

Министерство образования и науки  
Донецкой Народной Республики  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Донецкий национальный университет»

*На правах рукописи*

*Е. Глушанков*

**Глушанков Евгений Сергеевич**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ  
МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ОТ ДЕЙСТВИЯ  
ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА**

**01.02.04 – механика деформируемого твердого тела**

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Донецк – 2019

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», г. Донецк

Научный руководитель: **Калоеров Стефан Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет» (г. Донецк)

Официальные оппоненты: **Соловьев Аркадий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону), заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики

**Царенко Сергей Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный технический университет» (г. Донецк), заведующий кафедрой сопротивления материалов им. Ф.Л. Шевченко

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет» (г. Ростов-на-Дону)

Защита состоится «04» октября 2019 г. в 13-00 часов на заседании диссертационного совета Д 01.016.03 при ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 283001, г. Донецк, проспект Театральный 13, ауд. 264.

Тел. факс: +38(062) 302-06-00, e-mail: [d0101603-donnu@ya.ru](mailto:d0101603-donnu@ya.ru)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по адресу: 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24, <http://science.donnu.ru>.

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 01.016.03,  
д-р физ.-мат. наук, доцент



И.А. Моисеенко

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В различных областях современного народного хозяйства, науки и техники широкое распространение получили конструкции с элементами в виде тонких пластинок из пьезоматериалов. Эти элементы по различным технологическим или эксплуатационным причинам могут иметь концентраторы напряжений типа отверстий, трещин и включений. Под действием различных механических сил, электромагнитных и температурных полей около этих объектов могут возникать высокие концентрации напряжений и внутренней энергии, которые могут приводить к разрушению указанных элементов. Это нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. К настоящему времени разработаны различные методы решения задач по определению напряженно-деформированного состояния пластинок с отверстиями, трещинами и включениями; для случаев механических и электромагнитных воздействий решен ряд задач; рассматривались и случаи, когда на контурах отверстий задавались температура или плотность потока тепла. В то же время до сих пор из-за неизученности вопросов потенциальности электромагнитного поля в термоупругих телах не решены задачи о действии на пластинку линейного (однородного) потока тепла, не разработаны и методы решения задач термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородных пластинок, а также задач в случаях, когда на границе пластинок имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. В связи с этим актуальна тема данной диссертационной работы, посвященной разработке методов решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пластинок под действием линейного потока тепла и решения на этой основе различных важных задач инженерной практики.

**Связь работы с научными программами, планами, темами.** Проведенные в работе исследования связаны с финансирующейся Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики фундаментальной научно-исследовательской работой «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (№ госрегистрации 0117D000071, 2017–2019 гг.). Часть результатов работы использована в отчетах по указанной НИР.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является разработка методов решения задач термоэлектромагнитоупругости для пластинок с отверстиями, трещинами и включениями, находящихся под действием линейного потока тепла, решения новых задач инженерной практики с установлением механических закономерностей влияния теплофизических свойств материалов, геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества, сочетания и взаиморасположения на значения основных характеристик (напряжений, индукций и напряженностей электромагнитного поля) термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС), а в случае наличия трещин также коэффициентов интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН). Для достижения этой цели необходимо было:

- разработать методы решения задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных пластинок, находящихся под действием линейных потоков тепла;
- исследовать эффективность этих методов при решении конкретных задач и достоверность получаемых результатов;
- получить теоретические решения ряда новых задач с их алгоритмизацией;
- составить комплекс программ на алгоритмическом языке для численной реализации указанных решений;
- провести численные исследования с целью изучения закономерностей изменения ТЭМУС пластинок в зависимости от геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, теплофизических свойств материалов пластинок.

**Объектом исследования** является ТЭМУС пьезопластинок с отверстиями, трещинами и включениями в зависимости от теплофизических свойств материалов пластинок и включений, геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества и взаиморасположения.

**Предметом исследования** является разработка методов определения ТЭМУС многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок под действием линейного потока тепла, а также выявление влияния геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, а также теплофизических свойств материалов пластинок и включений на ТЭМУС.

**Методы исследования.** Для достижения поставленной цели в работе методы решения задач термоэлектромагнитоупругости для случая заданных на контурах отверстий температур распространены на задачи о действии линейного потока тепла на однородные и кусочно-однородные пластинки. Получены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных пластинок и включений, граничные условия для определения этих функций, выражения основных характеристик ТЭМУС через комплексные потенциалы. С использованием методов конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера получены общие представления функций с неизвестными коэффициентами рядов, для определения которых впервые в задачах термоэлектромагнитоупругости применен обобщенный метод наименьших квадратов, обеспечивающий для многосвязных областей наиболее высокую степень точности удовлетворения граничным условиям. Даны решения конкретных задач с исследованиями сходимости решений и достоверности получаемых результатов.

**Научная новизна полученных результатов** состоит в том, что

- разработан метод решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок при действии линейного потока тепла; при этом на решение этих задач распространен метод исследования термоэлектромагнитоупругого состояния однородных многосвязных пластинок, возникающего за счет разности температур на контурах пластинки; введены комплексные потенциалы, учитывающие действие линейного потока тепла, через них получены выражения основных характеристик ТЭМУС, найдены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных пластинок и включений, граничные условия для определения этих функций;

– с использованием методов конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера получены общие представления функций с неизвестными коэффициентами рядов, для определения которых впервые в задачах термоэлектромагнитоупругости применен обобщенный метод наименьших квадратов, обеспечивающий наиболее высокую степень точности удовлетворения граничным условиям для многосвязных областей;

– исследованиями установлены сходимость приближенных решений и достоверность получаемых результатов;

– впервые решен ряд важных практических задач термоэлектромагнитоупругости о действии линейного потока тепла на однородную и кусочно-однородную многосвязную пластинку;

– установлен ряд новых механических закономерностей влияния на значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества, сочетания, взаимного расположения относительно друг друга, а также теплофизических свойств материалов пластинок и включений.

**Достоверность** основных результатов и выводов работы обеспечивается строгостью постановок задач и применяемых математических методов; высокой степенью точности удовлетворения граничных условий, проверяемых в многочисленных точках границы; совпадением для частных задач результатов по приближенным решениям с результатами по полученным в работе точным решениям; согласованием результатов приближенных решений некоторых задач с полученными другими авторами иными методами.

**Практическое значение полученных результатов** состоит в возможности использования разработанной методики решения задач и программных средств для численной их реализации при расчетах, связанных с проектированием и определением рабочих параметров элементов конструкций из пьезоматериалов, содержащих отверстия, трещины и включения; в получении результатов, позволяющих оценивать взаимовлияние отверстий, трещин и включений в зависимости от их количества, сочетания и взаимного расположения, а также влияние теплофизических свойств их материалов на ТЭМУС. Практическая значимость подтверждается и использованием результатов работы в отчетах по указанной выше НИР.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

– разработка метода решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок при действии линейного потока тепла;

– применение обобщенного метода наименьших квадратов к решению задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных областей;

– исследование сходимости приближенных решений и достоверности получаемых результатов;

– решение ряда новых практически важных задач термоэлектромагнитоупругости о действии линейного потока тепла на однородную и кусочно-однородную пластинку;

– установление ряда новых механических закономерностей.

**Апробация результатов работы.** Основные положения работы были доложены и обсуждены на 3 научных конференциях, в том числе на XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2018 г.), Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Донецкие чтения 2017» (г. Донецк, 2017 г), Международной научной конференции «Донецкие чтения 2018» (г. Донецк, 2018 г) , а также на ряде заседаний научного семинара по механике сплошных сред ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет». В полном объеме диссертационная работа докладывалась на научном семинаре по механике сплошных сред ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», на научном семинаре Института математики, механики и компьютерных наук И.И. Воровича Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону) под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. А.В. Наседкина, на научном семинаре кафедры теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета (г. Ростов-на-Дону) под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. А.Н. Соловьева.

**Публикации и личный вклад соискателя.** Основные научные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах [1–8], из которых 5 статей, в том числе 4 в журналах, включенных в перечень рецензируемых изданий ВАК ДНР [1–4], 3 в материалах и тезисах конференций [6–8].

Основные результаты получены автором самостоятельно. В работах [2–8] соавтору С.А. Калоерову принадлежит участие в постановке рассматриваемых задач, выборе метода исследования и обсуждении получаемых результатов.

В работах [2–8] автору принадлежит участие в выборе метода исследования, получение теоретических решений задач, проведение численных исследований с анализом их результатов. Это, в частности: введение и исследование обобщенных комплексных потенциалов задачи термоэлектромагнитоупругости для однородных и кусочно-однородных пьезопластинок под действием линейного потока тепла, получение выражений для основных характеристик ТЭМУС через комплексные потенциалы, граничных условий для определения потенциалов; получение общего вида комплексных потенциалов для пластинки и включений с разложением голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами рядов; приложение обобщенного метода наименьших квадратов к решению ряда задач; проведение численных исследований ТЭМУС с анализом результатов.

**Структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованной литературы, трех приложений с таблицами и рисунками. Общий объем диссертации составляет 256 страниц, из которых основной текст диссертации занимает 122 страницы, список литературы – 20 страниц, приложения – 114 страниц.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы; сформулированы цель работы; указана связь работы с научными программами, планами; охарактеризова-

ны научная новизна, практическое значение полученных результатов и личный вклад автора в совместные работы.

**В первом разделе** представлен аналитический обзор известных в литературе моделей, методов и решений задач термоупругости изотропного и анизотропного тела, термоэлектро-, термомагнито-, термоэлектромагнитоупругости пьезоэлектромагнитного тела. Анализом охвачено более 200 работ отечественных и зарубежных авторов. Отмечена ведущая роль в развитии теории и ее приложений к решению задач работ С.А. Амбарцумяна, Я.Й. Бурака, А.О. Ватульяна, Л.П. Вовка, И.И. Воровича, А.Р. Гачкевича, В.Т. Гринченко, А.Н. Гузя, А.А. Ильюшина, С.А. Калоерова, В.Г. Карнаухова, Г.С. Кита, А.С. Космодамианского, Б.А. Кудрявцева, Н.Н. Лебедева, С.Г. Лехницкого, А.В. Лыкова, Ж. Можена, Н.И. Мусхелишвили, У. Мэзона, А.В. Наседкина, Дж. Ная, В. Новацкого, В.В. Панасюка, В.З. Партона, Ю.Н. Подильчука, Я.С. Подстригача, И.А. Прусова, Г.Н. Савина, А.Н. Соловьева, Р.Ф. Терлецкого, А.Ф. Улитко, Ю.А. Устинова, Н.А. Шульги, W.F. Brown, A. Eringen, Y. Ersoy, C.F. Gao, R.D. Mindlin, E. Pan, Y.H. Pao, G. Paria, H.F. Tiersten, B.L. Wang и многих других отечественных и зарубежных ученых.

С помощью анализа литературных источников установлено, что к настоящему времени разработаны различные методы решения задач по определению напряженно-деформированного состояния тел и пластинок с отверстиями, трещинами и включениями; решен ряд задач для случаев механических, электромагнитных, а для частных случаев и тепловых воздействий. В то же время из-за недостаточной изученности свойств потенциальности термоэлектромагнитного поля в пьезоматериалах до сих пор не разработаны методы решения задач, когда на пластинку действует линейный поток тепла. Не разработаны и методы решения задач для кусочно-однородных пьезопластинок с отверстиями и включениями, а также решения задач термоэлектромагнитоупругости, когда на границе имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Этим подтверждается актуальность темы данной диссертационной работы, посвященной разработке метода решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пластинок при действии линейного потока тепла и решению на этой основе различных важных задач инженерной практики.

**Во втором разделе** работы на основе метода суперпозиции получены основные соотношения для решения задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных пластинок при действии линейного потока тепла; введены и исследованы обобщенные комплексные потенциалы, найдены через них выражения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН; получены граничные условия для определения комплексных потенциалов, их общие представления в случае многосвязных областей, даны точные аналитические решения задач для бесконечной пластинки с одним отверстием или включением, для сплошной конечной пластинки. Решение общей задачи приведено к решению двух задач: задачи теплопроводности, затем связанной задачи термоэлектромагнитоупругости.

Решение задачи теплопроводности сводится к определению комплексного

потенциала теплопроводности  $F_5(z_5)$  обобщенного комплексного переменного  $z_5 = x + \mu_5 y$ , где  $\mu_5$  – корень известного характеристического уравнения теплопроводности из соответствующих граничных условий. При этом рассмотрены случаи задания на контуре температуры, плотности потока тепла, конвективного теплообмена с внешней средой, а также идеального контакта пластинки и инородных включений. Установлено, что в общем случае многосвязной области комплексный потенциал теплопроводности имеет вид

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l \ln(z_5 - z_{5l}) + F_{50}(z_5),$$

в котором  $c_5$  и  $D_l$  – вещественные постоянные, определяемые из граничных условий;  $z_{5l}$  – точка, соответствующая при аффинном преобразовании  $z_5 = x + \mu_5 y$  произвольной точке внутри контура  $L_l$ ;  $F_{50}(z_5)$  – функция, голоморфная в многосвязной области  $S_5$ , соответствующей заданной области пластинки  $S$  при аффинном преобразовании.

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости сводится к определению комплексных потенциалов термоэлектромагнитоупругости  $\Phi_k(z_k)$  обобщенных комплексных переменных  $z_k = x + \mu_k y$  ( $k = \overline{1, 4}$ ), где  $\mu_k$  – корни известного характеристического уравнения термоэлектромагнитоупругости 8-го порядка, из соответствующих граничных условий. При этом рассмотрены случаи, когда контур не подкреплён, жестко подкреплён, а также когда имеет место идеальный электромагнитомеханический контакт пластинки и инородных включений. Установлено, что в общем случае многосвязной области комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости имеют вид

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \Phi_{k0}(z_k),$$

где  $\Gamma_k$ ,  $A_{kl}$ ,  $B_{kl}$  – постоянные, определяемые из условий на бесконечности и условий однозначности напряжений, перемещений, индукций и потенциалов электрического и магнитного полей, для определения этих постоянных получены соответствующие им системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка;  $z_{kl}$  – точки, соответствующие при аффинном преобразовании  $z_k = x + \mu_k y$  произвольным точкам внутри контуров  $L_l$ ;  $\Phi_{k0}(z_k)$  – функции, голоморфные в областях  $S_k$ , получаемых из заданной области пластинки  $S$  аффинными преобразованиями и определяемые из граничных условий на контурах.

Из рассмотренной общей задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ) следуют частные задачи термоэлектроупругости (ТЭУ), когда не учитываются магнитные свойства, термомагнитоупругости (ТМУ), когда не учитываются электрические свойства и термоупругости (ТУ), когда не учитываются и электрические, и магнитные свойства. Для всех этих случаев решение уравнения теплопроводности сохраняется, а остальные решения упрощаются. При этом в

задачах ТЭУ и ТМУ остаются только функции переменных  $z_1, z_2, z_3$ , а в задаче ТУ – функции переменных  $z_1, z_2$ . Аналогичные изменения будут и в граничных условиях. При проведении исследований для указанных случаев по одной единой программе на алгоритмическом языке C++ в работе введен параметр пьезоэффекта  $\lambda_{pe}$ , характеризующий степень отклонения значений электрических и магнитных свойств (постоянных) реальных материалов от модельных. Исследованиями установлено, что при  $\lambda_{pe} \leq 10^{-3}$  соответствующие пьезосвойства материала исчезают и основные характеристики получаются такими же, каковы их значения без учета этих свойств. Для задачи ТЭУ этот параметр  $\lambda_{pe} \leq 10^{-3}$  по магнитным свойствам, для задачи ТМУ – по электрическим свойствам, по ТУ – и по электрическим, и по магнитным свойствам.

Во втором разделе приведены и точные аналитические решения задач для бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием или инородным включением, а также для конечной сплошной пластинки. Эти решения получены с применением метода рядов. Проведены численные исследования значений основных характеристик ТЭМУС для пластинок из трех материалов: композита на основе  $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$  (материал М1), композита на основе  $CdSe - BaTiO_3$  (материал М2) и композита на основе  $PZT4 - CoFe_2O_4$  (материал М3).

Исследовалось влияние на значения основных характеристик ТЭМУС формы отверстия (включения), термоупругих постоянных материала и связанности электромагнитного поля (значений теплофизических постоянных материалов). Результаты исследований приведены в многочисленных таблицах и изображены на рисунках. Исследованиями установлен ряд ранее неизвестных закономерностей изменения ТЭМУС в зависимости от теплофизических и геометрических параметров. Остановимся на некоторых из них, где в МПа приведены значения напряжений при действии линейного потока тепла единичной плотности  $q$ .

На рис. 1 для пластинки с неподкрепленным круговым отверстием, на котором задана температура, изображены графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_s$  вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки. Здесь и далее на рисунках сплошные линии соответствуют задаче ТЭМУ, штриховые – задаче ТЭУ, штрихпунктирные – задаче ТМУ, пунктирные – задаче ТУ. На рис. 2 изображены графики распределения этих же напряжений для случая, когда контур теплоизолирован, а на рис. 3 – когда на контуре отверстия поддерживается конвективный теплообмен с внешней средой с коэффициентом теплообмена  $h$ .

Из описанных графиков и приведенных в работе многочисленных табличных материалов следует, что под действием теплового потока в пластинке около отверстия возникает высокая концентрация напряжений. На значения напряжений значительно влияют электрические свойства материала, еще больше его

магнитные свойства. Поэтому этими свойствами материала при расчетах пренебрегать нельзя, что делается некоторыми авторами. При этом наибольшая концентрация напряжений и ее отличие от случая, когда не учитываются электро-

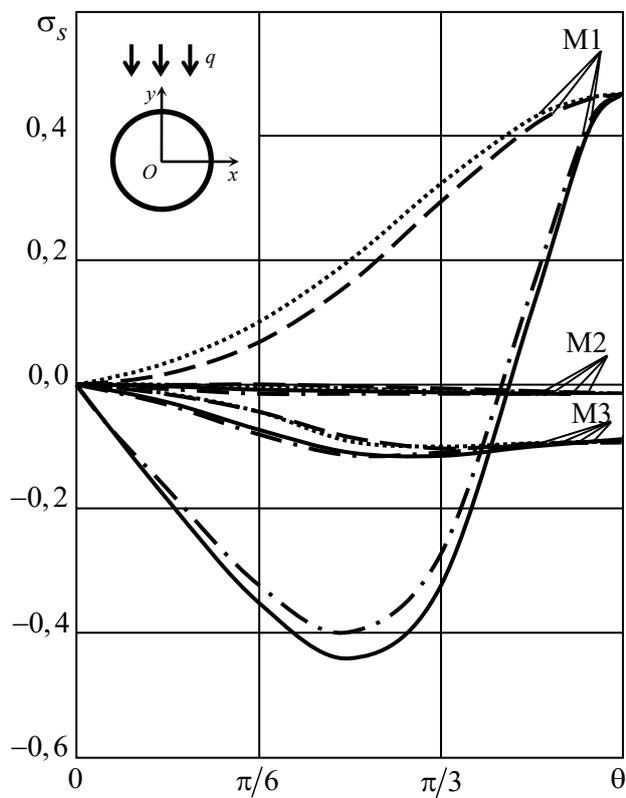


Рис. 1

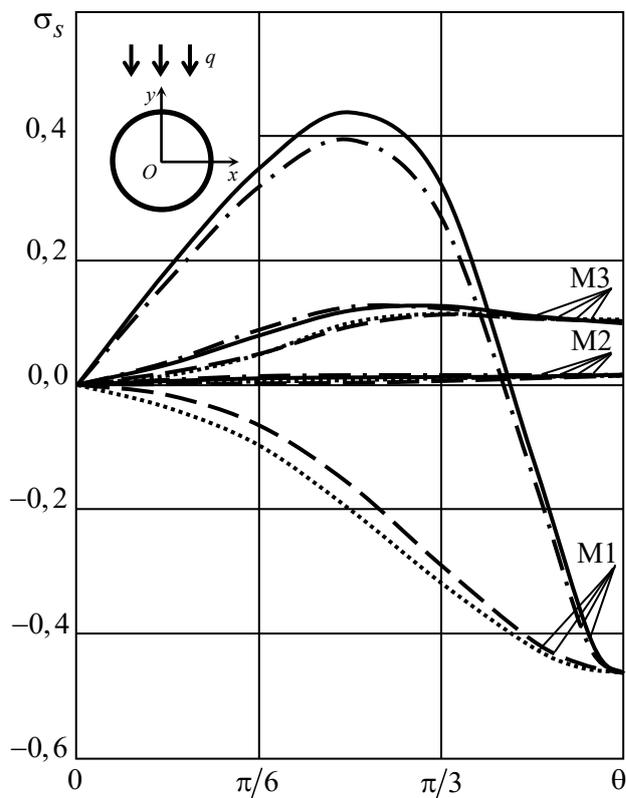


Рис. 2

магнитные свойства, наблюдаются в пластинке из материала М1, имеющего, по сравнению с другими материалами, наименьшие коэффициенты деформации

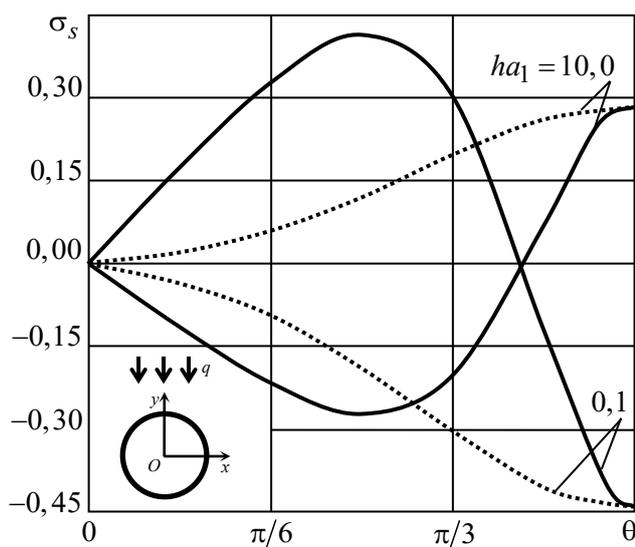


Рис. 3

(наибольшую жесткость), наименьшие пьезомагнитные коэффициенты, наибольшие пьезоэлектрические и пиромагнитные модули и наибольшие коэффициенты теплового расширения. На значения напряжений существенно влияют также тепловые и механические граничные условия. Значения напряжений вблизи контура при заданной температуре и теплоизолированном контуре близки по модулю, но отличаются знаками (зоны сжатия и растяжения меняются местами), в случае теплообмена с внешней средой при параметре теплообмена  $ha_1 > 100$

( $a_1$  – радиус отверстия) напряжения оказываются практически такими же, как в случае заданной температуры на контуре; при параметре теплообмена  $ha_1 < 0,01$  напряжения оказываются почти такими же, как в случае теплоизолированного

контура.

Как показано в работе, свойства материала пластинки заметно влияют и на значения индукций электрического и магнитного полей. При этом влияние механических граничных условий (свободный или жестко подкрепленный контур) незначительно, но велико влияние тепловых граничных условий. Так, для случаев задания на контуре постоянной температуры и теплоизолированного контура закономерности изменения индукций оказываются совершенно отличными друг от друга. Что же касается напряженностей электромагнитного поля, можно отметить, что на напряженности электрического поля мало влияют магнитные свойства, а на напряженности магнитного поля мало влияют электрические свойства; на значения напряженностей заметно влияют механические граничные условия. Все это еще ярче отражается на значениях плотности внутренней энергии. Так, в случае заданной температуры на контуре при учете только электрических свойств материала плотность внутренней энергии изменяется незначительно; учет магнитных свойств приводит к существенным изменениям плотности внутренней энергии, особенно для пластинки из материала М1, когда учет магнитных свойств приводит к увеличению значений плотности внутренней энергии на 2-3 порядка. В случае теплоизолированного контура отверстия значения плотности внутренней энергии существенно возрастают для всех материалов. Исследованиями установлено, что для всех описанных типов задач (ТУ, ТЭУ, ТМУ, ТЭМУ) жесткое подкрепление контура отверстия приводит к значительному уменьшению напряжений, если на контуре задана температура, и к их увеличению, если контур теплоизолирован.

Если в отверстие вставлено электромагнитоупругое включение из другого пьезоматериала, то значения напряжений и характер их распределения в значительной степени зависит от свойств материала включения. С целью выяснения такого влияния при проведении расчетов теплофизические свойства материала включения связывались с аналогичными свойствами (постоянными) материала пластинки при помощи соответствующих относительных параметров соотношениями  $k_{ij}^{(1)} = \lambda_T^{(1)} k_{ij}$ ,  $s_{ij}^{(1)} = \lambda_s^{(1)} s_{ij}$ ,  $g_{ij}^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} g_{ij}$ ,  $p_{ij}^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} p_{ij}$ ,  $\beta_{ij}^{(1)} = \beta_{ij} / \lambda_{pe}^{(1)}$ ,  $\nu_{ij}^{(1)} = \nu_{ij} / \lambda_{pe}^{(1)}$ ,  $\chi_{ij}^{(1)} = \chi_{ij} / \lambda_{pe}^{(1)}$ ,  $\alpha_i^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} \alpha_i$ ,  $t_i^{\sigma(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} t_i^\sigma$ ,  $m_i^{\sigma(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} m_i^\sigma$ , где  $k_{ij}$ ,  $s_{ij}$ ,  $g_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$ ,  $\alpha_i$ ,  $t_i^\sigma$ ,  $m_i^\sigma$  – соответствующие постоянные материала пластинки (коэффициенты теплопроводности, коэффициенты деформации, пьезоэлектрические коэффициенты деформаций и др.).

Из исследований для пластинки с круговым включением следует, что наибольшее влияние на значения напряжений в пластинке и характер их распределения оказывает параметр относительной теплопроводности  $\lambda_T^{(1)}$  включения, причем, если  $\lambda_T^{(1)} > 10^2$  ( $\lambda_T^{(1)} < 10^{-2}$ ), то включение можно считать «абсолютно теплопроводящим» (тепло непроводящим). Значительно и влияние параметра относительной деформируемости (жесткости)  $\lambda_s^{(1)}$ . Так, при отсутствии пьезоэф-

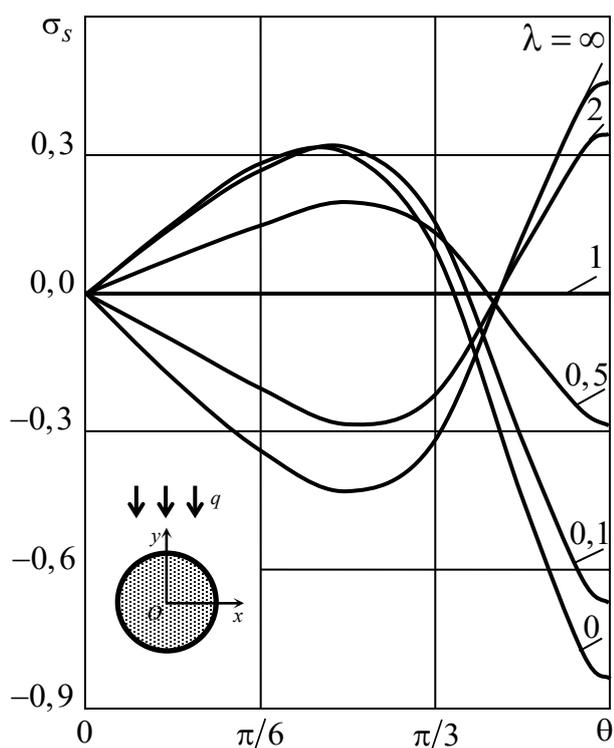


Рис. 4

играет и при переходе к неподкрепленному отверстию. Только роль пьезоэффекта значительна, пока  $\lambda$  невелико, а случай отверстия достигается при гораздо больших значениях  $\lambda$ , когда  $\lambda \geq 10^4$ .

Исследованиями установлено, что для пластинки с эллиптическим отверстием или включением при устремлении одной из осей к нулю происходит резкое увеличение значений основных характеристик ТЭМУС в окрестности концов большой оси эллипса. Если отношение осей эллипса меньше  $10^{-4}$ , эллиптическое отверстие можно считать трещиной, а эллиптическое включение – линейным включением, и для них вычислять КИНИН. Особенно больших значений вблизи этих концов достигает внутренняя энергия. Как следует из расчетов, в случае линейных пьезовключений, если параметр относительной деформируемости включения  $\lambda_s^{(1)}$  заключен в пределах  $10^{-2} < \lambda_s^{(1)} < 10^2$ , то значения КИН при любых  $\lambda_T^{(1)}$  весьма малы (при  $\lambda_s^{(1)} = 1$  они вообще равны нулю), и говорить о КИН для линейных упругих включений в пластинках, когда жесткость материала включения отличается от жесткости материала пластинки менее 100 раз, нет смысла, как это делают многие авторы из литературы.

Во втором разделе приведено и точное аналитическое решение задачи о действии линейного потока на конечную сплошную пластинку. Как следует из решения, если линейный поток тепла действует на конечную сплошную пластинку, контур которой не подкреплен, то напряжения и индукции в пластинке не возникают, но напряженности электромагнитного поля не равны нулю и вычисляются на основе уравнений состояния. Если же контур конечной пластинки

факта, если  $\lambda_s^{(1)} > 10^2$  ( $\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$ ), то включение можно считать абсолютно мягким (абсолютно жестким). Велико и влияние параметра относительной тепловой расширяемости  $\lambda_\alpha^{(1)}$  и параметра относительного пьезоэффекта  $\lambda_{pe}^{(1)}$ . Для случая, когда все относительные параметры включения равны друг другу и равны параметру  $\lambda$  ( $\lambda_T^{(1)} = \lambda_s^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} = \lambda$ ), на рис. 4 для некоторых значений этого параметра изображены графики распределения напряжений  $\sigma_s$  в пластинке с круговым включением из материала М1. Видно, что при  $\lambda < 10^{-2}$  основную роль играет параметр относительной жесткости. Этот параметр основную роль

жестко подкрепить, то в пластинке возникают значительные напряжения, но индукции опять оказываются нулевыми, а напряженности поля несколько изменяют свои значения по сравнению со случаем пластинки с неподкрепленным контуром.

**Третий раздел** работы посвящен решению задач для бесконечной пластинки с множеством отверстий и трещин. Описаны построение общего решения, результаты численных исследований для большого количества задач; установлены закономерности изменения ТЭМУС в зависимости от ряда факторов. С использованием конформных отображений и разложений функций в ряды Лорана получены общие представления комплексных потенциалов через ряды с неизвестными коэффициентами

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l w_l(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \phi_{5ln}(z_5),$$

$$\Phi'_k(z_k) = N'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{kln}(z_k), \quad (1)$$

где  $w_l(z_5)$ ,  $\phi_{kln}(z_k)$ ,  $N'_k(z_k)$  – известные функции;  $c_5$ ,  $D_l$ ,  $c_{5ln}$ ,  $a_{kln}$  – неизвестные постоянные, определение которых из граничных условий обобщенным методом наименьших квадратов сведено к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений

$$2s_j c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} U_{5j}(t_{5jm}) D_l + 2 \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} V_{5j}(t_{5jm}) c_{5ln} = F_j(t_{jm}),$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} W_{kji}(t_{kjm}) a_{kln} = G_{ji}(t_{jm}) \quad (j = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_j}; i = \overline{1, 4}),$$

$s_j$  и  $U_{5j}(t_5)$ ,  $V_{5j}(t_5)$ ,  $F_j(t)$ ,  $W_{kji}(t_k)$ ,  $G_{ji}(t)$  – известные постоянные и функции.

После нахождения псевдорешений этих систем с применением сингулярного разложения матриц комплексные потенциалы будут известны и по ним можно вычислять значения основных характеристик ТЭМУС в пластинке, а в случае наличия и трещин также КИНИН.

Проведены численные исследования значений основных характеристик и КИНИН для пластинок из различных материалов с различным количеством отверстий и трещин, их сочетанием и взаиморасположением. На рис. 5, 6 для пластинки из материала М1 с двумя круговыми отверстиями радиуса  $a_1$  при некоторых значениях отношения  $c/a_1$ , где  $c$  – расстояние между контурами отверстий, изображены графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_s$  вблизи контура левого отверстия на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от центрального угла  $\theta$ , отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки, когда на контурах отверстий задана температура (рис. 5) или контуры теплоизолированы (рис. 6). Графики распределения, соответствующие  $c/a_1 = \infty$ , относятся к случаю пластинки с одним отверстием. Видно, что при сближении отверстий друг с другом значительные изме-

нения значений напряжений происходят только в зоне между отверстиями. При этом, если на контурах задана одинаковая температура, то при сближении отвер-

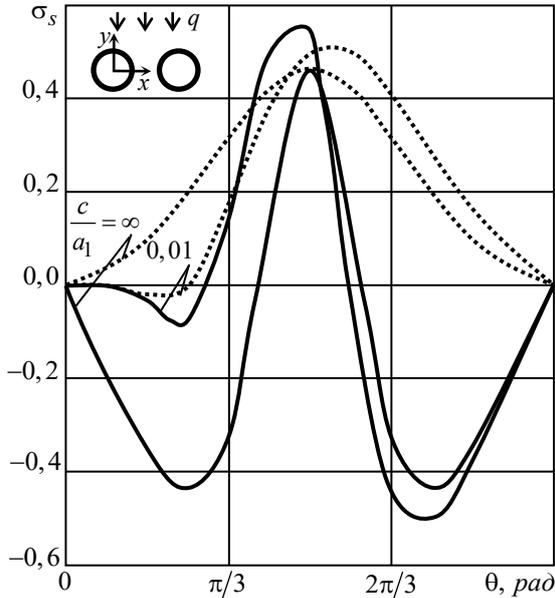


Рис. 5

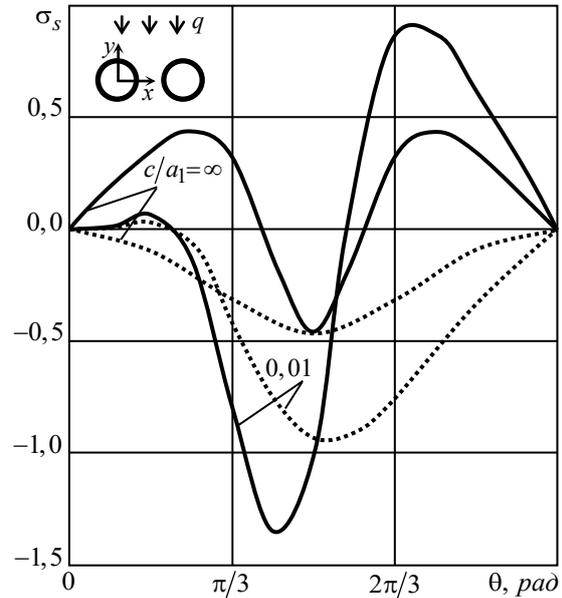


Рис. 6

стей значения напряжений уменьшаются (с некоторыми изменениями характера их распределения), если же контуры теплоизолированы, то сближение отверстий приводит к значительному увеличению концентрации напряжений. При  $c/a_1 > 10$  влияние одного отверстия на ТЭМУС около другого незначительно и им можно пренебречь. Как и в случае пластинки с одним отверстием, концентрация напряжений в пластинке из материала М1 значительно больше, чем в пластинках из материалов М2 и М3.

Проводились исследования ТЭМУС и для случаев, когда рассматривалась пластинка с конечным числом отверстий и с бесконечным числом отверстий (периодическая задача). Установлено, что увеличение количества отверстий приводит к росту значений основных характеристик, особенно в случае теплоизолированных контуров отверстий. Если количество отверстий более 40, то около центрального отверстия значения основных характеристик оказываются такими же, как и в случае периодической задачи (бесконечного ряда). Если отношения осей каких-то эллипсов малы (менее  $10^{-4}$ ), то эти эллипсы можно считать трещинами и для них вычислять КИНИН. Имеющиеся в пластинке контуры (эллипсы и трещины) могут располагаться произвольно, в том числе пересекаться. Численные исследования проведены для пластинок с двумя трещинами, Т-образной трещиной, с крестообразной трещиной, с звездообразной трещиной, а также для пластинки с круговым отверстием и некраевой или краевой трещиной, для пластинки с двумя отверстиями, соединенными узкой щелью. Установлен ряд интересных механических закономерностей влияния расстояния между отверстиями и трещинами, взаиморасположения отверстий и трещин, самих трещин. Исследованиями и в этом разделе установлено, что при изучении ТЭМУС пьезопластинок нельзя ограничиваться решением задач термоупругости, а нужно

решать общую связанную задачу термоэлектромагнитоупругости.

**Четвертый раздел** работы посвящен решению задачи для кусочно-однородной пьезопластинки. Комплексные потенциалы для пластинки опять получаются в виде (1), а при построении комплексных потенциалов для включений после соответствующих конформных отображений голоморфные в конечных односвязных областях функции представляются рядами по полиномам Фабера вида

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n}^{(l)} \varphi_{5n}^{(l)}(z_5^{(l)}); \quad \Phi_k^{(l)'}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \varphi_{kn}^{(l)'}(z_k^{(l)}), \quad (2)$$

в которых  $\varphi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)})$  – известные функции, определяемые из конформных отображений внешности единичного круга на внешности контуров  $L_k^{(l)}$ , получаемых из  $L_l$  аффинными преобразованиями  $z_k^{(l)} = x + \mu_k^{(l)} y$ ;  $c_{5n}^{(l)}$ ,  $a_{kn}^{(l)}$  – неизвестные постоянные, определяемые совместно с неизвестными коэффициентами рядов (1) из граничных условий на контурах контактов пластинки и включений. Здесь и далее величины с верхним индексом  $(l)$  относятся к включению  $S^{(l)}$ , без такого индекса – к пластинке. Удовлетворение контактными граничными условиям обобщенным методом наименьших квадратов приводит к двум переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемым методом сингулярного разложения матриц.

Численные исследования проведены для пьезопластинок с различными инородными включениями. С целью выяснения влияния свойств материалов включений при проведении расчетов их теплофизические свойства связывались со свойствами материала пластинки при помощи соответствующих относительных параметров соотношениями  $k_{ij}^{(l)} = \lambda_T^{(l)} k_{ij}$ ,  $s_{ij}^{(l)} = \lambda_S^{(l)} s_{ij}$ ,  $g_{ij}^{(l)} = \lambda_{pe}^{(l)} g_{ij}$ ,  $p_{ij}^{(l)} = \lambda_{pe}^{(l)} p_{ij}$ ,  $\beta_{ij}^{(l)} = \beta_{ij} / \lambda_{pe}^{(l)}$ ,  $\nu_{ij}^{(l)} = \nu_{ij} / \lambda_{pe}^{(l)}$ ,  $\chi_{ij}^{(l)} = \chi_{ij} / \lambda_{pe}^{(l)}$ ,  $\alpha_i^{(l)} = \lambda_{\alpha}^{(l)} \alpha_i$ ,  $t_i^{\sigma(l)} = \lambda_{pe}^{(l)} t_i^{\sigma}$ ,  $m_i^{\sigma(l)} = \lambda_{pe}^{(l)} m_i^{\sigma}$ , где  $\lambda_T^{(l)}$ ,  $\lambda_S^{(l)}$ ,  $\lambda_{pe}^{(l)}$ ,  $\lambda_{\alpha}^{(l)}$  – параметры относительной теплопроводности, относительной деформируемости, относительного пьезоэффекта, относительной тепловой расширяемости включения  $S^{(l)}$ .

Для случая пластинки из материала М1 с двумя круговыми включениями радиуса  $a_1$ , расстояние между которыми также равно  $a_1$ , когда все относительные параметры этих включений равны друг другу и равны  $\lambda$  ( $\lambda_T^{(1)} = \lambda_S^{(1)} = \lambda_{\alpha}^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} = \lambda$ ), на рис. 7 для некоторых значений  $\lambda$  изображены графики распределения нормальных напряжений  $\sigma_S$  в пластинке около контура левого включения в зависимости от центрального угла  $\theta$  левого включения, отсчитываемого от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки. Как видно, значения напряжений около включений значительно зависят от расстояния между

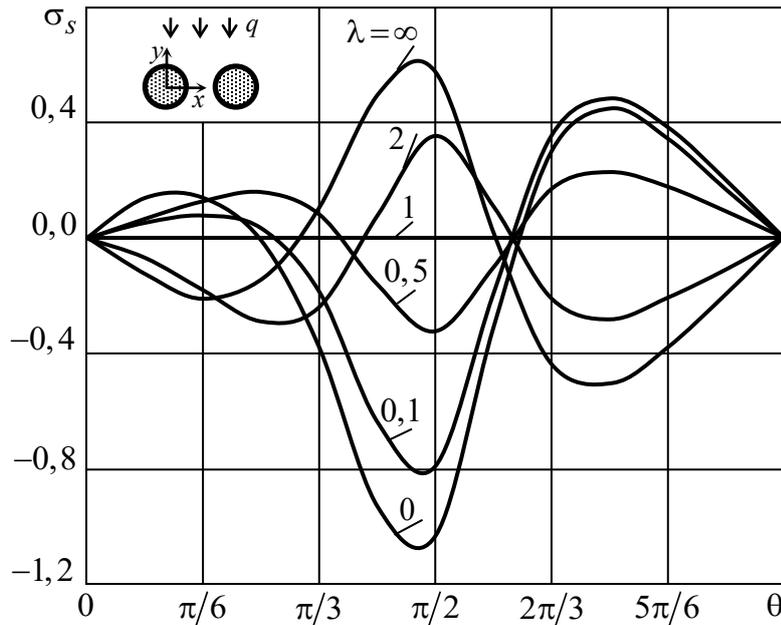


Рис. 7

включениями и от параметра  $\lambda$ , причем эти зависимости такие же, как соответствующие зависимости от расстояния для пластинки с двумя отверстиями и зависимости от параметра  $\lambda$  для включения в задаче для пластинки с одним включением. А именно: при сближении включений друг с другом значительные изменения значений напряжений происходят только в зоне между включениями. При этом, если  $\lambda$  велико, то при сближении включений значения напряжений

уменьшаются, если же  $\lambda$  мало, то сближение включений приводит к росту концентрации напряжений. При  $c/a_1 > 10$  влияние одного включения на ТЭМУС около другого незначительно и им можно пренебречь.

В этом разделе описаны результаты численных исследований и для периодической задачи, когда пластинка имеет бесконечный ряд включений с одинаковыми теплофизическими и геометрическими характеристиками.

По аналогии с исследованиями в предыдущих разделах и в этом разделе установлено, что при изучении ТЭМУС кусочно-однородных пьезопластинок нельзя ограничиваться решением задач термоупругости, а нужно решать общую связанную задачу термоэлектромагнитоупругости.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В результате выполнения диссертационной работы разработан метод решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок при действии линейного потока тепла; решен ряд новых практически важных задач с установлением новых механических закономерностей. Основные результаты и выводы, представленные в работе, следующие.

Введены комплексные потенциалы, учитывающие действие линейного потока тепла, через них получены выражения основных характеристик ТЭМУС, найдены общие представления комплексных потенциалов для многосвязной пластинок и включений и вид граничных условий для определения этих функций.

С использованием методов конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера для комплексных потенциалов получены представления с неизвестными коэффициентами рядов, для определения которых впервые в задачах термоэлектромагнитоупругости

использован обобщенный метод наименьших квадратов, обеспечивший наиболее высокую степень точности удовлетворения граничным условиям.

Исследованиями установлена сходимость приближенных решений и достоверность получаемых результатов.

Впервые решен ряд новых важных практических задач о действии линейного потока тепла на однородную и кусочно-однородную многосвязную пластинку. Исследованиями установлен ряд новых механических закономерностей влияния на значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества, сочетания, взаимного расположения относительно друг друга, а также теплофизических свойств материалов пластинок и включений.

В частности, установлено, что при исследовании ТЭМУС пьезопластинок нельзя решать задачу теории термоупругости, пренебрегая электрическими и магнитными свойствами материалов, а следует решать общую задачу термоэлектромагнитоупругости. На значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН большое влияние оказывают значения постоянных материалов: чем больше пирозлектрические и пиромагнитные модули материала, а также жесткость материала, тем больше возникающие в них значения напряжений, индукций и напряженностей. При сближении отверстий, трещин и включений друг с другом значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН для вершин трещин и линейных включений значительно изменяются.

Результаты представленных в диссертационной работе исследований имеют как теоретический, так и практический интерес. Предложенный метод может применяться при решении различных задач инженерной практики.

## **ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **В рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК ДНР**

1. Глушанков Е.С. Периодическая задача термоэлектромагнитоупругости для пьезопластины с эллиптическими отверстиями или трещинами / Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А. – 2018. – № 2. – С. 12–21.

2. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинах / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А. – 2017. – № 1. – С. 12–25.

3. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А. – 2018. – № 1. – С. 15–26.

### **В рецензируемом научном издании из перечня ВАК ДНР, включенном в Международную наукометрическую базу SCOPUS**

4. Калоеров С.А. Определение термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных кусочно-однородных пьезопластин / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 88–101. Пер. на англ. яз.: Kaloerov S.A. Determining of the thermo-electro-magneto-elastic state of multiply connected piecewise-homogenous piezoelectric plate / S.A. Kaloerov,

E.S. Glushankov // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2018. – Vol. 59, No. 6. – P. 1036–1048.

### Публикации в других изданиях

5. Калоеров С.А. Решение периодической задачи термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки при действии линейного потока тепла / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Современ. пробл. мех. сплош. среды: Тр. XIX междунар. конф., Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2018. – Т. 1. – С. 134–138.

6. Глушанков Е.С. Действие линейного потока тепла в пластине из пьезоматериала / Е.С. Глушанков, С.А. Калоеров // Донецкие чтения 2017: Матер. междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых, Донецк, 17–20 октября 2017 г. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2017. – Т. 1. – С. 21–22.

7. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в многосвязной пьезопластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Донецкие чтения 2018: Матер. III междунар. науч. конф., Донецк, 25 октября 2018 г. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – Т. 1. – С. 293–295.

8. Калоеров С.А. Решение периодической задачи термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки при действии линейного потока тепла / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Современ. пробл. мех. сплош. среды: Тез. докл. XIX междунар. конф., Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г. – Ростов-на-Дону, 2018 – С. 63.

### АННОТАЦИИ

**Глушанков Е.С. Решение задачи определения термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязной пластинки, возникающего от действия линейного потока тепла. – Рукопись.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела, ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», Донецк, 2019.

Разработан метод решения задач термоэлектромагнитоупругости для пьезопластинок под действием линейного потока тепла. Введены соответствующие комплексные потенциалы, получены граничные условия для их определения, решен ряд задач для односвязных и многосвязных областей. Для многосвязных областей при удовлетворении граничным условиям использован обобщенный метод наименьших квадратов. Установлен ряд новых закономерностей механического характера. В частности, установлено, что при исследовании термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) пьезопластинок нельзя решать задачу теории термоупругости, пренебрегая электрическими и магнитными свойствами материалов, а следует решать общую задачу термоэлектромагнитоупругости. На значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и коэффициенты интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН) большое влияние оказывают значения постоянных материалов: чем больше пирозлектрические и пиромагнитные модули материала, а также жесткость мате-

риала, тем больше возникающие в пластинке значения напряжений, индукций и напряженностей. При сближении отверстий, трещин и включений друг с другом значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН для вершин трещин и линейных включений значительно изменяются.

**Ключевые слова:** многосвязная пьезопластинка, линейный поток тепла, включения, термоэлектромагнитоупругость, комплексные потенциалы.

## ABSTRACT

**Glushankov E.S. The solution to the problem of determination of multiply connected plate's thermo-electro-magneto-elastic state originated from linear heat flow action. – The manuscript.**

The thesis for the Candidate of Physical and Mathematical sciences degree on specialty 01.02.04 – mechanics of deformable solid, Donetsk National University, 2019.

A method has been developed for solving problems of thermoelectromagnetoelasticity for piezoelectric plates under the linear heat flow action. The corresponding complex potentials are introduced, the boundary conditions for their determination are obtained, a number of problems are solved for simply connected and multiply connected domains. For multiply connected domains, the generalized least squares method is used to satisfy the boundary conditions. A number of new mechanical regularities are established. In particular, it is found that in the study of thermoelectromagnetoelastic state (TEMES) of piezoelectric plates it is incorrect to solve the problem of the theory of thermoelasticity, neglecting the electrical and magnetic properties of materials, but the general problem of thermoelectromagnetoelasticity should be solved. The values of the basic characteristics of TEMES, the internal energy density and the stress, inductions and tensions intensity factors (SITIF) are highly influenced with the values of constant materials: the more the pyroelectric and pyromagnetic modules of the material, as well as the rigidity of the material, the greater the values of stress, induction and tensions that appear in the plate. When the holes, cracks and inclusions approach each other, the values of the basic characteristics of TEMES, the internal energy density and the SITIF for cracks' and linear inclusions' tips change significantly.

**Keywords:** multiply connected piezoplate, linear heat flow, inclusions, thermoelectromagnetoelasticity, complex potentials.

Подписано в печать . Формат 60x84x1/16.  
Усл. печ. л. 1,0. Печать лазерная. Заказ № . Тираж 100 экз.  
Отпечатано в ООО «Цифровая типография» на цифровых издательских  
комплексах Rank Xerox DocuTech 135 и DocuColor 2060.  
83003, г. Донецк, ул. Артема, 181,  
тел. (062) 348-01-79, <http://cifra.donetsk.ua>