенко, И.А. Моисеенко, А.И. Дзундза. // Вестник Донбасской государственной академии строительства и архитектуры. Проблемы фундаментальных та прикладных досліджень у будівельному комплексі. Збірник наукових праць. № 99-1(15), лютий 99., 1999. – С. 169-174.
128. Моисеенко И.А. Эффекты взаимодействия упругих волн с заполненной жидкостью туннельной полостью / И.А. Моисеенко, Т.В. Волобуева, А.И. Дзундза. // Материалы XI Международной научной школы им.

- академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». (Симферополь, сентябрь 2001 г.). – 2001. – С. 57.
129. Моисеенко И.А. Дисперсионное соотношение для упругого кристаллического волноводного канала секторного сечения в абсолютно жестком массиве / И.А. Моисеенко, В.А. Цапов, В.И. Сторожев // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць. Ін-т геотехнічної механіки НАН України. – Дніпропетровськ-Сімферополь, 2002. – Вип. 34. – 256 с. – С. 201–206.
130. Моисеенко В.А. Исследование структуры спектров продольных и низших изгибных нормальных волн в трансверсально-изотропном волноводе с жидким заполнителем / В.А. Моисеенко, И.А. Моисеенко. // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 190–194.
131. Моисеенко И.А. Моды распространяющихся нормальных волн в трансверсально-изотропном цилиндре секторного сечения / И.А. Моисеенко, В.В. Пузырев. // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 182-187.
132. Моисеенко И.А. Об одной задаче исследования структуры спектров нормальных волн в цилиндрическом волноводе с жидким заполнителем / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко. // Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції «Динаміка наукових досліджень'2004». – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. – Т. 66: Математика. – С. 65-66
133. Моисеенко И.А. Матричные базисные решения внутреннего типа для приведённых к специальному виду систем дифференциальных уравнений эллиптического типа / И.А. Моисеенко. // Труды ИПММ. – 2005. – Т. 11. – С. 84-98.
134. Моисеенко И.А. Дисперсионные, кинематические и энергетические свойства нормальных волн в трансверсально изотропном цилиндрическом волноводе секторного сечения с варьируемой угловой мерой выреза / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян // Консонанс – 2005: Акустический симпозиум, 27-29 сент. 2005 г.

– К.: ИГМ НАН Украины. – С. 231-236.

135. Моисеенко И.А. Итерационно-матричный алгоритм интегрирования уравнений волновой динамики анизотропных сред / И.А. Моисеенко. // Устойчивость, управление и динамика твёрдого тела. IX Международная конференция (Донецк, 1-6 сентября 2005 г.). Тезисы докладов. – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики, 2005. – С.111-112.
136. Моисеенко И.А. Решение задач динамики для анизотропных сред с использованием матричной формы базисных решений волновых уравнений / И.А. Моисеенко. // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: IV Международная научная конференция, посвященная памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского: Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006г.: материалы – Донецк: Юго-Восток, 2006. – 322 с. – С. 265-267.
137. Моисеенко И.А. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с сечением в форме кольцевого сектора / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян. // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 127-133.
138. Моисеенко И.А. Базисные матричные решения для специального вида систем дифференциальных уравнений в частных производных / И.А. Моисеенко. // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Том III (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2006. – 233 с. – С. 151-152.
139. Моисеенко И.А. Нормальные волны в аксиально-анизотропных цилиндрических волноводах составного и кольцевого сечения с секторными вырезами / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: IV Международная научная конференция, посвященная памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского: Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006г.: материалы – Донецк: Юго-Восток, 2006. – 322 с. – С. 268-270.

140. Моисеенко И.А. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с секторным вырезом: случай свободных участков цилиндрических границ / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А. Естественные науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 52-59.
141. Моисеенко И.А. Дисперсионный спектр нормальных волн для анизотропного цилиндрического волновода с жесткозакрепленным секторным вырезом в сечении / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян // Консонанс – 2007: Акустический симпозиум, 25-27 сент. 2007 г.: тезисы докл. – К., 2007. – С. 31.
142. Моисеенко И.А. Нормальные волны в трансверсально-изотропном цилиндрическом волноводе с секторным вырезом в сечении при жестком закреплении всех участков границы / И.А. Моисеенко, Р.Р. Троян. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А. Естественные науки. – 2008. – Вып. 1. – С. 207-210.
143. Моисеенко І.О. Базисні розв'язки системи рівнянь хвильового деформування п'єзокристалічного середовища в комплексних вектор-функціях / І.О. Моисеенко, Н.В. Приходько. // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. Труды VII Международной научной конференции (п. Мелекино, 11-14 июня 2013 г.). – Т. 2. – Донецк: ДонНУ, 2013. – 227 с. – С. 71-74.
144. Моисеенко Ігор Аналітико-числовий аналіз проблеми поширення пружних хвиль вздовж виготовлених з низько симетричних кристалів циліндрів гладких криволінійних перерізів / Ігор Моисеенко, Валерій Сторожев. // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. ІХ Міжнародна наукова конференція, м. Львів, 15-19 вересня 2014 р., Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Подстригача, 2014, 412 с. – С. 71-73.
145. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн кручения в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – №. 9 (55).

- С. 139-145.
146. Моисеенко И.А. Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 132-139.
147. Моисеенко И.А. Подмножества критических частот нормальных волн в ортотропном призматическом волноводе равностороннего треугольного сечения / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев, М.Н. Чернов. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А. Естественные науки. – 2014. – № 2. – С. 49-53.
148. Моисеенко И.А. Получение дисперсионных соотношений для пьезокристаллических цилиндров с гладким криволинейным сечением: метод рядов по экспоненциальным базисным решениям волновых уравнений / И.А. Моисеенко, Н.В. Приходько. // Труды XVII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». г. Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г. в 2 т. – Ростов-на-Дону. Издательство Южного федерального университета, 2014. – Т. 2. – 234 с. С. 113-117.
149. Моисеенко И.А. Спектры нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных волноводах секторного сечения с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко. // Труды ИПММ. – 2015. – Т. 29. – С. 100-113.
150. Моисеенко И.А. Продольные волны в экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: Запорізький національний університет. – 2015. – № 3. – С. 179-189.
151. Моисеенко И.А. Дисперсия продольных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах из экспоненциально-неоднородных материалов / И.А. Моисеенко. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара,

- пос. Дивноморское, 25-30 мая 2015 г. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2015. – 146 с. – С. 73.
152. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 112-124.
153. Моисеенко И.А. Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 134-146.
154. Моисеенко И.А. Кинематические характеристики нелинейных ангармонических возмущений для монохроматических нормальных волн кручения в анизотропных цилиндрах из Gd и Tb / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев, О.Ю. Сидаш. // Современные проблемы механики сплошной среды: труды XVIII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университет, 2016. Т. 2. – 266 с. – С. 102-106.
155. Моисеенко И.А. Продольные волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах с жидкостным заполнением / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев. // История и методология науки: Материалы Международной научно-методической конференции, посвященная 100-летию со дня рождения А.И. Бородина. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2016. – 216 с. – С. 79-81.
156. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн в трансверсально изотропном радиально-неоднородном полом цилиндре с секторным вырезом / И.А. Моисеенко, Вит.В. Волчков. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 4. – С. 35-49.
157. Моисеенко И.А. Спектры продольно-сдвиговых волн в трансверсально изотропных полых цилиндрах с функционально-градиентной радиальной неоднородностью / И.А. Моисеенко. // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной



- конференции, г. Донецк, 16-18 мая 2016 г. – Том 1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – 393 с. – С. 36-38.
158. Моисеенко И.А. Спектры продольных волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных цилиндрах с жидкостным заполнением / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 2. – С. 17-28.
159. Моисеенко И.А. Кинематические характеристики нелинейных ангармонических возмущений для монохроматических нормальных волн кручения в анизотропных цилиндрах из Gd и Tb / И.А. Моисеенко, О.Ю. Сидаш, В.И. Сторожев. // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XVIII Международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2016. – 168 с. – С. 124.
160. Моисеенко И.А. Анализ нелинейных вторых гармоник для волн кручения вдоль трансверсально-изотропного цилиндра / И.А. Моисеенко, О.Ю. Сидаш. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов XI Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 23-27 мая 2016 г., Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону: Изд. Южного федерального университета, 2016. – 154 с. – С. 87.
161. Моисеенко И.А. Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван. // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 27-41.
162. Моисеенко И.А. Нормальные волны вдоль ортотропных функционально-градиентных цилиндров секторного поперечного сечения / И.А. Моисеенко. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 4. – С. 41-53.
163. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально

- изотропных функционально градиентных цилиндров / И.А. Моисеенко. // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37-54.
164. Моисеенко И.А. Распространение волн в анизотропных неоднородных цилиндрах секторного сечения со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью / И.А. Моисеенко, Е.С. Кисель. // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2018. – № 2. – С. 36-53.
165. Моисеенко И.А. Базисные решения волновой динамики в задачах о распространении упругих волн в полых цилиндрах из функционально-градиентных материалов / И.А. Моисеенко, С.А. Прийменко. // Сборник материалов III международной научно – практической конференции «Приоритетные направления развития современной науки: от теории к практике» по итогам 2017 года. – Троицк: ТФ ЧелГУ, 2018. – 311 с. – С. 166-171.
166. Моисеенко И.А. Анализ модели нелинейных ангармонических возмущений для волн кручения в трансверсально-изотропном цилиндре с мембранным покрытием граничной поверхности / И.А. Моисеенко, О.Ю. Сидаш. // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2018: VII Международная научно-практическая интернет-конференция, 25 мая 2018 г. – Донецк : ГОУ ВПО «ДонНУЭТ», 2018. – 117 с. – С. 17-20.
167. Наседкин А.В. Общие теоремы о переносе энергии однородными волнами / А.В. Наседкин // ПММ. – 1993. – Т. 57, № 5. – С. 105 – 112.
168. Наседкин А.В. Определение спектральных характеристик упругих волноводов методом конечных элементов / А.В. Наседкин // Современные проблемы математического моделирования. Тр. VIII Всеросс. шк.-семинара / Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. гос. ун-та, 1999. – С. 181 – 188.
169. Наседкин А.В. Общая форма соотношений ортогональности однородных решений в волноводах / А.В. Наседкин // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2000. – № 3. – С. 104 – 106.
170. Новицкий Д.Л. Распространение продольных волн в стержне, обладающем цилиндрической ортотропией / Д.Л. Новицкий // Конструирование и

- технологии машиностроения. – 1967. – № 3. – С.33-38.
171. Панфилов И.А. Исследование гармонических колебаний полого цилиндра с винтовой анизотропией на основе трехмерных уравнений теории упругости / И.А. Панфилов, Ю.А. Устинов // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Том 13, Вып. 2. – С.35 – 44.
172. Папков С.О. Регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений в случае длиннопериодных деформаций призмы / С.О. Папков, В.Н. Чехов // Учен. зап. Тавр. нац. ун-та. – 2001. – №14 (53). – С. 81 – 86.
173. Папков С.О. О локализации собственных частот упругих волн / С.О. Папков, В.Н. Чехов // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 140 – 147.
174. Папков С.О. Исследование регулярности бесконечной системы алгебраических уравнений и определение критических нагрузок в задаче об устойчивости сжатой прямоугольной пластины / С.О. Папков, В.Н. Чехов // Доповіді НАН України. – 2012. – №12. – С.55 – 60.
175. Партон В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
176. Петрищев О.Н. Электромагнитное возбуждение ультразвуковых продольных волн в изотропных металлических цилиндрах. Часть 1. Расчет амплитудных множителей нормальных волн и определение частотной характеристики ультразвукового преобразователя / О.Н. Петрищев // Акустичний вісник. – 2007. – Том 10, N 1. – С. 54 – 68.
177. Полуказакова М.С. Потoki мощности нормальных магнитоупругих волн в слое пьезомагнитного кристалла / М.С. Полуказакова, И.А. Моисеенко, Ю.П. Бай. // Актуальные проблемы механики деформируемого твёрдого тела: Материалы IV Международной научной конференции, посвящённой памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского (Донецк–Мелекино, 12–14 июня 2006 г.). – Донецк: ООО «Юго–Восток Лтд». – 2006. – 322 с. – С. 295 – 297.
178. Провоторов В.В. Граничное управление волновой системой в пространстве обобщенных решений на графе / В.В. Провоторов, Ю.А. Гнилицкая // Вестн.

- С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. – 2013. – № 3. – С. 112–120.
179. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Динамика упругих тел / Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А. и др. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 286 с.
180. Рамская Е.И. Распространение неосесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндра / Е.И. Рамская, Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 9–13.
181. Речицкий В.И. Акустоэлектронные радиокомпоненты. Схемы, топология, конструкции / В.И. Речицкий. – М.: Радио и связь. – 1987. – 192 с.
182. Ромащенко В.А. Численное исследование нелинейной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров / В.А. Ромащенко // Проблемы прочности, 2008. – № 6. – С.110 – 121.
183. Ромащенко В.А. Численное исследование нелинейной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров // Проблемы прочности. – 2008. – № 6. – С.110–121.
184. Рущицкий Я.Я. Явление самопереключения волн в материалах: постановка, базовые уравнения и их точное решение / Я.Я. Рущицкий // Прикл. мех. – 2000. – Т. 36, № 13. – С. 1 – 9.
185. Смоктий О.Д. Эффект краевого резонанса при возбуждении осесимметричных волн в полубесконечном трансверсально–изотропном цилиндре / О.Д. Смоктий, И.А. Моисеенко. // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 215 – 223.
186. Спринжук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений. / В.Г. Спринжук. М.: Наука, 1977. – 144 с.
187. Сторожев В.И. Анализ модели нелинейного взаимодействия нормальных волн кручения в трансверсально изотропных цилиндрах / В.И. Сторожев, И.А. Моисеенко, О.Ю. Сидаш. / Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XII Всероссийской школы–семинара (пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017

- г.). – Ростов–на–Дону; Таганрог: Изд. Южного федерального университета. – 2017. – 178 с. – С. 139.
188. Сторожев В.И. Кинематические характеристики нормальных упругих волн в протяженных функционально-градиентных ортотропных цилиндрах секторного поперечного сечения / В.И. Сторожев, И.А. Моисеенко. // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XIII Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 31 мая – 3 июня 2018 г.) / Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд. Южного федерального университета, 2018. – 108 с. – С. 83.
189. Туляков Д.Н. Асимптотики решений рекуррентных соотношений / Д.Н. Туляков. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук. – Москва. – 2011. – 236 с.
190. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов / Г. Хантингтон // Успехи физ. наук. – 1961. – Т.74, № 2. – С. 303 – 352.
191. Чехов В.Н. О предельных значениях лимитант Кояловича / В.Н. Чехов, А.В. Пан // Доклады НАН Украины. – 2007. – № 2. – С.31 – 36.
192. Чехов В.Н. Об улучшении сходимости рядов для бигармонической задачи в прямоугольнике / В.Н. Чехов, А.В. Пан // Динамические системы. – 2008. – Вып. 25. – С. 135 – 144.
193. Чехов В.Н. К оценкам сейш в бухтах Крыма методом конечных элементов / В.Н. Чехов, В.А. Лушников // Динамические системы. – 2015. – Т. 5(33), №1-2. – С. 93 – 102.
194. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
195. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга. // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 9. – С. 14–18.
196. Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных упругих волн в

- анизотропном полом цилиндре / Н.А. Шульга, А.Я. Григоренко, Т.Л. Ефимова. // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22. – № 8. – С. 118-121.
197. Шульга В.М. О распространении волн в ортотропном цилиндре с жидкостью / В.М. Шульга, О.М. Шульга // Прикладная механика. – 2003. – 39, №6. – С.126 – 132.
198. Шутилов В.А. Основы физики ультразвука / В.А. Шутилов. – Л.: Изд.-во Ленинградского ун-та. – 1980. – 280 с.
199. Abd-Alla A.M. Effect of non-homogeneity on the composite infinite cylinder of isotropic material / A.M. Abd-Alla, T.A. Nofal, A.M. Farhan // Physics Letters – 2008. – A 372. – P. 4861 – 4864.
200. Abd-Alla A.M. Effect of non-homogeneity on the composite infinite cylinder of orthotropic material / A.M. Abd-Alla, A.M. Farhan // Physics Letters – 2008. – A 372. – P. 756 – 760,
201. Abd-Alla A.M. Effect of the Rotation on the Radial Vibrations in a Non-Homogeneous Orthotropic Hollow Cylinder / A.M. Abd-Alla, S.R. Mahmoud, N.A. AL-Shehri // The Open Mechanics Journal. – 2010. – V.4. – P. 58 – 64.
202. Abd-Alla A.M. Analytical solution of wave propagation in a non-homogeneous orthotropic rotating elastic media / A.M. Abd-Alla, S.R. Mahmoud // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2012. – V.26 (3). – P. 917 – 926.
203. Abd-Alla A.M. The Dispersion Relation of Flexural Waves in a Magnetoelastic Anisotropic Circular Cylinder / A.M. Abd-Alla, Fatimah Alshaikh // Advances in Physics Theories and Applications. – 2013. – Vol. 13. – P. 20 – 33.
204. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach. – North Holland, Amsterdam. – 1973. – 436 p.
205. Adem J. On the axially-symmetric steady wave propagation in elastic circular rods / J. Adem // Quart. Appl. Math. – 1954. – V. 12. – P.261 – 275.
206. Adnan H. General study of axisymmetric waves in layered anisotropic fibers and their composites / H. Adnan, N.B. Nagy, P.B. Nagy // J. Acoustical Society of America. – 1996. – V.99 (2). – P. 931 – 941.
207. Ahmad F. Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid /

- F.Ahmad. // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2001.– Vol. 109, N 3.– P. 886–890.
208. Al–Basyouni K.S. Effect of rotation, magnetic field and a periodic loading on radial vibrations thermo–viscoelastic non–homogeneous media / Khalil S. Al–Basyouni, Samy R. Mahmoud, Ebraheem O. Alzahrani // *Boundary Value Problems.* – 2014. – P. 1 – 11.
209. Al–Mousawi M.M. On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagation: an annotated bibliography / M.M. Al–Mousawi // *Appl. Mech. Reviews.* – 1986. – V.39. – P. 853 – 864.
210. Alshits V.I. Cylindrically anisotropic, radially inhomogeneous elastic materials / V.I. Alshits, H.O.K. Kirchner // *Proceeding of Royal Society of London.* – 2001. – A 457. – P. 671 – 693.
211. Ansari R. Dynamic analysis of multi–layered filament–wound composite pipes subjected to cyclic internal pressure and cyclic temperature / R. Ansari, F. Alisafaei, P. Ghaedi // *Composite Structures.* – 2010. – V.92. – P. 1100 – 1109.
212. Auld B.A. *Acoustic Fields and Waves in Solids* / B.A. Auld. – New York: Wiley Intersciences, 1973. – Vol 1. – 423 p. – Vol 2. – 346 p.
213. Babaei M.H. Transient Hyperbolic Heat Conduction in a Functionally Graded Hollow Cylinder / M.H. Babaei, Zengtao Chen // *Journal of Thermophysics and Heat Transfer.* – 2010. – Vol. 24, № 2. – P. 325 – 330.
214. Baik K. Theoretical Investigation of Phase Velocity, Group Velocity and Attenuation of Acoustic Waves in a Liquid–Filled Cylinder / K. Baik, J. Jiang, T.G. Leighton // *ISVR Technical Report.* – 2009. – №329. – P. 1 – 40.
215. Bamberger A. Mathematical Analysis of the Propagation of Elastic Guided Waves in Heterogeneous Media / A. Bamberger, Y. Dermenjian, P. Joly // *J. Diff. Eqns.* – 1990. – V. 88. – P. 113 – 154.
216. Bamberger A. Propagation of Elastic Surface Waves along a Cylindrical Cavity of Arbitrary Cross Section / A. Bamberger, P. Joly, M. Kern // *Mathematical Modelling and Numer.* – 1991 – Anal. 25. – P. 1 – 30.
217. Barnett D.M. *Bulk, Surface and Interfacial Waves in Anisotropic Linear Elastic Solids* / D.M. Barnett // *Int. J. Solids and Struct.* – 2000. – V. 37 – P. 45–54.

218. Baron C. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum / C. Baron // *Ultrasonic*. – 2011. – V. 51. – P. 123 – 130.
219. Baron C. Ultrasonic guided waves in cortical bone modeled as a functionally graded anisotropic tube / C. Baron // *Proceedings of the Acoustics 2012 Nantes Conference*, 23 – 27 April 2012, Nantes, France. – P. 1727 – 1732.
220. Barshinger James N. Guided Wave Propagation in an Elastic Hollow Cylinder Coated with a Viscoelastic Material / James N. Barshinger, Joseph L. Rose // *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*. – 2004. – Vol. 51, № 11. – P. 1547 – 1556.
221. Batra R.C., Iaccarino G.L. Exact solutions for radial deformations of a functionally graded isotropic and incompressible second-order elastic cylinder / R.C. Batra, G.L. Iaccarino // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2008. – V. 43. – P. 383 – 398.
222. Bednarik M. Propagation of nonlinear acoustic plane waves in an elastic gas-filled tube / M. Bednarik, M. Cervenka // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2009. – Vol. 126. I. 4. – P. 1681 – 1689.
223. Benveniste Y. On effective properties of composites with coated cylindrically orthotropic fibers / Y. Benveniste, G.J. Dvorak, T. Chen // *Mechanics of Materials*. – 1991. – V 12. – P. 289 – 297.
224. Berliner M.J. Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part I. Analytical formulation / M.J. Berliner, R. Solecki. // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1996. – Vol. 99, N 4, Pt. 1. – P. 1841–1847.
225. Berliner M.J. Wave propagation in fluid-loaded, transversely isotropic cylinders. Part II. Numerical results / M.J. Berliner, R. Solecki. // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1996. – Vol. 99, N 4, Pt. 1. – P. 1848–1853.
226. Bhaskar K. Exact Elasticity Solution for Laminated Anisotropic Cylindrical Shells / K. Bhaskar, T.K. Varadan // *ASME J. Appl. Mech.* – 1993. – V 60(1). – P. 41 – 47.
227. Biot M.A. Propagation of Elastic Waves in a Cylindrical Bore Containing a Fluid / M.A. Biot // *J. Appl. Phys.* – 1952. – V. 23. – P. 997 – 1005.
228. Birman V. Exact solution of axisymmetric problems of laminated cylindrical shells



- with arbitrary boundary conditions – higher order theory / V. Birman // *Mechanics Research Communications*. – 1992. – V. 19. – P. 219 – 225.
229. Biryukov S.V. *Surface Acoustic Waves in Inhomogeneous Media* / S.V. Biryukov, Yu.V. Gulyaev, V.V. Krylov, V.P. Plessky // Springer–Verlag: Berlin Heidelberg New York. – 1994. – P. 1 – 15.
230. Bodig J. *Mechanics of Wood and Wood Composites* / J. Bodig, B.A. Jayne – New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. – 712 p.
231. Bostrom A. Propagation of Elastic Surface Waves along a Cylindrical Cavity and Their Excitation by a Point Force / A. Bostrom, A. Burden // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1982. – V. 72. – P. 998 – 1004.
232. Bostrom A. Elastic wave propagation in a radially anisotropic medium / A. Bostrom, M. Johansson, T. Svedberg // *Geophys. J. Int.* – 1994. – V. 118. – P. 401 – 410.
233. Bostrom A. On wave equations for elastic rods / A. Bostrom // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2000. – V.80. – P. 245 – 251.
234. Burden A.D. The Null–Field Approach and the Propagation of Elastic Surface Waves along Cylindrical Cavities / A.D. Burden // *Appl. Scientific Res.* – 1985. – V. 42. – P. 333 – 346.
235. Burden A.D. The Propagation of Elastic Surface Waves along Cylindrical Cavities of General Cross Section / A.D. Burden // *Wave Motion*. – 1985. – V. 7. – P. 153 – 168.
236. Carcione J.M. Torsional waves in lossy cylinders / J.M. Carcione, G. Seriani // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1998. – Vol. 103, No. 2. – P. 760 – 766.
237. Cavalcante M. Parametric formulation of the finite–volume theory for functionally graded materials–part i: Analysis / M. Cavalcante, S. Marques, M.–J. Pindera // *Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME*. – 2007. – V. 74 (5). – P. 935 – 945.
238. Cés M. Characterization of mechanical properties of a hollow cylinder with zero group velocity Lamb modes / M. Cés, D. Royer, C. Prada // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2012. – V. 132(1). – P.180 – 185.

239. Chadwick P. Foundations of the Theory of Surface Waves in Anisotropic Elastic Materials / P. Chadwick, G.D. Smith // *Advances in Appl. Mech.* – 1977. – V. 17. – P. 303 – 376.
240. Chang J. The ultrasonic wave propagation in composite material and its characteristic evaluation / J. Chang, C. Zheng, Q.-Q. Ni // *Composite Structures.* – 2006. – V. 75. – P. 451 – 456.
241. Chen T. Stress fields in composites reinforced by coated cylindrically orthotropic fibers / T. Chen, G.J. Dvorac, G.J. Benveniste // *Mechanics of Materials.* – 1990. – V. 9. – P. 17 – 32.
242. Chen T. Mori–Tanaka Estimates of the Overall Elastic Moduli of Certain Composite Materials / T. Chen, G.J. Dvorac, G.J. Benveniste // *Journal of Applied Mechanics.* – 1992. – Vol. 59. – P. 539 – 546.
243. Chen T. Transport properties of composites consisting of periodic arrays of exponentially graded cylinders with cylindrically orthotropic materials / Tungyang Chen, Hsin–Yi Kuo // *Journal of applied physics.* – 2005. – V. 98. – P. 1 – 8.
244. Chen W.Q. Three–dimensional vibration analysis of fluid–filled orthotropic FGM cylindrical shells / W.Q. Chen, Z.G. Bian, H.J. Ding // *International Journal of Mechanical Sciences.* – 2004. – V. 46. – P.159 – 171.
245. Chou F.–H. Three–dimensional vibrations of orthotropic cylinders / F.–H. Chou, J.D. Achenbach // *Proc. ASCE. J. Engng. Mech. Div.* – 1972. – V. 98. – P. 813 – 822.
246. Chou Y–F. Low frequency wave modes of liquid–filled flexible tubes / Yuan–Fang Chou, Tzu–Huan Peng // *Journal of Physics: Conference Series* 633. – 2015. P. 1 – 7.
247. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar / C. Chree // *Quart. J. Pure Appl. Math.* – 1886. – V. 21. – P. 287 – 298.
248. Curtis C.W. Second mode vibrations of the Pochhammer–Chree frequency equation / C.W. Curtis // *J. Appl. Phys.* – 1954. – V.25. – P. 928.
249. Dai H.-L. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015 / H.-L. Dai, Y.-N. Rao, T. Dai. //

- Composite Structures. – 2016. – № 152. – P. 199-225.
250. Damljanovi V. Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross section / V. Damljanovi, R. L. Weaver // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – Vol. 115, N 4. – P. 1572-1581.
251. Daniel I.M. Engineering Mechanics of Composite Materials, 2nd ed. / I.M. Daniel, O. Ishai – New York: Oxford University Press, 2006. – 186 p.
252. Datta S.K. Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
253. Dayal V. Longitudinal waves in homogenous anisotropic cylindrical bars immersed in fluid / V. Dayal. // J. Acoust. Soc. Am. – 1993.– Vol. 93, N 3.– P. 1249– 1255.
254. Del Grosso V.A. Analysis of multimode acoustic propagation in liquid cylinders with realistic boundary conditions - application to sound speed and absorption measurements / V.A. Del Grosso. // Acustica, – 1971. – Vol. 24, № 6. – P. 299 – 311.
255. Djili Sonia. Propagation of Guided Waves in a Hollow Circular Cylinder Application to non Destructive Testing / Sonia Djili, Fouad Boubenider. // EPJ Web of Conferences 6, 15004. – 2010. – P. 1 – 10.
256. D'ottavio M. Closed-form solutions for the free-vibration problem of multi-layered piezoelectric shells / M. D'ottavio, D. Ballhause, B. Kroplin, E. Carrera // Computers and Structures. – 2006. – V. 84. – P. 1506 – 1518.
257. Elmaimouni L. Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach / L. Elmaimouni, J.E. Lefebvre, V Zhang., T. Gryba // N D T & E International. – 2005. – V. 38. – P. 344 – 353.
258. El-Raheb M. Transient waves in an inhomogeneous hollow infinite cylinder / M. El-Raheb // International Journal of Solids and Structures. – 2005. – V. 42. – P. 5356 – 5376.
259. England A.H. On Stress Singularities in Linear Elasticity / A.H. England // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – Vol. 9. – № 6. – P. 571 – 585.

260. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer / X.-Q. Fang // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – Vol. 45. – P. 5716–5729.
261. Fang X.-Q. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, X.-H. Wang, L.-L. Zhang // *Phil. Mag. Lett.* – 2010. – Vol. 90. – P. 361–380.
262. Fang X.-Q. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // *Mater. Struct.* – 2011. – Vol. 44. – P. 67–75.
263. Functionally graded materials: design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford (Eds.). – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
264. Field G.S. Velocity of sound in cylindrical rods / G.S. Field // *Canadian J. Research.* – 1931. – V. 5. – P. 619 – 624.
265. Field G.S. Longitudinal waves in cylinders of liquid, in hollow tubes and in solid rods / G.S. Field // *Canadian J. Research.* – 1934. – V. 11. – P. 254 – 263.
266. Field G.S. Dispersion of supersonic waves in cylindrical rods / G.S. Field // *Phys. Rev.* – 1940. – V. 57. – P. 1188.
267. Fritz I.J. Third-Order Elastic Constants for Materials with Transversely Isotropic Symmetry / I.J. Fritz // *Journal of Applied Physics.* – 1977. – V.48. – P. 812 – 814.
268. Gasik M. FGM components: PM meets the challenge / M. Gasik, N. Cherradi, A. Kawasaki // *Metal Powder Report.* – 1996. – V. 51. – P. 28 – 32.
269. Gillis P. Orthotropic elastic constants of wood / P. Gillis // *Wood Science and Technology.* – 1972. – V. 6. – P. 138 – 156.
270. Graff K.F. Wave motion in elastic solids / K.F. Graff. – Oxford: Clarendon press. – 1975. – 649 p.
271. Green W.A. Dispersion relations for elastic waves in bars / W.A. Green // I.N. Sneddon, R. Hill (Eds.), *Progress in Solid Mechanics*, vol. I, North-Holland, Amsterdam. – 1960. – P. 223 – 261.
272. Han X. Transient waves in a functionally graded cylinder / X. Han, G.R. Liu,

- Z.C. Xi, K.Y. Lam // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – V. 38. – P. 3021 – 3037.
273. Herve E. Elastic behavior of multiply coated fiber reinforced composites / E. Herve, A. Zaoui // *International Journal of Engineering Science*. – 1995. – V. 33. – P. 1419 – 1433.
274. Holden A.H. Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and slabs / A.H. Holden // *Bell System Tech. J.* – 1951. – V. 30. – P. 956 – 969.
275. Holst A. Edge resonance in an elastic semi-infinite cylinder / A. Holst, D. Vassiliev // *Appl. Analysis*. – 2000. – V. 74. – P. 479 – 495.
276. Holzapfel G.A. Modeling the layer-specific three-dimensional residual stresses in arteries, with an application to the human aorta / G.A. Holzapfel, R.W. Ogden // *Journal of the Royal Society Interface*. – 2010. – V.7. – P. 787 – 799.
277. Honarvar F. Guided ultrasonic waves in composite cylinders / F. Honarvar, E. Enjilela, A.N. Sinclair // *Mechanics of Composite Materials*. – 2007. – V. 43 (3). – P. 277 – 288.
278. Honarvar F. Wave propagation in transversely isotropic cylinders / F. Honarvar, E. Enjilela, A.N. Sinclair, A. Mirnezami. // *International Journal of Solids and Structures*. – 2007. – V. 44. – P. 5236 – 5246.
279. Hosseini-Toudeshky H. Sound transmission into a thick hollow cylinder with fixed-end boundary condition / H. Hosseini-Toudeshky, M.R. Mofakhami, Sh. Hosseini Hashemi // *Applied Mathematical Modelling*. – 2009. – V. 33. – P. 1656 – 1673.
280. Huang C.H. Analysis of laminated circular cylinders of materials with the most general form of cylindrical anisotropy. Part I: Axially symmetric deformations / C.H. Huang, S.B. Dong // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – V. 38. – P. 6163 – 6182.
281. Hudson G.E. Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders / G.E. Hudson // *Phys. Rev.* – 1943. – V. 63. – P. 46 – 51.
282. Hull Andrew J.A. Dynamic Model of an Axisymmetric, Transversely Isotropic, Fluid-Loaded, Fully Elastic Cylindrical Shell / Andrew J.A. Hull // *NUWC-NPT*

- Technical Report. – 2010. – P. 1 – 31.
283. Hutchinson J.R. Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod / J.R. Hutchinson, C.M. Percival // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1968. – V. 44. – P. 1204 – 1210.
284. Jin Y. Time Reversal Data Communications on Pipes Using Guided Elastic Waves – Part I: Basic Principles / Yuanwei Jin, Deshuang Zhao, Yujie Ying // *Proc. of SPIE.* – 2011. – Vol. 7984. – P. 1 – 12.
285. Jolicoeur C. Analytical solution for bending of coaxial orthotropic cylinders. / C. Jolicoeur, A. Cardou // *J. Eng. Mech.* – 1994. – V. 120(12). – P. 2556 – 2574.
286. Kardomateas G.A. Bending of a cylindrically orthotropic curved beam with linearly distributed elastic constants / G.A. Kardomateas // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1990. – Vol. 43, Pt. 1. – P. 43 – 55.
287. Kardomateas G.A. Bifurcation of equilibrium in thick orthotropic cylindrical shells under axial compression / G.A. Kardomateas // *Journal of Applied Mechanics.* – 1995. – Vol. 62. – N. 1. – P. 43 – 52.
288. Keck H.E. Wave Propagation in transversely isotropic, layered cylinders / H.E. Keck, A.E. Armenakas // *Polytechnic Institute of Brooklyn.* – 1970. – P. 1–23.
289. Kepceler Tamer. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface / Tamer Kepceler // *Applied Mathematical Modeling.* – 2010. – V. 34. – P. 4058 – 4073.
290. Khajeh E. Guided Wave Propagation in Complex Curved Waveguides I: Method Introduction and Verification / E. Khajeh, L. Breon, J.L Rose // *Engineering Science & Mechanics Department, The Pennsylvania State University, University Park.* – 2012. – P.1–23.
291. Koizumi M. FGM activities in Japan / M. Koizumi // *Composites Part B: Engineering.* – 1997. – V. 28. – P. 1 – 4.
292. Kollar L.P. Stress analysis of anisotropic laminated cylinders and cylindrical segments / L.P. Kollar, G.S. Springer // *International Journal of Solids and Structures.* – 1992. – V. 29. – P. 1499 – 1517.

293. Kosmodamianskii A.S. Dispersion spectrum of an anisotropic waveguide with sector-shaped cross section and fixed boundary / A.S. Kosmodamianskii, I.A. Moiseenko, R.R. Troyan // *International Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 41, No. 9. – P. 995 – 999.
294. Kwun H. Dispersion of longitudinal waves propagating in liquid-filled cylindrical shells / Hegeon Kwun, Keith A. Bartels, Christopher Dynes // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 1999. V. 105, № 5. – P. 2601 – 2611.
295. Lafleur L.D. Low-frequency propagation modes in a liquid-filled elastic tube waveguide / L.D. Lafleur, F.D. Shields. // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1985. – Vol. 97, № 3. – P. 1435 – 1445.
296. Larbi W. A 3D state-space solution for free-vibrations analysis of a radially polarized laminated piezoelectric cylinder filled with liquid / W. Larbi, J.-F. Deu // *Journal of Sound and Vibration*. – 2011. – V. 330. – P. 162 – 181.
297. Laurent J. Laser induced Zero-Group Velocity resonances in Transversely Isotropic cylinder / Jérôme Laurent, Daniel Royer, Takasar Hussain, Faiz Ahmad, Claire Prada // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2015. – V. 137, N6. – P. 3325 – 3334.
298. Loy C.T. Vibration of functionally graded cylindrical shells / C.T. Loy, K.Y. Lam, J.N. Reddy // *International Journal of Mechanical Sciences* – 1999. – V. 41 – P. 309 – 24.
299. Lubarda V.A. On Pressurized Curvilinearly Orthotropic Circular Disk, Cylinder and Sphere Made of Radially Nonuniform Material / Vlado A. Lubarda // *Journal of Elasticity*. – V. 109(2). – P. 103 – 133.
300. Mahmoud S.R. Wave Propagation in Cylindrical Poroelastic Dry Bones / S.R. Mahmoud // *Applied Mathematics & Information Sciences*. – 2010. – V. 4(2). – P. 209 – 226.
301. Mahmoud S.R. Effect of the initial stress and rotation on free vibrations in transversely isotropic human long dry bone / S.R. Mahmoud, M. Marin, K.S. Al-Basyouni // *An. St. Univ. Ovidius Constantia* 2015. – Vol.23(1). – P.171–184.
302. Markus S. Axisymmetric and asymmetric wave motion in orthotropic cylinders / S. Markus, D.J. Mead // *J. Sound Vib.* – 1995. – V. 181. – P. 127 – 147.

303. Martin P.A. Waves in Wood: Elastic Waves in Cylindrically Orthotropic Materials / P.A. Martin, J.R. Berger // Department of Mathematical & Computer Sciences, Colorado School of Mines, Golden. – 2000. – P. 1 – 5.
304. Martin P.A. Waves in wood: free vibrations of a wooden pole / P.A. Martin, J.R. Berger // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2001. – V. 49. – P. 1155 – 1178.
305. Martin P.A. On Mechanical Waves along Aluminum Conductor Steel Reinforced (ACSR) Power Lines / P.A. Martin, J.R. Berger // J. Appl. Mech. – 2002. – V. 69. – P. 740 – 748.
306. Martin P.A. Waves in wood: axisymmetric guided waves along boreholes / P.A. Martin, J.R. Berger // The Chinese Journal of Mechanics. – 2003. – Series A. – Vol. 19, No. 1. – P. 105 – 111.
307. Martin P.A. Waves in wood: axisymmetric waves in slender solids of revolution / P.A. Martin // Department of Mathematical and Computer Sciences, Colorado School of Mines, Golden. – 2004. – P.387 – 398.
308. Mazuch T. Approximate modeling of influence on axisymmetric wave dispersion in an infinite hollow cylinder / T. Mazuch // Journal of Sound and Vibration. – 2001. – V. 245(4). – P. 611 – 631.
309. McNiven H.D. Axially symmetric waves infinite, elastic rods / H.D. McNiven, D.C. Perry // J. Acoust. Soc. Amer. – 1962. – V. 34. – P. 433 – 437.
310. McNiven H.D. Vibration and wave propagation in rods / H.D. McNiven, J.J. McCoy // R.D. Mindlin and applied mechanics. – New York: Pergamon. – 1974. – P. 197 – 226.
311. McNiven H.D. Literature review: approximate theories governing axisymmetric wave propagation in elastic rods / H.D. McNiven // Shock Vibr. Digest. – 1975. – V. 7. – P. 90 – 96.
312. Meeker T.R. Guided wave propagation in elongated cylinders and plates / T.R. Meeker, A.H. Meitzler // Physical acoustics. Principles and methods. – New York: Acad. Press. – 1964. – 1A. – P. 111 – 167.
313. Meitzler A.H. Mode coupling occurring in the propagation of elastic pulses in



- wires / A.H. Meitzler // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1961. – V. 33. – P. 435 – 445.
314. Meitzler A.H. Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates / A.H. Meitzler // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1965. – V.38. – P.835–842.
315. Miklowitz J. Recent developments in elastic wave propagation / J. Miklowitz // *Appl. Mech. Reviews.* – 1960. – V. 13. – P. 865 – 878.
316. Miklowitz J. The theory of elastic wave and waveguides / J. Miklowitz. – Amsterdam: North-Holland. – 1978. – 618 p.
317. Mindlin Ia.A. Free Elastic Waves on the Surface of a Tube of Infinite Thickness / Ia.A. Mindlin // *J. Appl. Math. Mech.* – 1963. – V. 27. – P. 823 – 828.
318. Mindlin R.D. Axially symmetric waves in elastic rods / R.D. Mindlin, H.D. McNiven // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1960. – V. 27. – P. 145 – 151.
319. Mirsky I. Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders. Part I: Theory / I. Mirsky. // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1965. – Vol. 37. – P. 1016 – 1026.
320. Moiseenko I.A. The analysis of full spectra of normal elastic waves in homogeneous and inhomogeneous anisotropic cylindrical waveguides of complex cross-section / I.A. Moiseenko, R.R. Troyan. // *Days on Diffraction'2006. International Seminar (Saint Petersburg, May 30–June 2). Abstracts.* – 2006. – P. 55 – 55.
321. Moiseyenko Igor A. Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonic for Guided Torsion Elastic Waves in Transversely Isotropic Cylinder / Igor A. Moiseyenko, Valeriy I. Storozhev, Oksana Yu. Sidash. // *Nonlinear Dynamics – 2016: Proceedings of 5-th International conference, Dedicated to the 90-th Anniversary of Academician V.L. Rvachev (September 27–30, 2016) / National Technical University “Kharkov Polytechnic Institute” et al.* – Kharkov. – 2016. – 538 p. –P. 457 – 464.
322. Mu J. Guided Wave propagation and focusing in viscoelastic multilayered hollow cylinders / J. Mu // *A Dissertation in Engineering Science and Mechanics.* – 2008. – 214 p.
323. Musgrave M.J.P. Crystal acoustics. Introduction to the study of elastic waves and vibrations in crystals / M.J.P. Musgrave. – San Francisco. – 1970. – 288 p.

324. Nagaya K. Stress wave propagation in a bar of arbitrary cross section // *J. Appl. Mech.* – 1982. – Vol. 49. – P. 157–164.
325. Nagy P.B. Longitudinal guided wave propagation in a transversely isotropic rod immersed in liquid / P.B. Nagy // *Journal of Acoustical Society of America.* – 1995. – V. 98(1). – P. 454 – 457.
326. Nakamura T. Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation / T. Nakamura, T. Wang, S. Sampath // *Acta Materialia.* – 2000. – V. 48. – P. 4293 – 4306.
327. Nayfeh A.H. General study of axisymmetric waves in layered anisotropic bars and their composites / A.H. Nayfeh, P.B. Nagy // *Journal of Acoustical Society of America.* – 1996. – V. 99(2). – P. 931 – 941.
328. Nie G.J. Exact Solutions and Material Tailoring for Functionally Graded Hollow Circular Cylinders / G.J. Nie, R.C. Batra // *J. Elast.* – 2010. – V. 99. – P. 179 – 201.
329. Norris A.N. Wave impedance matrices for cylindrically anisotropic radially inhomogeneous elastic solids./ A.N. Norris, A.L. Shuvalov // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 2010. – V. 63, N3. – P. 1 – 39.
330. Ohnabe H. On the propagation of flexural waves in anisotropic bars / H. Ohnabe, J.L. Nowinski // *Ingenieur Arch.* – 1971. – V. 40. – P. 327 – 338.
331. Oliver J. Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique / J. Oliver // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1957. – V. 29. – P. 189–194.
332. Onoe M. Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods / M. Onoe, H.D. McNiven, R.D. Mindlin // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1962. – V. 29. – P. 729 – 734.
333. Özbay A. Three dimensional vibration analysis of liquid-filled piping systems / Ahmet Özbay // Çukurova University. Institute of natural and applied sciences. PHD thesis– 2009. – P. 1 – 164.
334. Ozturk A. Torsional wave propagation in a pre-stressed circular cylinder embedded in a pre-stressed elastic medium / A. Ozturk, S.D. Akbarov // *Applied*

- Mathematical Modelling. – 2009. – V. 33. – P. 3636 – 3649.
335. Pao Y.–H. Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder / Y.–H. Pao, R.D. Mindlin // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1960. – V. 27. – P. 513 – 520.
336. Pao Y.–H. The dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder / Y.–H. Pao // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1962. – V. 29. – P. 61 – 64.
337. Pavlakovic B.N. . Leaky Guided ultrasonic Waves in NDT / B.N. Pavlakovic // Thesis PhD. – London: Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1998. – 228 p.
338. Pelletier J.L. An exact solution for the steady–state thermoplastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells / J.L. Pelletier, S.S. Vel // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – V. 43. – P. 1131 – 1158.
339. Pochhammer L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder / L. Pochhammer // J. Reine Angew. Math. – 1876. – V. 81. – P. 324 – 336.
340. Ponnusamy P. Wave Propagation in a Homogeneous Isotropic Cylindrical Panel Embedded on Elastic Medium / P. Ponnusamy, R. Selvamani // International journal of mathematics and scientific computing. – 2011. – Vol. 1, No. 2. – P. 106 –111.
341. Provotorov V.V. Optimal control of the linearized Navier–Stokes system in a netlike domain / V.V. Provotorov, E.N. Provotorova // Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. – 2017. – V. 13, №. 4. – P. 431 – 443.
342. Redwood M. Mechanical waveguides. The propagation of sonic and ultrasonic waves in fluids and solids with boundaries / M. Redwood. – Oxford–London–New York–Paris: Pergamon press. – 1960. – 250 p.
343. Ronveaux A. Heun’s Differential Equations / A. Ronveaux (ed.). – London: Oxford University Press. – 1995. – 354 p.
344. Rosenfeld G. Wave propagation in elastic rods of arbitrary cross section / G. Rosenfeld, J.B. Keller // J. Acoust. Soc. Am. – 1974. – V. 55. – P. 555 – 561.
345. Rosenfeld G. Wave propagation in non–uniform elastic rods / G. Rosenfeld,

- J.B. Keller // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1975. – V. 57. – P. 1094 – 1096.
346. Santatriniaina N. Axisymmetric free vibrations of multilayer orthotropic cylinder of infinite length interacting with internal fluid / N. Santatriniaina, F. Razafimahery, L. Rakotomanana // Preprint submitted to Elsevier. – 2011. – P. 1 – 27.
347. Selvamani R. Extensional Waves in a Transversely Isotropic Solid Bar Immersed in an Inviscid Fluid Calculated Using Chebishev Polynomails / R. Selvamani, P. Ponnusamy // *Materials Physics and Mechanics.* – 2013. – V. 16. – P. 82 – 91.
348. Shanker B. Vibrations in a Fluid–Loaded Poroelastic Hollow Cylinder Surrounded by a Fluid in Plane–Strain Form / B. Shanker, C.N. Nath, S.A. Shah, P.M. Reddy // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering.* – 2013. – Vol. 18, Issue 1. – P. 189 – 216.
349. Shariyat M. Nonlinear thermoelasticity, vibration, and stress wave propagation analyses of thick FGM cylinders with temperature–dependent material properties / M. Shariyat, M. Khaghani, S.M.H. Lavasani // *European Journal of Mechanics – A/Solids.* – 2010. – P. 1 – 41.
350. Shatalov M.Y. Analysis of non–axisymmetric wave propagation in a homogeneous piezoelectric solid circular cylinder of transversely isotropic material / Michael Y. Shatalov, Arthur G. Every, Alfred S. Yenwong–Fai // *International Journal of Solids and Structures.* – 2009. – № 46. – P. 837 – 850.
351. Shin H.J. Non–axisymmetric Guided Waves for Tubing Inspection / H.J. Shin, M.J. Quarry, J.L. Rose // *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation.* 1997. – Vol. 16. – P.1253–1260.
352. Shuvalov A.L. The Frobenius power series solution for cylindrically anisotropic radially inhomogeneous elastic materials / A.L. Shuvalov // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 2003. – V. 56. – P. 327 – 345.
353. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–I: Removal, interpretation, and analysis. / G.B. Sinclair. // *Appl. Mech. Rev.* – 2004. – 57. – P. 251–298.
354. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–II: Asymptotic identification. / G.B. Sinclair. // *Applied Mechanics Reviews.* – 57. – 2004. –

- P. 385-439.
355. Singh H. Thermoelastic Damping of Vibrations in a Transversely Isotropic Hollow Cylinder / H. Singh, J.N. Sharma // *AMAE International Journal on Production and Industrial Engineering*. – 2012. – V. 3 (1). – P. 1 – 7.
356. Soldatos I.K. Axisymmetric static and dynamic analysis of laminated hollow cylinders composed of monoclinic elastic layers / I.K. Soldatos, J. Ye // *Journal of Sound and Vibrations*. – 1995. – V. 184(2). – P. 245 – 259.
357. Sugimoto N. Nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto, M. Hirao // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1977. – Vol. 62, N 1. – P. 23 – 32.
358. Sugimoto N. Normal-mode analysis for anisotropic elastic waveguides and its application to a Rayleigh–Love wave mode converter / N. Sugimoto, T. Makimoto // *J. Appl. Phys.* – 1978. – Vol. 49, N 11. – P. 5407 – 5415.
359. Sugimoto N. Numerical investigation of nonlinear mode coupling of elastic waves / N. Sugimoto // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1978. – Vol. 64, N 4. – P. 1190 – 1195.
360. Sun J. Displacement calculation method of 0 and 90 winding angle circular and non-circular cross-section beam under tensile and bending loadings. *Fiber Reinf Plast* / J. Sun, Q. Xiao // *Compos* – 2007 – V. 6, N 3. – P. 5 – 34.
361. Sun X.S. Homogenization and Stress Analysis of Multilayered Composite Offshore Production Risers / X.S. Sun, Y. Chen, V.B.C. Tan, R.K. Jaiman, T.E. Tay // *Journal of Applied Mechanics*. – 2014. – Vol. 81. – P.1–12.
362. Swaminathan K. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates – A state-of-the-art review / K. Swaminathan, D.T. Naveenkumar, A.M. Zenkour, E. Carrera. // *Composite Structures*. – 2015. – № 120. – P. 10-31.
363. Syresin D.E. Dispersion properties of helical waves in radially inhomogeneous elastic media / D.E. Syresin, T.V. Zharnikov, V.V. Tyutekin. // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2012. – Vol. 131, № 6. – P. 4263-4271.
364. Tajuddin M. Longitudinal shear vibrations of hollow poroelastic cylinders / M. Tajuddin, S. Ahmed Shah // *Bull. Cal. Math. Soc.* – 2010. – V. 102 (3). – P. 289 – 298.
365. Tang G. Transient torsional vibration responses of infinite, semi-infinite and

- infinite hollow cylinders / G. Tang, X.M. Xu // *Journal of Sound and Vibrations*. – 2010. – V. 329. – P. 1089 – 1100.
366. Tarn J.–Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads / J.–Q. Tarn // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – V. 38. – P. 8189 – 8206.
367. Tarn J.–Q. Stress singularity in an elastic cylinder of cylindrically anisotropic materials / J.–Q. Tarn // *J. Elast.* – 2002. – V.69. – P. 1 – 13.
368. Tarn J.–Q. A state space formalism for anisotropic elasticity. Part II: Cylindrical anisotropy / J.–Q. Tarn // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – V. 39. – P. 5157 – 5172.
369. Tarn J.–Q. Torsion of cylindrically orthotropic elastic circular bars with radial inhomogeneity: some exact solutions and end effects / J.–Q. Tarn, H.–H. Chang // *International Journal of Solids and Structures*. – 2008. – V. 45 – P. 303–319.
370. Tarnopol'skii Y.M. Composites in Offshore Technology in the Next Century / Y.M. Tarnopol'skii, V.L. Kulakov, D.D. Mungalov // *Mech. Compos. Mater.* – 1999. – V. 35(5). – P. 365 – 372.
371. Theokaris P.S. True bounds on Poisson's ratios for transversely isotropic solids / P.S. Theokaris, T.P. Philippidis // *J. Strain Anal. Eng. Des.* – 1992. – V. 27. – P. 43 – 44.
372. Theotokoglou E.E. The radially nonhomogeneous elastic axisymmetric problem / E.E. Theotokoglou, I.H. Stampouloglou // *International Journal of Solids and Structures*. – 2008. – V. 45. – P. 6535 – 6552.
373. Thurston R.N. Elastic waves in rods and clad rods / R.N. Thurston // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1978. – V. 64. – P. 1 – 37.
374. Thurston R.N. Elastic waves in rods and optical fibers / R.N. Thurston // *J. Sound Vibr.* – 1992. – V. 159. – P. 441 – 467.
375. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting // University Press, Oxford. – 1996.
376. Ting T.C.T. Pressuring, Shearing, Torsion and Extension of a Circular Tube or Bar of Cylindrically Anisotropic Material / T.C.T. Ting // *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.* –

1996. – V. 452. – P. 2397 – 2421.
377. Ting T.C.T. New solutions to pressuring, shearing, torsion, and extension of a circular tube or bar / T.C.T. Ting // Proceedings of the Royal Society of London. – 1999. – A 455. – P. 3527 – 3542.
378. Ting T.C.T. An Explicit Secular Equation for Surface Waves in an Elastic Material of General Anisotropy / T.C.T. Ting // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 2002. – V. 55. – P. 297 – 311.
379. Tromp J. Surface wave propagation in a slowly varying anisotropic waveguide / J. Tromp, F.A. Dahlen // Geophys. J. Int. – 1993. – V. 113. – P. 239 – 249.
380. Tsai Y.M. Longitudinal Motion of a Thick Transversely Isotropic Hollow Cylinder / Y.M. Tsai // Search Journal of Pressure Vessel Technology. – 2008. – V. 113. – P. 585 – 589.
381. Tutanku N. Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties / N. Tutanku // Eng. Struct. – 2007. – V. 29. – P. 2032 – 2035.
382. Tsukrov I. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers / I. Tsukrov, B. Drach // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – V. 47. – P. 25 – 33.
383. Tsukrov I. Effective stiffness and thermal expansion coefficients of unidirectional composites with fibers surrounded by cylindrically orthotropic matrix layers / I. Tsukrov, B. Drach, T.S. Gross // International Journal of Engineering Science. – 2012. – V. 58. – P. 129 – 143.
384. Venkatesan M. Wave propagation in a solid cylinder of polygonal cross section immersed in fluid / M. Venkatesan, P. Ponnusamy // Indian J. Pure Appl. Math. – № 34(9). – 2003. – P. 1381 – 1391.
385. Watanabe K. SH wave in a cylindrically anisotropic elastic solid. A general solution for a point source / K. Watanabe, R.G. Payton // Wave Motion. – 1997. – V. 25. – P. 197 – 212.
386. Watanabe K. Source of a time-harmonic SH wave in a cylindrically orthotropic elastic solid / K. Watanabe, R.G. Payton // Geophys. – 2001. – V. 145 – P. 709 – 713.

387. Weng G.J. Effective bulk moduli of two functionally graded composites / G.J. Weng // *Acta Mechanica*. – 2003. – V. 166. – P. 57 – 67.
388. Whitham J. Linear and nonlinear waves / J. Whitham. – New York: Wiley–Interscience. – 1974. – 531 p.
389. Williams M.L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plate in Extension / M.L. Williams // *J. Appl. Mech.* – 1952. – Vol. 19. – № 4. – P. 526–528.
390. Williams M.L. The stress around a fault or crack in dissimilar media / M.L. Williams // *Bull. Seismol. Soc. Am.* – 1959. – Vol. 49 – P. 199 – 204.
391. Yang Y.Y. Time–dependent stress analysis in functionally graded materials / Y.Y. Yang // *International Journal of Solids and Structures*. – 2000. – V. 37. – P. 7593 – 7608.
392. Yenwong–Fai A.S. Wave Propagation in a Homogeneous Piezoelectric Solid Cylinder of Transversely Isotropic Material / Alfred Sevidzem Yenwong-Fai // PHD dissertation thesis. University of the Witwatersrand, Johannesburg. – 2008. – 136 p.
393. Yuan F.G. Three–dimensional wave propagation in composite cylindrical shells / F.G. Yuan, C.C. Hsieh // *Composite Struct.* – 1998. – V. 42. – P. 153 – 167.
394. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder / J. Zemanek // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1972. – V. 51. – P. 265 – 283.
395. Zhang C.A Limit–based approach to the stress analysis of cylindrically orthotropic composite cylinders (0/90) subjected to pure bending / C.A. Zhang, S.V. Hoa // *Compos. Struct.* – 2012. – V. 94(8). –P. 2610 – 2619.
396. Zhang G.M. Wave propagation in functionally graded materials by modified smoothed particle hydrodynamics (MSPH) method / G.M. Zhang, R.C. Batra // *Journal of Computational Physics*. – 2007. – V. 222. – P. 374 – 390.
397. Zhang L. Guided wave focusing potential in hollow cylinders / L. Zhang // PhD Thesis. Pennsylvania State University. – 2005. – 167 p.
398. Zhang X. Elasticity solution for a radially nonhomogeneous hollow cylinder /



- X. Zhang, N. Hasebe // *Journal of Applied Mechanics*. – 1999. – V. 66. – P. 598 – 606.
399. Zhifei S. Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders / S. Zhifei, Z. Taotao, X. Hongjun // *Composite Structures*. – 1998. – V. 42. – P. 153 – 167.