

Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»

На правах рукописи

Э. Глушанков

Глушанков Евгений Сергеевич

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ
МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ, ВОЗНИКАЮЩЕГО
ОТ ДЕЙСТВИЯ ЛИНЕЙНОГО ПОТОКА ТЕПЛА**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Калоеров С. А.

Донецк – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И РЕШЕНИЮ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ	11
1.1. Математические модели и методы термоупругости и их использование для решения задач	11
1.2. Модели и методы электромагнитоупругости и термоэлектромагнитоупругости, их использование для решения задач	17
1.3. Выводы по разделу 1	26
РАЗДЕЛ 2. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ	28
2.1. Краевые задачи теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости для многосвязных областей	28
2.2. Плотность внутренней энергии	35
2.3. Действие линейного потока тепла в сплошной пластинке	38
2.4. Комплексный потенциал задачи теплопроводности	43
2.5. Комплексные потенциалы задачи термоэлектромагнитоупругости. ...	45
2.6. Частные случаи задачи термоэлектромагнитоупругости	54
2.7. Точные аналитические решения некоторых задач для односвязных пластинок	58
2.8. Выводы по разделу 2	79
РАЗДЕЛ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ	81
3.1. Решение задачи для пластинки с конечным числом отверстий	81
3.2. Пластина с периодической системой отверстий	89

3.3. Исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки с отверстиями и трещинами	94
3.4. Выводы по разделу 3	105
РАЗДЕЛ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ КУСОЧНО- ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКИ	107
4.1. Решение задачи для пластинки с конечным числом включений	107
4.2. Пластинка с периодической системой упругих включений	112
4.3. Исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки с включениями	115
4.4. Выводы по разделу 4	119
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	121
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	123
ПРИЛОЖЕНИЯ	143
Приложение А. Таблицы	144
Приложение Б. Рисунки	192
Приложение В. Решение переопределенных систем линейных алгебраи- ческих уравнений методом сингулярного разложения матрицы	252

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В различных областях современного народного хозяйства, науки и техники широкое распространение получили конструкции с элементами в виде тонких пластинок из пьезоматериалов. Эти элементы по различным технологическим или эксплуатационным причинам могут иметь концентраторы напряжений типа отверстий, трещин и включений. Под действием различных механических сил, электромагнитных и температурных полей около этих объектов могут возникать высокие концентрации напряжений и внутренней энергии, которые могут приводить к разрушению указанных элементов. Это нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. К настоящему времени разработаны различные методы решения задач по определению напряженно-деформированного состояния пластинок с отверстиями, трещинами и включениями; для случаев механических и электромагнитных воздействий решен ряд задач; рассматривались и случаи, когда на контурах отверстий задавались температура или плотность потока тепла. В то же время до сих пор из-за неизученности вопросов потенциальности электромагнитного поля в термоупругих телах не решены задачи о действии на пластинку линейного (однородного) потока тепла, не разработаны и методы решения задач термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородных пластинок, а также задач, когда на границе имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. В связи с этим актуальна тема данной диссертационной работы, посвященной разработке методов решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пластинок под действием линейного потока тепла и решения на этой основе различных важных задач инженерной практики.

Целью диссертации является разработка методов решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных пластинок с отверстиями, трещинами и включениями, находящихся под действием линейного потока тепла, решения новых задач инженерной практики с установлением механических закономерностей влияния теплофизических свойств материалов, геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества, сочетания и взаиморасположения на

значения основных характеристик (напряжений, индукций и напряженностей электромагнитного поля) термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС), а в случае наличия трещин также коэффициентов интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН). Для достижения этой цели необходимо было

- разработать методы решения задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных пластинок, находящихся под действием линейных потоков тепла;
- исследовать эффективность этих методов при решении конкретных задач и достоверность получаемых результатов;
- получить теоретические решения ряда новых задач с их алгоритмизацией;
- составить комплекс программ на алгоритмическом языке для численной реализации указанных решений;
- провести численные исследования с целью изучения закономерностей изменения ТЭМУС пластинок в зависимости от геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, теплофизических свойств материалов пластинок.

Объектом исследования является ТЭМУС пьезопластинок с отверстиями, трещинами и включениями в зависимости от теплофизических свойств материалов пластинок и включений, геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества и взаиморасположения.

Предметом исследования является разработка методов определения ТЭМУС многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок под действием линейного потока тепла, а также проведение исследований для выявления влияния геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, а также теплофизических свойств материалов пластинок и включений.

Методы исследования. Для достижения поставленной цели в работе методы решения задач термоэлектромагнитоупругости для случая заданных на контурах отверстий температур и плотностей потоков тепла распространены на задачи о действии линейного потока тепла на однородные и кусочно-однородные пластинки. Получены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных пластинок и включений, граничные условия для определения этих функций, выражения основных характеристик ТЭМУС через комплексные потенциа-

лы. С использованием методов конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера получены общие представления функций с неизвестными коэффициентами рядов, для определения которых впервые в задачах термоэлектромагнитоупругости использован обобщенный метод наименьших квадратов, обеспечивающий для многосвязных областей наиболее высокую степень точности удовлетворения граничным условиям. Приведены решения конкретных задач с исследованиями сходимости решений и достоверности получаемых результатов.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Проведенные в работе исследования связаны с финансирующейся Министерством образования и науки Донецкой Народной Республики фундаментальной научно-исследовательской работой «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (№ госрегистрации 0117D000071, 2017–2019 гг. на основании решения научно-технического совета). Часть результатов работы использована в отчетах по указанной НИР.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованной литературы, дополнения и двух приложений с таблицами и рисунками. Общий объем диссертации составляет 256 страниц, из которых текст диссертации занимает 122 страницы, список литературы – 20 страниц, приложения – 114 страниц.

В первом разделе представлен аналитический обзор известных в литературе моделей, методов и решений задач по исследованию связанных полей. Установлено, что к настоящему времени разработаны различные методы решения задач по определению напряженно-деформированного состояния тел и пластинок с отверстиями, трещинами и включениями; решен ряд задач для случаев механических, электромагнитных, а для частных случаев и тепловых воздействий. В то же время из-за недостаточной изученности свойств потенциальности термоэлектромагнитного поля в пьезоматериалах до сих пор не разработаны методы решения задач, когда на пластинку действует линейный поток тепла. Не разработаны и методы решения

задач для кусочно-однородных пьезопластинок с отверстиями и включениями, а также решения задач термоэлектромагнитоупругости, когда на границе имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Этим подтверждается актуальность темы данной диссертационной работы, посвященной разработке метода решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пластинок при действии линейного потока тепла и решению на этой основе различных важных задач инженерной практики.

Во втором разделе работы на основе метода суперпозиции получены основные соотношения для решения задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных пластинок при действии линейного потока тепла; введены и исследованы обобщенные комплексные потенциалы, найдены через них выражения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН; получены граничные условия для определения комплексных потенциалов, их общие представления в случае многосвязных областей, даны точные аналитические решения задач для бесконечной пластинки с одним отверстием или включением, для сплошной конечной пластинки. Решение общей задачи приведено к решению двух задач: задачи теплопроводности, затем связанной задачи термоэлектромагнитоупругости.

Третий раздел диссертации посвящен решению задач для бесконечной пластинки с множеством отверстий и трещин. Описаны построение общего решения, результаты численных исследований для большого количества задач; установлены закономерности изменения ТЭМУС в зависимости от ряда факторов.

Четвертый раздел диссертации посвящен решению задачи для бесконечных пластинок с включениями. Аналогично третьему разделу, описаны методы построения решений, результаты численных исследований для некоторых задач, установлены закономерности изменения ТЭМУС.

В заключении сформулированы основные научные результаты, проведенных в работе теоретических и численно-аналитических исследований.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что

– разработан метод решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок при действии ли-

нейного потока тепла; при этом на решение этих задач распространен метод исследования термоэлектромагнитоупругого состояния однородных многосвязных пластинок, возникающего за счет разности температур на контурах пластинки; введены комплексные потенциалы, учитывающие действие линейного потока тепла, через них получены выражения основных характеристик ТЭМУС, найдены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных пластинок и включений, граничные условия для определения этих функций;

- с использованием методов конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера получены общие представления функций с неизвестными коэффициентами рядов, для определения которых впервые в задачах термоэлектромагнитоупругости использован обобщенный метод наименьших квадратов, обеспечивающий наиболее высокую степень точности удовлетворения граничным условиям для многосвязных областей;

- исследованиями установлены сходимость приближенных решений и достоверность получаемых результатов;

- впервые решен ряд важных практических задач термоэлектромагнитоупругости о действии линейного потока тепла на однородную и кусочно-однородную многосвязную пластинку;

- установлен ряд новых механических закономерностей влияния на значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества, сочетания, взаимного расположения относительно друг друга, а также теплофизических свойств материалов пластинок и включений.

Положения, выносимые на защиту:

- разработка метода решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок при действии линейного потока тепла;

- применение обобщенного метода наименьших квадратов к решению задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных областей;

- исследование сходимости приближенных решений и достоверности полу-

чаемых результатов;

– решение ряда новых практически важных задач термоэлектромагнитоупругости о действии линейного потока тепла на однородную и кусочно-однородную пластинку;

– установление ряда новых механических закономерностей.

Достоверность основных результатов и выводов работы обеспечивается строгостью постановок задач и применяемых математических методов; высокой степенью точности удовлетворения граничных условий, проверяемых в многочисленных точках границы, совпадением для частных задач результатов по приближенным решениям с результатами по полученным в работе точным решениям; согласованием результатов приближенных решений некоторых задач с полученными другими авторами иными методами.

Практическое значение полученных результатов состоит в возможности использования разработанной методики решения задач и программных средств для численной их реализации при расчетах, связанных с проектированием и определением рабочих параметров элементов конструкций из пьезоматериалов, содержащих отверстия, трещины и включения; в получении результатов, позволяющих оценивать взаимовлияние отверстий, трещин и включений в зависимости от их количества, сочетания и взаимного расположения, а также влияния теплофизических свойств их материалов на ТЭМУС. Практическая значимость подтверждается и использованием результатов работы в отчетах по указанной выше НИР.

Апробация результатов работы. Основные положения работы были доложены и обсуждены на ряде заседаний научного семинара по механике сплошных сред ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», а также на 3 научных конференциях, в том числе на XIX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2018 г.); Международной научной конференции студентов и молодых ученых «Донецкие чтения 2017» (г. Донецк, 2017 г.); Международной научной конференции «Донецкие чтения 2018» (г. Донецк, 2018 г.). В полном объеме диссертационная работа докладывалась на научном семинаре по механике сплошных сред ГОУ ВПО «Донецкий националь-

ный университет», на научном семинаре кафедры математического моделирования Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (г. Ростов-на-Дону) под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. А.В. Наседкина, на научном семинаре кафедры теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета (г. Ростов-на-Дону) под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. А.Н. Соловьева.

Публикации и личный вклад соискателя. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах [26, 27, 42–44, 46, 51, 52], из которых 5 статей, 4 в журналах, включенных в перечень рецензируемых изданий ВАК ДНР [27, 43, 44, 46], 3 в материалах и тезисах конференций [26, 42, 51].

Основные результаты получены автором самостоятельно. В работах [26, 42–44, 46, 51, 52] соавтору С.А. Калоерову принадлежит участие в постановке рассматриваемых задач, выборе метода исследования и обсуждении получаемых результатов.

В работах [26, 42–44, 46, 51, 52] автору принадлежит участие в выборе метода исследования, получение теоретических решений задач, проведение численных исследований с анализом их результатов. Это, в частности:

- введение и исследование обобщенных комплексных потенциалов задачи термоэлектромагнитоупругости для однородных и кусочно-однородных пьезопластинок под действием линейного потока тепла, получение выражений для основных характеристик ТЭМУС через комплексные потенциалы, граничных условий для определения потенциалов;

- получение общего вида комплексных потенциалов для пластинки и включений с разложением голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами рядов;

- приложение обобщенного метода наименьших квадратов к решению ряда задач;

- составление комплексов программ для численной реализации полученных решений;

- проведение численных исследований ТЭМУС с целью выявления термомеханических закономерностей.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И РЕШЕНИЮ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Математические модели и методы термоупругости и их использование для решения задач

Модели и методы термоупругости. Первые теоретические исследования по теплопроводности относятся к 1830-м годам, когда Дюамель [143, 144] предложил теорию теплопроводности кристаллов, основываясь на принятых в то время гипотезах о механизме молекулярного излучения. Дюамелем [145], а позднее – Нейманом [172] были получены уравнения линейной термоупругости, в которых температура, деформации и напряжения были связаны друг с другом линейно. Ими же были решены некоторые одномерные задачи. По сути, Дюамель первым выразил взаимосвязь между температурой, деформациями и напряжениями математическим языком.

Основы современной теории теплопроводности твердых тел были заложены в работах Стокса [195] и Ламе [166]. Дальнейшие изыскания в области теплопроводности и термоупругости проводились Буссинеском [134], Фойгтом [209], Вустером [214] и другими.

При построении современных математических моделей учитываются различные механизмы распространения тепла. Считается, что распространение тепла может происходить за счет теплопроводности (когда тепло передается через само вещество), конвекции (тепло передается за счет относительного движения частиц нагретого тела) и теплового излучения (перенос тепла между разделенными пространством частями тела происходит за счет электромагнитного излучения).

Распространение тепла за счет теплопроводности происходит по причине

неравномерного распределения температуры в теле. Температурное поле стремится к однородности, ввиду чего возникают потоки тепла, направленные из более нагретых частей тела к менее нагретым. Потоки тепла характеризуются направлением (вектором) действия, а также плотностью (интенсивностью) – мощностью потока через площадку тела, отнесенной к единице площади. Процесс распространения тепла зачастую сопровождается также возникновением в теле температурных напряжений и деформаций.

К настоящему времени разработаны математические модели, учитывающие различные факторы связей между напряжениями, деформациями, температурой. В частности, существуют модели, учитывающие динамические изменения температуры, зависимость теплофизических постоянных материала от температуры и времени, различные формы взаимодействия температурных и деформационных полей, связи тепловых, механических и электромагнитных полей, способы задания температурных полей и другие. Разработано множество математических методов решения задач.

Связанные и несвязанные задачи термоупругости. Изначально при исследовании термоупругого состояния поля температур и деформаций всегда полагались связанными. В этом случае задача об определении полей имела единое решение для всех полей. Однако это решение можно было построить лишь с использованием законов термодинамики. В 1855 году Томсон впервые применил основные законы термодинамики для изучения свойств твердого тела [64]. Законы термодинамики в дальнейшем были более полно изучены Шиллером Н.Н. [132], Каратеодори [136] и др. Среди более современных работ в области связанной задачи термоупругости следует отметить работы Карнаухова В.Г. [61], Фильштинского Л.А. [124] и др.

В несвязанной линейной термоупругости считается, что механические поля имеют зависимость от температурных, а температурные поля не зависят от механических. В этом случае следует сначала решать задачу теплопроводности, решением которой будет функция T , характеризующая распределение температуры в упругом теле, а затем – задачу термоупругости с использованием уже известной функции рас-

пределения температуры. Первое систематическое изложение теории несвязанной задачи термоупругости для изотропного тела представил Лебедев Н.Н. [76], а для анизотропного тела – Прусов И.А. [109], Уздалев А.И. [120], Калоев С.А., Космодамианский А.С. [49, 70].

Стационарная и нестационарная термоупругость. Как известно, все теплофизические процессы, среди прочего, зависят от времени, и для их исследования следует решать задачи нестационарной (динамической) термоупругости. Но в ряде и таких процессов теплофизическое состояние, начиная с некоторого момента времени, достигает стационарного (статического) состояния, в котором зависимость от времени практически отсутствует. Задачи об определении такого состояния тела называют квазистатическими. В квазистатических задачах термоупругости инерционный член в уравнениях движения и производные перемещений по времени не учитываются. Представление общего решения квазистатической задачи термоупругости в форме, удобной для практических применений, было предложено Папковичем П.Ф. [97]. Но в последние годы разработаны и использованы при решении практических задач и методы решения динамических задач связанной термоупругости [21, 22] и др.

Зависимость свойств материалов от температуры. Зачастую в исследованиях теплофизические постоянные материалов тел считаются независимыми от температуры, что позволяет значительно упрощать модели и получать решения задач, однако оно применимо лишь для небольших интервалов изменения температуры. Если же эти интервалы значительны, то это допущение некорректно. К настоящему времени известны модели, когда зависящими от температуры полагаются коэффициенты теплопроводности и удельной теплоемкости материала [108] или все постоянные, входящие в уравнения теплопроводности и термоупругости [79].

Задача термоупругости для изотропного тела. Изначально исследования температурных полей и термонапряженного состояния проводились для изотропных тел. В этом случае в уравнения термоупругого состояния входят три постоянные: модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν , коэффициент линейного рас-

ширения α ; в закон теплопроводности входит один коэффициент теплопроводности k . Был предложен целый ряд методов решения таких задач. Это метод комплексных потенциалов, изложенный в книгах Калоерова С.А., Космодамианского А.С. [70], Лебедева Н.Н. [76], Мухелишвили Н.И. [86], Прусова И.А. [109], Савина Г.Н. [111], Уздалева А.И. [121], метод сингулярных интегральных уравнений, описанный в монографиях Кита Г.С., Кривцуна М.Г. [63], Панасюка В.В., Саврука М.П., Дацышин А.П. [96], численный метод конечных элементов (МКЭ) [83] и др.

Задача термоупругости для анизотропного тела. Методы решения задач термоупругости для анизотропного тела возникли гораздо позже. И их возникновение было связано с тем, что со временем во многих областях науки, техники, машиностроения и современных технологий широкое применение нашли композитные (композиционные) материалы, существует большая потребность в достаточно простых и эффективных методах решения задач теплопроводности и термоупругости для анизотропных сред [70, 109, 120, 121].

Сравнительно широкие исследования были выполнены для анизотропных пластинок с отверстиями и трещинами, тонких плит и оболочек. Следуя идеям Лехницкого С.Г. [77], Уздалев А.И. для решения плоских задач теплопроводности и термоупругости ввел обобщенные комплексные потенциалы термоупругости [120], позволившие решить различные задачи для односвязных областей. При решении задач термоупругости для некоторых классов анизотропных материалов. Прусов И.А. [110] использовал методы линейного сопряжения. Общий подход к построению комплексных потенциалов и решению задач термоупругости в случае многосвязных пластинок с отверстиями и трещинами был предложен Калоеровым С.А. и Космодамианским А.С. [49, 70], ими был решен ряд задач, когда на контурах отверстий задавались значения температуры, во внутренних точках действовали сосредоточенные тепловые источники. В работе [54] эти методы были распространены на случай действия потока тепла на границах тела и на бесконечности. Различные подходы к решению краевых плоских задач термоупругости анизотропных тел изложены в работах Кушнера Р.М., Николишина Т.М., Осадчу-

ка В.А. [73], Шевченко В.П., Гольцева А.С. [131], Волкова С.Д., Гирса В.Н., Денисова Ю.В. [84], Noda N., Takeuti Y. [175], Tauchert T.R., Akoz A.Y. [197] и др.

Особое внимание в задачах термомеханики уделяется способу задания тепловых воздействий. Проведен ряд исследований, в которых учитывались различные способы задания температурного поля: задания значений температуры и плотности потоков тепла на границе, сосредоточенных источников тепла, потоков тепла на бесконечности.

Систематическое изложение содержания различных моделей, а также методов решения задач теплопроводности анизотропного тела дано в монографиях Карслоу Г., Егера Д. [62], Лыкова А.В. [80], а термоупругости – в книгах Карнаухова В.Г. [61], Кита Г.С., Кривцуна М.Г. [63], Коваленко А.Д. [65], Калоерова С.А., Космодамианского А.С. [70], Лява А. [81], Майзеля В.М. [82], Мелана Э., Паркуса Г. [83], Новацкого В. [92, 94], Панасюка В.В., Саврука М.П., Дацышин А.П. [96], Паркуса Г. [98], Подстригача Я.С., Коляно Ю.М. [104, 105], Прусова И.А. [109, 110], Уздалева А.И. [120, 121].

Решения задач термоупругости для анизотропных тел с отверстиями и трещинами. К настоящему времени наиболее изученными являются проблемы исследования термоупругого состояния анизотропных тел без учета пьезоэффекта. Для этого случая разработаны различные методы, и на их основе решены различные задачи в трехмерной и двумерной постановках.

Трехмерные задачи. В работе [118] рассмотрены трехмерные задачи статики, гармонических колебаний и общей динамики линейной теории упругости, термоупругости и моментной упругости. Методом многомерных сингулярных интегральных уравнений и сингулярных потенциалов исследованы общие вопросы теории и получены представления решений в рядах и квадратурах, допускающие эффективную реализацию на ЭВМ.

Для толстой пластины из материала с общей анизотропией и теплоизолированной плоской трещиной, перпендикулярной к линии действия бесконечного линейного потока тепла, в работе Sturla F.A., Barber J.R. [196] получены аналитические выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и условия, при ко-

торых отсутствует контакт берегов трещины; рассмотрен случай контакта берегов трещины на некотором участке границы. В статье [165] исследовано термоупругое состояние тела с эллиптической трещиной.

Двумерные и плоские задачи. К настоящему времени наиболее полные исследования проведены по задачам теплопроводности и термоупругости для анизотропных пластинок с отверстиями и трещинами. Разработке подходов к их решению посвящены монографии Калоерова С.А., Космодамианского А.С. [70], Прусова И.А. [109, 110], Уздалева А.И. [120, 121], а также многочисленные статьи различных авторов. С использованием этих методов решен ряд задач для односвязных и многосвязных областей. Решения задач теплопроводности и термоупругости для сплошной конечной пластинки под действием температуры на контуре или сосредоточенных источников тепла во внутренних точках даны в работах [3, 70, 121, 192]. Аналогичные решения для случая действия механических сил получены в работах [129, 130].

Достаточно много исследований проведено для случая бесконечной односвязной области (для анизотропной пластинки с отверстием). Термонапряженное состояние пластинки с круговым или эллиптическим отверстием и различными условиями на его контуре рассмотрено в работах [67, 70, 107, 119, 120] и др. В этих работах особое внимание уделялось влиянию степени анизотропии, тепловых и упругих свойств материала, а также условий на контуре отверстия на напряженное состояние вблизи отверстия.

В монографии [70] решены задачи для эллиптического кольца, прямоугольной пластинки с эллиптическим отверстием, бесконечной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями, полуплоскости с эллиптическим отверстием.

В работах Калоерова С.А., Антонова Ю.С. [53, 54] предложен метод решения задач теплопроводности и термоупругости для конечных и бесконечных многосвязных анизотропных пластинок с произвольно расположенными отверстиями и трещинами. Для построения решения задачи использовалась теория функции комплексного переменного, а граничные условия удовлетворялись приближенно с использованием дискретного метода наименьших квадратов. Данный подход по-

лучил дальнейшее развитие в работах Калоерова С.А., Добряка Д.А. [55, 56] для решения задач о термонапряженном состоянии кусочно-однородных анизотропных пластин с отверстиями, трещинами и включениями, но в отличие от предыдущего для удовлетворения граничным условиям был предложен обобщенный метод наименьших квадратов, когда из граничных условий методом коллокации получается переопределенная система линейных алгебраических уравнений, которая решается методом сингулярного разложения матрицы.

1.2. Модели и методы электромагнитоупругости и термоэлектромагнитоупругости, их использование для решения задач

Модели термомеханики, учитывающие электромагнитные поля. Изучением термомеханического поведения деформируемых твердых тел с учетом электромагнитных полей, связанных с механическими и тепловыми процессами в теле, занимается механика связанных механических и электромагнитных полей. Основные положения моделей механики сплошной среды, учитывающие взаимодействия тепловых, механических и электромагнитных полей различной физической природы, изложены в работах Амбарцумяна С.А. [2, 4], Гузя А.Н., Махорты Ф.Г. [29], Ильюшина А.А. [33], Ландау Л.Д., Лившица Е.М. [75], Можена Ж. [85], Новацкого В. [95], Партона В.З., Кудрявцева Б.А. [99], Подстригача Я.С., Бурака Я.Й. [106], Седова Л.И. [112, 113], Тамма И.Е. [115], Eringen A.C., Maugin G.A. [148], Eringen A.C. [149], Pao Y.H., Hutter K. [178], Pao Y.H. [179], Penfield P., Haus H.A. [181] и др. При построении таких моделей механики деформируемого твердого тела влияние электромагнитного поля на термомеханическое поведение тела реализуется через пондеромоторные силы и их моменты, а также через источники дополнительной энергии, возникающие при взаимодействии тела с внешним электромагнитным полем. При этом формулируются макроскопические уравнения электродинамики Максвелла, описывающие поле во внешней сре-

де и в теле с учетом характеристик поля, таких как токи проводимости, поляризация и намагничивание [32, 112, 148].

Известно несколько подходов для получения макроскопических уравнений электродинамики тел, способных к поляризации и намагничиванию, и определения характеристик электромагнитного поля и энергии в теле. Наиболее распространенными в литературе такими подходами являются статистическая модель, модель Лоренца, двудипольная модель и модель Максвелла-Минковского.

В статистической модели [116] путем статистического осреднения электромагнитных полей и уравнений электродинамики на микроуровне, вызванные движением точечных носителей зарядов (электроны, ядра) в рамках стабильных структур (атомы, молекулы, ионы), определяются макроскопические поля и уравнения Максвелла, причем соотношения для поляризации и намагничивания на макроуровне получаются как средние статистические от магнитного и дипольного моментов в теле.

В модели Лоренца [115, 162] тело считается состоящим из положительно и отрицательно электрически заряженных элементарных частиц, движущихся в вакууме под действием их собственных или внешних полей. В этом случае происходит перераспределение микрочарядов и микротоков в сплошной среде, возникают микроскопические электромагнитные поля. Макроскопические уравнения и поля получаются путем пространственно-временного осреднения уравнений и полей на микроуровне, намагниченность и поляризация понимаются как средние плотности магнитного и дипольного моментов в теле.

При рассмотрении тела в двудипольной модели [178, 179, 181] считается, что оно состоит из движущихся материальных частиц-носителей электрических, магнитных зарядов, свободных зарядов и токов, создающие в среде электромагнитное поле. При этом поляризация и намагниченность моделируются электрическими и магнитными диполями, состоящими из пары положительных и отрицательных электрических зарядов и магнитных диполей соответственно. На основе такого представления формулируется макроскопическая система уравнений электродинамики [181]. В этой модели характеристики поля выводятся из предполо-

жения, что на каждый заряд в поле действует сила Лоренца, на диполь – момент таких сил.

В модели Максвелла-Минковского, в отличие от рассмотренных выше моделей, в которых макроскопические электромагнитные поля и уравнения электродинамики получаются путем осреднения полей и уравнений на микроуровне, уравнения электродинамики для движущегося тела получаются из уравнений Максвелла для неподвижного тела, исходя из предположения Лоренц-инвариантности уравнений электродинамики [139, 162]. Выражения для характеристик поля и энергии получаются из закона сохранения для системы взаимодействия электромагнитного поля и среды, предполагая замкнутость механической и незамкнутость электрических подсистем [162].

В работе [162] для электропроводных тел показана эквивалентность рассмотренных моделей их термомеханического поведения в нерелятивистском приближении.

Отметим также, что в литературе предложены и более сложные подходы, учитывающие не только заряды, а и спины, магнитные моменты. При этом, кроме известных электромагнитных сил, вводятся еще и обменные, спин-орбитальные, спин-спиновые силы [169].

На основе описанных моделей с использованием локально-равновесной или рациональной термодинамики предложены обобщенные термодинамические модели, описывающие упругую, вязкоупругую, пластическую деформацию тел, способных к поляризации и намагничиванию и обобщающие классические модели линейной термоупругости [31, 33, 65, 93]. Кроме уравнения Максвелла, эти модели учитывают различные теплофизические свойства материалов тел, а именно: электропроводимость, пьезоэффект, пирозэффект и др. Достаточно полный обзор методов построения моделей термомеханического поведения тел с учетом электромагнитных полей содержится в работах Кудрявцева Б.А., Партона В.З. [71], Терлецкого Р.Ф. [117].

Электропроводные среды. При наличии теплового и электромагнитного полей в электропроводном теле индуцируются электрические токи с выделением

джоулева тепла и появлением пондеромоторных сил. Возникающее при этом термоупругое состояние тела существенно зависит от его геометрических характеристик и приложенного электромагнитного поля. При этом система разрешающих уравнений включает в себя уравнения электродинамики, теплопроводности с учетом источников джоулева тепла и уравнениями движения с объемными пондеромоторными силами [180]. Эта система является нелинейной за счет нелинейности обобщенного закона Ома и выражений для пондеромоторных сил и джоулева тепла. Как известно, решение основной системы уравнений термоэлектромагнитоупругости для таких сред сопряжено со значительными математическими трудностями, поэтому при решении конкретных задач во многих работах проводилась ее линеаризация [95, 150, 151, 164, 171, 202, 203].

В связи с необходимостью рациональных режимов термообработки особый интерес представляет проблема термообработки электропроводных тел переменными электромагнитными полями. Первые работы в этом направлении связаны с индукционным нагревом тел без учета поляризации и намагниченности [6, 66, 103, 122], в которых при решении задачи использовалась упрощенная схема не связанной задачи термомагнитоупругости, состоящая в том, что из уравнений электродинамики определялось электромагнитное поле и соответствующее ему распределение джоулева тепла. Распределение джоулева тепла затем применялось в уравнении теплопроводности как мощность непрерывно распределенных тепловых источников. После определения температурного поля находилось квазистатическое напряженно-деформированное состояние тела. Системному изложению исследований в этом направлении и решению конкретных задач по определению термоупругого состояния электропроводных тел с плоскопараллельными границами, цилиндрических тел, оболочек, пластин при действии квазистационарного или импульсного электромагнитоупругого поля посвящены работы Подстригача Я.С., Бурака Я.И., Гачкевича А.Р., Чернявской Л.В. [106], Гачкевича А.Р. [25], Гачкевича А.Р., Мусия Р.С. [24].

Построение теории термоупругости электропроводных магнитомягких и магнитотвердых тел, учитывающей специфику намагничивания указанных фер-

ромагнитных тел, при действии квазистационарных электромагнитных полей дано в работах [11, 25]. При этом тепловыделение возникает как за счет джоулева тепла, так и за счет намагничивания, взаимодействие электромагнитных и механических полей обусловлено действием пондеромоторных сил на электрические токи, в том числе и на молекулярные. На основе предложенной методики в работах [11, 25] исследовано термонапряженное состояние тел с плоскопараллельными границами в зависимости от амплитудно-частотных характеристик внешнего поля. Отметим также в этом направлении и работы [1, 25, 180] и др.

Среды с низкой электропроводностью. В работах [9, 10, 25] предложена методика решения задачи термоупругости поляризуемых тел с низкой электропроводностью, находящихся во внешнем квазистационарном электромагнитном поле. При этом тепловыделение в теле происходит за счет электропроводности и поляризации, взаимодействие электромагнитных и механических полей обусловлено действием пондеромоторных сил на электрические токи, в том числе поляризационные.

Пьезоэлектрические и пьезомагнитные среды. Термодинамические модели, учитывающие различные физико-механические свойства сред, наличие механических, температурных и электромагнитных полей в телах и их взаимосвязи, получили широкое развитие в механике связанных полей [8, 18, 99]. В основу таких моделей были положены такие физические эффекты, как пьезоэлектрический эффект и электрострикция (возникновение поляризации в теле при приложении механических усилий), магнитострикция (изменение размеров тела при действии внешнего магнитного поля, обратный линейной магнитострикции – пьезомагнитный эффект), пьезоэлектрический и пьезомагнитный эффекты (возникновении поляризации и намагниченности при изменении температуры тела, обратные им – электрокалорический и магнитокалорический эффекты) и др. Учет всех эффектов одновременно приводит к нелинейным уравнениям связи и значительным математическим трудностям, поэтому некоторыми эффектами (в основном нелинейными) при построении различных теорий пренебрегалось в случае их малости и незначительного влияния. Так, в линейных задачах электроупругости и магнитоупругости пьезоактивных сред считается, что процессы, которые происходят в те-

ле, являются адиабатическими или изотермическими [8, 28, 30, 74] (т.е. не учитывается влияние температурного поля), причем в первом случае пренебрегалось влиянием магнитного поля, во втором – влиянием электрического поля. Учет температурного поля [88] в термодинамической модели (неравновесный, локально-равновесный процессы) положил начало развитию теорий термоэлектروупругости и термомагнитоупругости.

Разработке статических и термодинамических моделей с учетом пьезоэлектрического эффекта посвящены работы Желудева И.С. [30], Кэди У. [74], Мэзона У. [87], Ная Дж. [88], Наседкина А.В. [89–91], Устинова Ю.А. [123], Mindlin R. [170], Tiersten H. [200, 201] и др., с учетом пьезомагнитного – работы Белова К.П. [7], Берлинкура Д., Керрана Д., Жаффе Г. [8], Власова К.Б. [19, 20], Brown W. [135], Tiersten H. [199], а работы Кудрявцева Б.А., Партона В.З. [71], Кудрявцева Б.А. [72], Фильштинского Л.А., Кравец Е.М. [125] посвящены обзору этих и других моделей. Отметим также в этом направлении и работы [126, 133].

Методы решения задач электроупругости, магнитоупругости и электромагнитоупругости. К настоящему времени разработаны различные методы исследования электроупругого, магнитоупругого, электромагнитоупругого состояния тел, когда соответственно не учитываются магнитные или электрические свойства материалов, или учитываются все свойства.

Решения трехмерных задач электроупругости и магнитоупругости для тел из пьезоэлектриков, пьезомагнетиков и магнито-мягких ферромагнетиков с параболическими, эллиптическими, сфероидальными полостями, трещинами и включениями были получены Подильчуком Ю.Н. и его учениками [100, 101] на основе обобщенного метода Фурье.

Решению двумерных и плоских задач электроупругости и магнитоупругости посвящено большое количество работ, причем широкое применение здесь нашли методы обобщенных комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы плоской задачи электроупругости впервые были использованы в работах Космодамианского А.С. и Ложкина В.Н. [68, 69]. В работах Калоерова С.А. и его учеников [35, 40] была построена стройная теория комплексных потенциалов электроупругости,

получены общие представления этих функций для многосвязных областей, предложен комбинированный метод определения комплексных потенциалов, заключающийся в разложении искомым функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, нахождении неизвестных коэффициентов рядов из граничных условий дискретным методом наименьших квадратов (ДМНК), решен ряд практически важных задач. В дальнейшем эти результаты были перенесены на задачи магнитоупругости [40], затем на электромагнитоупругости [41]. Решению двумерных и плоских задач электромагнитоупругости посвящены также работы Gao C.F., Kessler H., Balke H. [155, 156], Tian W.-Y., Gabbert U. [198], Fang Q.H., Liu Y.W. и Jiang C.P. [152], Guan Q., He S.-R. [158].

Для решения задач электромагнитоупругости широко использовались также методы сингулярных интегральных уравнений, интегральных преобразований, асимптотической аппроксимации, граничных элементов, конечных элементов. Этими методами решены различные задачи электромагнитоупругости. Решение трехмерных задач электромагнитоупругости для трансверсально изотропных тел с использованием потенциальных функций и функций Грина дано в работах Wang X., Shen Ya. [212], Hou P.F. [159, 160], Pan E., Heyliger P.R. [176, 177].

В ряде работ [13, 14, 17, 114] Ватульяном А.О., Соловьевым А.Н. и их учениками методами конечных элементов и интегральных уравнений решены различные задачи электроупругости, магнитоупругости и электромагнитоупругости.

Подробное описание других методов и решений различных практически важных задач даны в работах [28, 29, 35, 40, 41, 50, 125, 126, 140, 161].

Методы решения задач термоэлектроупругости, термомангнитоупругости и термоэлектромангнитоупругости и их использование. В последние десятилетия в литературе широко обсуждаются проблемы исследования термоэлектро-, термомангнито-, термоэлектромангнитоупругого состояния пьезоактивных сред, когда пьезотела находятся под действием температурных полей.

Трехмерные задачи. В статье [182] с помощью метода разделения переменных решена задача электро- и термоэлектроупругости для тел с отверстиями канонической формы. Изучено термоэлектронапряженное состояние вблизи отверстий

и включений, получены формулы для коэффициентов интенсивности напряжений, индукций и напряженностей (КИНИН) в случае эллиптических и параболических трещин и плоских включений, решена контактная задача для пьезокерамического полупространства с эллиптической или параболической трещиной. В статьях [102, 138, 183, 193, 211] решена задача термоэлектроупругости, а в статье [174] – задача термоэлектромагнитоупругости для тела с эллиптической трещиной, находящегося под действием линейного потока тепла. Получены точные решения, формулы для нахождения КИНИН. Используя теорию обобщенных потенциалов в [137] дано решение задачи для пьезокерамического тела с эллиптической трещиной при действии температурной нагрузки в точке на границе трещины. В статье [194] исследовано термоэлектроупругое состояние тела с двумя эллиптическими трещинами под действием потока тепла, проведено сравнение с методом конечных элементов.

В работе [147] на основе принципа Гамильтона получены общие соотношения микрополярной теории термоупругости для пьезоэлектрических и пьезомагнитных сред, в [146] – основные соотношения термоэлектроупругости для сред с неоднородностями.

В статье [210] методом конечных элементов решена задача термоэлектроупругости для трехслойного тела, где один слой металлический, второй – пьезокерамический и между ними – градуированный слой металл-пьезокерамика. В работе [78] решена плоская задача для магнитоэлектрического пространства с трещиной под действием механических сил, электрического, магнитного и теплового потоков на бесконечности.

В работах Ватульяна А.О. [15], Ватульяна А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкина А.В. [16], Ватульяна А.О., Несторова С.А. [12] методами граничных элементов, интегральных уравнений и интегральных преобразований решен ряд задач динамической термоэлектроупругости для пьезокерамического слоя.

Двумерные и плоские задачи для тел с отверстиями и трещинами. Для односвязной области в виде бесконечной пластинки с отверстием или трещиной решен ряд задач, в том числе когда действует линейный поток тепла. При этом использовался формализм Стroh (Stroh) и для определения функций использовались методы

функций Грина [167], интегральных преобразований и сингулярных интегральных уравнений [206] или конформных отображений [153, 168, 213]. Для некоторых случаев рассмотрено и действие сосредоточенного источника тепла во внутренней точке. Так, в работе [188] была решена о действии линейного потока тепла и сосредоточенного тепла в пластинке с криволинейным теплоизолированным отверстием, причем с использованием функции Грина выделена логарифмическая особенность. Последнее решение распространено и на случай теплоизолированного отверстия и трещины, когда трещина моделировалась разрезом, проходящим через точку действия источника тепла, а коэффициент при логарифме считался неизвестной функцией, определенной на линии разреза. Аналогичным подходом были решены задачи в работах [187, 189, 190, 205]. Кстати, хотя без доказательств, авторами некоторых из вышеприведенных работ интуитивно установлено, что линейный поток тепла не вызывает напряжений в сплошном пьезоэлектрическом теле, что доказано в нашей работе.

В ряде работ с использованием формализма Стро, методов функции Грина [184], конформных отображений [185, 204], интегральных преобразований [154, 215], сингулярных интегральных уравнений [173, 186, 191] решен ряд задач для конечных или бесконечных пластинок с трещинами.

Методом сингулярных интегральных уравнений было получено решение задачи и для полосы с двумя трещинами [207, 208].

Следует отметить, что многие из результатов, полученных в исследованиях действия линейного потока тепла с использованием вышеописанных методов, не выдерживают критики в сравнительных анализах с точными решениями, полученными нами с использованием строгих математических выкладок, а зачастую также и противоречат физическому смыслу внутренних процессов.

Общий подход для решения задач в случае многосвязных пластинок предложен в работах Калоерова С.А. и его учеников. Для однородных пьезопластинок решены задачи термоэлектроупругости и термомагнитоупругости [37, 39, 58–60, 128], термоэлектромагнитоупругости [38, 47, 57]. Но во всех выводах основных соотношений и при решении задач действие линейного потока тепла не рассмат-

ривалось из-за недостатка в математических моделях, соответствующих этому случаю. Не были рассмотрены и случаи кусочно-однородных пластинок.

1.3. Выводы по разделу 1

В данном разделе приведен обзор литературы по теме диссертации и смежным темам, описаны модели и методы решения задач теплопроводности и термоупругости, модели и методы термомеханики с учетом действий электрического или магнитного полей, действия электромагнитного поля, методы решения задач термоэлектروупругости, термомагнитоупругости, термоэлектромагнитоупругости, а также приложения этих методов к решению различных задач.

Из приведенного обзора следует, что к настоящему времени разработаны различные методы решения задач термоупругости, когда учитываются механические и тепловые характеристики материала, задач термоэлектروупругости или термомагнитоупругости, когда учитываются механические и электрические или механические и магнитные свойства, а также задач термоэлектромагнитоупругости, когда учитываются все свойства материала, но на границе заданы значения температуры и плотности потока тепла. В то же время из-за недостаточной изученности свойств потенциальности термоэлектромагнитного поля в пьезоматериалах до сих пор не разработаны методы решения задач термоэлектромагнитоупругости, когда на пластинку действует линейный поток тепла; не разработаны и методы решения задач для кусочно-однородных пластинок с отверстиями и включениями, а также решения задач термоэлектромагнитоупругости, когда на границе имеет место конвективный теплообмен с внешней средой. Поэтому многие важные с практической точки зрения задачи остались нерешенными, в связи с чем тема настоящей диссертационной работы, посвященной разработке методов и решению задач теории и практики термоэлектромагнитоупругости для однородных и кусочно-однородных пластинок, находящихся под действием линейного потока тепла, актуальна и в ней необходимо было:

1. Получить основные соотношения плоской задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных сред при действии линейного потока тепла: общий вид комплексных потенциалов, граничные условия их определения, включая контактные условия и условия обмена с внешней средой.

2. С использованием конформных отображений, разложений функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и обобщенного метода наименьших квадратов получить решения широкого класса новых задач для пластин с отверстиями, трещинами и включениями с приведением их к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений, решаемых методами сингулярных разложений.

3. Составить программы численной реализации полученных теоретических решений.

4. Исследовать эффективность разработанных методов и достоверность получаемых при их использовании результатов;

5. Провести численные исследования с анализом получаемых результатов и с установлением закономерностей влияния физико-механических параметров материалов, геометрических характеристик отверстий и трещин, их количества, взаимного расположения относительно друг друга и внешних границ на значения основных характеристик термоэлектромагнитоупругого состояния пластинок, а в случае пластинок с трещинами и коэффициентов интенсивности напряжений, индукций и напряженностей.

РАЗДЕЛ 2

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

2.1. Краевые задачи теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости для многосвязных областей

Рассмотрим отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy многосвязную пластинку из пьезоматериала, ограниченную контурами L_l и находящуюся под действием линейного (однородного) потока тепла при отсутствии внешних механических и электромагнитных воздействий. На каждом из контуров отверстий пластинки заданы значения температуры или теплового потока, или он находится в условиях теплообмена с окружающей средой. При этом, исходя из отсутствия внешних механических и электромагнитных воздействий, на каждом контуре равны нулю внешние усилия (первая основная задача) или на нем заданы перемещения (вторая основная задача), на каждом из контуров равны нулю электрическая и магнитная индукции. В некоторые из отверстий пластинки могут быть вставлены включения из других пьезоматериалов, находящиеся с пластинкой в условиях идеального теплового и электромагнитоупругого контактов.

Для рассматриваемой пластинки будем решать задачу о термоэлектромагнитоупругом состоянии, которая приводится к последовательному решению двух задач – сперва стационарной задачи теплопроводности, а затем связанной задачи термоэлектромагнитоупругости.

Решение задачи теплопроводности заключается в интегрировании уравнения теплопроводности [62, 70]

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (2.1)$$

где k_{ij} – коэффициенты теплопроводности материала пластинки, при заданных на контуре граничных условиях [62]

$$T|_{L_l} = T_l, \quad (2.2)$$

если на границе задана температура T_l ;

$$q_n|_{L_l} = q_{nl} \quad (2.3)$$

при заданной плотности потока тепла q_{nl} ;

$$q_n|_{L_l} = h[T - \mathcal{T}]|_{L_l}, \quad (2.4)$$

если на контуре задан конвективный теплообмен с окружающей средой температуры $\mathcal{T}$ с коэффициентом теплообмена h ;

$$T|_{L_l} = T^{(l)}|_{L_l}, \quad q_n|_{L_l} = -q_n^{(l)}|_{L_l} \quad (2.5)$$

при идеальном тепловом контакте пластинки и включения. Здесь и далее величины, относящиеся к l -му включению, снабжены значком (l) вверху, при отсутствии такого значка – к пластинке.

После решения уравнения (2.1) по известной температуре $T(x, y)$ можно вычислить компоненты вектора теплопроводности и поток тепла через произвольную площадку с нормалью $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} q_x &= -\left(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ q_y &= -\left(k_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$q_n = -(k_{11} \cos nx + k_{12} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial x} - (k_{12} \cos nx + k_{22} \cos ny) \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2.7)$$

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости проводится после решения задачи теплопроводности и заключается в интегрировании системы уравнений, состоящей [70, 86, 94] из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \quad (2.8)$$

уравнений электромагнитостатики

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0; \quad (2.10)$$

уравнений термоэлектромагнитоупругого состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + p_{11}B_x + p_{21}B_y + \alpha_1 T, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + p_{12}B_x + p_{22}B_y + \alpha_2 T, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + p_{16}B_x + p_{26}B_y + \alpha_6 T, \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + v_{11}B_x + v_{12}B_y + t_1^\sigma T, \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + v_{12}B_x + v_{22}B_y + t_2^\sigma T, \\ H_x &= -p_{11}\sigma_x - p_{12}\sigma_y - p_{16}\tau_{xy} + v_{11}D_x + v_{12}D_y + \chi_{11}B_x + \chi_{12}B_y + m_1^\sigma T, \\ H_y &= -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + v_{12}D_x + v_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y + m_2^\sigma T \end{aligned} \quad (2.11)$$

соотношений Коши для малых деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.12)$$

и потенциальности электромагнитного поля

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (2.13)$$

$$H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2.14)$$

Здесь σ_x , σ_y , τ_{xy} и ε_x , ε_y , γ_{xy} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; u , v – проекции вектора перемещений; D_x , D_y , E_x , E_y и ϕ – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля; B_x , B_y , H_x , H_y и ψ – компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал магнитного поля; s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей и температуре; g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформаций и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях, индукциях и температуре;

β_{ij} , χ_{ij} и ν_{ij} – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной проницаемости, измеренные при постоянных напряжениях и температуре; α_i – коэффициенты теплового расширения, измеренные при постоянной индукции электромагнитного поля; t_i^σ и m_i^σ – пьезоэлектрические и пьромагнитные модули, измеренные при постоянных напряжениях; $T = T_m - T_n$ – разность температур в текущем и начальном состоянии, при котором напряжения и деформации, индукции и напряженности полей равны нулю; $T_n = 293,15$ К.

Кроме того, должно выполняться соотношение совместности деформаций Сен-Венана [86, 94]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.15)$$

Систему (2.8) – (2.14) нужно интегрировать при заданных граничных условиях. Механические граничные условия имеют вид [86]

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny &= X_{ln} = 0, \\ \tau_{xy} \cos nx + \sigma_y \cos ny &= Y_{ln} = 0; \end{aligned} \quad (2.16)$$

для первой основной задачи,

$$u = u_*, \quad v = v_*, \quad (2.17)$$

где u_* , v_* – заданные на границе перемещения, для второй основной задачи.

Электрические и магнитные граничные условия записываются в виде [115]

$$\begin{aligned} D_x \cos nx + D_y \cos ny &= D_{ln} = 0, \\ B_x \cos nx + B_y \cos ny &= B_{ln} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При этом в силу отсутствия внешних механических и электромагнитных воздействий, $X_{ln} = Y_{ln} = D_{ln} = B_{ln} = 0$. В случае идеального механического и электромагнитного контактов, когда на границе включений усилия и индукции электромагнитного поля со стороны пластинки на включение и наоборот равны по величине и противоположны по знаку, а перемещения и потенциалы электромагнитного поля в точках границы равны, получим

$$X_n = -X_n^{(l)}, \quad Y_n = -Y_n^{(l)}, \quad u = u^{(l)}, \quad v = v^{(l)},$$

$$D_n = -D_n^{(l)}, \quad B_n = -B_n^{(l)}, \quad \varphi = \varphi^{(l)}, \quad \psi = \psi^{(l)}. \quad (2.19)$$

После интегрирования основной системы уравнений при заданных граничных условиях становится возможным найти основные характеристики термоэлектромагнитоупругого состояния (ТЭМУС) (напряжения, деформации и перемещения, индукции, напряженности и потенциалы электромагнитного поля), а по значениям основных характеристик ТЭМУС также найти их значения на любых площадках с нормалью n и касательной s :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 nx + \sigma_y \cos^2 ny + 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny, \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2 ny + \sigma_y \cos^2 nx - 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny, \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos nx \cos ny + \tau_{xy} (\cos^2 nx - \cos^2 ny); \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} D_n &= D_x \cos nx + D_y \cos ny, \\ D_s &= D_x \cos ny - D_y \cos nx, \\ B_n &= B_x \cos nx + B_y \cos ny, \\ B_s &= B_x \cos ny - B_y \cos nx, \\ E_n &= E_x \cos nx + E_y \cos ny, \\ E_s &= E_x \cos ny - E_y \cos nx, \\ H_n &= H_x \cos nx + H_y \cos ny, \\ H_s &= H_x \cos ny - H_y \cos nx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Сведение краевой задачи электромагнитоупругости к краевым задачам для определения функций напряжений и индукций. Для определения напряжений и индукций введем функцию напряжений $F(x, y)$ [77], функцию электрической индукции $X(x, y)$ и функцию магнитной индукции $\Omega(x, y)$ [41] таким образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ D_x &= \frac{\partial X}{\partial y}, \quad D_y = -\frac{\partial X}{\partial x}, \\ B_x &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Тогда уравнения (2.8) и первые уравнения в (2.9) и (2.10) удовлетворяются тождественно [40, 41]. После подстановки выражений (2.22) в уравнения (2.11), а затем

полученных выражений – в (2.15) и вторые уравнения систем (2.9), (2.10), получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_{4s}F + L_{3g}X + L_{3p}\Omega &= L_{2\alpha}T, \\ L_{3g}F + L_{2\beta}X + L_{2v}\Omega &= L_{1t}T, \\ L_{3p}F + L_{2v}X + L_{2\chi}\Omega &= L_{1m}T. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{4s} &= s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ L_{3g} &= -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{3p} &= -p_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (p_{12} + p_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (p_{21} + p_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + p_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3}, \\ L_{2\beta} &= -\beta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \beta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{2v} &= -v_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2v_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - v_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{2\chi} &= -\chi_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\chi_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \chi_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{2\alpha} &= -\alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{1t} &= -t_2^\sigma \frac{\partial}{\partial x} + t_1^\sigma \frac{\partial}{\partial y}, \\ L_{1m} &= -m_2^\sigma \frac{\partial}{\partial x} + m_1^\sigma \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Применяя операторный аналог метода Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений, систему (2.23) приведем к виду

$$\begin{vmatrix} L_{4s} & L_{3g} & L_{3p} \\ L_{3g} & L_{2\beta} & L_{2v} \\ L_{3p} & L_{2v} & L_{2\chi} \end{vmatrix} (F, X, \Omega) = (L_F, L_X, L_\Omega) T, \quad (2.25)$$

где

$$L_F = \begin{vmatrix} L_{2\alpha} & L_{3g} & L_{3p} \\ L_{1t} & L_{2\beta} & L_{2v} \\ L_{1m} & L_{2v} & L_{2\chi} \end{vmatrix}, \quad L_X = \begin{vmatrix} L_{4s} & L_{2\alpha} & L_{3p} \\ L_{3g} & L_{1t} & L_{2v} \\ L_{3p} & L_{1m} & L_{2\chi} \end{vmatrix},$$

$$L_\Omega = \begin{vmatrix} L_{4s} & L_{3g} & L_{2\alpha} \\ L_{3g} & L_{2\beta} & L_{1t} \\ L_{3p} & L_{2v} & L_{1m} \end{vmatrix}. \quad (2.26)$$

Дифференциальные уравнения (2.25) нужно решать при заданных на границе механических и электромагнитных условиях (2.16) – (2.19).

Если на контуре заданы усилия, то из условий (2.16), учитывая (2.22), а также равенства $\cos(n x) = \pm dy/ds$, $\cos(n y) = \mp dx/ds$ получаем

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \pm X_{ln} = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \mp Y_{ln} = 0.$$

При этом обход области S по любому контуру ведется против часовой стрелки; верхние знаки выбираются для внешнего контура L_0 области, нижние – для контуров отверстий L_l . Интегрируя последние соотношения по дуге s контура, будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial y} = c_{11}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = c_{12}. \quad (2.27)$$

В случае задания на контуре перемещений граничные условия сохраняют вид (2.17).

Электромагнитные граничные условия (2.18) станут такими:

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \pm D_{ln} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial s} = \pm B_{ln} = 0,$$

и после интегрирования примут вид

$$X = c_{13}, \quad \Omega = c_{14}. \quad (2.28)$$

В силу отсутствия внешних механических и электромагнитных воздействий здесь учтено, что $X_{ln} = Y_{ln} = D_{ln} = B_{ln} = 0$.

2.2. Плотность внутренней энергии

Достаточно полную информацию о состоянии тела можно получить, исследуя изменения удельной тепловой энтропии S и плотности внутренней энергии тела U . Для удельной тепловой энтропии имеем [94]

$$S = \alpha_1 \sigma_x + \alpha_2 \sigma_y + \alpha_6 \tau_{xy} - t_1^\sigma D_x - t_2^\sigma D_y - m_1^\sigma B_x - m_2^\sigma B_y + \frac{\rho c_p}{T_h} T, \quad (2.29)$$

где ρ – плотность материала тела, c_p – его удельная теплоемкость.

Согласно первому закону термодинамики, если тело поглотит некоторую теплоту dQ , внешние механические силы выполняют над ним элементарную работу $dW_{\text{мех}}$, электрическое поле – работу $dW_{\text{эл}}$, а магнитное поле – работу $dW_{\text{маг}}$. Тогда приращение внутренней энергии dU , являющееся полным дифференциалом, можно записать в виде [88, 94]

$$dU = dW_{\text{мех}} + dW_{\text{эл}} + dW_{\text{маг}} + dQ. \quad (2.30)$$

Удельная работа механических сил, направленная на изменение деформаций в теле, записывается в виде

$$dW_{\text{мех}} = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy}.$$

Удельная работа электрического поля, направленная на поляризацию кристалла, из которого состоит пластинка, и удельная работа магнитного поля записываются в виде

$$dW_{\text{эл}} = E_x dD_x + E_y dD_y,$$

$$dW_{\text{маг}} = H_x dB_x + H_y dB_y.$$

Из второго закона термодинамики для обратимого теплового процесса можно записать

$$dQ = (T + T_h) dS.$$

Таким образом, уравнение (2.30) можно переписать в виде [94]

$$dU = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + E_x dD_x + E_y dD_y + H_x dB_x + H_y dB_y + (T + T_h) dS. \quad (2.31)$$

Рассмотрим плотность внутренней энергии U как функцию от деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, индукций D_x, D_y, B_x, B_y и энтропии S . Поскольку dU есть полный дифференциал, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\frac{dU}{d\varepsilon_x} &= \sigma_x, & \frac{dU}{d\varepsilon_y} &= \sigma_y, & \frac{dU}{d\gamma_{xy}} &= \tau_{xy}, \\ \frac{dU}{dD_x} &= E_x, & \frac{dU}{dD_y} &= E_y, \\ \frac{dU}{dB_x} &= H_x, & \frac{dU}{dB_y} &= H_y, \\ \frac{dU}{dS} &= T + T_n.\end{aligned}\tag{2.32}$$

Для определения плотности внутренней энергии рассмотрим термодинамическую функцию [94]

$$\Phi = U - (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + (T + T_n)S).\tag{2.33}$$

Учитывая (2.31), из (2.33) получим

$$\begin{aligned}d\Phi &= -\varepsilon_x d\sigma_x - \varepsilon_y d\sigma_y - \gamma_{xy} d\tau_{xy} + E_x dD_x + E_y dD_y + \\ &\quad + H_x dB_x + H_y dB_y - SdT.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Рассмотрим Φ как функцию от напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, индукций D_x, D_y, B_x, B_y и температуры T . Поскольку $d\Phi$ является полным дифференциалом, то из (2.34) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{d\sigma_x} &= -\varepsilon_x, & \frac{d\Phi}{d\sigma_y} &= -\varepsilon_y, & \frac{d\Phi}{d\tau_{xy}} &= -\gamma_{xy}, \\ \frac{d\Phi}{dD_x} &= E_x, & \frac{d\Phi}{dD_y} &= E_y, \\ \frac{d\Phi}{dB_x} &= H_x, & \frac{d\Phi}{dB_y} &= H_y, \\ \frac{d\Phi}{dT} &= -S.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Подставив выражения (2.11), (2.29) в соотношения (2.35) и последовательно проинтегрировав полученные выражения, найдем

$$\begin{aligned}
\Phi = & -\frac{1}{2}s_{11}\sigma_x^2 - s_{12}\sigma_x\sigma_y - s_{16}\sigma_x\tau_{xy} - g_{11}\sigma_x D_x - g_{21}\sigma_x D_y - p_{11}\sigma_x B_x - p_{21}\sigma_x B_y - \alpha_1\sigma_x T - \\
& -\frac{1}{2}s_{22}\sigma_y^2 - s_{26}\sigma_y\tau_{xy} - g_{12}\sigma_y D_x - g_{22}\sigma_y D_y - p_{12}\sigma_y B_x - p_{22}\sigma_y B_y - \alpha_2\sigma_y T - \\
& -\frac{1}{2}s_{66}\tau_{xy}^2 - g_{16}\tau_{xy} D_x - g_{26}\tau_{xy} D_y - p_{16}\tau_{xy} B_x - p_{26}\tau_{xy} B_y - \alpha_6\tau_{xy} T + \\
& +\frac{1}{2}\beta_{11}D_x^2 + \beta_{22}D_x D_y + v_{11}D_x B_x + v_{12}D_x B_y + t_1^\sigma D_x T + \\
& +\frac{1}{2}\beta_{22}D_y^2 + v_{12}D_y B_x + v_{22}D_y B_y + t_2^\sigma D_y T + \\
& +\frac{1}{2}\chi_{11}B_x^2 + \chi_{12}B_x B_y + m_1^\sigma B_x T + \\
& +\frac{1}{2}\chi_{22}B_y^2 + m_2^\sigma B_y T - \\
& -\frac{1}{2}\frac{c_v \rho}{T_n} T^2. \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Из процесса интегрирования следует, что функция Φ определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Используя уравнения (2.11) и (2.29), функцию (2.36) можно записать и в билинейной форме:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(-\sigma_x \varepsilon_x - \sigma_y \varepsilon_y - \tau_{xy} \gamma_{xy} + D_x E_x + D_y E_y + B_x H_x + B_y H_y - TS \right). \quad (2.37)$$

Если вместо напряжений и индукций подставить их выражения из уравнений состояния, то получим и выражение функции Φ как квадратичную форму от деформаций и напряженностей и температуры. Но наиболее удобной при расчетах является квадратичная форма (2.36).

Подставляя это выражение в (2.33), получим и билинейную форму для плотности внутренней энергии U :

$$U = \frac{1}{2} \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + D_x E_x + D_y E_y + B_x H_x + B_y H_y + (T + 2T_n) S \right). \quad (2.38)$$

Плотность внутренней энергии U , как и функция Φ , определена с точностью до аддитивной постоянной. Как и в случае функции Φ , плотность внутренней энергии лучше выразить через напряжения и индукции. Для этого, подставляя в (2.38) выражения (2.11), получаем

$$\begin{aligned}
\Phi = & \frac{1}{2} s_{11} \sigma_x^2 + s_{12} \sigma_x \sigma_y + s_{16} \sigma_x \tau_{xy} + g_{11} \sigma_x D_x + g_{21} \sigma_x D_y + p_{11} \sigma_x B_x + p_{21} \sigma_x B_y + \alpha_1 \sigma_x T + \\
& + \frac{1}{2} s_{22} \sigma_y^2 + s_{26} \sigma_y \tau_{xy} + g_{12} \sigma_y D_x + g_{22} \sigma_y D_y + p_{12} \sigma_y B_x + p_{22} \sigma_y B_y + \alpha_2 \sigma_y T + \\
& + \frac{1}{2} s_{66} \tau_{xy}^2 + g_{16} \tau_{xy} D_x + g_{26} \tau_{xy} D_y + p_{16} \tau_{xy} B_x + p_{26} \tau_{xy} B_y + \alpha_6 \tau_{xy} T + \\
& + \frac{1}{2} \beta_{11} D_x^2 + \beta_{22} D_x D_y + v_{11} D_x B_x + v_{12} D_x B_y + t_1^\sigma D_x T + \\
& + \frac{1}{2} \beta_{22} D_y^2 + v_{12} D_y B_x + v_{22} D_y B_y + t_2^\sigma D_y T + \\
& + \frac{1}{2} \chi_{11} B_x^2 + \chi_{12} B_x B_y + m_1^\sigma B_x T + \\
& + \frac{1}{2} \chi_{22} B_y^2 + m_2^\sigma B_y T - \\
& - \frac{1}{2} \frac{c_v \rho}{T_n} T^2. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

2.3. Действие линейного потока тепла в сплошной пластинке

Задачи теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости о действии линейного потока тепла на многосвязную пластинку будем решать методом суперпозиции, где понадобится решение соответствующих задач для сплошной пластинки. Поэтому приведем сначала их решения. Рассмотрим сначала ее решение для бесконечной пластинки.

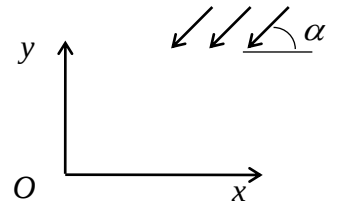


Рис. 2.1

Пусть сплошная пластинка на бесконечности находится под действием только линейного потока тепла плотности q , направленного под углом α к оси Ox (рис. 2.1). Тогда для проекций потока тепла и потока тепла через произвольную площадку с нормалью n получим

$$q_x^* = -q \cos \alpha, \quad q_y^* = -q \sin \alpha, \quad (2.40)$$

$$q_n^* = -q (\cos \alpha \cos nx + \sin \alpha \cos ny). \quad (2.41)$$

При этом в силу отсутствия внешних механических и электромагнитных воздей-

ствий на бесконечности механические напряжения и индукции (электрическая и магнитная) равны нулю [48]:

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_x^\infty = D_y^\infty = B_x^\infty = B_y^\infty = 0. \quad (2.42)$$

Изменение T^* температуры в пластинке за счет действия линейного потока тепла выберем в виде линейной функции координат x, y так, чтобы она в начале координат принимала нулевое значение [54]:

$$T^*(x, y) = q(t_x x + t_y y). \quad (2.43)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (2.1), а на основе (2.40) и соотношений (2.6) получаем, что

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}{\mathfrak{a}_T^2}, \\ t_y &= \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{\mathfrak{a}_T^2}; \\ \mathfrak{a}_T^2 &= k_{11} k_{22} - k_{12}^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Для конечной сплошной пластинки, если по его контуру действует линейный поток тепла, то для температуры в пластинке опять получим формулу (2.43).

Если при заданном линейном потоке тепла в конечной части пластинки имеются отверстия или включения, то, кроме основного температурного поля, связанного с действием линейного потока тепла, в пластинке возникает возмущенное поле, характеризуемое некоторой функцией $T_\epsilon(x, y)$. Тогда полное изменение температурного поля состоит из изменения температурного поля в сплошной пластинке, характеризуемого функцией $T^*(x, y)$, и возмущенного, характеризуемого функцией $T_\epsilon(x, y)$:

$$T(x, y) = T^*(x, y) + T_\epsilon(x, y), \quad (2.45)$$

а для компонент вектора теплопроводности и плотности потока тепла через произвольную площадку с нормалью $\vec{n}$ получим

$$q_x = q_x^* + q_{x\epsilon}, \quad q_y = q_y^* + q_{y\epsilon}, \quad (2.46)$$

$$q_n = q_n^* + q_{n\epsilon}, \quad (2.47)$$

где

$$q_{x\epsilon} = -\left(k_{11} \frac{\partial T_\epsilon}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T_\epsilon}{\partial y}\right), \quad q_{y\epsilon} = -\left(k_{12} \frac{\partial T_\epsilon}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T_\epsilon}{\partial y}\right);$$

$$q_{n\epsilon} = -(k_{11} \cos nx + k_{12} \cos ny) \frac{\partial T_\epsilon}{\partial x} - (k_{12} \cos nx + k_{22} \cos ny) \frac{\partial T_\epsilon}{\partial y}.$$

Функция возмущенного температурного поля $T_\epsilon(x, y)$, как видно из (2.43) и (2.45), должна удовлетворять уравнению (2.1), а граничные условия для ее определения на основе (2.2) – (2.5) запишутся в виде:

$$T_\epsilon|_L = T_l - T^*|_L, \quad (2.48)$$

если на границе задана температура T_l ,

$$q_{n\epsilon}|_L = (q_{nl} - q_n^*)|_L \quad (2.49)$$

в случае задания плотности потока тепла q_{nl} ,

$$q_{n\epsilon}|_L - hT_\epsilon|_L = -\left[h(T^* + \mathcal{T}) + q_n^*\right]|_L, \quad (2.50)$$

если задан конвективный теплообмен с коэффициентом h с окружающей средой температуры $\mathcal{T}$ и

$$T_\epsilon|_L = [T^{(l)} - T^*]|_L, \quad q_{n\epsilon}|_L = -[q_n^{(l)} + q_n^*]|_L \quad (2.51)$$

в случае идеального теплового контакта пластинки и включения.

Для случая действия однородного потока тепла в сплошной пластинке можно найти и функции напряжений и индукций электрического и магнитного полей. Выберем эти функции в виде

$$F(x, y) = \phi_1 x^2 + \phi_2 y^2 + \phi_3 xy,$$

$$X(x, y) = \chi_1 x + \chi_2 y,$$

$$\Omega(x, y) = \varpi_1 x + \varpi_2 y. \quad (2.52)$$

Из условий на бесконечности (2.42) следует, что $\phi_i = \chi_i = \varpi_i = 0$, а из уравнений термоэлектромагнитоупругого состояния (2.11) будем иметь

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = \alpha_1 T^*, \quad \varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*}{\partial y} = \alpha_2 T^*, \quad \gamma_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = \alpha_6 T^*, \quad (2.53)$$

$$E_x^* = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = t_1^\sigma T^*, \quad E_y^* = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = t_2^\sigma T^*,$$

$$H_x^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x} = m_1^\sigma T^*, \quad H_y^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial y} = m_2^\sigma T^*. \quad (2.54)$$

где ε_x^* , ε_y^* , γ_{xy}^* , u^* , v^* , E_x^* , E_y^* , H_x^* , H_y^* , φ^* , ψ^* – соответствующие величины для задачи о сплошной пластинке.

Учитывая выражение (2.43), после интегрирования первых двух уравнений системы (2.53) получим

$$u^*(x, y) = \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 + \alpha_1 q t_y xy + f_1(y),$$

$$v^*(x, y) = \frac{\alpha_2 q t_x}{2} y^2 + \alpha_2 q t_y xy + f_2(x).$$

Подставляя эти выражения в третье равенство (2.53), будем иметь

$$(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q x + f_2'(x) = -(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q y - f_1'(y) = \omega_3. \quad (2.55)$$

При выводе последних соотношений учтено, что, если одна функция, зависящая от x , равна другой функции, зависящей от y , то эти функции являются постоянной (ω_3). Интегрируя эти соотношения, найдем $f_1(y)$ и $f_2(x)$ и перемещения

$$u^*(x, y) = \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y xy - \omega_3 y + u_0,$$

$$v^*(x, y) = \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x xy + \omega_3 x + v_0,$$

где ω_3 – произвольная постоянная, которую примем равной нулю. Полагая равными нулю перемещения начала координат (при $x = y = 0$), также получим, что $u_0 = v_0 = 0$. Окончательно для перемещений от линейного потока находим

$$u^*(x, y) = \frac{\alpha_1 q t_x}{2} x^2 - \frac{(\alpha_2 t_x - \alpha_6 t_y) q}{2} y^2 + \alpha_1 q t_y xy,$$

$$v^*(x, y) = \frac{\alpha_2 q t_y}{2} y^2 - \frac{(\alpha_1 t_y - \alpha_6 t_x) q}{2} x^2 + \alpha_2 q t_x xy. \quad (2.56)$$

Аналогичным образом найдем выражения для электрического и магнитного потенциалов. При этом следует, подставляя выражения (2.54) во вторые уравнения в (2.9) и (2.10), получим

$$t_1^\sigma t_y - t_2^\sigma t_x = 0, \quad m_1^\sigma t_y - m_2^\sigma t_x = 0.$$

Эти формулы можно переписать в виде

$$\frac{t_2^\sigma}{t_1^\sigma} = \frac{m_2^\sigma}{m_1^\sigma} = \frac{t_y}{t_x}.$$

С учетом (2.44), окончательно можно записать

$$\frac{t_2^\sigma}{t_1^\sigma} = \frac{m_2^\sigma}{m_1^\sigma} = \frac{k_{11} \sin \alpha - k_{12} \cos \alpha}{k_{22} \cos \alpha - k_{12} \sin \alpha}$$

или

$$\frac{t_2^\sigma}{t_1^\sigma} = \frac{m_2^\sigma}{m_1^\sigma} = \frac{k_{11} \operatorname{tg} \alpha - k_{12}}{k_{22} - k_{12} \operatorname{tg} \alpha}. \quad (2.57)$$

Формула (2.57) представляет собой условие потенциальности электромагнитного поля.

Интегрируя (2.54), для потенциалов электромагнитного поля найдем

$$\begin{aligned} \varphi^*(x, y) &= -\frac{t_1^\sigma q t_x}{2} x^2 - \frac{t_2^\sigma q t_y}{2} y^2 - t_1^\sigma q t_x x y, \\ \psi^*(x, y) &= -\frac{m_1^\sigma q t_x}{2} x^2 - \frac{m_2^\sigma q t_y}{2} y^2 - m_1^\sigma q t_x x y. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Здесь при интегрировании учтено, что потенциалы электромагнитного поля в начале координат равны нулю и поэтому постоянные интегрирования получатся равными нулю.

Таким образом, при действии линейного потока тепла в сплошной пластинке напряжения и индукции электромагнитного поля не возникают; деформации и напряженности будут линейными функциями, а перемещения и потенциалы – квадратичными функциями, и с удалением от начала координат эти функции по модулю будут неограниченно расти.

2.4. Комплексные потенциалы задачи теплопроводности

Если при решении уравнения (2.1) для возмущенного температурного поля использовать функции комплексного переменного, то его решением будет [5, 70]

$$T_\theta = 2\operatorname{Re} F_5(z_5), \quad (2.59)$$

где $F_5(z_5)$ – аналитическая функция комплексного переменного

$$z_5 = x + \mu_5 y; \quad (2.60)$$

$$\mu_5 = (-k_{12} + i\alpha_T)/k_{22}. \quad (2.61)$$

Тогда на основе (2.45) – (2.47) для изменения температуры, компонент вектора теплопроводности и плотности потока тепла получим:

$$T(x, y) = T^* + 2\operatorname{Re} F_5(z_5); \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} q_x &= -q \cos \alpha + 2\operatorname{Re} [i\mu_5 \alpha_T F'_5(z_5)], \\ q_y &= -q \sin \alpha - 2\operatorname{Re} [i\alpha_T F'_5(z_5)]; \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$q_n = q_n^* - 2\operatorname{Re} [i\alpha_T \delta_{5,s} F'_5(z_5)]. \quad (2.64)$$

Здесь $\delta_{5,s} = \mp dz_5/ds = \mp(dx/ds + \mu_5 dy/ds)$, где верхние знаки относятся к внешнему контуру области, нижние – к внутренним, т.е. к контурам отверстий.

Функция $F_5(z_5)$ должна удовлетворять условиям, следующим из условий (2.48) – (2.51), а именно [70]

$$2\operatorname{Re} F_5(t_5) = T_l - T^* \quad (2.65)$$

в случае задания на контуре L_l температуры T_l ,

$$2\operatorname{Re} [i\alpha_T F_5(t_5)] = \pm \int_0^s (q_{nl} - q_n^*(t)) ds + c \quad (2.66)$$

при задании плотности потока тепла q_{nl} и

$$2\operatorname{Re} [h F_5(t_5) + i\alpha_T \delta_{5,s} F'_5(t_5)] = q_n^* - h [T^* - \mathcal{T}]. \quad (2.67)$$

при конвективном теплообмене с окружающей средой. На контурах контактов пластины и включений граничные условия записываются так:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}\left[F_5(t_5) - F_5^{(l)}(t_5^{(l)})\right] &= -T^*(t), \\
2\operatorname{Re}\left[i\left(\mathfrak{a}_T F_5(t_5) - \mathfrak{a}_T^{(l)} F_5^{(l)}(t_5^{(l)})\right)\right] &= \int_0^s q_n^*(t) ds + c.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Немалый интерес в исследованиях представляет значение суммарного потока тепла через контуры. Исходя из формул (2.64), получаем, что поток тепла в области слева направо через дугу AB при переходе из точки A в точку B равняется приращению правой части выражения (2.64) при этом переходе и будет вычисляться по формуле [5]

$$[q_n]_{AB} = 2\operatorname{Re}\left[i\mathfrak{a}_T F_5(z_5)\right]_{AB} + q[y\cos\alpha - x\sin\alpha]_A^B. \tag{2.69}$$

Если за дугу AB принять замкнутый контур L_l отверстия или тонкого жесткого кольца, то поток тепла через этот контур в область равен

$$q_l = 2\operatorname{Re}\left[i\mathfrak{a}_T F_5(z_5)\right]_{L_l}, \tag{2.70}$$

где q_l – суммарный поток тепла в пластинку через контур L_l .

Комплексный потенциал теплопроводности $F_5(z_5)$ определен в области S_5 , получаемой из заданной области S аффинным преобразованием (2.60). Найдем общее представление этой функции для многосвязной области.

Пусть пластинка занимает конечную многосвязную S , ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 2.2). Тогда область S_5 будет ограничена контурами L_{5l} ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$), соответствующими контурам L_l ($l = \overline{0, \mathcal{L}}$) области S при аффинном преобразовании (2.60). В этом случае функция $F_5(z_5)$ имеет вид [70]

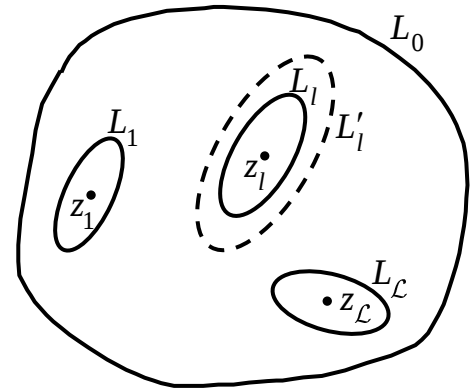


Рис. 2.2

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l \ln(z_5 - z_{5l}) + F_{50}(z_5), \tag{2.71}$$

где c_5 – вещественная константа, равная нулю в случае конечной области и определяемая из граничных условий в случае бесконечной области;

$$D_l = -\frac{q_l}{4\pi\alpha_T}, \quad (2.72)$$

z_{5l} – точка, соответствующая при аффинном преобразовании (2.60) произвольной точке внутри контура L_l ; $F_{50}(z_5)$ – функция, голоморфная в многосвязной области S_5 . При этом, если область S бесконечна, то из условий ограниченности температуры на бесконечности следует, что $T_\infty = 2c_5$ и

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l = 0. \quad (2.73)$$

Условию (2.73) нужно удовлетворять при решении конкретных задач.

2.5. Комплексные потенциалы задачи термоэлектромагнитоупругости

Решение системы (2.23) можно представить в следующем виде:

$$F = F_o + F_q, \quad X = X_o + X_q, \quad \Omega = \Omega_o + \Omega_q, \quad (2.74)$$

где F_o , X_o , Ω_o – общие решения однородных уравнений

$$\begin{vmatrix} L_{4s} & L_{3g} & L_{3p} \\ L_{3g} & L_{2\beta} & L_{2v} \\ L_{3p} & L_{2v} & L_{2\chi} \end{vmatrix} (F_o, X_o, \Omega_o) = (0, 0, 0), \quad (2.75)$$

соответствующих уравнениям (2.25); F_q , X_q , Ω_q – частные решения уравнений (2.25), учитывающие тепловое воздействие без линейного потока тепла.

Решение первого уравнения (2.75) будем искать в виде функции $F_o(x, y)$ от линейной формы $z = x + \mu y$, т.е. в виде функции $F_o(x + \mu y)$, где μ – постоянная, подлежащая определению. Подставляя функцию $F_o(x + \mu y)$ в первое уравнение (2.75) и учитывая, что в силу произвольности этой функции ее производная

$F_o^{VIII}(x + \mu y)$ не может тождественно равняться нулю, получаем, что коэффициент при этой производной равен нулю:

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2v}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2v}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.76)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \\ l_{2v}(\mu) &= -v_{11}\mu^2 + 2v_{12}\mu - v_{22}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Корни уравнения (2.76) являются комплексными и в силу вещественности его коэффициентов попарно сопряженными. Обозначим их через $\mu_k, \bar{\mu}_k$ ($k = \overline{1, 4}$) и упорядочим таким образом, что $\text{Im} \mu_k > 0$. Будем все корни считать различными. Каждой паре корней соответствуют свои функции $F_k(z_k)$ и $F_{k+4}(\bar{z}_k)$ ($k = \overline{1, 4}$). Поэтому общее решение представляется в виде

$$F_o(x, y) = \sum_{k=1}^4 [F_k(z_k) + F_{k+4}(\bar{z}_k)]. \quad (2.78)$$

Из того, что левая часть (2.78) является вещественной функцией, а правая суммой комплексных функций, следует, что $F_{k+4}(\bar{z}_k) = \bar{F}_k(\bar{z}_k) = \overline{F_k(z_k)}$, т. е.

$$F_o(x, y) = 2 \text{Re} \sum_{k=1}^4 F_k(z_k), \quad (2.79)$$

где $F_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) – аналитические функции обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y. \quad (2.80)$$

Аналогичным образом находятся решения однородных уравнений, соответ-

ствующих второму и третьему уравнениям (2.75):

$$\begin{aligned} X_o(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 X_k(z_k), \\ \Omega_o(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \Omega_k(z_k). \end{aligned} \quad (2.81)$$

При этом $X_k(z_k)$, $\Omega_k(z_k)$, как и $F_k(z_k)$, являются аналитическими функциями обобщенных комплексных переменных z_k . Так как все эти функции должны удовлетворять однородной системе уравнений, соответствующей первоначальной системе (2.23), то легко понять, что между функциями $X_k(z_k)$ и $F_k(z_k)$, $\Omega_k(z_k)$ и $F_k(z_k)$ существуют связи вида [40, 41]

$$\begin{aligned} X_k(z_k) &= v_k F'_k(z_k), \\ \Omega_k(z_k) &= \rho_k F'_k(z_k), \end{aligned} \quad (2.82)$$

где v_k , ρ_k – неизвестные постоянные. Подставляя выражения (2.82) в уравнения однородной системы (2.23) и учитывая (2.79), получаем

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu_k) + v_k l_{3g}(\mu_k) + \rho_k l_{3p}(\mu_k) &= 0, \\ l_{3g}(\mu_k) + v_k l_{2\beta}(\mu_k) + \rho_k l_{2v}(\mu_k) &= 0, \\ l_{3p}(\mu_k) + \eta_k l_{2v}(\mu_k) + \rho_k l_{2\chi}(\mu_k) &= 0 \quad (k = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Из 2-го и 3-го уравнений системы (2.83) находим

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{l_{3p}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)}, \\ \rho_k &= \frac{l_{3g}(\mu_k) l_{2v}(\mu_k) - l_{2\beta}(\mu_k) l_{3p}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Подставив (2.84) в первое уравнение системы (2.83), получим равенство, которое на основе уравнения (2.76) удовлетворяется тождественно.

Частное решение системы (2.23) для возмущенного температурного поля будем искать в виде [39]

$$\begin{aligned} F_q(x, y) &= 2 \operatorname{Re} r_5 \int dz_5 \int F_5(z_5) dz_5, \\ X_q(x, y) &= 2 \operatorname{Re} r_\chi \int F_5(z_5) dz_5, \end{aligned}$$

$$\Omega_q(x, y) = 2 \operatorname{Re} r_\omega \int F_5(z_5) dz_5, \quad (2.85)$$

где r_5 , r_χ , r_ω – неизвестные постоянные. Подставляя (2.62) и (2.85) в (2.23) и учитывая (2.77), для их определения получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} r_5 l_{4s}(\mu_5) + r_\chi l_{3g}(\mu_5) + r_\omega l_{3p}(\mu_5) &= l_{2\alpha}(\mu_5), \\ r_5 l_{3g}(\mu_5) + r_\chi l_{2\beta}(\mu_5) + r_\omega l_{2v}(\mu_5) &= l_{1t}(\mu_5), \\ r_5 l_{3p}(\mu_5) + r_\chi l_{2v}(\mu_5) + r_\omega l_{2\chi}(\mu_5) &= l_{1m}(\mu_5), \end{aligned} \quad (2.86)$$

в которой

$$\begin{aligned} l_{2\alpha}(\mu_5) &= -\alpha_1 \mu_5^2 + \alpha_6 \mu_5 - \alpha_2, \\ l_{1t}(\mu_5) &= t_1^\sigma \mu_5 - t_2^\sigma, \quad l_{1m}(\mu_5) = m_1^\sigma \mu_5 - m_2^\sigma. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Решение системы (2.86) имеет вид

$$r_5 = \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}, \quad r_\omega = \frac{l_\omega(\mu_5)}{\Delta(\mu_5)}. \quad (2.88)$$

Здесь

$$\begin{aligned} l_5(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{2v}(\mu_5) \\ l_{1m}(\mu_5) & l_{2v}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \\ l_\chi(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3p}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) & l_{2v}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) & l_{2\chi}(\mu_5) \end{vmatrix}, \\ l_\omega(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \\ l_{3p}(\mu_5) & l_{2v}(\mu_5) & l_{1m}(\mu_5) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Таким образом, для функций $F(x, y)$, $X(x, y)$, $\Omega(x, y)$ будем иметь

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^4 F_k(z_k) + r_5 \int dz_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right], \\ X(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^4 \eta_k F'_k(z_k) + r_5 v_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right], \end{aligned}$$

$$\Omega(x, y) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^4 \rho_k F'_k(z_k) + r_5 \rho_5 \int F_5(z_5) dz_5 \right], \quad (2.90)$$

где

$$v_5 = \frac{r_\chi}{r_5}, \quad \rho_5 = \frac{r_\omega}{r_5}. \quad (2.91)$$

Учитывая формулы (2.22), для основных характеристик ТЭМУС найдем выражения [39–41]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}) \Phi'_k(z_k); \quad (2.92)$$

$$(D_x, D_y, B_x, B_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}) \Phi'_k(z_k); \quad (2.93)$$

$$(E_x, E_y, H_x, H_y) = (E_x^*, E_y^*, H_x^*, H_y^*) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (r_k^0, \mu_k r_k^0, h_k^0, \mu_k h_k^0) \Phi'_k(z_k); \quad (2.94)$$

$$(u, v, \varphi, \psi) = (u^*, v^*, \varphi^*, \psi^*) + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k); \quad (2.95)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = v_k \mu_k, \\ \lambda_{8k} &= -v_k, \quad \lambda_{9k} = \rho_k \mu_k, \quad \lambda_{10k} = -\rho_k \quad (k = \overline{1, 5}); \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} p_k &= s_{11} \mu_k^2 - s_{16} \mu_k + s_{12} + (g_{11} \mu_k - g_{21}) v_k + (p_{11} \mu_k - p_{21}) \rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_1}{r_5}, \\ q_k &= s_{12} \mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k} \right) v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k} \right) \rho_k + \frac{\delta_k^5 \alpha_2}{r_5 \mu_5}, \\ r_k^0 &= g_{11} \mu_k^2 - g_{16} \mu_k + g_{12} - (\beta_{11} \mu_k - \beta_{12}) v_k - (v_{11} \mu_k - v_{12}) \rho_k + \frac{\delta_k^5 t_1^\sigma}{r_5}, \\ h_k^0 &= p_{11} \mu_k^2 - p_{16} \mu_k + p_{12} - (v_{11} \mu_k - v_{12}) v_k - (\chi_{11} \mu_k - \chi_{12}) \rho_k + \frac{\delta_k^5 m_1^\sigma}{r_5}; \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= F'_k(z_k) \quad (k = \overline{1, 4}), \\ \Phi_5(z_5) &= r_5 \int F_5(z_5) dz_5; \end{aligned} \quad (2.98)$$

Введенные комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k) \quad (k = \overline{1, 5})$ должны удовлетво-

рять определенным граничным условиям. Эти условия получаются из условий (2.16) – (2.19) и имеют вид [5, 47, 70]

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Phi_k(z_k) = (c_1, c_2, c_3, c_4); \quad (2.99)$$

для первой основной задачи,

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Phi_k(t_k) = (u_*^{(l)} - u^*, v_*^{(l)} - v^*, c_{3l}, c_{4l}); \quad (2.100)$$

для второй основной задачи. Здесь $u_*^{(l)}, v_*^{(l)}$ – заданные перемещения точек контура L_l . В общем случае граничные условия (2.99) и (2.100) запишем так [44]:

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) \Phi_k(t_k) = (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}). \quad (2.101)$$

При этом для первой основной задачи

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}), \\ (f_{l1}, f_{l2}, f_{l3}, f_{l4}) &= (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}), \end{aligned} \quad (2.102)$$

для второй основной задачи

$$\begin{aligned} (d_{kl1}, d_{kl2}, d_{kl3}, d_{kl4}) &= (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}), \\ f_{l1}(t) &= u_*^{(l)} - u^*, \quad f_{l2}(t) = v_*^{(l)} - v^*, \quad f_{l3}(t) = c_{l3}, \quad f_{l4}(t) = c_{l4}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

В случае идеального электромагнитоупругого контакта пластинки с упругим включением граничные условия имеют вид (2.19) и записываются в виде [43, 47, 48]

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 &\left[(\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) \Phi_k(z_k) - \right. \\ &\left. - (\lambda_{6k}^{(l)}, \lambda_{2k}^{(l)}, \lambda_{8k}^{(l)}, \lambda_{10k}^{(l)}, p_k^{(l)}, q_k^{(l)}, r_k^{0(l)}, h_k^{0(l)}) \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) \right] = \\ &= (c_{l1}, c_{l2}, c_{l3}, c_{l4}, -u^*, -v^*, -\varphi^*, -\psi^*). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Найдем общий вид комплексных потенциалов $\Phi_k(z_k)$ для общего случая многосвязной области (рис. 2.2).

Будем исходить из того, что общее представление для $\Phi_5(z_5)$ легко найти. Действительно, учитывая (2.98) и интегрируя комплексный потенциал теплопроводности (2.71), найдем

$$\Phi_5(z_5) = \Gamma_5 z_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{5l} z_5 + B_{5l}) \ln(z_5 - z_{5l}) + \Phi_{50}(z_5), \quad (2.105)$$

где $\Gamma_5 = r_5 c_5$ в случае бесконечной области, $\Gamma_5 = 0$ в случае конечной области;

$$A_{5l} = r_5 D_l, \quad B_{5l} = r_5 (b_{5l} - z_{5l} D_l), \quad (2.106)$$

b_{5l} – коэффициент при $(z_5 - z_{5l})^{-1}$ в разложении функции $F_{50}(z_5)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_{5l} . В случае бесконечной области должно выполняться также

условие $\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{5l} = 0$, получаемое из (2.73) умножением на r_5 .

Комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) определены в областях S_k , полученных из заданной области S аффинными преобразованиями (2.80). Области S_k будут той же связности, что и S [77]. При этом контурам L_l области S в областях S_k соответствуют контуры L_{kl} . По аналогии (2.105) функции $\Phi_k(z_k)$ выберем в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \Phi_{k0}(z_k). \quad (2.107)$$

Здесь z_{kl} – точки, соответствующие при аффинных преобразованиях (2.80) произвольным точкам внутри контуров L_l ; $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k ; Γ_k , A_{kl} , B_{kl} – постоянные, которые определяются из условий на бесконечности и условий однозначности напряжений, перемещений, индукций и потенциалов электромагнитного поля.

В окрестности бесконечно удаленной точки из (2.107) имеем

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln z_k + o(1/z_k), \quad (2.108)$$

где $o(1/z_k)$ – величина малости порядка $1/z_k$. При этом из ограниченности напряжений и индукций на бесконечности следует, что

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} = 0 \quad (k = \overline{1, 5}). \quad (2.109)$$

Учитывая соотношения (2.109) и подставляя (2.108) в выражения напряже-

ний, индукций и угла поворота $\omega_3^\infty = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^\infty$ на бесконечности, для определения Γ_k ($k = \overline{1, 4}$) получаем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{7k}, \lambda_{8k}, \lambda_{9k}, \lambda_{10k}, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = \\ = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\omega_3^\infty). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Найдем коэффициенты A_{kl} и B_{kl} из условий однозначности напряжений, перемещений, индукций и потенциалов электромагнитного поля.

В заданной многосвязной области пластинки S (рис. 2.2) выберем контур L'_l , окружающий только контур отверстия L_l . При полном обходе по L'_l функции (2.107) получают приращения $2\pi i(A_{kl}z_k + B_{kl})$ (коэффициент $2\pi i$ введен для удобства записи последующих соотношений). Но при этом напряжения, перемещения, индукции и потенциалы электромагнитного поля в силу их однозначности не должны получать приращений. На основе этого для определения A_{kl} , B_{kl} получим определенные соотношения. Вместо однозначности напряжений и индукции будем рассматривать более общие соотношения, выражающие равенство главного вектора внутренних усилий и суммарного потока индукций по контуру L'_l главному вектору внешних усилий и суммарному потоку индукций по контуру отверстия L_l с противоположным знаком, т.е.

$$(X'_l, Y'_l, Q'_{\mathcal{E}l}, Q'_{\mathcal{M}l}) = -(X_l, Y_l, Q_{\mathcal{E}l}, Q_{\mathcal{M}l}),$$

где $X_l = \int_{L_l} X_{ln} ds$, $Y_l = \int_{L_l} Y_{ln} ds$ и $Q_{\mathcal{E}l} = \int_{L_l} D_{ln} ds$; $Q_{\mathcal{M}l} = \int_{L_l} B_{ln} ds$ — компоненты глав-

ного вектора приложенных к контуру L_l внешних усилий и суммарные потоки электрической и магнитной индукций по контуру L_l . Учитывая, что действия внешних механических сил, электрического и магнитного полей не учитываются, из (2.99) имеем

$$\begin{aligned}
(0, 0, 0, 0) &= - \left[2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) \Phi_k(z_k) \right]_{L'_I} = \\
&= -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 2\pi i (\lambda_{2k}, \lambda_{6k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}) (A_{kl} z_k + B_{kl}).
\end{aligned}$$

Если к последним соотношениям добавить и условия однозначности перемещений u , v и потенциалов φ и ψ , то будем иметь

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) i (A_{kl} z_k + B_{kl}) = \\
= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Эти условия выполняются для любых значений $z \in S$ (или все равно что $z_k \in S_k$), т.е. для любых x и y . Сравнивая в последних равенствах коэффициенты при x , y и свободные члены, для определения A_{kl} , B_{kl} ($k = \overline{1, 4}$) получаем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) i A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); \quad (2.111)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) i B_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (2.112)$$

При этом учтены тождества

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^5 (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}, p_k, q_k, r_k^0, h_k^0) i \mu_k A_{kl} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

следующие из (2.111), характеристического уравнения (2.76) и соотношений (2.84), (2.91).

Таким образом, в общем случае многосвязной области комплексные потенциалы имеют вид (2.107), где Γ_k – постоянные, равные нулю в случае конечной области, и определяемые из (2.110) в случае бесконечной области; A_{kl} , B_{kl} – постоянные, определяемые из систем (2.111), (2.112).

2.6. Частные случаи задачи термоэлектромагнитоупругости

Из рассмотренной общей задачи термоэлектромагнитоупругости (ТЭМУ) следуют частные задачи, когда не учитываются какие-то из свойств материала. Это задачи термоэлектроупругости (ТЭУ), когда не учитываются магнитные свойства, термомагнитоупругости (ТМУ), когда не учитываются электрические свойства и термоупругости (ТУ), когда не учитываются и электрические, и магнитные свойства. Для всех этих случаев решение уравнение теплопроводности сохраняется, а остальные формулы упрощаются. Приведем решения задач для этих случаев.

Задача термоэлектроупругости. В этом случае в приведенном решении нужно положить равными нулю величины, содержащие магнитные характеристики B_i , H_i и ψ . Тогда система уравнений (2.8) – (2.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \\ \varepsilon_x &= s_{11}\sigma_x + s_{12}\sigma_y + s_{16}\tau_{xy} + g_{11}D_x + g_{21}D_y + \alpha_1 T, \\ \varepsilon_y &= s_{12}\sigma_x + s_{22}\sigma_y + s_{26}\tau_{xy} + g_{12}D_x + g_{22}D_y + \alpha_2 T, \\ \gamma_{xy} &= s_{16}\sigma_x + s_{26}\sigma_y + s_{66}\tau_{xy} + g_{16}D_x + g_{26}D_y + \alpha_6 T, \\ E_x &= -g_{11}\sigma_x - g_{12}\sigma_y - g_{16}\tau_{xy} + \beta_{11}D_x + \beta_{12}D_y + t_1^\sigma T, \\ E_y &= -g_{21}\sigma_x - g_{22}\sigma_y - g_{26}\tau_{xy} + \beta_{12}D_x + \beta_{22}D_y + t_2^\sigma T; \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Решение строится по аналогии с приведенным выше с учетом того, что нужно принимать $p_{ij} = v_{ij} = \chi_{ij} = m_i^\sigma = 0$ или

$$l_{3p}(\mu) = l_{2v}(\mu) = l_{2\chi}(\mu) = l_{1m}(\mu) = 0. \quad (2.113)$$

Характеристическое уравнение задачи ТЭУ будет уравнением 6-го порядка и имеет вид

$$\Delta_{\text{эу}}(\mu) = \begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) \end{vmatrix} = l_{4s}(\mu)l_{2\beta}(\mu) - l_{3g}^2(\mu) = 0, \quad (2.114)$$

а использованные величины примут более простой вид, например,

$$\begin{aligned} v_k &= -\frac{l_{3g}(\mu_k)}{l_{2\beta}(\mu_k)} \quad (k = \overline{1, 3}), \quad v_5 = \frac{r_\chi}{r_5}, \\ r_5 &= \frac{l_5(\mu_5)}{\Delta_{\text{эу}}(\mu_5)}, \quad r_\chi = \frac{l_\chi(\mu_5)}{\Delta_{\text{эу}}(\mu_5)}; \\ l_5(\mu_5) &= \begin{vmatrix} l_{2\alpha}(\mu_5) & l_{3g}(\mu_5) \\ l_{1t}(\mu_5) & l_{2\beta}(\mu_5) \end{vmatrix}, \quad l_\chi(\mu_5) = \begin{vmatrix} l_{5s}(\mu_5) & l_{2\alpha}(\mu_5) \\ l_{3g}(\mu_5) & l_{1t}(\mu_5) \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

Но, чтобы для решения задачи ТЭУ не строить новую вычислительную схему, можно использовать приведенное выше решение для ТЭМУ и осуществить в нем предельный переход, используя следующее [34].

Так как характеристическое уравнение (2.76) не имеет вещественных корней и его корни из-за вещественности коэффициентов являются комплексными и взаимосопряженными [40, 41, 77], то

$$\mu_k \neq 0. \quad (2.115)$$

В случае общей задачи электромагнитоупругости имеют место соотношения

$$\begin{aligned} l_{2\beta}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{2v}^2(\mu_k) &\neq 0, \\ l_{3g}(\mu_k)l_{2\chi}(\mu_k) - l_{3p}(\mu_k)l_{2v}(\mu_k) &\neq 0, \\ l_{3p}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k) - l_{3g}(\mu_k)l_{2v}(\mu_k) &\neq 0, \end{aligned} \quad (2.116)$$

иначе независимо от значений $l_{4s}(\mu_k)$, $l_{3g}(\mu_k)$, $l_{3p}(\mu_k)$ не все постоянные электромагнитоупругого состояния входили бы в характеристическое уравнение (2.76), и оно не выражало бы полностью и механический, и электромагнитный процессы.

Если положить $l_{3p}(\mu_k) = 0$, $l_{2v}(\mu_k) = 0$ (т. е., когда $p_{ij} = 0$, $v_{ij} = 0$), то из (2.76) и (2.84) следует, что

$$\begin{aligned} [l_{4s}(\mu_k)l_{2\beta}(\mu_k) - l_{3g}^2(\mu_k)]l_{2\chi}(\mu_k) &= 0, \\ v_k &= -l_{3g}(\mu_k)/l_{2\beta}(\mu_k), \quad \rho_k = 0. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Из первого равенства (2.117) при $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$ будем иметь характеристиче-

ское уравнение ТЭУ. Соотношение $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$ в численных расчетах лучше всего реализовать, принимая достаточно большими значения коэффициентов полинома $l_{2\chi}(\mu_k)$. Таким образом, из общей задачи ТЭМУ при численных расчетах будут следовать результаты для ТЭУ, если одновременно $p'_{ij} \rightarrow 0$, $v'_{ij} \rightarrow 0$, $\chi'_{ij} \rightarrow \infty$. Из физических соображений, что пиромангнитные свойства в материале могут присутствовать только вместе с пьезомагнитными, следует также полагать $m_i^{\sigma'} \rightarrow 0$.

Задача термомагнитоупругости. Решение этой задачи строится аналогично решению предыдущей задачи [34]. Но его, как и в предыдущей задаче, можно получить предельным переходом: если положить $l_{3g}(\mu_k) = 0$, $l_{2v}(\mu_k) = 0$ (т. е., когда $g_{ij} = 0$, $v_{ij} = 0$), то из (2.76) и (2.84) следует, что

$$\begin{aligned} & \left[l_{4s}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) - l_{3p}^2(\mu_k) \right] l_{2\beta}(\mu_k) = 0, \\ & v_k = 0, \quad \rho_k = -l_{3p}(\mu_k) / l_{2\chi}(\mu_k). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Из первого соотношения (2.118) при $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$ будем иметь характеристическое уравнение задачи ТМУ [40]. Соотношение $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$ в численных расчетах лучше всего реализовать, выбирая достаточно большими значения коэффициентов полинома $l_{2\beta}(\mu_k)$. Следовательно, из общей задачи ТЭМУ при численных расчетах будут следовать результаты для задачи ТМУ, если одновременно $g'_{ij} \rightarrow 0$, $v'_{ij} \rightarrow 0$, $\beta'_{ij} \rightarrow \infty$. Помимо этого, из физических соображений, что пироэлектрические свойства в материале могут присутствовать только вместе с проявлением пьезоэлектрических свойств, следует также полагать $t_i^{\sigma'} \rightarrow 0$.

Задача термоупругости. Решение задачи ТУ строится аналогично решению предыдущих задач и тогда получится известное решение [34, 53]. Но его, как и в предыдущих задачах, можно получить предельным переходом: если положить $l_{3g}(\mu_k) = 0$, $l_{2v}(\mu_k) = 0$ (т. е., когда $g_{ij} = 0$, $v_{ij} = 0$), то из (2.76) и (2.84) следует, что

$$l_{4s}(\mu_k) l_{2\chi}(\mu_k) l_{2\beta}(\mu_k) = 0, \quad v_k = 0, \quad \rho_k = 0 \quad (2.119)$$

Из первого равенства (2.119) при $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$, $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$ будем иметь характеристическое уравнение плоской задачи ТУ [77]. Соотношения $l_{2\beta}(\mu_k) \neq 0$, $l_{2\chi}(\mu_k) \neq 0$ при проведении расчетов лучше всего реализовать, выбирая достаточно большими значения коэффициентов полиномов $l_{2\beta}(\mu_k)$, $l_{2\chi}(\mu_k)$. Следовательно, из общей задачи ТЭМУ при численных расчетах будут следовать решения задач ТУ и электромагнитостатики, если одновременно $g'_{ij} \rightarrow 0$, $p'_{ij} \rightarrow 0$, $v'_{ij} \rightarrow \infty$, $\beta'_{ij} \rightarrow \infty$, $\chi'_{ij} \rightarrow \infty$. Из вышеописанных соображений о связи пьроэлектрических и пироманитных свойств с пьезосвойствами материала, следует также полагать $t_i^{\sigma'} \rightarrow 0$, $m_i^{\sigma'} \rightarrow 0$.

При проведении численных исследований результаты для частных задач можно получить, придавая некоторым параметрам определенные значения. С этой целью введем следующие параметры модельного материала: параметр пьезоэлектричности λ_g , параметр пьезомагнитности λ_p , параметр диэлектрической проницаемости λ_β , параметр электромагнитной проницаемости λ_v , параметр магнитной проницаемости λ_χ , параметр пьроэлектричности λ_t , параметр пироманитности λ_m , связывающие расчетные значения постоянных (со штрихами) с истинными по формулам

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \lambda_g g_{ij}, \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij}, \quad \beta'_{ij} = \lambda_\beta \beta_{ij}, \quad v'_{ij} = \lambda_v v_{ij}, \\ \chi'_{ij} &= \lambda_\chi \chi_{ij}, \quad t_i^{\sigma'} = \lambda_t t_i^\sigma, \quad m_i^{\sigma'} = \lambda_m m_i^\sigma. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Для исследования влияния пьезосвойств введем параметр λ_{pe} , характеризующий влияние пьезоэффекта (отклонение свойств материала от его свойств без учета пьезоэффекта), связав с ним параметры модельного материала равенствами

$$\begin{aligned} \lambda_g &= \lambda_{pe}, \quad \lambda_p = \lambda_{pe}, \quad \lambda_t = \lambda_{pe}, \quad \lambda_m = \lambda_{pe}, \\ \lambda_\beta &= 1/\lambda_{pe}, \quad \lambda_v = 1/\lambda_{pe}, \quad \lambda_\chi = 1/\lambda_{pe}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Устремляя λ_{pe} к нулю, получим случай задачи ТУ, когда не учитываются элек-

ромагнитные свойства. Расчеты показывают, что при $\lambda_{pe} \leq 10^{-3}$ значения исследуемых величин при решении задачи ТЭМУ оказываются такими же, как в задаче ТУ, т. е. без учета пьезосвойств. Это можно использовать и при решении задач ТЭУ, ТМУ и ТУ по единой программе на алгоритмическом языке. Тогда в задаче ТЭУ следует принимать $\lambda_p = \lambda_v = \lambda_m = 10^{-3}$, $\lambda_\chi = 10^{+3}$, в задаче ТМУ – $\lambda_g = \lambda_v = \lambda_t = 10^{-3}$, $\lambda_\beta = 10^{+3}$, а в задаче ТУ – $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_t = \lambda_m = 10^{-3}$, $\lambda_\beta = \lambda_v = \lambda_\chi = 10^{+3}$.

Можно для данного пьезоматериала исследовать влияние пьезоэлектрических или пьезомагнитных свойств с сохранением соответственно пьезомагнитных или пьезоэлектрических свойств. Тогда в случае исследования влияния пьезоэлектрических свойств нужно принимать $\lambda_p = \lambda_\chi = \lambda_m = 1$, а остальные параметры менять по формулам

$$\lambda_g = \lambda_{pe}, \quad \lambda_\beta = 1/\lambda_{pe}, \quad \lambda_v = \lambda_{pe}, \quad \lambda_t = \lambda_{pe}. \quad (2.122)$$

Таким же образом в случае исследования влияния пьезомагнитных свойств нужно принимать $\lambda_g = \lambda_\beta = \lambda_t = 1$, а остальные параметры менять по формулам

$$\lambda_p = \lambda_{pe}, \quad \lambda_v = \lambda_{pe}, \quad \lambda_\chi = 1/\lambda_{pe}, \quad \lambda_m = \lambda_{pe}. \quad (2.123)$$

2.7. Точные аналитические решения некоторых задач для односвязных пластинок

Эллиптическая пластинка под действием линейного потока тепла. Рассмотрим эллиптическую пластинку с контуром L_0 и полуосями a_0 , b_0 (рис. 2.3). Контур пластинки не подкреплён или жестко подкреплён, поток индукций (электрической и магнитной) через него равен нулю. Пластинка находится под действием линейного потока тепла плотности q ,

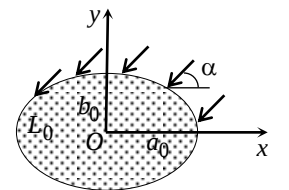


Рис. 2.3

направленного под углом α к оси Ox .

Тогда температура на контуре L_0 в соответствии с (2.43) будет такой:

$$T_0 = q(t_x x + t_y y). \quad (2.124)$$

При этом t_x, t_y – величины, определяемые по формулам (2.44); x, y – координаты точек контура, для которых имеют место формулы $x = a_0 \cos \theta$, $y = b_0 \sin \theta$, θ – параметр параметрического задания контура L_0 .

$$\text{Учитывая, что } \cos \theta = \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad \sin \theta = -\frac{i}{2} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad \sigma = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

температуру по контуру можно представить и в виде

$$T_0 = \frac{q(at_x - ibt_y)}{2} \sigma + \frac{q(at_x + ibt_y)}{2} \frac{1}{\sigma}. \quad (2.125)$$

Функции $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$, голоморфные в областях S_k , могут быть разложены в ряды по полиномам Фабера для L_{k0} [36]

$$\begin{aligned} F_5(z_5) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{50n} P_{5n}(z_5), \\ \Phi_k(z_k) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_{kn}(z_k), \end{aligned} \quad (2.126)$$

где $P_{kn}(z_k)$ – полиномы Фабера, вычисляемые по формулам

$$P_{kn}(z_k) = \zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n},$$

ζ_{k0} – переменные определяемые из конформных отображений

$$z_k = R_{k0} \left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}} \right), \quad (2.127)$$

где

$$R_{k0} = \frac{a_0 - i\mu_k b_0}{2}, \quad m_{k0} = \frac{a_0 + i\mu_k b_0}{2R_{k0}} \quad (k = \overline{1, 5})$$

Подставляя $F_5(z_5)$ в граничные условия (2.65), получаем

$$2c_{500} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_{50n} \left(\sigma^n + \frac{m_{50}^n}{\sigma^n} \right) + \bar{c}_{50n} \left(\frac{1}{\sigma^n} + \bar{m}_{50}^n \sigma^n \right) \right\} =$$

$$= -\frac{q(at_x - ibt_y)}{2} \sigma - \frac{q(at_x + ibt_y)}{2} \frac{1}{\sigma}.$$

Из последнего соотношения методом рядов находим

$$c_{501} = -\frac{q(at_x - ibt_y)}{2(1 + \bar{m}_{50})}, \quad c_{50n} = 0 \quad (n \neq 1).$$

Тогда

$$F_5(z_5) = c_{501} \left(\zeta_{50} + \frac{m_{50}}{\zeta_{50}} \right) = \frac{c_{501}}{R_{50}} z_5. \quad (2.128)$$

Интегрируя (2.128), для $\Phi_5(z_5)$ будем иметь

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = \frac{r_5 c_{501} z_5^2}{2R_{50}} + const = a_{502} \left(\zeta_{50}^2 + \frac{m_{50}^2}{\zeta_{50}^2} \right) + const, \quad (2.129)$$

где $a_{502} = r_5 c_{501} R_{50} / 2$. Аналогичные выражения имеют место для функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$):

$$\Phi_k(z_k) = a_{k02} P_{k2}(z_k) = a_{k02} \left(\zeta_{k0}^2 + \frac{m_{k0}^2}{\zeta_{k0}^2} \right) \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (2.130)$$

Учитывая, что на контурах L_{k0} $\zeta_{k0} = \sigma$, подставляя функции (2.130) в граничные условия (2.101) и применяя метод рядов, получим систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными

$$\sum_{k=1}^4 (d_{k0i} a_{k02} + \bar{d}_{k0i} \bar{a}_{k02} \bar{m}_{k0}^2) = - (d_{k05} a_{k02} + \bar{d}_{k05} \bar{a}_{k02} \bar{m}_{k0}^2) \quad (i = \overline{1, 4}). \quad (2.131)$$

После решения системы (2.131) постоянные a_{k02} станут известными, и можно найти комплексные потенциалы и их производные

$$\Phi_k(z_k) = \frac{a_{k02}}{R_{k0}^2} z_k^2, \quad \Phi'_k(z_k) = \frac{2a_{k02}}{R_{k0}^2} z_k. \quad (2.132)$$

Численные исследования здесь и далее были проведены для пластинки из материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [198]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (М2) [160]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT - 4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (М3) [160]. Теплофизические постоянные этих материалов даны в табл. 2.1. Значения плотности и удельной теплоемкости из-за отсутствия в литературе вычислены как средние

Таблица 2.1

Величина	Материалы			Величина	Материалы		
	М1	М2	М3		М1	М2	М3
s_{11} / s_0	7,165	22,260	10,745	v_{11} / v_0	-0,190	213,404	-14,931
s_{22} / s_0	6,797	14,984	7,398	v_{22} / v_0	-0,185	-5,534	-3,740
s_{66} / s_0	19,912	47,481	7,637	χ_{11} / χ_0	0,336	0,590	0,805
s_{12} / s_0	-2,337	-6,437	-2,542	χ_{22} / χ_0	0,119	0,575	0,704
g_{16} / g_0	2,028	109,220	2,054	α_1 / α_0	8,530	-3,031	-1,578
g_{21} / g_0	-0,496	-4,333	-1,159	α_2 / α_0	1,990	-0,608	-0,326
g_{22} / g_0	1,157	8,016	2,458	t_2^σ / t_0	133,000	-40,853	2,405
p_{16} / p_0	1,850	268,318	98,843	m_2^σ / m_0	133,000	0,394	0,207
p_{21} / p_0	0,576	17,778	12,102	k_{11} / k_0	2,500	9,000	1,200
p_{22} / p_0	1,186	31,206	22,268	k_{22} / k_0	2,500	9,000	1,500
β_{11} / β_0	0,156	19,612	0,106	ρ / ρ_0	5,660	5,920	6,450
β_{22} / β_0	0,137	10,612	0,090	c_p / c_0	0,538	0,455	0,503
$s_0 = 10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, \quad g_0 = 10^{-2} \text{ МКл}^{-1} \text{ м}^2, \quad p_0 = 10^{-5} \text{ МТл}^{-1},$ $\beta_0 = 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{МКл}^{-2}, \quad v_0 = 10^{-1} \text{ МКл}^{-1} \cdot \text{м} \cdot \text{МА},$ $\chi_0 = 10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{МТл}^{-2}, \quad \alpha_0 = 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad t_0 = 10^{-3} \text{ МН}(\text{МКл} \cdot \text{К})^{-1},$ $m_0 = 10^{-3} \text{ МА}(\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Вт}(\text{м} \cdot \text{К})^{-1}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3},$ $c_0 = 10^{-3} \text{ МДж}(\text{кг} \cdot \text{К})^{-1}.$							

арифметические соответствующих значений для компонентов приводимых материалов, например, для материала М1 – значений для материалов $BaTiO_3$ и $CoFe_2O_4$. Все эти материалы относятся к ромбической системе (ортотропные по механиче-

ским свойствам) и для них всех материалов

$$s_{16} = s_{26} = g_{11} = g_{12} = g_{26} = p_{11} = p_{12} = p_{26} = \beta_{12} = \nu_{12} = \chi_{12} = \alpha_6 = t_1^\sigma = m_1^\sigma = k_{12} = 0.$$

Ниже описаны некоторые из полученных результатов. Значения величин приведены для задачи ТЭМУ, задачи ТЭУ, задачи ТМУ и задачи ТУ. При этом здесь и далее во всех расчетах плотность линейного потока тепла принималась равной единице: $q = 1 \text{ Вт}(\text{м}^2 \cdot \text{К})^{-1}$. В связи с этим в приводимых таблицах и на рисунках значения напряжений приведены в МПа, индукции и напряженности электрического поля – в МКл·м⁻² и в МН·МКл⁻¹, индукции и напряженности магнитного поля – в МТл и МА·м⁻¹, плотности внутренней энергии – в МДж·м⁻³; значения КИНИН – в единицах соответствующих величин, умноженных на м^{1/2}.

Численные исследования были проведены для случаев неподкрепленного и жестко подкрепленного контура пластинки и показали следующее.

В случае неподкрепленного контура пластинки напряжения и индукции, как и в бесконечной пластинке, оказываются равными нулю. Что же касается напряженностей электромагнитного поля, на основе последних 4 уравнений состояния (2.11), как и в случае бесконечной пластинки, получим, что они изменяются по линейному закону.

Если контур пластинки L_0 жестко подкреплен, то индукции электромагнитного поля, как и в случае неподкрепленного контура, оказываются равными нулю, но возникают напряжения, изменяющиеся по линейному закону. Что же касается напряженностей электромагнитного поля, они опять вычисляются по уравнениям состояния (2.11) и также изменяются по линейному закону, правда, отличному от случая неподкрепленного контура пластинки.

Для случая жесткого подкрепления контура пластинки, когда пластинка является круговой радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) (рис. 2.4), изготовленной из различных материалов, и находится при действии потока тепла под углом $\alpha = \pi/2$ в табл. А. 2.1 приложения А приведены значения нормальных напряжений σ_s в точках контура

на площадках, перпендикулярных к контуру, в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox . В таблице не приведены равные нулю значения напряжений при $\theta = 0$. В табл. А. 2.2 опять для круговой пластинки, контур которой жестко подкреплён или не подкреплён, приведены значения напряженностей E_s и H_s электрического и магнитного полей в точках контура пластинки на площадках, перпендикулярных к контуру. На рис. Б. 2.1 изображен график распределения напряжений σ_s , а на рис. Б. 2.2 и рис. Б. 2.3 – графики распределения электрических и магнитных напряженностей E_s и H_s соответственно.

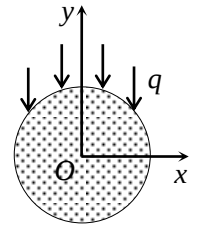


Рис. 2.4

Из описанных таблиц и рисунков следует, что для сплошной конечной пластинки на значения напряжений существенно влияют коэффициенты деформации и коэффициенты линейного расширения материала. При этом самые большие напряжения возникают в пластинке из материала М1, самые малые – в пластинке из материала М2, т. е. чем жестче материал (меньше значения коэффициентов деформации) и чем больше значения коэффициентов линейного расширения материала, тем выше значения возникающих напряжений. При этом максимальная концентрация напряжений достигается в точке, соответствующей $\theta = \pi/2$, где граничное значение температуры максимально. Значения напряженностей электрического поля в пластинках из материалов М1 и М2 сопоставимы и несколько меньше – в пластинке из материала М3; значения напряженностей магнитного поля являются наибольшими в пластинке из материала М1, а в пластинках из материалов М2 и М3 – на 2 порядка меньше, чем в пластинке из М1, т. е. чем больше значения пирозлектрических и пиромагнитных коэффициентов, тем больше значения напряженностей электрического и магнитного полей. Из табл. А. 2.2 также следует, что подкрепление контура пластинки незначительно влияет на значения напряженностей электромагнитного поля. При этом, индукции электромагнитного поля не возникают во всех случаях.

Пластинка с эллиптическим отверстием. Рассмотрим бесконечную пьезо-

пластинку с эллиптическим отверстием L_1 с полуосями a_1, b_1 (рис. 2.5), причем полуось a_1 наклонена к оси Ox под углом φ_1 . Либо на контуре отверстия задана постоянная температура T_1 , либо он теплоизолирован, либо через него имеет место конвективный теплообмен с окружающей средой. Контур отверстия не подкреплён или жестко подкреплён. На бесконечности действует линейный поток тепла плотности q , составляющий с осью Ox угол α .

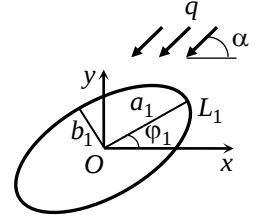


Рис. 2.5

В локальной системе координат Ox_1y_1 ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с направлениями осей вдоль осей эллипсов параметрические уравнения эллипсов будут такими:

$$x_1 = a_1 \cos \theta, \quad y_1 = b_1 \sin \theta, \quad (2.133)$$

а в основной системе Oxu имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Здесь φ_1 является углом между направлениями осей Ox и Ox_1 , отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки; θ – параметр параметрического задания эллипса (2.133), изменяющийся от 0 до 2π .

В данном случае функции (2.71) и (2.107) с учетом условий (2.73) примут вид [54, 70]

$$F_5(z_5) = c_0 + F_{50}(z_5), \quad \Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_{k1} \ln z_k + \Phi_{k0}(z_k), \quad (2.135)$$

где Γ_k, B_{k1} – постоянные, вычисляемые из систем уравнений (2.110) и (2.112); $F_{50}(z_5)$ и $\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные соответственно в областях S_5 и S_k вне эллиптических контуров L_{51} и L_{k1} , получаемых из контура L_1 аффинными преобразованиями (2.60) и (2.80). После конформных отображений внешности единичного круга на внешности контуров L_{51} и L_{k1} [36]

$$z_k = R_{k1} \left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}} \right), \quad (2.136)$$

где

$$R_{k1} = \frac{a_1(\cos \varphi_1 + \mu_k \sin \varphi_1) + ib_1(\sin \varphi_1 - \mu_k \cos \varphi_1)}{2},$$

$$m_{k1} = \frac{a_1(\cos \varphi_1 + \mu_k \sin \varphi_1) - ib_1(\sin \varphi_1 - \mu_k \cos \varphi_1)}{2R_{k1}} \quad (k = \overline{1, 5}),$$

и разложения функций $F_{50}(z_5)$ и $\Phi_{k0}(z_k)$ вне единичного круга $|\zeta_k| \geq 1$ в ряды Лорана для функций (2.135) получим

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{51n}}{\zeta_{51}^n}; \quad (2.137)$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (2.138)$$

где c_5 , c_{51n} , a_{k1n} – постоянные, определяемые из граничных условий на контуре отверстия. При этом в системах (2.110) и (2.112) нужно принять, что

$$\Gamma_5 = r_5 c_5, \quad B_{51} = r_5 R_5 c_{511}. \quad (2.139)$$

Подставляя функцию (2.137) в граничные условия (2.65)–(2.67) и используя метод рядов, найдем, что $c_5 = 0$, $c_{51n} = 0$ ($n \geq 2$), а для c_{511} будем иметь в случае задания на контуре нулевой температуры

$$c_{511} = -\frac{q}{2} \left(a_1(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) + ib_1(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right), \quad (2.140)$$

или в случае теплоизолированного контура

$$c_{511} = \frac{iq}{2\alpha_T} \left(a_1 \sin(\alpha - \varphi_1) - ib_1 \cos(\alpha - \varphi_1) \right), \quad (2.141)$$

или в случае конвективного теплообмена

$$c_{511} = \frac{q}{2(h + \alpha_T)} \left[a_1 \left(i \sin(\alpha - \varphi_1) - h(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) \right) - \right. \\ \left. - ib_1 \left(i \cos(\alpha - \varphi_1) + h(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right) \right]. \quad (2.142)$$

При нахождении c_5 в случае задания на контуре температуры учитывалось, что на контуре температура равна нулю, в случае теплоизолированного контура постоянная c в граничных условиях (2.66) для односвязной области является произвольной постоянной и может быть принята равной нулю, а в случае конвек-

тивного теплообмена температура окружающей среды полагалась равной нулю. Тогда

$$F_5(z_5) = \frac{c_{511}}{\zeta_{51}}, \quad (2.143)$$

где c_{511} – постоянная, вычисляемая по формулам (2.140) или (2.141).

Интегрируя (2.143), найдем

$$\Phi_5(z_5) = r_5 \int F_5(z_5) dz_5 = B_{51} \ln \zeta_{51} + \frac{a_{512}}{\zeta_{51}^2}, \quad (2.144)$$

где $a_{512} = r_5 c_{511} R_5 m_5 / 2$.

Учитывая, что в данном случае постоянная $\Gamma_5 = 0$, а, следовательно, на основании (2.110) и $\Gamma_k = 0$, для функций (2.138) получим

$$\Phi_k(z_k) = B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \quad (2.145)$$

где B_{k1} – постоянные, вычисляемые из системы уравнений (2.112).

Подставляя функции (2.144) и (2.145) в граничные условия (2.101) и применяя метод рядов, найдем, что $a_{k1n} = 0$ ($k = \overline{1, 4}, n \neq 2$), а a_{k12} удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{k=1}^4 d_{k1i} a_{k12} = f_i \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (2.146)$$

где $f_i = -d_{51i} a_{512} - e_i$; в случае первой основной задачи

$$(d_{k11}, d_{k12}, d_{k13}, d_{k14}) = (\lambda_{6k}, \lambda_{2k}, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}), \quad e_i = 0,$$

а в случае второй основной задачи

$$(d_{k11}, d_{k12}, d_{k13}, d_{k14}) = (p_k, q_k, \lambda_{8k}, \lambda_{10k}),$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{q}{8} \left[(\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) (\alpha_6 b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 b_1 i) (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right], \\ e_2 &= \frac{q}{8} \left[(\alpha_6 a_1^2 + 2\alpha_2 a_1 b_1 i) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - (\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2) (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right], \\ e_3 &= \frac{q}{8} \left[t_1^\sigma (a_1^2 + 2a_1 b_1 i) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - t_2^\sigma b_1^2 (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right], \end{aligned}$$

$$e_4 = \frac{q}{8} \left[m_1^\sigma (a_1^2 + 2a_1 b_1 i) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - m_2^\sigma b_1^2 (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right].$$

Следовательно, комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости примут вид

$$\Phi_k(z_k) = B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \frac{a_{k12}}{\zeta_{k1}^2}, \quad (2.147)$$

где B_{k1} , a_{k12} – постоянные, определяемые из (2.112) и (2.146).

Зная функции $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$, можно находить значения основных характеристик ТЭМУС в любой точке пластинки.

Если $b_1 = 0$, то эллипс переходит в разрез (трещину или линейное «тонкое жесткое кольцо») и для него можно вычислять КИНИН по формулам [45]

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\lambda_{1k} \sin^2 \varphi_1 + \lambda_{2k} \cos^2 \varphi_1 - 2\lambda_{6k} \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right) M_k^\pm, \\ k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left((\lambda_{2k} - \lambda_{1k}) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \lambda_{6k} (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) \right) M_k^\pm, \\ k_D^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{8k} \cos \varphi_1 - \lambda_{7k} \sin \varphi_1) M_k^\pm, \\ k_E^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0 \mu_k \cos \varphi_1 - r_k^0 \sin \varphi_1) M_k^\pm, \\ k_B^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{10k} \cos \varphi_1 - \lambda_{9k} \sin \varphi_1) M_k^\pm, \\ k_H^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0 \mu_k \cos \varphi_1 - r_k^0 \sin \varphi_1) M_k^\pm, \end{aligned} \quad (2.148)$$

где

$$M_k^\pm = \pm \frac{\sqrt{a_1}}{2R_{k1}} (B_{k1} - 2a_{k12}).$$

В табл. А. 2.3 для пластинки с круговым отверстием радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 2.6) из модельного материала с различными значениями параметра пьезоэффекта λ_{pe} приведены значения напряжений σ_s в точках контура отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox . При этом, знак символа «*» в ячейке таблицы означает, что в этом

случае среди корней характеристического уравнения имеются вещественные корни, т. е. материал пластинки не является реальным. Из данных табл. А. 2.3 следует, что электромагнитные свойства материала существенно влияют на значения напряжений, следовательно, при расчетах ими нельзя пренебрегать. При $\lambda_{pe} \rightarrow 0$, как показали численные расчеты, значения напряжений стремятся к значениям: в случае 1 – для задачи ТУ, в случае 2 – для задачи ТЭУ, в случае 3 – для задачи ТМУ.

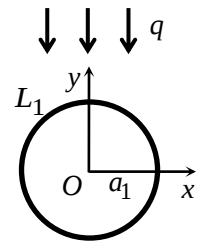


Рис. 2.6

В табл. А. 2.4 приложения А для пластинки с круговым отверстием для задач ТУ, ТЭУ, ТМУ и ТЭМУ приведены значения напряжений σ_s в точках контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру, для случаев, когда на контуре отверстия задана нулевая температура или он теплоизолирован, причем контур отверстия не подкреплён или жёстко подкреплён. Для этих же случаев в табл. А. 2.5 и табл. А. 2.6 для задач ТЭУ и ТЭМУ приведены соответственно значения индукций D_s и напряженностей E_s электрического поля в точках контура, в табл. А. 2.7 и табл. А. 2.8 для задач ТМУ и ТЭМУ – соответственно значения индукций B_s и напряженностей H_s магнитного поля, а в табл. А. 2.9 для задач ТУ, ТЭУ, ТМУ, ТЭМУ – значения плотности внутренней энергии U .

На рис. Б. 2.4 изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия, когда на контуре задана нулевая температура, и он не подкреплён. На рис. Б. 2.5 для этих же случаев даны графики распределения σ_s , когда контур отверстия теплоизолирован и не подкреплён. На рис. Б. 2.6 и рис. Б. 2.7 для случая жёсткого подкрепления контура изображены графики распределения σ_s , аналогичные графикам на рис. Б. 2.4 и рис. Б. 2.5. Для всех этих случаев также на рис. Б. 2.8 – Б. 2.11 изображены графики распределения индукций D_s .

Из табл. А. 2.4 – А. 2.9 и рис. Б. 2.4 – Б. 2.11 видно, что под действием теплового потока в пластинке около отверстия возникают значительные напряжения. При этом наибольшие напряжения возникают в пластинке из материала М1. Это

связано тем, что материал М1 имеет, по сравнению с материалами М2 и М3, наименьшие коэффициенты деформации (наибольшую жесткость), наименьшие пьезомагнитные коэффициенты, наибольшие пирозлектрические и пиромагнитные модули и наибольшие коэффициенты теплового расширения. На значения напряжений существенно влияют электрические свойства материала, а еще больше его магнитные свойства. Поэтому электрическими и особенно магнитными свойствами материала при расчетах пренебрегать нельзя. На значения напряжений существенно влияют также тепловые и механические граничные условия. Значения напряжений вблизи контура при заданной температуре и теплоизолированном контуре близки по модулю, но отличаются знаками (зоны сжатия и растяжения меняются местами). Жесткое подкрепление контура отверстия приводит к значительному уменьшению напряжений, если на этом контуре задана нулевая температура, и к их увеличению, если контур теплоизолирован. При этом значительно изменяется и характер распределения напряжений, что особенно заметно для случая задания на контуре температуры.

Указанные выше свойства материала пластинки заметно влияют и на значения индукций электрического и магнитного полей. При этом влияние механических граничных условий (свободное и жестко подкрепленное отверстие) незначительно, но велико влияние тепловых граничных условий. Так, для случаев задания на контуре постоянной температуры и теплоизолированного контура закономерности изменения индукций оказываются совершенно отличными друг от друга. Что же касается напряженностей электромагнитного поля, можно отметить, что на напряженности электрического поля магнитные характеристики практически не влияют и, наоборот, на напряженности магнитного поля практически не влияют электрические характеристики; на значения напряженностей заметно влияют механические граничные условия.

Все это еще ярче видно из значений плотности внутренней энергии. Так, в случае заданной температуры на контуре, хотя при учете только электрических свойств материала плотность внутренней энергии изменяется незначительно, учет магнитных свойств приводит к существенным изменениям плотности энергии,

особенно в случае пластинки из материала М1, для которой значения энергии возрастают на 2-3 порядка. Как видно, плотность энергии на контуре отверстия в пластинке из материала М1 на несколько порядков превосходят значения для пластинки из материалов М2 и М3: в случае задач ТУ и ТЭУ – на 2 порядка, а в случае задач ТМУ и ТЭМУ – на 4 порядка в случае неподкрепленного контура и 5 порядков в случае жестко подкрепленного контура. В случае теплоизолированного контура отверстия значения энергии резко возрастают для всех материалов и становятся сравнимыми между собой по модулю.

В табл. А. 2.10 в зависимости от значения ha_1 (аналога известного критерия Био) приведены значения напряжений σ_s в точках контура для случая, когда контур отверстия не подкреплён и через него имеет место конвективный теплообмен с внешней средой нулевой температуры. На рис. Б. 2.12 и рис. Б. 2.13 для пластинки из материала М1 в случае задач ТУ и ТЭМУ соответственно изображены графики распределения значений напряжений σ_s по контуру неподкрепленного отверстия для некоторых значений параметра ha_1 . На рис. Б. 2.14 и рис. Б. 2.15 изображены аналогичные графики для пластинки из материала М3. На рис. Б. 2.16 для пластинок из материалов М1, М2 и М3, для задач ТУ и ТЭМУ изображены графики распределения напряжений σ_s в точке $\theta = \pi/2$ контура кругового отверстия в зависимости от значений $\lg(ha_1)$.

Из данных табл. А. 2.10, рис. Б. 2.12 – Б. 2.16 следует, что коэффициент конвективного теплообмена h , а точнее, параметр ha_1 , существенно влияет на значения напряжений. При этом, в случае $ha_1 < 0,01$ можно полагать, что контур практически теплоизолирован, при $ha_1 > 100$ – что на нем задана температура внешней среды.

В табл. А. 2.11 для пластинки с эллиптическим отверстием с полуосями a_1 , b_1 , когда угол φ_1 между осью Ox и полуосью a_1 равен $\pi/2$ (рис. 2.7), контур не подкреплён и на нем задана нулевая температура, приведены значения напряжений σ_s , плотности

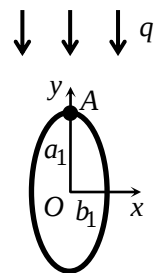


Рис. 2.7

внутренней энергии U и в точке A в зависимости от отношения b_1/a_1 . В этой же точке приведено и значение выражения $k_{тек} = 2s \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \lambda_{1k} M_k^+$, где

$$M_k^+ = \frac{\sqrt{a_1}}{2R_{k1}} (B_{k1} - 2a_{k12}), \text{ т. е. значение выражения, стремящегося к КИН } k_1^+.$$

Из данных табл. А. 2.11 следует, что с уменьшением значения отношения b_1/a_1 в окрестности конца большой полуоси (точки A) наблюдается сильный рост концентрации напряжений σ_s и плотности внутренней энергии U . При этом $k_{тек}$ стремится к конечному предельному значению, равному КИН k_1^+ для этой вершины, причем предельное значение $k_{тек}$ достигается при $b_1/a_1 \leq 2 \cdot 10^{-5}$, когда отверстие можно считать разрезом и для него считать КИНИН. Поэтому в дальнейшем под трещиной будем понимать эллиптическое отверстие, для которого $b_1/a_1 \leq 2 \cdot 10^{-5}$. В этом случае можно исследовать развитие трещины по энергетической теории разрушения Гриффитса [157], сопоставляя эти результаты с результатами по теории разрушения Ирвина [163] с использованием КИН.

Для пластинки из материала М1 с круговым отверстием для задач ТУ и ТЭМУ соответственно на рис. Б. 2.17 и рис. Б. 2.18 представлены поверхности плотности внутренней энергии (рис. а) вокруг кругового отверстия и их линии уровней (рис.б). На рис. Б. 2.19 и рис. Б. 2.20 представлены аналогичные поверхности и линии уровней для случая пластинки с трещиной. При этом контур отверстия и берега трещины не подкреплены и на них задана температура.

В табл. А. 2.12 для пластинки с вертикальной трещиной (рис. 2.8), когда на берегах трещины задана нулевая температура или ее берега теплоизолированы, причем эти берега не подкреплены или жестко подкреплены, приведены значения КИН k_1^- для нижней вершины трещины. В табл. А. 2.13 для пластинки с наклонной трещиной (рис. 2.9) из материала М1 в зависимости от

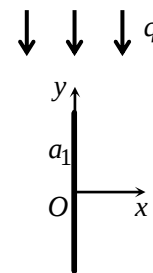


Рис. 2.8

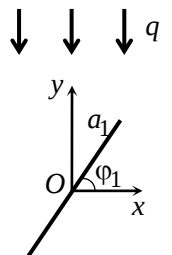


Рис. 2.9

угла наклона φ_1 приведены значения всех КИНИН для нижней вершины трещины для задач ТУ, ТЭУ, ТМУ и ТЭМУ, когда берега трещины имеют заданную нулевую температуру либо теплоизолированы, они не подкреплены либо жестко подкреплены. В табл. А. 2.12, табл. А. 2.13 не приведены значения КИНИН для верхней вершины трещины, т.к. для них, как следует из (2.148), имеют место равенства $k_i^+ = -k_i^-$ ($i=1, 2, D, E, B, H$). На рис. Б. 2.21 и рис. Б. 2.22 изображены соответственно графики изменения k_1^- и k_2^- в зависимости от угла наклона φ_1 для задач ТУ и ТЭМУ.

Из табл. А.2.12, табл. А. 2.13 и рис. Б. 2.19, рис. Б. 2.20 видно, что для изменений КИНИН характерны закономерности, аналогичные закономерностям для напряжений, индукций и напряженностей в случае кругового отверстия. При $\varphi_1 = 0$ КИНИН $k_1^- = k_D^- = k_E^- = k_B^- = k_H^- = 0$ при любых тепловых и механических граничных условиях, а также $k_2^- = 0$, если на берегах трещины задана нулевая температура и они не подкреплены; при $\varphi_1 = \pi/2$ КИНИН $k_2^- = k_D^- = k_E^- = k_B^- = k_H^- = 0$ при любых тепловых и механических граничных условиях и $k_1^- = 0$ в случае теплоизолированных неподкрепленных берегов.

Пластина с упругим включением. Пусть в пластинке имеется одно эллиптическое включение с контуром L_1 и полуосями a_1, b_1 (рис. 2.10). Полуось a_1 образует с осью Ox угол φ_1 . На бесконечности под углом α к оси Ox действует линейный поток тепла с плотностью q . Включение считалось изготовленным из материала, постоянные которого связаны с постоянными материала пластинки-матрицы соотношениями

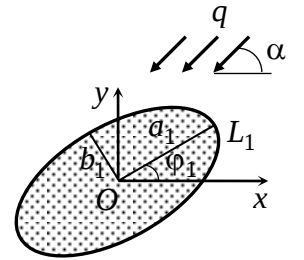


Рис. 2.10

в которых $\lambda_T^{(1)}$ – параметр относительной теплопроводности, $\lambda_s^{(1)}$ – параметр относительной деформируемости, $\lambda_g^{(1)}$ – параметр относительной пьезоэлектричности, $\lambda_p^{(1)}$ – параметр относительной пьезомагнитности, $\lambda_\beta^{(1)}$ – параметр относитель-

$$\begin{aligned} k_{ij}^{(1)} &= \lambda_T^{(1)} k_{ij}, & s_{ij}^{(1)} &= \lambda_s^{(1)} s_{ij}, & g_{ij}^{(1)} &= \lambda_g^{(1)} g_{ij}, & p_{ij}^{(1)} &= \lambda_p^{(1)} p_{ij}, & \beta_{ij}^{(1)} &= \lambda_\beta^{(1)} \beta_{ij}, \\ v_{ij}^{(1)} &= \lambda_v^{(1)} v_{ij}, & \chi_{ij}^{(1)} &= \lambda_\chi^{(1)} \chi_{ij}, & \alpha_i^{(1)} &= \lambda_\alpha^{(1)} \alpha_i, & t_i^{\sigma(1)} &= \lambda_t^{(1)} t_i^\sigma, & m_i^{\sigma(1)} &= \lambda_m^{(1)} m_i^\sigma, \end{aligned} \quad (2.149)$$

ной диэлектрической проницаемости, $\lambda_v^{(1)}$ – параметр относительной электромагнитной проницаемости, $\lambda_\chi^{(1)}$ – параметр относительной магнитной проницаемости, $\lambda_\alpha^{(1)}$ – параметр относительной тепловой расширяемости, $\lambda_t^{(1)}$ – параметр относительной пьезоэлектричности, $\lambda_m^{(1)}$ – параметр относительно пироманитности.

В локальной системе координат Ox_1y_1 с направлениями осей вдоль осей эллипсов параметрические уравнения эллипсов будут такими:

$$x_1 = a_1 \cos \theta, \quad y_1 = b_1 \sin \theta, \quad (2.150)$$

а в основной системе Oxy имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Здесь φ_1 является углом между направлениями осей Ox и Ox_1 , отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки; θ – параметр параметрического задания эллипса (2.133), изменяющийся от 0 до 2π .

В данном случае комплексные потенциалы $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ примут вид (2.135), а $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$, $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ –

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = F_{50}^{(l)}(z_5^{(l)}), \quad (2.152)$$

$$\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \Phi_{k0}^{(l)}(z_k^{(l)}). \quad (2.153)$$

Функции, голоморфные в эллипсе, будем разлагать в ряд по полиномам Фабера, которые для эллипса $L_k^{(1)}$ представим в виде [36]

$$P_{kn}^{(1)}(z_k^{(1)}) = (\zeta_k^{(1)})^n + (m_k^{(1)})^n / (\zeta_k^{(1)})^n,$$

где $\zeta_k^{(1)}$ – переменные, вычисляемые из конформных отображений

$$z_k^{(1)} = R_k^{(1)} \left(\zeta_k^{(1)} + \frac{m_k^{(1)}}{\zeta_k^{(1)}} \right) \quad (2.154)$$

внешности единичного круга $|\zeta_k^{(1)}| \geq 1$ на внешности эллипсов $L_k^{(1)}$;

$$R_k^{(1)} = \frac{a_1 \left(\cos \varphi_1 + \mu_k^{(1)} \sin \varphi_1 \right) + ib_1 \left(\sin \varphi_1 - \mu_k^{(1)} \cos \varphi_1 \right)}{2},$$

$$m_k^{(1)} = \frac{a_1 \left(\cos \varphi_1 + \mu_k^{(1)} \sin \varphi_1 \right) - ib_1 \left(\sin \varphi_1 - \mu_k^{(1)} \cos \varphi_1 \right)}{2R_k^{(1)}} \quad (k = \overline{1, 5}).$$

Тогда комплексные потенциалы теплопроводности (2.71) и (2.152) примут вид

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{51n}}{\zeta_{51}^n}.$$

$$F_5^{(1)}(z_5^{(1)}) = c_{50}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n}^{(1)} \left[\left(\zeta_k^{(1)} \right)^n + \left(m_k^{(1)} \right)^n / \left(\zeta_k^{(1)} \right)^n \right]. \quad (2.155)$$

Подставив функцию (2.155) в граничные условия (2.68) и применив метод рядов, найдем, что $c_{50}^{(1)} = c_{51n} = c_{5n}^{(1)} = 0$ ($n \geq 2$), а для c_{511} и $c_{51}^{(1)}$ получим систему двух линейных алгебраических уравнений вида

$$c_{511} - c_{51}^{(1)} m_5^{(1)} - \bar{c}_{51}^{(1)} = -s_1,$$

$$\mathfrak{a}_T c_{511} - \mathfrak{a}_T^{(1)} c_{51}^{(1)} m_5^{(1)} + \mathfrak{a}_T^{(1)} \bar{c}_{51}^{(1)} = i \bar{s}_2, \quad (2.156)$$

в которой

$$s_1 = \frac{q}{2} \left(a_1 \left(t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1 \right) + ib_1 \left(t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1 \right) \right),$$

$$s_2 = \frac{q}{2} \left(a_1 \sin(\alpha - \varphi_1) + ib_1 \cos(\alpha - \varphi_1) \right).$$

После решения системы постоянные c_{511} и $c_{51}^{(1)}$ становятся известными и для функций $F_5(z_5)$, $F_5^{(1)}(z_5^{(1)})$ получим выражения

$$F_5(z_5) = \frac{c_{511}}{\zeta_{51}}, \quad F_5^{(1)}(z_5^{(1)}) = c_{51}^{(1)} \frac{z_5^{(1)}}{R_5^{(1)}}. \quad (2.157)$$

Тогда на основе (2.98) найдем

$$\Phi_5(z_5) = B_{51} \ln \zeta_{51} + \frac{a_{512}}{\zeta_{51}^2},$$

$$\Phi_5^{(1)}(z_5^{(1)}) = a_{50}^{(1)} + a_{52}^{(1)} \left(\frac{z_5^{(1)}}{R_5^{(1)}} \right)^2, \quad (2.158)$$

в которых

$$B_{51} = r_5 R_{51} c_{511}, \quad a_{512} = \frac{r_5 R_{51} m_{51} c_{511}}{2}, \quad a_{52}^{(1)} = \frac{r_5^{(1)} R_5^{(1)} c_{51}^{(1)}}{2}.$$

Исходя из выражений (2.158), комплексные потенциалы термоэлектромагнитноупругости представим так:

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) &= B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \\ \Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) &= a_{k0}^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(1)} \left[\left(\zeta_k^{(1)} \right)^n + \left(m_k^{(1)} \right)^n / \left(\zeta_k^{(1)} \right)^n \right], \end{aligned} \quad (2.159)$$

где B_{k1} – постоянные, вычисляемые из решения системы уравнений (2.112).

Подставив функции (2.159) в граничные условия (2.104) и применив метод рядов, найдем, что $a_{k0}^{(1)} = a_{k1n} = a_{kn}^{(1)} = 0$ ($n \neq 2$), а для определения a_{k12} и $a_{k2}^{(1)}$ получим систему 8 линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^4 \left[\left(\lambda_{6k}; \lambda_{2k}; \lambda_{8k}; \lambda_{10k}; p_k; q_k; r_k^0; h_k^0 \right) a_{k12} - \right. \\ &\quad - \left(\lambda_{6k}^{(1)}; \lambda_{2k}^{(1)}; \lambda_{8k}^{(1)}; \lambda_{10k}^{(1)}; p_k^{(1)}; q_k^{(1)}; r_k^{0(1)}; h_k^{0(1)} \right) a_{k2}^{(1)} \left(m_k^{(1)} \right)^2 - \\ &\quad - \left(\bar{\lambda}_{6k}^{(1)}; \bar{\lambda}_{2k}^{(1)}; \bar{\lambda}_{8k}^{(1)}; \bar{\lambda}_{10k}^{(1)}; \bar{p}_k^{(1)}; \bar{q}_k^{(1)}; \bar{r}_k^{0(1)}; \bar{h}_k^{0(1)} \right) \bar{a}_{k2}^{(1)} \left. \right] = \\ &= - \left(\lambda_{65}; \lambda_{25}; \lambda_{85}; \lambda_{105}; p_5; q_5; r_5^0; h_5^0 \right) a_{512} + \\ &\quad + \left(\lambda_{65}^{(1)}; \lambda_{25}^{(1)}; \lambda_{85}^{(1)}; \lambda_{105}^{(1)}; p_5^{(1)}; q_5^{(1)}; r_5^{0(1)}; h_5^{0(1)} \right) a_{52}^{(1)} \left(m_5^{(1)} \right)^2 + \\ &\quad + \left(\bar{\lambda}_{65}^{(1)}; \bar{\lambda}_{25}^{(1)}; \bar{\lambda}_{85}^{(1)}; \bar{\lambda}_{105}^{(1)}; \bar{p}_5^{(1)}; \bar{q}_5^{(1)}; \bar{r}_5^{0(1)}; \bar{h}_5^{0(1)} \right) \bar{a}_{52}^{(1)} - \\ &\quad - (0; 0; 0; 0; e_5; e_6; e_7; e_8), \end{aligned} \quad (2.160)$$

в которой

$$\begin{aligned} e_5 &= \frac{q}{8} \left[\left(\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2 \right) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \left(\alpha_6 b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 b_1 i \right) (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right], \\ e_6 &= \frac{q}{8} \left[\left(\alpha_6 a_1^2 + 2\alpha_2 a_1 b_1 i \right) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - \left(\alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 b_1^2 \right) (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right], \\ e_7 &= \frac{q}{8} \left[t_1^\sigma \left(a_1^2 + 2a_1 b_1 i \right) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - t_2^\sigma b_1^2 (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right], \\ e_8 &= \frac{q}{8} \left[m_1^\sigma \left(a_1^2 + 2a_1 b_1 i \right) (t_x \cos \varphi_1 + t_y \sin \varphi_1) - m_2^\sigma b_1^2 (t_y \cos \varphi_1 - t_x \sin \varphi_1) \right]. \end{aligned}$$

Тогда функции (2.159) примут вид

$$\Phi_k(z_k) = B_{k1} \ln \zeta_{k1} + \frac{a_{k12}}{\zeta_{k1}^2},$$

$$\Phi_k^{(1)}(z_k^{(1)}) = a_{k2}^{(1)} \left(\frac{z_k^{(1)}}{R_k^{(1)}} \right)^2. \quad (2.161)$$

Зная функции (2.157) и (2.161), по формулам (2.92)–(2.95) найдем значения основных характеристик ТЭМУС в любых точках пластинки и ядра. При этом, если $b_1 = 0$, то эллиптическое включение переходит в линейное, и для него можно вычислять КИНН по формулам (2.148).

Заметим, что из (2.157) и (2.161) видно, что все эти характеристики в ядре будут линейными либо квадратичными функциями комплексных переменных $z_k^{(1)}$, а следовательно и x , y .

Численные исследования проведены для некоторых случаев задач ТУ, ТЭМУ. При этом для материала пластинки сохранялся параметр λ_{pe} и соотношения (2.121), а для материала включения вводился параметр относительного пьезоэффекта $\lambda_{pe}^{(1)}$ и принималось, что

$$\lambda_g^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)}, \quad \lambda_p^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)}, \quad \lambda_\beta^{(1)} = 1/\lambda_{pe}^{(1)}, \quad \lambda_v^{(1)} = 1/\lambda_{pe}^{(1)},$$

$$\lambda_\chi^{(1)} = 1/\lambda_{pe}^{(1)}, \quad \lambda_t^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)}, \quad \lambda_m^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)}.$$

В табл. А. 2.14 для пластинок из материалов М1 и М3 с круговым включением радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рис. 2.11) при некоторых значениях параметров (2.149), для одной из наиболее характерных точек контура пластинки – с центральным углом $\theta = \pi/2$, отсчитываемым от положительного направления оси Ox – приведены значения напряжений σ_s (в этой точке равных σ_x) в пластинке по линии контакта пластинки с включением. При этом изменялся один из параметров (2.149), остальные параметры принимались равными 1. В табл. А. 2.15 приведены значения этих же напряжений для случаев, когда один из четырех параметров $\lambda_T^{(1)}$, $\lambda_s^{(1)}$, $\lambda_p^{(1)}$, $\lambda_\alpha^{(1)}$ принимал значения из широкого диапазона, три осталь-

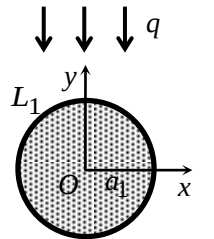


Рис. 2.11

ных параметра равны 0,5 или 2, а $\lambda_g^{(1)} = \lambda_\beta^{(1)} = \lambda_v^{(1)} = \lambda_\chi^{(1)} = \lambda_t^{(1)} = \lambda_m^{(1)} = 1$. Для пластинки из материала М1 в табл. А. 2.16 приведены значения напряжений σ_s в точке с центральным углом $\theta = \pi/2$ для различных значений $\lambda_T^{(1)}$, $\lambda_s^{(1)}$ (причем $\lambda_s^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)}$) и $\lambda_{pe}^{(1)}$, а в табл. А. 2.17 приведены значения напряжений σ_s в точках контура включения, когда эти параметры равны друг другу и равны $\lambda^{(1)}$ ($\lambda_T^{(1)} = \lambda_s^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = \lambda^{(1)}$). На рис. Б. 2.23 и Б. 2.24 изображены графики распределения напряжений σ_s в пластинке из материала М1 по контуру включения при $\lambda_g^{(1)} = \lambda_\beta^{(1)} = \lambda_v^{(1)} = \lambda_\chi^{(1)} = \lambda_t^{(1)} = \lambda_m^{(1)} = 1$, когда $\lambda_T^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = 0,5$ и 2 соответственно и некоторых значениях параметра $\lambda_s^{(1)}$. На рис. Б. 2.25 изображены графики распределения напряжений σ_s в пластинке из материала М1 по контуру включения для некоторых значений $\lambda^{(1)}$ ($\lambda_T^{(1)} = \lambda_s^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = \lambda^{(1)}$).

Из данных табл. А. 2.14 – А. 2.17, рис. Б. 2.23 – Б. 2.25 и других полученных результатов следует, что значения напряжений в пластинке при учете пьезосвойств значительно отличаются от их значений без этого учета (в задаче термоупругости). Причем при учете пьезосвойств значения напряжений (по модулю) в случае материала М1 существенно уменьшаются, в случае материала М3 несколько возрастают. Но в любом случае эти отличия значительны и ими пренебрегать нельзя. Подкрепление отверстия упругим включением снижает концентрацию напряжений. Наибольшее влияние на значения напряжений в пластинке и характер их распределения оказывает параметр относительной теплопроводности $\lambda_T^{(1)}$ материала включения, причем, если параметр относительной теплопроводности включения $\lambda_T^{(1)} > 10^2$ ($\lambda_T^{(1)} < 10^{-2}$), то включение можно считать «абсолютно теплопроводящим» («теплонепроводящим»). Значительно и влияние параметра относительной деформируемости (жесткости) $\lambda_s^{(1)}$. Так, при отсутствии пьезоэффекта, если параметр относительной деформируемости $\lambda_s^{(1)} > 10^2$ ($\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$), то включение мож-

но считать абсолютно мягким (абсолютно жестким). Велико и влияние параметра относительной тепловой расширяемости $\lambda_{\alpha}^{(1)}$ и параметра относительного пьезоэффекта $\lambda_{pe}^{(1)}$. Однако если все, кроме одного, параметры материала включения равны 1, существенным эффектом обладают только параметры, связанные с тепловыми свойствами – $\lambda_T^{(1)}$, $\lambda_{\alpha}^{(1)}$, $\lambda_t^{(1)}$, $\lambda_m^{(1)}$, совсем незначительным эффектом обладает параметр $\lambda_{pe}^{(1)}$, а изменения остальных описанных параметров вовсе не приводят к появлению напряжений в пластинке.

Предельный случай, когда значения основных характеристик ТЭМУС соответствуют значениям для случая пластинки с отверстием, может иметь место, если включение не обладает пьезоэлектрическими свойствами ($\lambda_{pe}^{(1)} \rightarrow 0$). При этом, значения для случая теплоизолированного контура отверстия получаются при $\lambda_T^{(1)} \rightarrow 0$, а для случая задания на контуре постоянной температуры – при $\lambda_T^{(1)} \rightarrow \infty$; случай жесткого подкрепления контура отверстия можно получить, полагая $\lambda_s^{(1)} \rightarrow 0$ и $\lambda_{\alpha}^{(1)} \rightarrow 0$, случай неподкрепленного контура отверстия – при $\lambda_s^{(1)} \rightarrow \infty$ и $\lambda_{\alpha}^{(1)} \leq \lambda_s^{(1)}$.

В табл. А. 2.18 для пластинки из материала М1 с вертикальным линейным включением полудлины a_1 (рис. 2.12) приведены значения КИН

k_1^- для нижней вершины включения для различных значений параметров $\lambda_T^{(1)}$, $\lambda_s^{(1)}$ (причем $\lambda_s^{(1)} = \lambda_{\alpha}^{(1)}$) и $\lambda_{pe}^{(1)}$ материала включения.

На рис. Б. 2.24 приведены графики распределения КИН k_1^- в зависимости от значения $\lg \lambda_s^{(1)}$ (причем $\lambda_s^{(1)} = \lambda_{\alpha}^{(1)}$) для случаев, когда

$\lambda_T^{(1)} = 0$ или 10^{12} , $\lambda_{pe}^{(1)} = 0$. Из полученных данных следует, что для изменений КИН в зависимости от значений параметров материала линейного включения характерны такие же закономерности, что и для напряжений σ_s в случае пластинки с круговым включением. При этом, если $10^{-2} \leq \lambda_s^{(1)} \leq 10^2$, либо $\lambda_s^{(1)} > 10^2$ и $\lambda_T^{(1)} < 10^4$,

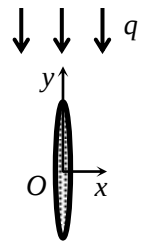


Рис. 2.12

либо $\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$ и $\lambda_{pe}^{(1)} \approx 1$, то значения КИН k_1^- близки к нулевым.

2.8. Выводы по разделу 2

В данном разделе работы приведена общая методика решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных пластин, находящихся под действием линейного потока тепла. Приведены основные соотношения для комплексных потенциалов теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости, граничные условия для их определения, получены выражения основных характеристик ТЭМУС; найдены общие представления комплексных потенциалов для многосвязных областей. Рассмотрены частные случаи общей задачи ТЭМУ, соответствующие задачам ТЭУ, ТМУ или ТУ.

Даны точные аналитические решения задач для сплошной пластинки (бесконечной и конечной), для пластинки с эллиптическим отверстием или трещиной, с эллиптическим или линейным включением с проведением подробных численных исследований по выявлению влияния на значения основных характеристик ТЭМУС учета степени связанности механических и электромагнитных полей, значений постоянных материалов. Установлено, что

1. В сплошном диске, как и в бесконечной пластинке, напряжения не возникают, если ее контур не подкреплён. Жёсткое подкрепление контура пластинки приводит к возникновению в ней напряжений. В обоих случаях индукции электромагнитного поля не возникают.

2. Совместный учёт механических, электрических и магнитных свойств материала значительно влияет на значения исследуемых характеристик. Поэтому при определении ТЭМУС пластинки нужно решать связанную задачу термоэлектромагнитоупругости, не пренебрегая электрическими и особенно магнитными свойствами материалов. При этом наибольшее влияние оказывают пирозлектрические и пиромагнитные модули: чем больше эти модули, тем больше значения основных характеристик. Так, максимальные значения напряжений для пластинки

из материала М1, обладающего наибольшими пирозлектрическими и пиромагнитными модулями, многократно превышают аналогичные значения для пластинок из материала М3, а еще больше для пластинки из материала М2.

3. Чем меньше коэффициенты деформации материала пластинки (жестче ее материал) и чем больше коэффициенты линейного теплового расширения материала, тем больше в ней значения напряжений.

4. В случае упругого включения наибольшее влияние на значения напряжений в пластинке и характер их распределения оказывают коэффициенты теплопроводности материала включения, значительно и влияние коэффициентов деформаций (жесткости) включения, меньше влияние коэффициентов температурного расширения включения. Если параметр относительной теплопроводности включения $\lambda_T^{(1)} > 10^2$ ($\lambda_T^{(1)} < 10^{-2}$), то включение можно считать «абсолютно теплопроводящим» («тепло непроводящим»). Если параметр относительной деформируемости $\lambda_s^{(1)} > 10^2$ ($\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$), то включение можно считать абсолютно мягким (абсолютно жестким). В случае линейных упругих включений, если $10^{-2} \leq \lambda_s^{(1)} \leq 10^2$, либо $\lambda_s^{(1)} > 10^2$ и $\lambda_T^{(1)} < 10^4$, либо $\lambda_s^{(1)} < 10^{-2}$ и $\lambda_{pe}^{(1)} \approx 1$, то значения КИН k_1^- близки к нулевым.

По результатам, представленным в разделе 2, опубликованы работы [26, 43, 46].

РАЗДЕЛ 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

3.1. Решение задачи для пластинки с конечным числом отверстий

Постановка задачи. Рассмотрим отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy пьезопластинку, занимающую многосвязную область S с контурами эллиптических отверстий L_l с полуосями a_l, b_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 3.1) и находящуюся под действием линейного потока тепла плотности q под углом α к оси Ox при отсутствии внешних механических и электромагнитных воздействий. На каждом из контуров отверстий пластинки заданы значения температуры или теплового потока, или он находится в условиях теплообмена с окружающей средой. При этом, исходя из отсутствия внешних механических и электромагнитных воздействий, на каждом контуре равны нулю внешние усилия (первая основная задача) или на нем заданы перемещения (вторая основная задача), на каждом из них равны нулю электрическая и магнитная индукции.

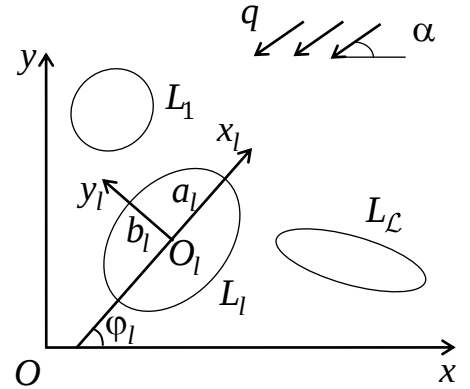


Рис. 3.1

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей вдоль осей эллипсов параметрические уравнения эллипсов будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (3.1)$$

а в основной системе Oxy имеют вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l,$$

$$y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \quad (3.2)$$

Здесь φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; θ – параметр параметрического задания эллипса (3.1), изменяющийся от 0 до 2π .

Решение задачи теплопроводности. Определение температурного поля в рассматриваемой пластинке сводится к нахождению функции $F_5(z_5)$ из соответствующих граничных условий.

Комплексный потенциал $F_5(z_5)$ имеет вид (2.71), в котором функция $F_{50}(z_5)$ является голоморфной в области S_5 , получаемой из заданной области S аффинным преобразованием (2.60). В последней области контурам L_l соответствуют контуры L_{5l} , и функцию $F_{50}(z_5)$ можно представить в виде суммы

$$F_{50}(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} F_{5l}^*(z_5), \quad (3.3)$$

где $F_{5l}^*(z_5)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) – функции, голоморфные вне контуров L_{5l} . Для построения последних функций используем методы конформных отображений.

Отобразим внешность единичного круга $|\zeta_{5l}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{5l} [36]:

$$z_5 = z_{5l} + R_{5l} \left(\zeta_{5l} + \frac{m_{5l}}{\zeta_{5l}} \right), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} z_{5l} &= x_{0l} + \mu_5 y_{0l}, \\ R_{5l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_5 \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_5 \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{5l} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_5 \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_5 \cos \varphi_l)}{2R_{5l}}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

μ_5 – комплексный параметр задачи теплопроводности (2.61).

Функции $F_{5l}^*(z_5)$, голоморфные вне контуров L_{5l} , в конформно отображенных областях ζ_{5l} , как сложные функции будут голоморфными вне кругов $|\zeta_{5l}| \geq 1$. Поэтому их можно разложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{5l} [70]:

$$F_{5l}^*(z_5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5ln}}{\zeta_{5l}^n}. \quad (3.6)$$

Исходя из представлений (3.6), а также учитывая, что суммарные потоки тепла через контуры отверстий равны нулю, функцию (2.71) для пластинки запишем в виде

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l w_l(z_5) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5), \quad (3.7)$$

где

$$w_l(z_5) = \ln(z_5 - z_{5l}), \quad \varphi_{5ln}(z_5) = \zeta_{5l}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (3.8)$$

c_5 , D_l , c_{5ln} – постоянные, вычисляемые из соответствующих граничных условий. При этом, для бесконечной области в силу ограниченности температуры на бесконечности

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l = 0. \quad (3.9)$$

Определение постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Постоянные, входящие в функцию (3.7), определяются из соответствующих граничных условий задачи теплопроводности.

На основе (2.65) – (2.67), в данном случае граничные условия на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) имеют вид

$$2\operatorname{Re} F_5(t_5) = T_l - T^*, \quad (3.10)$$

если на них заданы значения температуры T_l ;

$$2\operatorname{Re} [i \alpha_T \delta_{5,s} F_5'(t_5)] = q_n^* - q_{ln}, \quad (3.11)$$

в случае заданных значений плотности потока тепла q_{ln} :

$$2\operatorname{Re} [h F_5(t_5) + i \alpha_T \delta_{5,s} F_5'(t_5)] = q_n^* - h [T^* - \mathcal{T}], \quad (3.12)$$

в случае конвективного теплообмена с коэффициентом h с внешней средой температуры $\mathcal{T}$. При этом на основе (3.7)

$$F'_5(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_{5l} w'_l(z_5) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \phi'_{5ln}(z_5); \quad (3.13)$$

где

$$w'_l(z_5) = \frac{1}{z_5 - z_{5l}},$$

$$\phi'_{5ln}(z_5) = -\frac{n}{R_{5l} \zeta_{5l}^{n-1} (\zeta_{5l}^2 - m_{5l})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (3.14)$$

Выберем на контурах отверстий систему точек $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ ($m = \overline{1, M_j}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Из граничных условий (3.10) – (3.12) на контурах отверстий L_j ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$) получим уравнения в каждой точке M_{jm} ($j = \overline{1, \mathcal{L}}, m = \overline{1, M_j}$):

$$2c_5 + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} w_{5l}(t_{5jm}) D_l + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{5ln}(t_{5jm}) c_{5ln} = T_j - T^* \quad (3.15)$$

в случае заданного значения температуры T_j ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$);

$$2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} i \alpha_T \delta_{5,s} w'_{5l}(t_{5jm}) D_l + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} i \alpha_T \delta_{5,s} \phi'_{5ln}(t_{5jm}) c_{5ln} = q_n^* - q_{jn}; \quad (3.16)$$

в случае заданного значения плотности потока тепла q_{jn} ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$):

$$2hc_5 + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left(h w_{5l}(t_{5jm}) + i \alpha_T \delta_{5,s} w'_{5l}(t_{5jm}) \right) D_l +$$

$$+ 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(h \phi_{5ln}(t_{5jm}) + i \alpha_T \delta_{5,s} \phi'_{5ln}(t_{5jm}) \right) c_{5ln} = q_n^* - h(T^* - \mathcal{T}). \quad (3.17)$$

в случае конвективного теплообмена с коэффициентом h со средой температуры $\mathcal{T}$. Уравнения (3.15) – (3.17) можно обобщить одним видом:

$$2v_1 c_5 + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left(v_1 w_{5l}(t_{5jm}) + v_2 i \alpha_T \delta_{5,s} w'_{5l}(t_{5jm}) \right) D_l +$$

$$+2\operatorname{Re} \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(v_1 \varphi_{5ln}(t_{jm}) + v_2 i \alpha_T \delta_{5,s} \varphi'_{5ln}(t_{jm}) \right) c_{5ln} = f(t_{jm}), \quad (3.18)$$

в котором

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 0, \quad f(t_{jm}) = T_j - T^*;$$

в случае заданного значения температуры T_j ,

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 1, \quad f(t_{jm}) = q_n^* - q_{jn}$$

для точек с заданным значением плотности потока тепла q_{jn} ,

$$v_1 = h, \quad v_2 = 1, \quad f(t_{jm}) = q_n^* - h(T^* - \mathcal{T});$$

для точек в случае конвективного теплообмена с коэффициентом h со средой температуры $\mathcal{T}$. При этом

$$t_{5jm} = x_{jm} + \mu_5 y_{jm}. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.18) составляют систему из $R = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M_l$ линейных

алгебраических уравнений. Каждое уравнение этой системы содержит множество неизвестных. Если в бесконечных рядах в (3.7) оставлять по N_1 членов, то каждое уравнение будет содержать $Q = 1 + \mathcal{L} + 2N_1\mathcal{L}$ вещественных неизвестных $((1 + \mathcal{L})$ вещественных постоянных c_5 , D_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и $N_1\mathcal{L}$ комплексных постоянных c_{5ln} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = \overline{1, N_1}$)), причем должно выполняться неравенство $R \geq Q$ [23, 127].

Если количество уравнений R и количество неизвестных Q в указанной системе будет одинаковым, то эта система соответствует методу коллокаций. Если же количество уравнений больше количества неизвестных ($R > Q$), то для этой системы будем находить псевдорешение с применением сингулярного разложения [23, 127, 141, 142].

После нахождения решения указанной системы входящие в функции (3.7) постоянные, а, следовательно, и сами функции будут известны, что позволит вычислять температуру и плотность потока тепла через произвольные площадки в

пластинке.

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости. После нахождения функций $F_5(z_5)$ задача об определении ТЭМУС пластинки сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) из соответствующих граничных условий.

Комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости (2.107) для пластинки представим в виде

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}) + \Phi_{k0}(z_k), \quad (3.20)$$

где Γ_k – постоянные, равные нулю для конечной области и вычисляемые из системы (2.110), в которой $\Gamma_5 = r_5 c_5$, для бесконечной области; A_{kl}, B_{kl} ($k = \overline{1, 4}$) – постоянные, вычисляемые из систем (2.111), (2.112), в которых $A_{5l} = r_5 D_l$, $B_{5l} = r_5 (R_{5l} c_{5l1} - z_{5l} D_l)$, причем на основе (2.109) для бесконечной пластинки должны выполняться условия

$$\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} = 0 \quad (k = \overline{1, 5}); \quad (3.21)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} , получаемых из контуров L_l аффинными преобразованиями (2.80).

Отобразим конформно внешность единичного круга на внешности эллипсов L_{kl} [36]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} (\zeta_{kl} + m_{kl} / \zeta_{kl}), \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - i b_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2 R_{kl}}; \end{aligned} \quad (3.23)$$

μ_k – корни характеристического уравнения (2.76). Тогда функции (3.20) и их про-

изводные для пластинки будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (3.24)$$

$$\Phi'_k(z_k) = N'_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k), \quad (3.25)$$

где

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl} z_k + B_{kl}) \ln(z_k - z_{kl}),$$

$$\varphi_{kln}(z_k) = \zeta_{kl}^{-n} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}); \quad (3.26)$$

$$N'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left(A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right),$$

$$\varphi'_{kln}(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}). \quad (3.27)$$

Определение постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Постоянные, входящие в функции (3.24), будем определять из соответствующих граничных условий, которые запишем в дифференциальной форме. На внешнем контуре L_0 , на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), дифференцируя условия (2.101) по дуге контура, получаем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kli} \delta_{k,s} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{li}(t)}{ds} - 2 \operatorname{Re} d_{5li} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_5) \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (3.28)$$

Как и в задаче теплопроводности, выберем на контурах отверстий систему точек $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ ($m = \overline{1, M_j}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Эта система может совпадать либо не совпадать с системой, выбранной в задаче теплопроводности. Подставляя функции (3.25) в граничные условия (3.28) в точках $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$, получаем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{kji} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kjm}) a_{kln} = \frac{df_{ji}(t_{jm})}{ds} - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{kji} \delta_{k,s} N'_k(t_{kjm}) -$$

$$-2\operatorname{Re} d_{5ji} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{5jm}) \quad (j=\overline{1, \mathcal{L}}; m=\overline{1, M_j}; i=\overline{1, 4}), \quad (3.29)$$

где

$$t_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}; \quad (3.30)$$

Система (3.29) состоит из $4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M_l$ линейных алгебраических уравнений.

Если в рядах (3.25) оставлять по N_2 членов, то каждое уравнение будет содержать $8N_2\mathcal{L}$ вещественных неизвестных для определения $4N_2\mathcal{L}$ комплексных постоянных a_{kln} ($k=\overline{1, 4}$, $l=\overline{1, \mathcal{L}}$, $n=\overline{1, N_2}$). Систему будем решать методом сингулярного разложения матрицы [23, 127, 141, 142], описанным в приложении В. После нахождения псевдорешения системы (3.29) входящие в функции (3.25) постоянные, а, следовательно, и сами функции будут известны, и по ним можно вычислять значения основных характеристик ТЭМУС в пластинке, а в случае трещин – также КИНИН по формулам [45]

$$\begin{aligned} k_1^\pm &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left(\lambda_{1k} \sin^2 \varphi_l + \lambda_{2k} \cos^2 \varphi_l - 2\lambda_{6k} \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right) M_k^\pm, \\ k_2^\pm &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left((\lambda_{2k} - \lambda_{1k}) \sin \varphi_l \cos \varphi_l + \lambda_{6k} (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right) M_k^\pm, \\ k_D^\pm &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{8k} \cos \varphi_l - \lambda_{7k} \sin \varphi_l) M_k^\pm, \\ k_E^\pm &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0 \mu_k \cos \varphi_l - r_k^0 \sin \varphi_l) M_k^\pm, \\ k_B^\pm &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\lambda_{10k} \cos \varphi_l - \lambda_{9k} \sin \varphi_l) M_k^\pm, \\ k_H^\pm &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (r_k^0 \mu_k \cos \varphi_l - r_k^0 \sin \varphi_l) M_k^\pm, \end{aligned} \quad (3.31)$$

в которых

$$M_k^\pm = \pm \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \left(A_{kl} (z_{kl} \pm 2R_{kl}) + B_{kl} - \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln} \right).$$

Приведенное решение сохраняется, если вместо бесконечной пластинки имеет место конечная многосвязная пластинка с отверстиями и трещинами. В этом случае комплексные потенциалы будут содержать и функции, голоморфные внутри внешнего контура, но не будут иметь слагаемых c_5 , $\Gamma_k z_k$. При этом, кроме обычных граничных условий, внешний контур пластинки может находиться и под действием линейного потока тепла. В этом случае комплексные потенциалы принимают вид

$$F_5(z_5) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} D_l w_l(z_5) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5)$$

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (3.32)$$

где

$$\varphi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k}{R_{k0}} \right)^n.$$

Как показывают результаты исследований, если внешний контур находится далеко от контуров отверстий (более 10 диаметров области, занятой контурами отверстий и трещин), то влияние этого контура на ТЭМУС незначительно и им можно пренебречь.

3.2. Пластика с периодической системой отверстий

Постановка задачи. Рассмотрим анизотропную пластинку с периодическим рядом одинаковых и одинаково расположенных эллиптических отверстий с контурами L_l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (рис. 3.2) и с центрами на одной прямой, которую примем за ось Ox декартовой системы координат Oxy . Обозначим полуоси эллипсов через a и b , абсциссы их центров – через lh_x , где h_x – расстояние между цен-

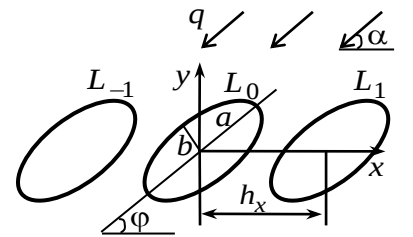


Рис. 3.2

сов через a и b , абсциссы их центров – через lh_x , где h_x – расстояние между цен-

трами соседних отверстий, а угол наклона полуоси эллипсов a к оси Ox – через φ . На бесконечности действует линейный поток тепла плотности q , направленный под углом α к оси Ox , причем в силу периодичности $\operatorname{ctg} \alpha = k_{12}/k_{22}$ [5].

Вид комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы для пластинки (3.7) и (3.24) в данном случае будут такими:

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{5l}(z_5),$$

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_{kl} \ln \zeta_{kl} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi_{kl}(z_k), \quad (3.33)$$

где B_{kl} – коэффициенты, определяемые из системы (2.112); $F_{5l}(z_5)$ и $\Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_5 и S_k , ограниченных контурами L_{5l} и L_{kl} , получаемыми из L_l аффинными преобразованиями (2.60) и (2.80).

После конформных отображений внешности единичного круга $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [36]

$$z_k = l h_x + R_k \left(\zeta_{kl} + \frac{m_k}{\zeta_{kl}} \right), \quad (3.34)$$

где

$$R_k = \frac{a(\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi) + ib(\sin \varphi - \mu_k \cos \varphi)}{2},$$

$$m_k = \frac{a(\cos \varphi + \mu_k \sin \varphi) - ib(\sin \varphi - \mu_k \cos \varphi)}{2R_k}, \quad (3.35)$$

функции $F_{5l}(z_5)$ и $\Phi_{kl}(z_k)$ в отображенных областях представляются в виде

$$F_{5l}(z_5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{5ln}}{\zeta_{5l}^n}, \quad \Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}.$$

Тогда для $F_5(z_5)$, $\Phi_k(z_k)$ и $\Phi'_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) получаем

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \Phi_{5ln}(z_5); \quad (3.36)$$

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} B_{kl} \ln \zeta_{kl} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k); \quad (3.37)$$

$$\Phi'_k(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{B_{kl} \zeta_{kl}}{R_k(\zeta_{kl}^2 - m_k)} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k). \quad (3.38)$$

В силу периодичности температурного поля и напряжений в точках z_k и $z_k + h_x$ температура и напряжения в этих точках будут одинаковыми, т.е.

$$T^*(x, y) = T^*(x + h_x, y); \quad (3.39)$$

$$F_5(z_5) = F_5(z_5 + h_x); \quad (3.40)$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Phi'_k(z_k + h_x). \quad (3.41)$$

Заметим, что (3.39) и (3.40) следуют из периодичности температуры, (3.41) – из периодичности напряжений.

Из равенств (3.34) следует, что

$$\zeta_{kl}(z_k + h_x) = \zeta_{k,l-1}(z_k), \quad \varphi_{kln}(z_k + h_x) = \varphi_{k,l-1,n}(z_k). \quad (3.42)$$

Подставляя выражение (3.36) в (3.40) и учитывая (3.42), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5ln}(z_5 + h_x) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5ln} \varphi_{5,l-1,n}(z_5) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{5,l+1,n} \varphi_{5ln}(z_5). \end{aligned}$$

Сравнивая в последних равенствах коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi_{5ln}(z_5)$ в начальных и конечных суммах, получаем

$$c_{5ln} = c_{5,l+1,n} = c_{5n}. \quad (3.43)$$

Тогда функция (3.36) примет вид

$$F_5(z_5) = c_5 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n} \psi_{5n}(z_5), \quad (3.44)$$

где

$$\psi_{5n}(z_5) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{5l}^{-n};$$

c_{5n} – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контуре основного отверстия L_0 .

На основании формул (2.106) и (3.43) для коэффициентов B_{5l} будем иметь

$$B_{5l} = r_5 R_5 c_{5l1} = r_5 R_5 c_{5,l+1,1} = B_{5,l+1} = B_5. \quad (3.45)$$

Тогда из (2.112) на основании (3.45) получим

$$B_{kl} = B_{k,l+1} = B_k. \quad (3.46)$$

Подставляя (3.38) и (3.46) в (3.41) и учитывая (3.42), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{kln}(z_k) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{kln}(z_k + h_x) = \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \phi'_{k,l-1,n}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,l+1,n} \phi'_{kln}(z_k). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Сравнивая, как и ранее, в (3.47) коэффициенты при одинаковых функциях $\phi'_{kln}(z_k)$ в начальных и конечных суммах, получаем $a_{kln} = a_{k,l+1,n} = a_{kn}$. Тогда функции (3.37) и (3.38) примут вид

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \psi_{kn}(z_k), \quad (3.48)$$

$$\Phi'_k(z_k) = N'_k(z_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \psi'_{kn}(z_k), \quad (3.49)$$

где

$$N_k(z_k) = \Gamma_k z_k + B_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \ln \zeta_{kl}, \quad \psi_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{kl}^{-n}(z_k),$$

$$N'_k(z_k) = \Gamma_k + B_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\zeta_{kl}}{R_k(\zeta_{kl}^2 - m_k)},$$

$$\psi'_{kn}(z_k) = - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_k(\zeta_{kl}^2 - m_k)};$$

a_{kn} — неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контуре L_0 .

Определение неизвестных постоянных. Для определения неизвестных постоянных c_{5n} , a_{kn} , входящих в функции (3.44), (3.48), на контуре основного отверстия выберем систему точек $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$ ($m = \overline{1, M_0}$), в которых удовлетворим граничным условиям задач теплопроводности и термоэлектромагнитоупругости.

Подставляя функции (3.44) в условия (3.18), а функции (3.49) – в (3.28), получаем

$$\begin{aligned} 2v_1 c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 \psi_{5n}(t_{50m}) + v_2 i \alpha \delta_5 \psi'_{5n}(t_{50m})) c_{5n} = \\ = v_2 q_n^* - v_1 (T^* - \tau) \quad (m = \overline{1, M_0}); \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} d_{k0i} \delta_{k,s} \psi'_{kn}(t_{k0m}) a_{kn} = \frac{df_{0i}(t_{0m})}{ds} - \\ - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{k0i} \delta_{k,s} N'_k(t_{k0m}) - 2 \operatorname{Re} d_{50i} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{50m}) \\ (m = \overline{1, M_0}; i = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (3.51)$$

где $t_{k0m} = x_{0m} + \mu_k y_{0m}$.

Система линейных алгебраических уравнений (3.50) состоит из M_0 уравнений, а система (3.51) – из $4M_0$ уравнений для определения комплексных постоянных c_{5n} , a_{kn} . Если в рядах в (3.44), (3.49) оставлять по N членов, то каждое уравнение системы (3.50) будет содержать $2N + 1$ неизвестных, а каждое уравнение системы (3.51) – $8N$ неизвестных. После нахождения с применением сингулярного разложения псевдорешения вначале системы (3.50), а затем системы (3.51) искомые постоянные станут известными, и по известным функциям (3.44), (3.49) можно вычислять температуру, плотность потока тепла, основные характеристики ТЭМУС, а в случае трещин – также КИНИН.

3.3. Исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки с отверстиями и трещинами

Были проведены численные исследования ТЭМУС различных однородных пластинок. При проведении расчетов количество членов в рядах (3.7), (3.24), (3.44), (3.48) и точек на контурах L_l , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (3.18), (3.29), (3.50), (3.51), увеличивались до тех пор, пока

граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности. Для этого, как показали численные исследования, необходимо было в указанных рядах оставлять от 5 до 150 членов, на каждом из контуров брать от 100 до 1500 точек. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для бесконечной пластинки с отверстиями и трещинами, причем, исходя из (2.57), считалось, что линейный поток тепла направлен по оси Oy (под углом $\alpha = \pi/2$ к оси Ox). При $b_l/a_l = 10^{-5}$ эллиптическое отверстие L_l считалось трещиной. Во всех случаях, если не указано иное, радиусы круговых отверстий и полудлины трещин полагались равными единице.

Пластика с одним эллиптическим отверстием или трещиной. По вышеизложенному приближенному решению были проведены численные исследования ТЭМУС для пластинки с одним эллиптическим отверстием или трещиной. Полученные результаты совпадают с описанными в п. 2.7 для точного решения, поэтому их описание здесь не приводится.

Многосвязная пластинка с отверстиями. *Пластика с двумя отверстиями.* В табл. А.3.1 для пластинки из материала М1 с двумя круговыми отверстиями радиуса a_1 ($b_1 = a_2 = b_2 = a_1$) (рис. 3.3) с неподкрепленными контурами, на которых поддерживается одинаковая температура ($T_1 = T_2 = 0$) либо они теплоизолированы ($q_{1n} = q_{2n} = 0$), в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния c между контурами отверстий к радиу-

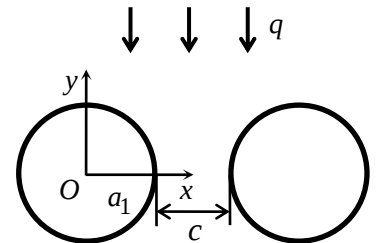


Рис. 3.3

су отверстий, приведены значения нормальных напряжений σ_s в точках контура левого отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру, для задачи ТУ, когда не учитываются электрические и магнитные свойства материала, задачи ТЭУ, когда учитываются упругие и электрические свойства, задачи ТМУ, когда учитываются упругие и магнитные свойства, и задачи ТЭМУ, когда учитываются все свойства. В табл. А. 3.2 приведены аналогичные значения для пластинки из материала М2, в табл. А. 3.3 – для пластинки из материала М3. На рис. Б. 3.1 и рис. Б. 3.2 для пластинки из материала М1, когда соответственно на контурах от-

верстий задана одинаковая температура или контуры теплоизолированы, для случаев задач ТУ и ТЭМУ и некоторых значений отношения c/a_1 изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру левого отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.3 и рис. Б. 3.4 приведены аналогичные графики распределения напряжений для пластинки из материала М3. Значения напряжений и графики их распределения, соответствующие случаю $c/a_1 = \infty$, относятся к пластинке с одним отверстием [43].

Из данных табл. А. 3.1 – А. 3.3, рис. Б.3.1 – Б. 3.4 и других полученных результатов следует, что при сближении отверстий друг с другом большие изменения значений основных характеристик ТЭМУС происходят только в зоне между отверстиями. При этом, если на контурах задана одинаковая температура, то при сближении отверстий до расстояния между ними, равного радиусам отверстий, значения основных характеристик растут, а затем убывают; если же контуры теплоизолированы, то при сближении отверстий наблюдается постоянный рост значений этих величин. При $c/a_1 > 10$ влияние одного отверстия на напряженное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь. Учет электрических свойств материала (задача ТЭУ) незначительно влияет на значения напряжений, учет магнитных свойств (задача ТМУ) резко меняет значения напряжений, а еще больше их меняет учет и электрических, и магнитных свойств (задача ТЭМУ). Поэтому при расчетах пренебрегать этими свойствами нельзя. Как и в случае пластинки с одним отверстием, концентрация напряжений в пластинке из материала М1 значительно больше, чем в пластинках из материалов М2 и М3.

Пластина с конечным или бесконечным рядом отверстий. Рассмотрим пластинку с конечным или бесконечным числом одинаковых отверстий с полуосями a и b , расположенных вдоль оси Ox на одинаковом расстоянии c друг от друга. Для пластинки с конечным числом отверстий в приведенном в п. 3.1 решении нужно положить $a_l = a$, $b_l = b$, $\varphi_l = \varphi$, $x_{0l} = l(2a + c)$, $y_{0l} = 0$; для пластинки с бесконечным рядом отверстий в решении п. 3.2 нужно принять $h_x = 2a + c$.

В табл. А. 3.4 для пластинки из материалов М1 и М3 с рядом одинаковых неподкрепленных круговых отверстий радиуса a ($a_l = b_l = a$, $\varphi_l = 0$) (рис. 3.4), на контурах которых задана одинаковая температура, приведены значения напряжений σ_s в точках контура центрального отверстия в зависимости от количества отверстий $\mathcal{L}$ при некоторых значениях отношения c/a . В табл. А. 3.5 приведены анало-

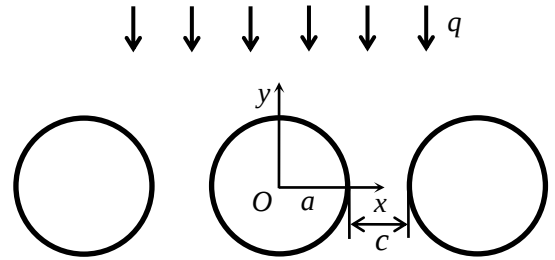


Рис. 3.4

гичные значения напряжений для случая теплоизолированных контуров отверстий. Приведенные для $\mathcal{L} = \infty$ данные соответствуют периодической задаче. В табл. А. 3.6 для пластинки из материалов М1 и М3 с бесконечным рядом неподкрепленных круговых отверстий, на контурах которых задана одинаковая температура, приведены значения напряжений σ_s в точках контуров отверстий для различных значений отношения c/a . В табл. А. 3.7 приведены аналогичные значения напряжений для случая теплоизолированных контуров отверстий. На рис. Б. 3.5 для пластинки из материала М1 с рядом круговых отверстий со значением отношения $c/a = 1$, когда на контурах отверстий задана одинаковая температура, для случаев задач ТУ и ТЭМУ и некоторых значений $\mathcal{L}$ изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.6 изображены аналогичные графики распределения напряжений для случая теплоизолированных контуров отверстий. На рис. Б. 3.7 и рис. Б. 3.8 приведены аналогичные графики распределения напряжений для пластинки из материала М3. На рис. Б. 3.9 – Б. 3.12 приведены аналогичные графикам на рис. Б. 3.5 – Б. 3.8 графики распределения напряжений для пластинки с рядом отверстий при значении отношения $c/a = 0,1$. На рис. Б. 3.13 для пластинки из материала М1 с бесконечным рядом неподкрепленных круговых отверстий, когда на контурах отверстий задана одинаковая температура, для случаев задач ТУ и ТЭМУ и некоторых значений c/a изображены графики распределения

напряжений σ_s по контурам отверстий в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.14 изображены аналогичные графики распределения напряжений для случая теплоизолированных контуров отверстий. На рис. Б. 3.15 и рис. Б. 3.16 приведены аналогичные графики распределения напряжений для пластинки из материала МЗ.

Из описанных и других полученных результатов видно, что с увеличением количества отверстий и при их сближении друг с другом концентрация напряжений в пластинке растет. Особенно значителен рост напряжений в случае теплоизолированных контуров отверстий. При $c/a > 10$ влияние каждого отверстия на значения напряжений около контуров других отверстий и незначительно и им можно пренебречь. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала существенно искажает истинные значения напряжений. Поэтому при расчетах нельзя не учитывать эти свойства.

Многосвязная пластинка с трещинами. *Пластинка с двумя вертикальными трещинами.* В табл. А. 3.8 для пластинок из материалов М1 и МЗ, содержащих две вертикально ориентированные трещины одинаковой длины $2l$ ($a_1 = a_2 = l$, $b_1 = b_2 = 10^{-5}l$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$) (рис. 3.5), когда на их берегах задана одинаковая температура ($T_1 = T_2 = 0$), для различных значений отношения c/l расстояния c между

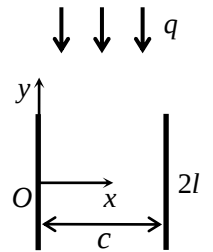


Рис. 3.5

трещинами к их полудлине приведены значения КИН k_1^- , k_2^- для нижнего конца левой трещины (для верхнего конца левой трещины $k_1^+ = -k_1^-$, $k_2^+ = k_2^-$; для правой трещины значения $k_1^\pm$ такие же, как и для левой трещины, а значения $k_2^\pm$ отличаются знаком).

Видно, что на значения КИН велико влияние электрических и магнитных свойств, поэтому при расчетах пренебрегать ими нельзя. Значения КИН для трещин в пластинке из материала М1 значительно больше, чем в пластинке из материалов МЗ. Закономерности изменения КИН в зависимости от расстояния между

трещинами такие же, как и описанные выше закономерности для напряжений в случае отверстий. Большие значения КИН наблюдаются, когда расстояние между трещинами менее их длины.

Пластика с Т-образной трещиной. Были проведены численные исследования для пластики с Т-образной трещиной (рис. 3.6). При их проведении полагалось, что пластика содержит две взаимно перпендикулярные трещины – горизонтальную с полудлиной a_1 ($b_1 = 10^{-5}a_1$, $\varphi_1 = 0$) («шляпка» «буквы Т») и вертикальную с длиной l_2 ($a_2 = l_2/2$, $b_2 = 10^{-5}a_2$, $\varphi_2 = \pi/2$) («ножка»), причем вертикальная трещина выходила на середину горизонтальной.

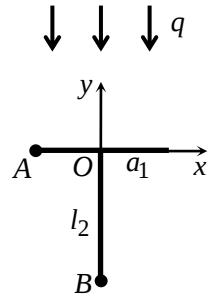


Рис. 3.6

При этом один из параметров – a_1 или l_2 – полагался равным $l_{тек}$, а другой – единице. В табл. А. 3.9 для пластики из материала М1 с Т-образной трещиной для случаев, когда на берегах задана одинаковая температура ($T_1 = T_2 = 0$) либо когда берега теплоизолированы ($q_{1n} = q_{2n} = 0$), приведены значения КИНИН для вершин А, В трещины для различных значений длин «ножки» и «шляпки».

Из полученных данных следует, что при относительно малых значениях длин «ножки» либо «шляпки» значения КИНИН соответственно для вершины А либо В мало отличается от соответствующих значений для случая пластики с одной трещиной, тогда как для другой вершины значения КИНИН очень малы. В случае задания значений температуры, при возрастании значений длины «ножки» значения КИНИН для вершины А сильно возрастают, однако ещё сильнее возрастают значения k_1^- для вершины В. В этом случае «шляпку» можно представить как «расщепление» в вершине «ножки». Характер значений КИНИН для вершины А, принадлежащей этому «расщеплению», коренным образом отличается от такового для вершины В трещины, из чего следует, что появление «расщепления» в одной из вершин трещины приводит к значительным изменениям ТЭМУС в окрестности этой вершины. Во всех случаях для вершины В КИНИН, кроме k_1^- , равны нулю. Для вершины, противоположной вершине А, все КИНИН

$$k_i^+ = -k_i^- \quad (i=1, 2, D, E, B, H).$$

Пластика с крестообразной трещиной. Были проведены численные исследования для пластики с крестообразной трещиной (рис. 3.7). При их проведении полагалось, что пластика содержит две перпендикулярные трещины – горизонтальную с полудлиной a_1 ($b_1 = 10^{-5}a_1$, $\varphi_1 = 0$) и вертикальную с полудлиной a_2 ($b_2 = 10^{-5}a_2$, $\varphi_2 = \pi/2$) – с общим центром. При этом один из параметров – a_1 или a_2 – полагался равным $a_{тек}$, а другой – единице. В табл. А. 3.10 для пластики из материала М1 для случаев, когда на берегах задана одинаковая температура ($T_1 = T_2 = 0$) либо когда берега теплоизолированы ($q_{1n} = q_{2n} = 0$), приведены значения КИНИН для вершин A и B трещины для некоторых значений a_1 и a_2 .

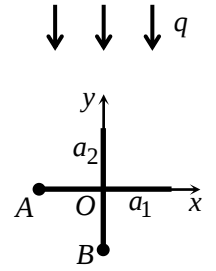


Рис. 3.7

Из полученных данных следует, что характер изменения КИНИН для вершин крестообразной трещины отличается от такового для вершин Т-образной трещины. Так, для вершины A горизонтальной трещины только КИН k_2^- отличен от нуля, а для вершины B вертикальной трещины – только КИН k_1^- . При этом, для вершин, противоположных вершинам A и B , $k_2^+ = -k_2^-$ и $k_1^+ = -k_1^-$. Когда одна из составляющих трещин обладает малой длиной, значения КИН для вершин более длинной трещины мало отличаются от таковых для случая пластики с одной трещиной. Рост длины одной из трещин приводит к росту КИН во всех вершинах.

Пластика со звездообразной трещиной. Были проведены численные исследования для пластики со звездообразной трещиной (рис. 3.8). В этом случае следует полагать, что пластика содержит $\mathcal{L}$ трещин (лучей) одинаковой длины a , имеющих общую вершину и отстоящих друг от друга на одинаковом угловом расстоянии $2\pi/\mathcal{L}$ радиан. Одна из этих трещин ориентирована вдоль направления действия потока тепла ($\varphi_1 = \alpha$). Решение для этой задачи получается из приведенного в п. 3.1, если по-

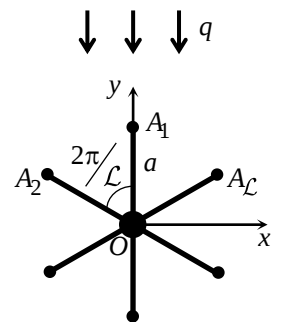


Рис. 3.8

ложить $a_l = a/2$, $b_l = 10^{-5}a_l$, $\varphi_l = \alpha + 2\pi(l-1)/\mathcal{L}$, $x_{0l} = 0,5 a \cos \varphi_l$, $y_{0l} = 0,5 a \sin \varphi_l$.

В табл. А. 3.11 для пластинки из материала М1 со звездообразной трещиной, приведены значения КИН k_1^+ у конца луча, ориентированного вдоль действия потока тепла (точка A_1), в зависимости от количества лучей $\mathcal{L}$. Видно, что значения КИН k_1^+ незначительно возрастают с увеличением количества лучей.

Пластика с бесконечным рядом трещин. В табл. А. 3.12 для пластинки с бесконечным рядом одинаковых вертикально ориентированных трещин (рис. 3.9), на берегах которых задана одинаковая температура, приведены значения КИН k_1^- для нижнего конца центральной трещины в зависимости от отношения c/l . Закономерности изменения КИН в зависимости от расстояния между трещинами аналогичны закономерностям изменения напряжений в случае пластинки с бесконечным рядом отверстий.

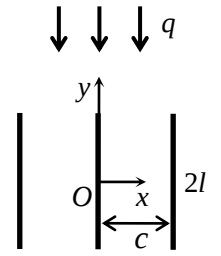


Рис. 3.9

Пластика с отверстиями и трещинами. Пластика с одним отверстием и внутренней (или некраевой) трещиной. В табл. А. 3.13 для пластинки с неподкрепленными круговым отверстием радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) и горизонтальной трещиной полудлины a_1 ($a_2 = a_1$, $b_2 = 10^{-5}a_2$, $\varphi_2 = 0$), расстояние между которыми равно c (рис. 3.10), для некоторых значений отношения c/a_1 приведены значения напряжений σ_s в точках контура

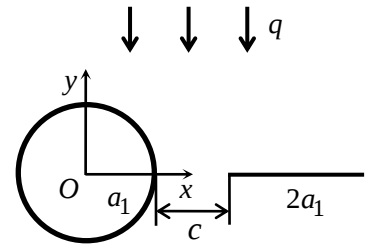


Рис. 3.10

отверстия, когда на контуре отверстия и берегах трещины задана одинаковая температура ($T_1 = T_2 = 0$). В табл. А. 3.14 приведены аналогичные значения для случая, когда контур отверстия и берега трещины теплоизолированы ($q_{1n} = q_{2n} = 0$). В табл. А. 3.15 и табл. А. 3.16 для вышеописанных случаев приведены значения КИН $k_2^\pm$ для концов горизонтальной трещины. На рис. Б. 3.17 для пластинки из материала М1, когда на ее контурах задана одинаковая температура, для случаев задач ТУ и ТЭМУ и некоторых значений отношения c/a_1 изображены графики

распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.18 изображены аналогичные графики распределения напряжений для случая теплоизолированных контуров пластинки. На рис. Б. 3.19 и рис. Б. 3.20 приведены аналогичные графики распределения напряжений для пластинки из материала МЗ. Из данных табл. А. 3.13 – А. 3.16, рис. Б. 3.17 – Б. 3.20 видно, что закономерности изменения ТЭМУС схожи с таковыми для случая пластинки с двумя круговыми отверстиями или с двумя трещинами. Расстояние между отверстием и трещиной оказывает существенное влияние на распределение значений напряжений и КИНИН. Наибольшие их значения достигаются, когда трещина находится поблизости отверстия: в случае заданных значений температуры – когда расстояние между ними сравнимо с их размерами, а в случае теплоизолированных контуров – при неограниченном сближении. При больших же расстояниях ($c/a_1 > 10$) значения напряжений и КИНИН близки к таковым для случаев пластинки с одним отверстием и пластинки с одной трещиной. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала существенно искажает истинные значения напряжений, поэтому при расчетах нельзя не учитывать эти свойства.

В табл. А. 3.17 для пластинки с неподкрепленными круговым отверстием радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) и вертикальной трещиной полудлины a_1 ($a_2 = a_1$, $b_2 = 10^{-5}a_2$, $\varphi_2 = \pi/2$), расстояние между которыми равно c (рис. 3.11), для некоторых значений отношения c/a_1 приведены значения напряжений σ_s в точках контура отверстия, когда на контуре отверстия и берегах трещины задана

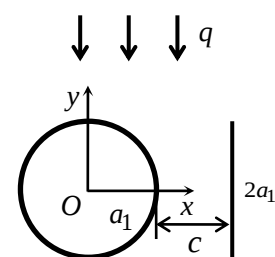


Рис. 3.11

одинаковая температура ($T_1 = T_2 = 0$). В табл. А. 3.18 приведены аналогичные значения для случая, когда контур отверстия и берега трещины теплоизолированы ($q_{1n} = q_{2n} = 0$). В табл. А. 3.19 и табл. А. 3.20 для вышеописанных случаев приведены значения КИНИН k_1^- , k_2^- , k_D^- , k_E^- , k_B^- , k_H^- для нижнего конца вертикальной трещины. На рис. Б. 3.21 для пластинки из материала М1, когда на ее контурах

задана одинаковая температура, для случаев задач ТУ и ТЭМУ и некоторых значений отношения c/a_1 изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.22 изображены аналогичные графики распределения напряжений для случая теплоизолированных контуров пластинки. На рис. Б. 3.23 и рис. Б. 3.24 приведены аналогичные графики распределения напряжений для пластинки из материала МЗ. Из данных табл. А. 3.17 – А. 3.20, рис. Б. 3.21 – Б. 3.24 видно, что закономерности изменения ТЭМУС схожи с таковыми для случая пластинки с двумя круговыми отверстиями или с двумя трещинами. Расстояние между отверстием и трещиной оказывает существенное влияние на распределение значений напряжений и КИНИН. Наибольшие их значения достигаются, когда трещина находится поблизости отверстия. При больших расстояниях ($c/a_1 > 10$) значения напряжений и КИНИН близки к таковым для случаев пластинки с одним отверстием и пластинки с одной трещиной. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала существенно искажает истинные значения напряжений, поэтому при расчетах нельзя не учитывать эти свойства.

Пластина с отверстием и краевой трещиной. В табл. А. 3.21 для пластинки с неподкрепленными круговым отверстием радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) и горизонтальной краевой трещиной длины l_2 ($a_2 = l_2/2$, $b_2 = 10^{-5}l_2$, $\varphi_2 = 0$) (рис. 3.12), для некоторых значений отношения l_2/a_1 приведены значения напряжений σ_s в точках контура отверстия для случая, когда температура на контуре отверстия и берегах трещины равна нулю ($T_1 = T_2 = 0$). В табл. А. 3.22 приведены аналогичные значения для случая, когда контур отверстия и берега трещины теплоизолированы ($q_{1n} = q_{2n} = 0$). В табл. А. 3.23 и табл. А. 3.24 для вышеописанных случаев приведены значения КИН k_2^+ для конца краевой трещины. На рис. Б. 3.25 для пластинки из материала М1, когда на ее контурах задана оди-

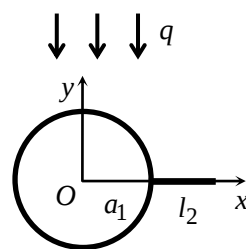


Рис. 3.12

наковая температура, для случаев задач ТУ и ТЭМУ и некоторых значений отношения l_2/a_1 изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.26 изображены аналогичные графики распределения напряжений для случая теплоизолированных контуров пластинки. На рис. Б. 3.27 и рис. Б. 3.28 приведены аналогичные графики распределения напряжений для пластинки из материала МЗ. На рис. Б. 3.29 для пластинки из материала М1 изображены графики распределения КИН k_2^+ в зависимости от значения отношения l_2/a_1 .

Из данных табл. А. 3.21 – А. 3.24, рис. Б. 3.25 – Б. 3.29 и других полученных результатов следует, что длина трещины оказывает маловыраженное влияние на ТЭМУС около отверстия в случае заданного значения температуры и оказывает существенное влияние в случае теплоизолированных контура отверстия и берегов трещины – тогда с длиной трещины стремительно растут по модулю значения основных характеристик. Вместе с тем, установлено, что длина краевой трещины оказывает значительное влияние на значения КИН. Трещине большей длины соответствует большее значение КИН у ее конца. Установлено, что более значительный рост КИН наблюдается в случае теплоизолированных контура отверстия и берегов трещины, нежели в случае заданных значений температуры. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала существенно искажает истинные значения напряжений, поэтому при расчетах нельзя не учитывать эти свойства.

В табл. А. 3.25 для пластинки из материала М1 с круговым отверстием радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) и вертикальной краевой трещиной длины l_2 ($a_2 = l_2/2$, $b_2 = 10^{-5}l_2$, $\varphi_2 = \pi/2$) (рис. 3.13), для некоторых значений отношения l_2/a_1 приведены значения напряжений σ_s в точках контура отверстия для случая, когда температура на контуре отверстия и берегах трещины равна нулю ($T_1 = T_2 = 0$). В

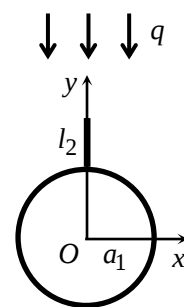


Рис. 3.13

табл. А. 3.26 приведены значения k_1^+ для вершины трещины в зависимости от от-

ношения l_2/a_1 . На рис. Б. 3.30 изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.31 приведены графики распределения КИН k_1^+ для вершины трещины в зависимости от отношения l_2/a_1 .

Из данных табл. А. 3.25, табл. А. 3.26, рис. Б. 3.30, рис. Б. 3.31 и других полученных результатов следует, что в этом случае длина трещины оказывает существенное влияние на ТЭМУС около отверстия в случае заданного значения температуры. Значения напряжений резко уменьшаются около точки выхода трещины на контур отверстия. В других частях контура напряжения, наоборот, резко возрастают с длиной трещины. Вместе с тем, установлено, что длина краевой трещины оказывает значительное влияние на значения КИН. Трещине большей длины соответствует большее значение КИН у ее конца. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала существенно искажает истинные значения напряжений, поэтому при расчетах нельзя не учитывать эти свойства.

Пластика с двумя отверстиями, соединенными узкой щелью. В табл. А.3.27 для пластики с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями радиуса a_1 ($b_1 = a_2 = b_2 = a_1$), соединенными узкой щелью длины c ($a_3 = c/2$, $b_3 = 10^{-5}a_3$, $\varphi_3 = 0$) (рис. 3.14), для некоторых значения отношения c/a_1 приведены значения напряжений σ_s в точках левого отверстия для случаев, когда на контурах отверстий и берегах

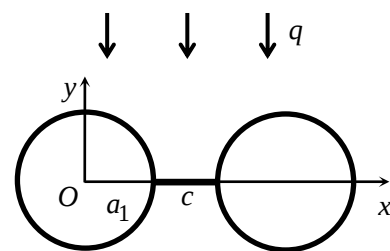


Рис. 3.14

трещины задана одинаковая температура ($T_1 = T_2 = T_3 = 0$). В табл. А. 3.28 приведены аналогичные значения для случая, когда контуры отверстий и берега трещины теплоизолированы ($q_{1n} = q_{2n} = q_{3n} = 0$). На рис. Б. 3.32 для пластики из материала М1, когда на ее контурах задана одинаковая температура, для случаев задач ТУ и ТЭМУ и некоторых значений отношения c/a_1 изображены графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в зависимости от центрального уг-

ла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. На рис. Б. 3.33 изображены аналогичные графики распределения напряжений для случая теплоизолированных контуров пластинки. На рис. Б. 3.34 и рис. Б. 3.35 приведены аналогичные графики распределения напряжений для пластинки из материала МЗ.

Из данных табл. А. 3.27, табл. А. 3.28, рис. Б. 3.32 – Б. 3.35 следует, значение расстояния между отверстиями (и, соответственно, длины щели) оказывает существенное влияние на ТЭМУС около отверстий. Если на контурах отверстий и берегах щели заданы значения температуры, то наибольшие по модулю значения напряжений достигаются, когда расстояние между отверстиями (и длина трещины) соизмеримо с размерами отверстий. В случае более близкого расположения отверстий значения напряжений несколько уменьшаются, а при больших расстояниях – существенно уменьшаются и приближаются к значениям напряжений для случая пластинки с одним отверстием. В случае же теплоизолированных контуров отверстий и берегов трещины значения напряжения стремительно и неограниченно растут с увеличением расстояния между отверстиями. Последнее объясняется тем, что, по сравнению со случаем пластинки с двумя круговыми отверстиями без соединяющей трещины, большую роль играет именно наличие теплоизолированной щели, которая сильно искажает действие потока тепла, приводя к значительному росту плотности потока тепла вдоль контуров отверстий и берегов щели. Пренебрежение электромагнитными свойствами материала существенно искажает истинные значения напряжений, поэтому при расчетах нельзя не учитывать эти свойства.

3.4. Выводы по разделу 3

В данном разделе работы решены задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных пластинок с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла. Представлена методика определения комплексных потенциалов с

использованием конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды и определением неизвестных коэффициентов рядов обобщенным методом наименьших квадратов. Задача сведена к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений с помощью сингулярного разложения матриц. Даны решения задач для пластинки с различным количеством отверстий и трещин при их различных взаимных расположениях и сочетаниях. Описаны результаты численных исследований основных характеристик ТЭМУС, а в случае трещин – также КИНИН.

Численными исследованиями выявлено влияние теплофизических (тепловых, механических и электромагнитных) свойств материала пластинки, геометрических характеристик отверстий и трещин (размеры и взаиморасположения) на значения основных характеристик ТЭМУС и КИНИН. Как и во втором разделе, показано, что пьезоэффект материалов пластинок оказывает существенное влияние на значения основных характеристик ТЭМУС. Также, на ТЭМУС в пластинке существенное влияние оказывает расстояние между концентраторами напряжений. Сближение отверстий и трещин друг с другом приводит к росту концентрации напряжений в пластинке и КИНИН для концов трещин. Особенно рост этих величин значителен в случае теплоизолированных контуров отверстий и берегов трещин.

По результатам, представленным в разделе 3, опубликованы работы [26, 27, 42, 44].

РАЗДЕЛ 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКИ

4.1. Решение задачи для пластинки с конечным числом включений

Рассмотрим пластинку-матрицу, занимающую многосвязную область S с контурами эллиптических отверстий L_l с полуосями a_l, b_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) (рис. 4.1).

Контур отверстия подкреплён упругими включениями, занимающими области $S^{(l)}$ и находящимися с пластинкой в условиях идеального теплового, механического и электромагнитного контакта. Будем считать, что пластинка на бесконечности находится под действием линейного потока тепла плотности q , направленного под углом α к оси Ox .

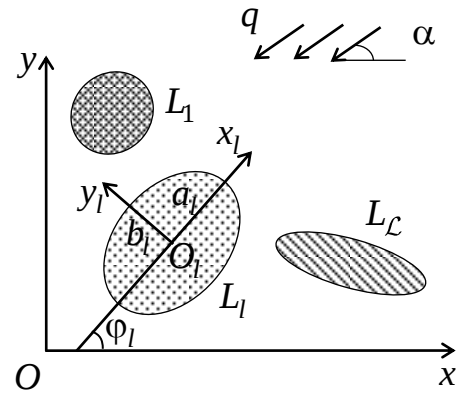


Рис. 4.1

В локальных системах координат $O_l x_l y_l$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей вдоль осей эллипсов параметрические уравнения эллипсов будут такими:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (4.1)$$

а в основной системе Oxy имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь φ_l – угол между направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала координат $O_l x_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; θ – параметр параметри-

ческого задания эллипса (4.1), изменяющийся от 0 до 2π .

Решение задачи теплопроводности. Определение температурных полей в рассматриваемой пластинке-матрице и включениях сводится к нахождению функций $F_5(z_5)$ и $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$ из соответствующих граничных условий.

Комплексный потенциал $F_5(z_5)$ сохраняет вид (3.8). Комплексные потенциалы для включений имеют вид

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = F_{50}^{(l)}(z_5^{(l)}),$$

где $F_{50}^{(l)}(z_5^{(l)})$ – функции, голоморфные в эллипсах $S_5^{(l)}$, ограниченных контурами $L_5^{(l)}$, получаемыми из контуров L_l аффинными преобразованиями $z_5^{(l)} = x + \mu_5^{(l)}y$, где $\mu_5^{(l)}$ – комплексные параметры теплопроводности для включений $S^{(l)}$. Таким же образом, как это было сделано при построении функций (2.126), для функций $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$ находим

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n}^{(l)} \varphi_{5n}^{(l)}(z_5^{(l)}) \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}}), \quad (4.3)$$

где

$$\varphi_{5n}^{(l)}(z_5^{(l)}) = \left(\frac{z_5^{(l)} - z_{50}^{(l)}}{R_5^{(l)}} \right)^{n-1}; \quad (4.4)$$

$$R_5^{(l)} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_5^{(l)} \sin \varphi_l) + i b_l (\sin \varphi_l - \mu_5^{(l)} \cos \varphi_l)}{2},$$

$$z_{50}^{(l)} = x_{0l} + \mu_5^{(l)} y_{0l}. \quad (4.5)$$

Определение постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Постоянные, входящие в функции (3.8), (4.3), определяются из соответствующих граничных условий задачи теплопроводности.

На контурах контактов пластинки и включений имеем

$$2 \operatorname{Re} \left[F_5(t_5) - F_5^{(l)}(t_5^{(l)}) \right] = -T^*,$$

$$2\operatorname{Re}\left[i\left(\mathfrak{a}_T \delta_{5,s} F_5'(t_5) + \mathfrak{a}_T^{(l)} \delta_{5,s}^{(l)} F_5^{(l)'}(t_5^{(l)})\right)\right] = q_n^* \text{ на } L_l \quad (l = \overline{\mathcal{H}+1, \mathcal{L}}). \quad (4.6)$$

При этом на основе (4.3)

$$F_5^{(l)'}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n}^{(l)} \varphi_{5n}^{(l)'}(z_5^{(l)}), \quad (4.7)$$

где

$$\varphi_{5n}^{(l)'}(z_5^{(l)}) = (n-1) \left(R_5^{(l)}\right)^{-(n-1)} \left(z_5^{(l)} - z_{50}^{(l)}\right)^{n-2}. \quad (4.8)$$

Выберем на контурах включений систему точек $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ ($m = \overline{1, M_j}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Из граничных условий (4.6) для точек контуров включений L_j ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$) с учетом (3.14), (4.7) получим уравнения вида

$$\begin{aligned} & (2; 0)c_5 + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (1; i\mathfrak{a}_T) w_{5l}(t_{5jm}) D_l + \\ & + 2\operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} (1; i\mathfrak{a}_T) \varphi_{5ln}(t_{5jm}) c_{5ln} - \\ & - 2\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (1; i\mathfrak{a}_T^{(j)}) \varphi_{5n}^{(j)}(t_{5jm}^{(j)}) c_{5n}^{(j)} = \\ & = \left(-T^*(t); \int_0^s q_n^*(t) ds + c \right) \quad (j = \overline{1, \mathcal{L}}; \quad m = \overline{1, M_j}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

При этом

$$t_{5jm} = x_{jm} + \mu_5 y_{jm}, \quad t_{5jm}^{(j)} = x_{jm} + \mu_5^{(j)} y_{jm}. \quad (4.10)$$

Уравнения (4.9) составляют систему из $R = 2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M_l$ линейных алгебраических уравнений. Каждое уравнение этой системы содержит множество неизвестных. Если в бесконечных рядах в (3.8), (4.3) оставлять по N_1 членов, то каждое уравнение будет содержать $Q = 1 + \mathcal{L} + 4N_1\mathcal{L}$ вещественных неизвестных (или вещественных постоянных c_5 , D_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), комплексных постоянных c_{5ln}

$(l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = \overline{1, N_1})$ $(l = \overline{1, \mathcal{L}})$, комплексных постоянных $c_{5n}^{(l)}$ $(l = \overline{1, \mathcal{L}}, n = \overline{1, N_1})$, причем должно выполняться неравенство $R \geq Q$ [23, 127]. Если количество уравнений R и количество неизвестных Q в указанной системе будет одинаковым, то эта система соответствует методу коллокаций. Если же количество уравнений больше количества неизвестных ($R > Q$), то для этой системы будем находить псевдорешение с применением сингулярного разложения [23, 127, 141, 142].

После нахождения решения указанной системы входящие в функции (3.8) и (4.3) постоянные, а, следовательно, и сами функции будут известны, что позволит вычислять температуру и плотность потока тепла через произвольные площадки в пластинке-матрице и во включениях.

Решение задачи термоэлектромагнитоупругости. После нахождения функций $F_5(z_5)$ и $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$ задача об определении ТЭМУС пластинки-матрицы и упругих включений сводится к нахождению функций $\Phi_k(z_k)$, $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ $(k = \overline{1, 4})$ из соответствующих граничных условий.

Комплексные потенциалы термоэлектромагнитоупругости имеют вид (3.25). Комплексные потенциалы $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ для упругих включений в рассматриваемом случае будут равны функциям $\Phi_{k0}^{(l)}(z_k^{(l)})$, голоморфным в областях $S_k^{(l)}$, ограниченных контурами $L_k^{(l)}$, получаемыми из L_l аффинными преобразованиями, получаемыми из (2.80) заменой μ_k на $\mu_k^{(l)}$, где $\mu_k^{(l)}$ – корни характеристического уравнения (2.76) для материала включения. Последние функции можно представить в ряды по полиномам Фабера для областей $S_k^{(l)}$ [70], а, следовательно, в степенные ряды [36]. Тогда для этих функций и их производных будем иметь

$$\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \varphi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}); \quad (4.11)$$

$$\Phi_k^{(l)'}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \varphi_{kn}^{(l)'}(z_k^{(l)}), \quad (4.12)$$

Здесь

$$\Phi_{kn}^{(l)}(z_k^{(l)}) = (z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^n / (R_k^{(l)})^n; \quad (4.13)$$

$$\Phi_{kn}^{(l)'}(z_k^{(l)}) = n(z_k^{(l)} - z_{k0}^{(l)})^{n-1} / (R_k^{(l)})^n; \quad (4.14)$$

$$R_k^{(l)} = \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k^{(l)} \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k^{(l)} \cos \varphi_l)}{2},$$

$$z_{k0}^{(l)} = x_{0l} + \mu_k^{(l)} y_{0l}. \quad (4.15)$$

Определение постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Постоянные, входящие в функции (3.25) и (4.11), будем определять из соответствующих граничных условий, которые запишем в следующей дифференциальной форме. На контурах контактов пластинки-матрицы с упругими включениями L_j ($j = \overline{1, \mathcal{L}}$) граничные условия в дифференциальной форме получаются из (2.104) и принимают вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[d_{ki} \delta_{k,s} \Phi_k'(t_k) + d_{ki}^{(l)} \delta_{k,s}^{(l)} \Phi_k^{(l)'}(t_k^{(l)}) \right] =$$

$$= -2 \operatorname{Re} \left[d_{5i} \delta_{5,s} \Phi_5'(t_5) + d_{5i}^{(l)} \delta_{5,s}^{(l)} \Phi_5^{(l)'}(t_5^{(l)}) \right] + \frac{df_i(t)}{ds} \quad (i = \overline{1, 8}), \quad (4.16)$$

где

$$\delta_{k,s} = dz_k/ds; \quad d_{k1} = 1, \quad d_{k2} = \mu_k, \quad d_{k3} = p_k, \quad d_{k4} = q_k,$$

$$d_{k5} = v_k, \quad d_{k6} = \rho_k, \quad d_{k7} = r_k^0, \quad d_{k8} = h_k^0;$$

$d_{ki}^{(l)}$ – соответствующие величины для включений $S^{(l)}$;

$$\frac{df_{ji}(t_{jm})}{ds} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad \frac{df_{j5}(t)}{ds} = -\frac{du^*}{ds},$$

$$\frac{df_{j6}(t)}{ds} = -\frac{dv^*}{ds}, \quad \frac{df_{j7}(t)}{ds} = -\frac{d\varphi^*}{ds}, \quad \frac{df_{j8}(t)}{ds} = -\frac{d\psi^*}{ds}.$$

Как и в задаче теплопроводности, выберем на контурах включений систему точек $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$ ($m = \overline{1, M_j}; j = \overline{1, \mathcal{L}}$), в которых удовлетворим соответству-

ющим граничным условиям. Система точек может отличаться либо совпадать с выбранной в задаче теплопроводности. Подставляя функции (3.26), (4.12) в граничные условия (4.16) в точках $M_{jm}(x_{jm}, y_{jm})$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{ki} \delta_{k,s} \varphi'_{kln}(t_{kjm}) a_{kln} + \sum_{n=1}^{\infty} d_{ki}^{(j)} \delta_{k,s}^{(j)} \varphi'_{kjn}(t_{kjm}^{(j)}) a_{kn}^{(j)} \right] = \\ & = -2\operatorname{Re} \left[\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} d_{5i} \delta_{5,s} r_5 F_5(t_{5jm}) + \sum_{n=1}^{\infty} d_{5i}^{(j)} \delta_{5,s}^{(j)} r_5^{(j)} F_5^{(j)}(t_{5jm}^{(j)}) \right] - \\ & - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 d_{ki} \delta_{k,s} N'_k(t_{kjm}) + \frac{df_{ji}(t_{jm})}{ds} \left(j = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_j}; i = \overline{1, 8} \right), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$t_{kjm} = x_{jm} + \mu_k y_{jm}, \quad t_{kjm}^{(j)} = x_{jm} + \mu_k^{(j)} y_{jm}. \quad (4.18)$$

Система (4.17) состоит из $8 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} M_l$ линейных алгебраических уравнений. Если в рядах (3.26), (4.12) оставлять по N_2 членов, то каждое уравнение будет содержать $16N_2\mathcal{L}$ вещественных неизвестных для определения комплексных постоянных a_{kln} , $a_{kn}^{(l)}$ ($k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = \overline{1, N_2}$).

После нахождения с применением сингулярного разложения [23, 127, 141, 142] псевдорешения системы (4.17) входящие в функции (3.26) и (4.12) постоянные, а, следовательно, и сами функции будут известны, что позволит вычислять основные характеристики ТЭМУС в пластинке-матрице и в упругих включениях, а в случае трещин или линейных включений – также КИНИН по формулам (3.32) [45].

4.2. Пластинка с периодической системой упругих включений

Постановка задачи. Рассмотрим анизотропную пластинку с периодическим рядом одинаковых и одинаково расположенных эллиптических упругих включений с контурами L_l ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (рис. 4.2) и с центрами на одной пря-

мой, которую примем за ось Ox декартовой системы координат Oxy . Обозначим полуоси эллипсов через a и b , аффиксы их центров – через lh_x , где h_x – расстояние между центрами соседних включений, а угол наклона полуоси эллипсов a к оси Ox – через φ . Будем предполагать, что в точках сая пластинки-матрицы с включения-

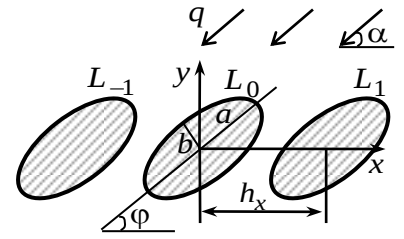


Рис. 4.2

ми имеет место идеальный тепловой и электромагнитоупругий контакты. На бесконечности действует линейный поток тепла плотности q , направленный под углом α к оси Ox , причем в силу периодичности $\operatorname{ctg} \alpha = k_{12}/k_{22}$ [5].

Вид комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы для пластинки-матрицы примут вид (3.44), (3.48).

Что же касается функций $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$, $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ ($k=\overline{1,4}$; $l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) для включений, то их построим на основе (4.3), (4.11), и исходя из того, что они определены и голоморфны в областях $S_k^{(l)}$, ограниченных эллипсами $L_k^{(l)}$, центры которых, как и в области S , имеют аффиксы lh_x . Из последнего следует, что функции $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$ и $\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)})$ можно разложить в ряды по полиномам Фабера для этих эллипсов, а следовательно, в ряды по степеням $z_5^{(l)} - lh_x$ и $z_k^{(l)} - lh_x$ соответственно, т.е. [36]

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{5n}^{(l)} \left(\frac{z_5^{(l)} - lh_x}{R_5^{(l)}} \right)^n, \quad \Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \left(\frac{z_k^{(l)} - lh_x}{R_k^{(l)}} \right)^n,$$

где $R_k^{(l)}$ – величины, вычисляемые по формулам (3.5), если в них постоянные μ_k заменить на $\mu_k^{(l)}$. Так как материалы всех включений одинаковы, то их уравнения для определения $\mu_k^{(l)}$ будут одинаковыми, тогда все $\mu_k^{(l)}$ для разных l будут равны друг другу и равны $\mu_k^{(0)}$ для основного включения. Кроме того, в силу периодичности основные характеристики ТНС во всех включениях будут одинаковыми,

а, значит, функции $F_5^{(l)}(z_5^{(l)})$ и $\Phi_k^{(l)'}(z_k^{(l)})$ будут одинаковыми для любых l , тогда $c_{5n}^{(l)}$ и $a_{kn}^{(l)}$ будут одинаковыми для любых l , т.е.

$$F_5^{(l)}(z_5^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{5n}^{(l)} \left(\frac{z_5^{(l)} - l h_x}{R_5^{(l)}} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{5n}^{(0)} \varphi_{5n}^{(0)}(z_5^{(0)}) = F_5^{(0)}(z_5^{(0)}),$$

$$F_5^{(0)'}(z_5^{(0)}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{5n}^{(0)} \varphi_{5n}^{(0)'}(z_5^{(0)}); \quad (4.19)$$

$$\Phi_k^{(l)}(z_k^{(l)}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(l)} \left(\frac{z_k^{(l)} - l h_x}{R_k^{(l)}} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{kn}^{(0)} \varphi_{kn}^{(0)}(z_k^{(0)}) = \Phi_k^{(0)}(z_k^{(0)}),$$

$$\Phi_k^{(0)'}(z_k^{(0)}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(0)} \varphi_{kn}^{(0)'}(z_k^{(0)}), \quad (4.20)$$

где

$$\varphi_{kn}^{(0)}(z_k^{(0)}) = \left(\frac{z_k^{(0)}}{R_k^{(0)}} \right)^n, \quad \varphi_{kn}^{(0)'}(z_k^{(0)}) = n \left(z_k^{(0)} \right)^{n-1} / \left(R_k^{(0)} \right)^n.$$

Исходя из указанного, приходим к выводу, что необходимо найти только функции $F_5^{(0)}(z_5^{(0)})$ и $\Phi_k^{(0)}(z_k^{(0)})$ для основного включения из граничных условий (4.6) и (4.16) на этом контуре. При этом в силу периодичности условия на контурах других включений удовлетворятся автоматически.

Определение неизвестных коэффициентов рядов. Для определения неизвестных постоянных c_{5n} , a_{kn} , $c_{5n}^{(0)}$, $a_{kn}^{(0)}$, входящих в функции (3.44), (3.48), (4.19), (4.20), на контуре основного включения выберем систему точек $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$ ($m = \overline{1, M_0}$), в которых удовлетворим условиям идеального теплового (4.6) и электромагнитоупругого (4.16) контактов. Подставляя функции (3.44), (4.19) в условия (4.6), а функции (3.48), (4.20) в (4.16), получаем

$$(2; 0)c_5 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (1; i \mathfrak{a}_T) \psi_{5n}(t_{50m}) c_{5n} - 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (1; i \mathfrak{a}_T^{(0)}) \varphi_{5n}^{(0)}(t_{50m}^{(0)}) c_{5n}^{(0)} =$$

$$= \left(-T^*; \int_0^s q_n(t) ds \right) (m = \overline{1, M_0}) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} & \left(d_{ki} \delta_{k,s} \psi'_{kn}(t_{k0m}) a_{kn} + d_{ki}^{(0)} \delta_{k,s}^{(0)} \phi_{k0n}^{(0)'}(t_{k0m}^{(0)}) a_{kn}^{(0)} \right) = \\ & = -2 \operatorname{Re} \left[d_{5i} \delta_{5,s} r_5 F_5(z_5) + d_{5i}^{(0)} \delta_{5,s}^{(0)} r_5^{(0)} F_5^{(0)}(z_5^{(0)}) \right] - \\ & - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 q_{ki} \delta_{k,s} (\Gamma_k + B_k \omega'_k(t_{k0m})) + \frac{df_{0i}(t_{0m})}{ds} \\ & (m = \overline{1, M_0}, i = \overline{1, 8}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $t_{k0m} = x_{0m} + \mu_k y_{0m}$, $t_{k0m}^{(0)} = x_{0m} + \mu_k^{(0)} y_{0m}$.

Система линейных алгебраических уравнений (4.21) состоит из $2M_0$ уравнений, а система (4.22) – из $4M_0$ уравнений для определения вещественной $c_{50}^{(0)}$ и комплексных c_{5n} , a_{kn} , $c_{5n}^{(0)}$, $a_{kn}^{(0)}$. Если в рядах (3.44), (3.48), (4.19), (4.20) оставлять по N членов, то каждое уравнение системы (4.21) будет содержать $4N + 1$ неизвестных, а каждое уравнение системы (4.22) – $8N$ неизвестных. После нахождения с применением сингулярного разложения псевдорешения вначале системы (4.21), а затем системы (4.22) искомые постоянные станут известными, и по известным функциям (3.44), (3.48), (4.19), (4.20) можно вычислять температуру, плотность потока тепла, напряжения в пластинке-матрице и во включениях, а в случае линейных включений – также КИНИН.

4.3. Исследования термоэлектромагнитоупругого состояния пластинки с включениями

Были проведены численные исследования ТЭМУС различных кусочно-однородных пластинок. При проведении расчетов количество членов в искомым рядах разложений функций и точек на контурах L_l , для которых составлялись линейные алгебраические уравнения (4.9), (4.17), (4.21), (4.22), увеличивались до

тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (разности между значениями соответствующих величин в смежных точках пластинки и включений не превышали 10^{-3}). Для такого удовлетворения граничным условиям, как показали численные исследования, необходимо было в указанных рядах оставлять от 5 до 90 членов, на каждом из контуров брать от 100 до 500 точек. Во всех исследованиях считалось, что теплофизические постоянные материалов включений связаны с соответствующими постоянными материала пластинки-матрицы соотношениями

$$\begin{aligned} k_{ij}^{(l)} &= \lambda_T^{(l)} k_{ij}, & s_{ij}^{(l)} &= \lambda_s^{(l)} s_{ij}, & g_{ij}^{(l)} &= \lambda_g^{(l)} g_{ij}, & p_{ij}^{(l)} &= \lambda_p^{(l)} p_{ij}, \\ \beta_{ij}^{(l)} &= \lambda_\beta^{(l)} \beta_{ij}, & v_{ij}^{(l)} &= \lambda_v^{(l)} v_{ij}, & \chi_{ij}^{(l)} &= \lambda_\chi^{(l)} \chi_{ij}, & \alpha_i^{(l)} &= \lambda_\alpha^{(l)} \alpha_i, \\ t_i^{\sigma(l)} &= \lambda_t^{(l)} t_i^\sigma, & m_i^{\sigma(l)} &= \lambda_m^{(l)} m_i^\sigma, \end{aligned} \quad (4.23)$$

в которых $\lambda_T^{(l)}$ – параметр относительной теплопроводности, $\lambda_s^{(l)}$ – параметр относительной деформируемости, $\lambda_g^{(l)}$ – параметр относительной пьезоэлектричности, $\lambda_p^{(l)}$ – параметр относительной пьезомагнитности, $\lambda_\beta^{(l)}$ – параметр относительной диэлектрической проницаемости, $\lambda_v^{(l)}$ – параметр относительной электромагнитной проницаемости, $\lambda_\chi^{(l)}$ – параметр относительной магнитной проницаемости, $\lambda_\alpha^{(l)}$ – параметр относительной тепловой расширяемости, $\lambda_t^{(l)}$ – параметр относительной пирозлектричности, $\lambda_m^{(l)}$ – параметр относительной пиромагнитности. Для выяснения влияния пьезосвойств материалов включений введен также параметр относительного пьезоэффекта $\lambda_{pe}^{(1)}$, и в этом случае принималось, что

$$\begin{aligned} \lambda_g^{(1)} &= \lambda_{pe}^{(1)}, & \lambda_p^{(1)} &= \lambda_{pe}^{(1)}, & \lambda_\beta^{(1)} &= 1/\lambda_{pe}^{(1)}, & \lambda_v^{(1)} &= 1/\lambda_{pe}^{(1)}, \\ \lambda_\chi^{(1)} &= 1/\lambda_{pe}^{(1)}, & \lambda_t^{(1)} &= \lambda_{pe}^{(1)}, & \lambda_m^{(1)} &= \lambda_{pe}^{(1)}. \end{aligned}$$

Ниже описаны некоторые из полученных результатов для бесконечной пластинки, причем, исходя из (2.56) поток направлен по оси Oy (под углом $\alpha = \pi/2$ к оси Ox). При этом значения всех величин даны с точностью до значения плотности

потока тепла q как множителя.

Пластинка с одним упругим включением. По вышеизложенному приближенному решению были проведены численные исследования ТЭМУС для пластинки с одним эллиптическим включением. Полученные результаты оказались одинаковыми с описанными при использовании точного решения, приведенного в п. 2.7, поэтому эти результаты здесь не описаны.

Пластинка с двумя упругими включениями. В табл. А.4.1 для пластинки с двумя одинаковыми круговыми включениями радиуса a_1

($b_1 = a_2 = b_2 = a_1$) (рис. 4.3) в зависимости от отношения c/a_1

расстояния c между контурами включений к радиусу включений и текущего относительного параметра $\lambda_{тек}$, приведены

значения нормальных напряжений σ_s в двух наиболее харак-

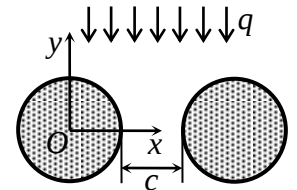


Рис. 4.3

терных точках пластинки на контуре левого отверстия, соответствующих значениям центрального угла θ ($\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/2$), отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. При этом $\lambda_g^{(1)} = \lambda_\beta^{(1)} = \lambda_v^{(1)} = \lambda_\chi^{(1)} = \lambda_t^{(1)} = \lambda_m^{(1)} = 1$, $\lambda_T^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = 2$, один из параметров $\lambda_s^{(1)}$ и $\lambda_p^{(1)}$ принимался в качестве изменяемого $\lambda_{тек}$, а другой принимался равным 2. Значения напряжений при $c/a_1 = \infty$ соответствуют случаю пластинки с одним включением. В табл. А. 4.2 приведены значения напряжений σ_s в пластинке в точках контура левого включения, когда $c/a_1 = 1$, параметры материала включений $\lambda_T^{(1)}$, $\lambda_s^{(1)}$, $\lambda_{pe}^{(1)}$, $\lambda_\alpha^{(1)}$ равны друг другу и равны λ ($\lambda_T^{(1)} = \lambda_s^{(1)} = \lambda_{pe}^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = \lambda$), для некоторых значений λ . На рис. Б. 4.1 для некоторых значений λ изображены графики распределения напряжений σ_s в пластинке по контуру левого включения в зависимости от угла θ .

Как видно из данных табл. А. 4.1, табл. А. 4.2, рис. Б. 4.1 и других полученных результатов, закономерности влияния расстояния между отверстиями распространяются также и на случай включений. При $c/a_1 > 10$ влияние одного включения на ТЭМУС около другого незначительно и им можно пренебречь. Ес-

ли включения обладают хорошим теплопроводными свойствами ($\lambda_T^{(1)} > 10^2$), то при сближении включений до расстояния между ними, равного радиусам включений, значения напряжений растут, а затем убывают; если же включения плохо проводят тепло ($\lambda_T^{(1)} < 10^{-2}$), то при сближении отверстий наблюдается постоянный рост значений этих величин. Как и в случае пластинки с одним включением, при $\lambda < 10^{-2}$ важное влияние на ТЭМУС в случае пластинки с двумя включениями играют упругие свойства, т.е. параметр относительной жесткости. Этот параметр опять же играет основную роль при предельном переходе к случаю пластинки с неподкрепленными отверстиями (при больших значениях параметра λ). При малых значениях λ роль пьезоэффекта значительна. При $\lambda < 10^{-2}$ значения напряжений получаются такими же, как и в пластинке с двумя жестко подкрепленными отверстиями (в постановке задачи ТУ); при $\lambda > 10^4$ достигается случай пластинки с неподкрепленными контурами отверстий (в постановке задачи ТЭМУ). Следовательно, закономерности влияния свойств материалов включений в пластинке с двумя включениями аналогичны таковым закономерностям для случая пластинки с одним включением.

Пластинка с периодическим рядом отверстий. Рассмотрим пластинку с конечным или бесконечным числом одинаковых отверстий с полуосями a и b , находящихся на оси Ox на одинаковом расстоянии c друг от друга (рис. 4.4). Решение задачи для бесконечного ряда включений получится из приведенного в п. 4.4, если принять $h_x = 2a + c$.

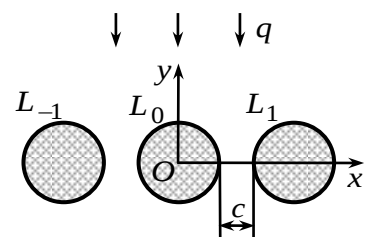


Рис. 4.4

Численные исследования были проведены для пластинки на основе материала М1. Как показали расчеты, наиболее выраженное влияние на значения основных характеристик ТЭМУС имеют значения параметров включений $\lambda_T^{(0)}$, $\lambda_s^{(0)}$, $\lambda_p^{(0)}$, $\lambda_\alpha^{(0)}$.

В табл. А.4.3 для пластинки из материала М1 с рядом круговых включений радиуса a ($b = a$) (рис. 4.4) в зависимости от значения отношения c/a , для случаев задач ТУ и ТЭМУ приведены значения нормальных напряжений σ_s в пластинке около включений на площадках, перпендикулярных контурам включений, в одних из наиболее характерных точек с центральными углами $\theta = \pi/4$, отсчитываемыми от положительного направления оси Ox против часовой стрелки. При этом для материала включения полагалось, что один из параметров $\lambda_T^{(0)}$, $\lambda_s^{(0)}$, $\lambda_p^{(0)}$, $\lambda_\alpha^{(0)}$ принимает значения из широкого диапазона, а остальные девять параметров, входящих в выражения (4.23), принимаются равными 2.

Из данных табл. А. 4.3 и других полученных результатов следует, что пренебрежение пьезоэффектом приводит к существенному искажению результатов. Параметр $\lambda_T^{(0)}$ существенно влияет на значения напряжений около контура включения. При плохих теплопроводных свойствах включений ($\lambda_T^{(0)} < 10^{-2}$) возрастает роль расстояния между включениями: при сближении включений напряжения неограниченно возрастают. Подкрепление отверстия жестким включением ($\lambda_s^{(0)} < 10^{-2}$) значительно уменьшает концентрацию напряжений при плотном расположении включений и, наоборот, увеличивает ее при значительном расстоянии между включениями. Увеличение значения параметра $\lambda_\alpha^{(0)}$ приводит к неограниченному росту значений напряжений; при малых же значениях влияние этого параметра незначительно. При $c/a > 10$ влиянием включений на ТЭМУС около друг друга можно пренебречь и решать задачу для случая одного включения.

4.4. Выводы к разделу 4

В данном разделе работы даны решения задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных кусочно-однородных пластинок с инородными включениями при действии линейного потока тепла. При этом даны разложения функций

в ряды по полиномам Фабера, с использованием обобщенного метода наименьших квадратов получены переопределенные системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов рядов, рассмотрен случай периодической задачи. Описаны результаты численных исследований ТЭМУС для пластинки с двумя включениями и бесконечным рядом включений с анализом результатов и с установлением закономерностей изменения ТЭМУС.

Выявлено влияние теплофизических параметров материалов включений, их количества, сочетания и месторасположения включений на значения основных характеристик ТЭМУС и КИНИН. Как и во втором разделе, показано, что наибольшее влияние на ТЭМУС в пластинке оказывают параметры относительной теплопроводности материалов включений $\lambda_T^{(l)}$, несколько меньшее влияние оказывают их параметры относительной деформируемости $\lambda_s^{(l)}$, относительного пьезоэффекта $\lambda_{pe}^{(l)}$. На ТЭМУС в пластинке с включениями существенное влияние оказывает и расстояние между включениями. Сближение упругих включений друг с другом приводит к росту концентрации напряжений в пластинке.

По результатам, представленным в разделе 4, опубликованы работы [46, 51, 52].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения диссертационной работы разработан метод решения задач термоэлектромагнитоупругости для многосвязных однородных и кусочно-однородных пьезопластинок при действии линейного потока тепла; решен ряд новых практически важных задач с установлением новых механических закономерностей. Основные результаты и выводы, представленные в работе, следующие.

Введены комплексные потенциалы, учитывающие действие линейного потока тепла, через них получены выражения основных характеристик ТЭМУС, найдены общие представления комплексных потенциалов для многосвязной пластинок и включений и вид граничных условий для определения этих функций.

С использованием методов конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера для комплексных потенциалов получены представления с неизвестными коэффициентами рядов, для определения которых впервые в задачах термоэлектромагнитоупругости использован обобщенный метод наименьших квадратов, обеспечивший наиболее высокую степень точности удовлетворения граничным условиям.

Исследованиями установлена сходимость приближенных решений и достоверность получаемых результатов.

Впервые решен ряд новых важных практических задач о действии линейного потока тепла на однородную и кусочно-однородную многосвязную пластинку. Исследованиями установлен ряд новых механических закономерностей влияния на значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН геометрических характеристик отверстий, трещин и включений, их количества, сочетания, взаимного расположения относительно друг друга, а также теплофизических свойств материалов пластинок и включений.

В частности, установлено, что при исследовании ТЭМУС пьезопластинок нельзя решать задачу теории термоупругости, пренебрегая электрическими и магнитными свойствами материалов, а следует решать общую задачу термоэлектромагнитоупругости. На значения основных характеристик ТЭМУС, плотности

внутренней энергии и КИНИН большое влияние оказывают значения постоянных материалов: чем больше пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули материала, а также жесткость материала, тем больше возникающие в них значения напряжений, индукций и напряженностей. При сближении отверстий, трещин и включений друг с другом значения основных характеристик ТЭМУС, плотности внутренней энергии и КИНИН для вершин трещин и линейных включений значительно изменяются.

Результаты представленных в диссертационной работе исследований имеют как теоретический, так и практический интерес. Предложенный метод может применяться при решении различных задач инженерной практики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович З.С. Деформирование намагниченного тела действием внешнего магнитного поля / З.С. Агранович, Н.И. Деревянко // Прикладная механика. – 1975. – Т. 10, № 11. – С. 3–8.
2. Амбарцумян С.А. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин / С.А. Амбарцумян, М.В. Белубекян. – Ереван: Изд-во ЕГУ, 1991. – 143 с.
3. Амбарцумян С.А. Некоторые нестационарные температурные задачи для ортотропной пластинки / С.А. Амбарцумян, С.М. Дургарьян // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 120–127.
4. Амбарцумян С.А. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле / С.А. Амбарцумян, Г.Е. Багдасарян. – М.: Наука, 1996. – 286 с.
5. Антонов Ю.С. Задачи термоупругости для анизотропных пластинок с отверстиями и трещинами: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Донецк, 2005. – 247 с.
6. Бабат Г.И. Индукционный нагрев металлов и его промышленное применение / Г.И. Бабат. – М. –Л.: Энергия, 1965. – 552 с.
7. Белов К.П. Магнитострикционные явления и их технические приложения / К.П. Белов. – М.: Наука, 1987. – 159 с.
8. Берлинкур Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
9. Бурак Я.Й. Термомеханика тел низкой электропроводности во внешних квазиустановившихся электромагнитных полях / Я.Й. Бурак, А.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецкий // ДАН СССР. Сер. А. – 1989. – № 7. – С. 38–41.
10. Бурак Я.Й. Термомеханіка багатокomпонентних тіл низької електропровідності / Я.Й. Бурак, А.Р. Гачкевич, Р.Ф. Терлецкий. – Львів: СПОЛОМ, 2006. – 300 с. (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл: В 4 т. Т. 1)
11. Бурак Я.Й. Термоупругость электропроводных магнитомягких тел во внешних установившихся электромагнитных полях / Я.Й. Бурак, А.Р. Гачкевич,

М.Т. Солодяк // ДАН УССР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 44–48.

12. Ватульян А.О. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 117–126.

13. Ватульян А.О. Новая формулировка граничных интегральных уравнений первого рода в электроупругости / А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, вып. 6. – С. 860–868.

14. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях в магнитоэлектроупругости / А.О. Ватульян, М.Ю. Коробейник // Докл. РАН. – 1996. – Т. 348, № 5. – С. 600–602.

15. Ватульян А.О. О некоторых закономерностях поведения решений в термоэлектроупругости / А.О. Ватульян // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский Регион. – 1999. – № 3. – С. 28–31.

16. Ватульян А.О. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости / А.О. Ватульян, А.Ю. Кирютенко, А.В. Наседкин // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 135–142.

17. Ватульян А.О. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел / А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. – 176 с.

18. Введение в теорию термопьезоэлектричества / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин, Н.А. Сеник и др. – М.: УРСС, 2005. – 312 с. (Математическое моделирование в задачах механики связанных полей, в 2 т. Т. 1)

19. Власов К.Б. Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных магнитострикционных сред / К.Б. Власов // Изв. АН СССР. Сер. Физ. – 1957. – Т. 21, № 8. – С. 1140–1148.

20. Власов К.Б. Уравнения состояния, определяющие магнитоупругие свойства ферромагнитных монокристаллов / К.Б. Власов // Журн. exper. и техн. физ. – 1960. – Т. 38, № 3. – С. 889–894.

21. Вовк Л.П. Інтенсивність динамічної концентрації напружень у задачах сталих коливань кусково-неоднорідних термопружних областей / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль

// Вісн. Сум. держ. ун-ту. Сер. Техн. науки. – 2010. – Т. 1, № 3. – С. 20–25.

22. Вовк Л.П. Розв'язання крайових задач термопружних областей з негладкою границею / Л.П. Вовк, К.С. Кисіль // Вісн. Терноп. держ. техн. ун-ту. – 2009. – Т. 14, № 4. – С. 176–180.

23. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

24. Гачкевич А.Р. К определению температурных и механических полей в электропроводных пластинах при воздействии внешнего электромагнитного поля / А.Р. Гачкевич, Р.С. Мусий // Мат. мет. и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 49–54.

25. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей / А.Р. Гачкевич. – К.: Наук. думка, 1992. – 192 с.

26. Глушанков Е.С. Действие линейного потока тепла в пластине из пьезоматериала / Е.С. Глушанков, С.А. Калоев // Донецкие чтения 2017: Русский мир как цивилизационная основа научно-образовательного и культурного развития Донбасса: Матер. междунар. науч. конф. студентов и молодых ученых, Донецк, 17–20 октября 2017 г. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2017. – Т. 1. – С. 21–22.

27. Глушанков Е.С. Периодическая задача термоэлектромагнитоупругости для пьезопластины с эллиптическими отверстиями или трещинами / Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 2. – С. 12–21.

28. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).

29. Гузь А.Н. Акустоэлектромагнитоупругость / А.Н. Гузь, Ф.Г. Махорт. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 3).

30. Желудев И.С. Физика кристаллических диэлектриков / И.С. Желудев. – М.: Наука, 1968. – 463 с.

31. Жермен П. Курс механики сплошных сред / П. Жермен. – М.: Высшая

шк., 1983. – 399 с.

32. Зоммерфельд А. Электродинамика / А. Зоммерфельд. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968. – 501 с.

33. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 220 с.

34. Калоеров С.А. Влияние значение пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости / С.А. Калоеров, А.А. Самодуров // Теорет. и прикладная механика. – 2013. – Т. 7 (53). – С. 118–130.

35. Калоеров С.А. Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела / С.А. Калоеров, А.И. Баева, Ю.А. Глущенко // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 1. – С. 84–91.

36. Калоеров С.А. Двумерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Концентрация напряжений / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская. – К.: А.С.К., 1998. – С. 10–26. (Механика композитов: В 12 т., Т. 7).

37. Калоеров С.А. Двумерное термоэлектронапряженное состояние многосвязного пьезоэлектрического тела / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: В 2-х т. – Львів: ВКП «ВМС», 2006. – Т. 2. – С. 53–55.

38. Калоеров С.А. Двумерные задачи термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 61–79.

39. Калоеров С.А. Двумерные задачи термоэлектроупругости и термомагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А. Природ. науки. – 2006. – Вып. 2. – С. 89–100.

40. Калоеров С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: Юго-Восток, 2007. – 270 с.

41. Калоеров С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.

42. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в многосвязной пьез-

опластинке, находящейся в условиях конвективного теплообмена / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Матер. III междунар. науч. конф., Донецк, 25 октября 2018 г. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – Т. 1. – С. 293–295.

43. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинах / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2017. – № 1. – С. 12–25.

44. Калоеров С.А. Действие линейного потока тепла в пьезопластинках с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 1. – С. 15–26.

45. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

46. Калоеров С.А. Определение термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных кусочно-однородных пьезопластин / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 88–101. Пер. на англ. яз.: Kaloerov S.A. Determining of the thermo-electromagneto-elastic state of multiply connected piecewise-homogenous piezoelectric plate / S.A. Kaloerov, E.S. Glushankov // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2018. – Vol. 59, No. 6. – P. 1036–1048.

47. Калоеров С.А. Плоская задача термоэлектромагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, О.А. Сорочан // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45., № 4. – С. 81–91.

48. Калоеров С.А. Потенциальные электромагнитные поля в пьезопластинах при механических, электромагнитных и тепловых воздействиях / С. А. Калоеров // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2016. – № 4. – С. 19–34.

49. Калоеров С.А. Представления комплексных потенциалов С.Г. Лехницкого в задачах термоупругости многосвязных анизотропных пластин / С.А. Калоеров, А.С. Космодамианский // Теорет. и прикладная механика. – 1977. –

Вып. 8. – С. 8–13.

50. Калоеров С.А. Приближенный метод определения электроупругого состояния слоя и полосы с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.А. Глущенко // Теорет. и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 115–126.

51. Калоеров С.А. Решение периодической задачи термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки при действии линейного потока тепла / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Современные проблемы механики сплошной среды: Тез. докл. XIX междунар. конф., Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г. – Ростов-на-Дону, 2018 – С. 63.

52. Калоеров С.А. Решение периодической задачи термоэлектромагнитоупругости для кусочно-однородной пластинки при действии линейного потока тепла / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XIX междунар. конф., Ростов-на-Дону, 15–18 октября 2018 г. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2018. – Т.1. – С. 134–138.

53. Калоеров С.А. Термонапряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 127–136.

54. Калоеров С.А. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами при действии линейного потока тепла и температуры на контурах / С.А. Калоеров, Ю.С. Антонов // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 102–116.

55. Калоеров С.А. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с упругими кольцами / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 155–168.

56. Калоеров С.А. Термоупругое состояние кусочно-однородной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, Д.А. Добряк // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природн. науки. – 2006. – Вип. 2. – С. 77–88.

57. Калоеров С.А. Термоэлектромагнитоупругое состояние многосвязной анизотропной полуплоскости / С.А. Калоеров, О.А. Добряк // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – № 1(47). – С. 45–61.

58. Калоеров С.А. Термoeлектроупругое состояние анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 124–133.
59. Калоеров С.А. Термoeлектроупругое состояние анизотропной плоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Прикл. пробл. мех. i мат. – 2006. – Вип. 4. – С. 75–83.
60. Калоеров С.А. Термoeлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 11. – С. 116–126.
61. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термоупругости / В.Г. Карнаухов. – К.: Наук. думка, 1982. – 260 с.
62. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М., 1964. – 487 с.
63. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К.: Наук. думка, 1983. – 280 с.
64. Коваленко А.Д. Развитие исследований в области термоупругости, термопластичности, термовязкоупругости / А.Д. Коваленко. // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, № 12. – С. 1–16.
65. Коваленко А.Д. Термоупругость / А.Д. Коваленко. – К.: Вища шк., 1975. – 216 с.
66. Колодий Б.И. Определение температурных полей и напряжений в полуме́ре цилиндра при индукционном нагреве / Б.И. Колодий // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 35–41.
67. Коляно Ю.М. Влияние подкрепляющего элемента на температурные напряжения в анизотропной пластинке с отверстием / Ю.М. Коляно // Концентрация напряжений. – 1971. – Вып. 3. – С. 67–78.
68. Космодамианский А.С. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин / А.С. Космодамианский, В.Н. Ложкин // Прикладная механика. – 1975. – Т. 11, № 5. – С. 45–53.
69. Космодамианский А.С. Обобщенное плоское напряженное состояние

тонких пьезоэлектрических пластин / А.С. Космодамианский, В.Н. Ложкин // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 10. – С. 75–79.

70. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоев. – К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

71. Кудрявцев Б.А. Магнитотермоупругость / Б.А. Кудрявцев, В.З. Партон// Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Механика деформ. твердого тела. – 1981. – Вып. 14. – С. 3–59.

72. Кудрявцев Б.А. Механика пьезоэлектрических материалов / Б.А. Кудрявцев // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика деформ. твердого тела. – М., 1978. – Т. 11. – С. 5–66.

73. Кушнир Р.М. Задача термоупругости для ортотропной цилиндрической оболочки с поперечной сквозной трещиной / Р.М. Кушнир, Т.М. Николишин, В.А. Осадчук // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С 109–113.

74. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.

75. Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 621 с.

76. Лебедев Н.Н. Температурные напряжения в теории упругости / Н.Н. Лебедев. – М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1937. – 110 с.

77. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

78. Лобода В.В. Межфазная трещина в пьезоэлектромагнитном биматериале под действием механической нагрузки, электрического и магнитного потоков / В.В. Лобода, Т.В. Ходанен // Вісн. Дніпропетров. ун-ту. Сер: Механіка. – 2007. – Вип. 11, т. 2 – С. 117–129.

79. Ломакин В.А. Плоская задача для упругих тел, свойства которых зависят от температуры / В.А. Ломакин, А.М. Эль-Карамани // Упругость и неупругость. – 1978. – Вып. 5. – С. 185–194.

80. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая шк.,

1967. – 599 с.

81. Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М.-Л.: Отд-ние науч.-техн. информации, 1935. – 674 с.

82. Майзель В.М. Температурная задача теории упругости / В.М. Майзель. – К.: Изд-во АН УССР, 1951. – 152 с.

83. Мелан Э. Температурные напряжения вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.

84. Метод функций Грина уравнения Лапласа в задачах термоупругости анизотропных тел / С.Д. Волков, В.Н. Гирс, Ю.В. Денисов и др. // Механика полимеров. – 1973. – № 5. – С. 823 – 829.

85. Можен Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен. – М.: Мир, 1991. – 560 с.

86. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. перераб. и доп. / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

87. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке / У. Мэзон. – М.: Изд-во иностр. лит, 1952. – 447 с.

88. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц / Дж. Най. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 388 с.

89. Наседкин А.В. Моделирование пьезоэлектрических преобразователей в ANSYS: учебное пособие / А.В. Наседкин. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2015. – 176 с.

90. Наседкин А.В. Моделирование эффективных модулей для различных типов пористых пьезокерамических материалов / А.В. Наседкин, М.С. Шевцова // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2013. – № 3–4 (72–73). – С. 16–26.

91. Наседкин А.В. О моделях наноразмерных пьезоэлектрических материалов со связанными поверхностными эффектами / А.В. Наседкин, В.А. Еремеев // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 4. – С. 375–384.

92. Новацкий В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.

93. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
94. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
95. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
96. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
97. Папкович П.Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции / П.Ф. Папкович // Изв. АН СССР. Отделение математических и естественных наук. – 1932. – № 10. – С. 1425–1435.
98. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.
99. Партон В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
100. Подильчук Ю.Н. Магнитоупругое поле в ферромагнетике со сферической полостью / Ю.Н. Подильчук, Л.М. Терещенко // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 3. – С. 71–80.
101. Подильчук Ю.Н. Напряженное состояние ферромагнетика с эллиптической трещиной при действии однородного магнитного поля / Ю.Н. Подильчук // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 2. – С. 78–88.
102. Подильчук Ю.Н. Представление общего решения уравнений статической термоэлектроупругости трансверсально-изотропного пьезокерамического тела через гармонические функции / Ю.Н. Подильчук, А.Х. Пассос Моргадо // Теорет. и прикладная механика. – 1999. – №. 29. – С. 42–51.
103. Подстригач Я. С. Температурные поля и напряжения при индукционном нагреве упругого слоя / Я.С. Подстригач, Б.И. Колодий // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – Вып. 10. – С. 208–214.
104. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. –

308 с.

105. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 312 с.

106. Подстригач Я.С. Термоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.Й. Бурак, А.Р. Гачкевич, Л.В. Чернявская. – К.: Наук. Думка, 1977. – 248 с.

107. Попович Б.И. Термоупругое состояние анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием при смешанных граничных условиях / Б.И. Попович, Д.В. Грилицкий // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 6. – С. 54–60.

108. Попович В.С. О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих термочувствительных тел / В.С. Попович // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1989. – Вып. 29. – С. 51–55.

109. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости / И.А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. – 198 с.

110. Прусов И.А. Термоупругие анизотропные пластинки / И.А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1978. – 200 с.

111. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

112. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.

113. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 560 с.

114. Соловьев А.Н. Идентификация повреждений в упругих структурах: подходы, методы, анализ / А.Н. Соловьев, В.А. Акопян, Е.В. Рожков и др. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2015. – 74 с.

115. Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

116. Терлецкий Я.П. Электродинамика / Я.П. Терлецкий, Ю.П. Рыбаков. – М.: Высшая шк., 1980. – 335 с.

117. Терлецький Р.Ф. Математичне моделювання термомеханічних процесів

в тілах низької електропровідності в зовнішньому квазістаціонарному електромагнітному полі / Р.Ф. Терлецький // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1992. – Вип. 36. – С. 34–38.

118. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Под ред. В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

119. Уздалев А.И. Концентрация температурных напряжений в ортотропной пластинке около теплоизолированного отверстия / А.И. Уздалев, А.А. Юрьева // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1971. – Вып. 3. – С. 172–176.

120. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела / А.И. Уздалев. – Саратов: Изд-во СГУ, 1967. – 167 с.

121. Уздалев А.И. Температурные напряжения в пластиках, ограниченных двухсвязным контуром / А.И. Уздалев. – Саратов: Изд-во СГУ, 1975. – 176 с.

122. Установки индукционного нагрева / А.Е. Слухоцкий, В.С. Немков, Н.А. Павлов и др. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 325 с.

123. Устинов Ю.А. Электроупругость. Некоторые вопросы математического моделирования / Ю.А. Устинов // Соросовский образ. журн. – 1996. – Вып. 9. – С. 122–127.

124. Фильштинский Л.А. Двумерные фундаментальные решения в связанной задаче термоупругости / Л.А. Фильштинский, Ю.В. Сиренко // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 157–161.

125. Фильштинский Л.А. Основные направления развития магнитоупругости / Л.А. Фильштинский, Е.М. Кравец // Вісн. Сум. держ. ун-ту. – 1998. – № 1(9). – С. 13–19.

126. Фильштинский Л.А. Плоская задача магнитоупругости для ферромагнитной среды, ослабленной отверстиями / Л.А. Фильштинский, Е.М. Кравец // Физ.-хим. механика матер. – 1995. – № 6. – С. 38–46.

127. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

128. Хорошев К.Г. Термоэлектроупругое состояние конечной анизотропной пластинки с отверстиями и трещинами / К.Г. Хорошев // Вісн. Донец. ун-та. Сер.

А. Природ. науки. – 2005. – № 2. – С. 67–72.

129. Царенко С.Н. Продольно-поперечный изгиб стержней переменной жесткости / Царенко С.Н. // Изв. вузов. Строительство. – 2016. – № 1 (685). – С. 5–13.

130. Царенко С.Н. Динамика изгибных колебаний предварительно нагруженных стержней с квадратичной неоднородностью изгибной жесткости / Царенко С.Н. // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2018. – № 2. – С. 54–61.

131. Шевченко В.П. Термоупругое состояние ортотропных оболочек, нагреваемых сосредоточенными источниками тепла / В.П. Шевченко, А.С. Гольцев // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, вып. 5. – С. 100–106.

132. Шиллер Н.Н. О втором законе термодинамики и об одной новой его формулировке / Н.Н. Шиллер. – К.: Тип. Ун-та Св. Владимира, 1898. – 12 с.

133. Шульга Н.А. Эффективные магнитоупругие свойства слоистых композитов / Н.А. Шульга // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 36–43.

134. Boussinesq J.V. Théorie analytique de la chaleur. / J.V. Boussinesq. – Paris: Gauthier-Villars. – 1901. – 334 p.

135. Brown W.F. Magnetoelastic Interactions / W.F. Brown. – New York: Springer-Verlag, 1966. – VIII+155 p.

136. Caratheodory C. Untersuchungen uber die Grundlagen der Thermodynamik / C. Caratheodory // Math. Ann. – 1909. – Vol. 67. – P. 355–386.

137. Chen W.Q. Point temperature solution for a penny-shaped crack in an infinite transversely isotropic thermo-piezo-elastic medium / W.Q. Chen, C.W. Lim, H.J. Ding // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2005. – Vol. 29. – P. 524–535.

138. Chen W.Q. Thermoelastic field of a transversely isotropic elastic medium containing a penny-shaped crack: exact fundamental solution / W.Q. Chen, H.J. Ding, D.S. Ling // Int. J. Sol. Struct. – 2004. – Vol. 41. № 1. – P. 69–83.

139. Chu L.J. The force density in polarizable and magnetizable fluids / L.J. Chu, H.A. Haus, P. Penfield // Proc. IEEE. – 1966. – Vol. 54, № 7. – P. 920–935.

140. Doyle J.F. Modern Experimental Stress Analysis. Completing the solution of partially specified problems / J.F. Doyle. – West Sussex: Wiley, 2004. – 425 p.

141. Drmač Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmač, K. Veselič // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1322–1342.
142. Drmač Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmač, K. Veselič // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, № 4. – P. 1343–1362.
143. Duhamel J.-M.-C. Mémoire sur les équations générales de la propagation de la chaleur dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens / J.-M.-C. Duhamel // J. Ec. Polyt. – 1832. – T. XIII. – P. 356–399.
144. Duhamel J.-M.-C. Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les cristaux / J.-M.-C. Duhamel // J. Ec. Polyt. – 1848. – T. XIX. – P. 155–188.
145. Duhamel J.-M.-C. Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides / J.-M.-C. Duhamel // Mem. Acad. Sci. Savants Etrang. – 1838. – № 5. – P. 440–498.
146. Dunn M.L. A theoretical framework for the analysis of thermoelectroelastic heterogeneous media with applications / M.L. Dunn // J. Intelligent Mater. Syst. Struct. – 1995. – Vol. 6, № 2. – P. 255–265.
147. El’Karamany A. S. Constitutive Laws, Uniqueness Theorem and Hamilton's Principle in Linear Micropolar Thermopiezoelectric/Piezomagnetic Continuum with Relaxation Time / A.S. El’Karamany // J. Thermal Stresses. – 2007. – Vol. 30. № 1. – P. 59–80.
148. Eringen A.C. Electrodynamics of continua / A.C. Eringen, G.A. Maugin. – New York: Springer-Verlag, 1990. – Vol. 2. – 363 p.
149. Eringen A.C. Mechanics of continuum / A.C. Eringen. – New York: Wiley, 1967. – 562 p.
150. Ersoy Y. A dynamic theory for polarizable and magnetizable magneto-electro thermoviscoelastic anisotropic solids possessing magnetic symmetry / Y. Ersoy // Z. angew. Math. und Mech. – 1978. – Vol. 58. – P. T207–T209.
151. Ersoy Y.A. Dynamical theory for polarizable and magnetizable magneto-electro thermoviscoelastic electrically and thermally conductive anisotropic solids having magnetic symmetry / Y.A. Ersoy, E. Kiral // Int. J. Eng. Sci. – 1978. – Vol. 16. – P. 483–492.

152. Fang Q.H. On the interaction between a generalized screw dislocation and circular-arc interfacial rigid lines in magnetoelectroelastic solids / Q.H. Fang, Y.W. Liu, C.P. Jiang // *Int. J. Eng. Sci.* – 2005. – Vol. 43. – P. 1011–1031.
153. Gao C.-F. An exact and explicit treatment of an elliptic hole problem in thermopiezoelectric media / C.-F. Gao, Y.-T. Zhao, M.-Z. Wang // *Int. J. Sol. Struct.* – 2002. – Vol. 39. – P. 2665–2685.
154. Gao C.F. Collinear permeable cracks in thermopiezoelectric materials / C.F. Gao, M.Z. Wang // *Mech. Mater.* – 2001. – Vol. 33. – P. 1–9.
155. Gao C.F. Crack problems in magnetoelectroelastic solids. Part I: Exact solution of a crack / C.F. Gao, H. Kessler, H. Balke // *Int. J. Eng. Sci.* – 2003. – Vol. 41. – P. 969–981.
156. Gao C.F. Crack problems in magnetoelectroelastic solids. Part II: General solution of collinear cracks / C.F. Gao, H. Kessler, H. Balke // *Int. J. Eng. Sci.* – 2003. – Vol. 41. – P. 983–994.
157. Griffith A.A. The phenomenon of rupture and flow in solids / A.A. Griffith // *Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A.* – 1920. – Vol. 221. – P. 163–198.
158. Guan Q. Two-dimensional analysis of piezoelectric/piezomagnetic and elastic media / Q. Guan, S.-R. He // *Composite Structures.* – 2005. – Vol. 69. – P. 229–237.
159. Hou P.F. Greens functions for transversely isotropic magnetoelectroelastic media / P.F. Hou, H.J. Ding, J.Y. Chen // *Int. J. Eng. Sci.* – 2005. – Vol. 43. – P. 826–858.
160. Hou P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // *Mech. Mater.* – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.
161. Hrennikoff A. Solution of problems of elasticity by the framework method / A. Hrennikoff // *J. Appl. Mech.* – 1941. – Vol. 8. – P. A169–A175.
162. Hutter K. Field-matter interaction in thermoelastic solids / K. Hutter, A. A. van de Ven. – *Lecture Notes in Physics.* – 88. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – 234 p.
163. Irwin G.R. Fracture / G.R. Irwin // *Handbuch der Physik.* – Berlin: Springer,

1958. – Vol. 6. – P. 551–590.

164. Kaliski. S. Wave equations of thermo-electromagnetoelasticity / S. Kaliski. // Proc. Vibr. Probl. Pol. Acad. Sci. – 1965. – Vol. 6, № 3. – P. 231–265.

165. Kirilyuk V.S. Equilibrium of a Transversally Isotropic Body with an Elliptic Crack under Thermal Action / V.S. Kirilyuk // Int. Applied Mechanics. – 2001. – Vol. 37, № 10. – P. 1304–1310.

166. Lamé G. Leçons sur la théorie analytique de la chaleur / G. Lamé. – Paris: Mallet-Bachelier. – 1861. – 413 p.

167. Liu J.X. Anisotropic thermopiezoelectric solids with an elliptic inclusion or a hole under uniform heat flow / J.X. Liu, X.S. Zhang, X.L. Liu, J. Zheng // Acta Mech. Sinica. – 2000. – Vol. 16 – P. 148–163.

168. Lu P. Piezothermoelastic analysis of a piezoelectric material with an elliptic cavity under uniform heat flow / P. Lu, M.J. Tan, K.M. Liew // Arch. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 68. – P. 719–733.

169. Maugin G. A. On the spin relaxation in deformable ferromagnetics / G.A. Maugin // Physika. – 1975. – A81. – P. 454–468.

170. Mindlin R.D. Equation of high frequency vibration of thermopiezoelectric crystal plates / R.D. Mindlin // Int. J. Solids and Struct. – 1974. – Vol. 10, № 6. – P. 625–637.

171. Nayfeh A. Electromagneto-thermoelastic plane waves in solids with thermal relaxation / A. Nayfeh, S. Nemat-Nasser // Pap. ASME. – 1971. – N. APMW-5. – 6 p.

172. Neumann F.E. Die Geetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimten oder ungleichformig erwarmten uncrystallinischen Korpern / F.E. Neumann // Abhandl. Konigl. Akad. Wissen. Berlin. – 1841. – № 2. – Teil. S. 1–254.

173. Niraula O.P. The analysis of thermal stresses in thermopiezoelastic semi-infinite body with an edge crack / O.P. Niraula, N. Noda // Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv). – 2002. – Vol. 72, № 2–3 – P. 119–126.

174. Niraula O.P. Thermal Stress Analysis in Magneto-Electro-Thermo-Elasticity with a Penny-Shaped Crack Under Uniform Heat Flow / O.P. Niraula, B.L. Wang // J. Therm. Stress. – 2006. – Vol. 26. № 5. – P. 423–437.

175. Noda N. General treatment of transient plane thermoelastic problems in multiply connected orthotropic bodies / N. Noda, Y. Takeuti // *Theor. And Appl. Mech.* 14th IUTAM Congr., Delt., Amsterdam E.a, 1976. – P. 75.
176. Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates / E. Pan // *J. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 68. – P. 608–618.
177. Pan E. Exact solutions for magneto-electro-elastic laminates in cylindrical bending / E. Pan, P. Heyliger // *Int. J. Sol. Struct.* – 2003. – Vol. 40. – P. 6859–6876.
178. Pao Y.H. Electrodynamics for moving elastic solids and viscous fluids / Y.H. Pao, K. Hutter // *Proc. IEEE.* – 1975. – Vol. 63, № 7. – P. 1011–1021.
179. Pao Y.H. Electromagnetic forces in deformable continua / Y.H. Pao // *Mechanics Today* / Ed. By S. Nemat-Nasser. – New York etc.: Pergamon press, 1978. – Vol. 1. – P. 209–305.
180. Paria G. Magneto-elasticity and magneto-thermoelasticity / G. Paria // *Adv. Appl. Mech.* – 1967. – Vol. 1, № 1. – P. 32–46.
181. Penfield P. Electrodynamics of moving media / P. Penfield, H.A. Haus. – Cambridge: MIT, 1967. – 215 p.
182. Podil'chuk Y.N. Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelectroelastic Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems / Y.N. Podil'chuk // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – Vol. 39, № 2. – P. 132–170.
183. Podil'chuk Y.N. The Stress State of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body with a Parabolic Crack in a Uniform Heat Flow / Y.N. Podil'chuk // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – Vol. 36, № 8. – P. 1037–1043.
184. Qin H.Q. 2D Green's functions of defective magnetoelectroelastic solids under thermal loading / H.Q. Qin // *Eng. Analys. Bound. Elem.* – 2005. – Vol. 29 – P. 577–585.
185. Qin Q.-H. A new solution for thermopiezoelectric solid with an insulated elliptic hole / Q.-H. Qin // *Acta Mech. Sinica.* – May 1998. – Vol. 14, № 2. – P. 157–170.
186. Qin H.Q. Fracture analysis of cracked thermopiezoelectric materials by BEM / H.Q. Qin // *Electr. J. Bound. Elem.* – 2003. – Vol. 1 – P. 283–301.

187. Qin H.Q. General solutions for thermopiezoelectrics with various holes under thermal loading / H.Q. Qin // *Int. J. Sol. Struct.* – 2000. – Vol. 37 – P. 5561–5578.
188. Qin H.Q. Green's function for thermopiezoelectric plates with holes of various shapes / H.Q. Qin // *Arch. Appl. Mech.* – 1999. – Vol. 69 – P. 406–418.
189. Qin H.Q. Some problems in plane thermopiezoelectric materials with holes / H.Q. Qin, Y.W. Mai, S.W. Yu // *Int. J. Sol. Struct.* – 1999. – Vol. 36 – P. 427–439.
190. Qin H.Q. Thermoelastoelectric Greens function for a piezoelectric plate containing an elliptic hole / H.Q. Qin // *Mech. Mater.* – 1998. – Vol. 30 – P. 21–29.
191. Qin H.Q. Thermopiezoelectric interaction of macro- and micro-cracks in piezoelectric medium / H.Q. Qin // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 1999. – Vol. 32 – P. 192–135.
192. Rogowski B. The temperaturowe naprezenia I przesmyczenia kompozytowych tarcz i pasm płytowych wywołane ogrzaniem brzozy / B. Rogowski // *Zesz. nauk. Płdż.* – 1978. – № 279. – S. 25–43.
193. Shang F. Analytical solutions for two penny-shaped crack problems in thermo-piezoelectric materials and their finite element comparisons / F. Shang, M. Kuna, M. Scherzer // *Int. J. Fract.* – 2002. – Vol. 117. № 2. – P. 113–118.
194. Shang F. Thermal stress around a penny-shaped crack in a thermopiezoelectric solid / F. Shang, M. Kuna // *Comput. Mater. Sc.* – 2004. – Vol. 26 – P. 197–201.
195. Stokes G.G. On the conduction of heat in crystals / G.G. Stokes // *Camb. And Dublin Math. J.* – 1851. – Vol. VI. – P. 215–238.
196. Sturla F.A. Thermal Stresses Due to a Plane Crack in General Anisotropic Material / F.A. Sturla, J.R. Barber // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1976. – Vol. 55, № 3. – P. 372–376.
197. Tauchert T.R. Stationary temperature and stresses fields in an anisotropic elastic slab / T.R. Tauchert, A.Y. Akoz // *Trans. ASME.* – 1975. – Vol. E42. – P. 647–650.
198. Tian W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelastoelectric solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // *Europ. J. Mech. Part A.* – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
199. Tiersten H.F. Coupled magnetomechanical equations for magnetically satu-

rated insulators / H.F. Tiersten // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5. – P. 1298–1318.

200. Tiersten H.F. Linear piezoelectric plate vibration / H.F. Tiersten. – New York: Premium Press, 1969. – 211 p.

201. Tiersten H.F. On the nonlinear equations of thermoelectroelasticity / H.F. Tiersten // Int. J. Sci. – 1971. – Vol. 9. – P. 587–603.

202. Tomita S. Rayleigh waves in magnetothermoelastic solids with thermal relaxation in the magnetic field / S. Tomita, Y. Shindo // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – Vol. 17., № 2. – P. 227–232.

203. Tomita S. Thermoelastic Rayleigh waves with thermal relaxation in the magnetic field / S. Tomita, Y. Shindo // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. – 1979. – Vol. 27., № 1. – P. 9–15.

204. Tsamasphyros G. Analysis of a Crack in a Finite Thermopiezoelectric Plate under Heat Flux / G. Tsamasphyros, Z.F. Song // Int. J. Fracture. – 2005. – Vol. 136, № 1–4. – P. 143–166.

205. Tsamasphyros G. The General Solution for a Finite Thermopiezoelectric Plate Containing a Hole and a Crack / G. Tsamasphyros, Z.F. Song // Arch. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 76, № 1–2 – P. 1–17.

206. Ueda S. T-Shaped Crack in a Piezoelectric Material Under Thermo-Electro-Mechanical Loadings / S. Ueda, H. Natano // J. Therm. Stress. – 2012. – Vol. 35, № 1–3. – P. 12–29.

207. Ueda S. Thermal stress intensity factors for two coplanar cracks in a piezoelectric strip / S. Ueda, Y. Tani // J. Therm. Stress. – 2008. – Vol. 31. – P. 403–415.

208. Ueda S. Thermoelectromechanical Interaction Between Two Parallel Cracks in a Piezoelectric Strip / S. Ueda, K. Ikawa // Journal of Therm. Stress. – 2008. – Vol. 31. – P. 311–330.

209. Voigt W. Lehrbuch der Kristall-Physik / W. Voigt. – Leipzig: Teubner, 1910. – 964 p.

210. Wang B.L. Design of a smart functionally graded thermopiezoelectric composite structure / B.L. Wang, N. Noda // Smart Mater. Struct. – 2001. – Vol. 10. – P. 189–193.

211. Wang B.L. Exact thermoelectroelasticity solution for a penny-shaped crack in piezoelectric materials / B.L. Wang, N. Noda // *J. Therm. Stress.* – 2004. – Vol. 27. № 3. – P. 241–251.

212. Wang X. The general solution of three-dimensional problems in magnetoelectroelastic media / X. Wang, Y. Shen // *Int. J. Eng. Sci.* – 2002. – Vol. 40. – P. 1069–1080.

213. Wang Y.-J. Thermoelectroelastic solution for edge cracks originating from an elliptical hole in a piezoelectric solid / Y.-J. Wang, C.-F. Gao. // *J. Therm. Stress.* – 2012. – Vol. 35. – P. 138–156.

214. Wooster W.A. Text-book on Crystal Physics / W.A. Wooster. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1949. – 295 p.

215. Zhang C. A new procedure for static analysis of thermo-electric laminated composite plates under cylindrical bending / C. Zhang, S. Di, N. Zhang // *Compos. Struct.* – 2002. – Vol. 56. – P. 131–140.

П Р И Л О Ж Е Н И Я

Приложение А. Таблицы

Таблица А. 2.1. Значения нормальных напряжений σ_s в точках контура конечной сплошной круговой пластинки (рис. 2.4) с жестко подкрепленным контуром на площадках, перпендикулярных контуру

θ , рад.	Материал		
	M1	M2	M3
$\pi/12$	-0,062	0,002	0,025
$\pi/6$	-0,145	0,005	0,050
$\pi/4$	-0,255	0,008	0,072
$\pi/3$	-0,373	0,012	0,090
$5\pi/12$	-0,465	0,015	0,101
$\pi/2$	-0,500	0,016	0,106

Таблица А. 2.2. Значения напряженностей $E_s \cdot 10^{-3}$, $H_s \cdot 10^{-3}$ в точках контура конечной сплошной круговой пластинки (рис. 2.4) на площадках, перпендикулярных контуру

Величина	θ , рад.	Материал					
		M1	M2	M3	M1	M2	M3
		Контур пластинки жестко подкреплен			Контур пластинки не подкреплен		
$E_s \cdot 10^{-3}$	$\pi/12$	-1,299	1,755	-0,342	-1,330	1,135	-0,401
	$\pi/6$	-2,250	3,040	-0,593	-2,304	1,966	-0,694
	$\pi/4$	-2,598	3,510	-0,685	-2,660	2,270	-0,802
	$\pi/3$	-2,250	3,040	-0,593	-2,304	1,966	-0,694
	$5\pi/12$	-1,299	1,755	-0,342	-1,330	1,134	-0,401
$H_s \cdot 10^{-3}$	$\pi/12$	-1,331	-0,008	-0,021	-1,330	-0,011	-0,034
	$\pi/6$	-2,306	-0,014	-0,037	-2,304	-0,019	-0,060
	$\pi/4$	-2,663	-0,016	-0,043	-2,660	-0,022	-0,069
	$\pi/3$	-2,306	-0,014	-0,037	-2,304	-0,019	-0,060
	$5\pi/12$	-1,331	-0,008	-0,021	-1,330	-0,011	-0,034

Таблица А. 2.3. Значения напряжений σ_s в точках контура неподкрепленного кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6), на котором задана температура, в зависимости от значения параметра λ_{pe} , когда он учитывается с использованием формул: формулы (2.121) (случай 1), формулы (2.122) (случай 2), формулы (2.123) (случай 3)

Материал	Случай	θ , рад	Значения λ_{pe}								
			0	10^{-2}	10^{-1}	0,5	1	2	10	10^2	10^4
М1	1	$\pi/12$	0,036	0,036	0,036	0,005	-0,188	-0,932	-1,787	-1,800	-1,800
		$\pi/6$	0,102	0,102	0,101	0,039	-0,357	-1,994	-4,143	-4,179	-4,179
		$\pi/4$	0,204	0,204	0,203	0,116	-0,448	-3,113	-7,675	-7,764	-7,764
		$\pi/3$	0,327	0,327	0,326	0,241	-0,330	-3,597	-12,968	-13,229	-13,229
		$5\pi/12$	0,433	0,433	0,433	0,393	0,120	-1,834	-18,937	-20,191	-20,192
		$\pi/2$	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476
	2	$\pi/12$	-0,172	-0,172	-0,172	-0,174	-0,188	-0,242	-0,306	*	*
		$\pi/6$	-0,326	-0,326	-0,326	-0,330	-0,357	-0,466	-0,613	*	*
		$\pi/4$	-0,405	-0,405	-0,405	-0,411	-0,448	-0,630	-0,953	*	*
		$\pi/3$	-0,279	-0,279	-0,279	-0,286	-0,330	-0,591	-1,387	*	*
		$5\pi/12$	0,149	0,149	0,149	0,145	0,120	-0,065	-1,890	*	*
		$\pi/2$	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	*	*
	3	$\pi/12$	0,018	0,018	0,018	-0,008	-0,188	-1,609	-70,710	*	*
		$\pi/6$	0,069	0,069	0,068	0,016	-0,357	-3,278	-125,083	*	*
		$\pi/4$	0,166	0,166	0,165	0,089	-0,448	-4,650	-157,078	*	*
		$\pi/3$	0,297	0,297	0,297	0,219	-0,330	-4,631	-169,901	*	*
		$5\pi/12$	0,422	0,422	0,422	0,385	0,120	-1,986	-159,526	*	*
		$\pi/2$	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	0,476	*	*
М3	1	$\pi/12$	-0,014	-0,014	-0,014	-0,018	-0,029	-0,039	-0,041	-0,041	-0,041
		$\pi/6$	-0,046	-0,046	-0,046	-0,052	-0,073	-0,088	-0,090	-0,090	-0,090
		$\pi/4$	-0,090	-0,090	-0,090	-0,095	-0,110	-0,122	-0,124	-0,124	-0,124
		$\pi/3$	-0,103	-0,103	-0,103	-0,106	-0,116	-0,130	-0,136	-0,136	-0,136
		$5\pi/12$	-0,097	-0,097	-0,097	-0,098	-0,101	-0,116	-0,138	-0,139	-0,139
		$\pi/2$	-0,094	-0,094	-0,094	-0,093	-0,091	-0,080	0,104	6,320	6419,084
	2	$\pi/12$	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	-0,029	*	*	*	*
		$\pi/6$	-0,080	-0,080	-0,079	-0,078	-0,073	*	*	*	*
		$\pi/4$	-0,114	-0,114	-0,114	-0,113	-0,110	*	*	*	*
		$\pi/3$	-0,113	-0,113	-0,113	-0,113	-0,116	*	*	*	*
		$5\pi/12$	-0,099	-0,099	-0,099	-0,099	-0,101	*	*	*	*
		$\pi/2$	-0,092	-0,092	-0,092	-0,092	-0,091	*	*	*	*
	3	$\pi/12$	-0,016	-0,016	-0,016	-0,018	-0,029	*	*	*	*
		$\pi/6$	-0,044	-0,044	-0,045	-0,049	-0,073	*	*	*	*
		$\pi/4$	-0,087	-0,087	-0,087	-0,091	-0,110	*	*	*	*
		$\pi/3$	-0,104	-0,104	-0,104	-0,106	-0,116	*	*	*	*
		$5\pi/12$	-0,097	-0,097	-0,097	-0,098	-0,101	*	*	*	*
		$\pi/2$	-0,093	-0,093	-0,093	-0,093	-0,091	*	*	*	*

Таблица А. 2.4. Значения напряжений σ_s в точках контура кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6) на площадках, перпендикулярных контуру

Материал	θ , рад	Тип задачи							
		ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
		Контур отверстия не подкреплён				Контур отверстия жестко подкреплён			
		На контуре отверстия задана нулевая температура							
M1	$\pi/12$	0,036	0,018	-0,172	-0,188	0,020	-0,009	-0,188	-0,216
	$\pi/6$	0,102	0,069	-0,326	-0,357	0,048	0,004	-0,381	-0,422
	$\pi/4$	0,204	0,166	-0,405	-0,448	0,076	0,036	-0,533	-0,578
	$\pi/3$	0,327	0,297	-0,279	-0,330	0,090	0,067	-0,515	-0,560
	$5\pi/12$	0,433	0,422	0,149	0,120	0,087	0,082	-0,196	-0,221
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,476	0,476	0,083	0,084	0,083	0,084
M2	$\pi/12$	-0,001	0,000	-0,006	-0,005	0,000	0,004	0,000	0,003
	$\pi/6$	-0,004	-0,001	-0,012	-0,009	-0,001	0,006	-0,003	0,001
	$\pi/4$	-0,008	-0,003	-0,014	-0,011	-0,001	0,003	-0,007	-0,005
	$\pi/3$	-0,012	-0,006	-0,014	-0,013	-0,002	-0,001	-0,010	-0,009
	$5\pi/12$	-0,014	-0,012	-0,015	-0,014	-0,003	-0,003	-0,007	-0,007
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,003	-0,003	-0,003	-0,003
M3	$\pi/12$	-0,014	-0,016	-0,031	-0,029	-0,050	-0,038	-0,032	-0,024
	$\pi/6$	-0,046	-0,044	-0,080	-0,073	-0,032	-0,033	-0,021	-0,019
	$\pi/4$	-0,090	-0,087	-0,114	-0,110	0,049	0,037	0,000	-0,003
	$\pi/3$	-0,103	-0,104	-0,113	-0,116	0,047	0,048	-0,007	-0,008
	$5\pi/12$	-0,097	-0,097	-0,099	-0,101	-0,005	-0,003	-0,021	-0,020
	$\pi/2$	-0,094	-0,093	-0,092	-0,091	-0,027	-0,027	-0,026	-0,025
		Контур отверстия теплоизолирован							
M1	$\pi/12$	-0,036	-0,018	0,172	0,188	-0,053	-0,045	0,155	0,160
	$\pi/6$	-0,102	-0,069	0,326	0,357	-0,155	-0,134	0,272	0,291
	$\pi/4$	-0,204	-0,166	0,405	0,448	-0,332	-0,295	0,277	0,319
	$\pi/3$	-0,327	-0,297	0,279	0,330	-0,563	-0,527	0,043	0,101
	$5\pi/12$	-0,433	-0,422	-0,149	-0,120	-0,779	-0,763	-0,494	-0,460
	$\pi/2$	-0,476	-0,476	-0,476	-0,476	-0,869	-0,869	-0,869	-0,869
M2	$\pi/12$	0,001	0,000	0,006	0,005	0,002	0,005	0,012	0,012
	$\pi/6$	0,004	0,001	0,012	0,009	0,008	0,008	0,021	0,018
	$\pi/4$	0,008	0,003	0,014	0,011	0,015	0,009	0,021	0,017
	$\pi/3$	0,012	0,006	0,014	0,013	0,022	0,012	0,019	0,017
	$5\pi/12$	0,014	0,012	0,015	0,014	0,026	0,021	0,022	0,021
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,015	0,015	0,027	0,027	0,027	0,027
M3	$\pi/12$	0,015	0,018	0,035	0,033	-0,028	-0,009	0,025	0,033
	$\pi/6$	0,051	0,050	0,089	0,081	0,052	0,052	0,136	0,125
	$\pi/4$	0,101	0,097	0,127	0,123	0,235	0,214	0,237	0,224
	$\pi/3$	0,116	0,116	0,126	0,129	0,271	0,273	0,236	0,239
	$5\pi/12$	0,109	0,109	0,111	0,113	0,210	0,213	0,199	0,204
	$\pi/2$	0,105	0,104	0,103	0,101	0,181	0,181	0,182	0,182

Таблица А. 2.5. Значения индукций $D_s \cdot 10^{-5}$ в точках контура кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6) на площадках, перпендикулярных контуру

Материал	θ , рад	Тип задачи			
		ТЭУ	ТЭМУ	ТЭУ	ТЭМУ
		Контур отверстия не подкреплён		Контур отверстия жестко подкреплён	
		На контуре отверстия нулевая температура			
M1	$\pi/12$	-1,110	-0,979	-1,736	-1,604
	$\pi/6$	-2,151	-1,985	-2,838	-2,671
	$\pi/4$	-2,896	-3,336	-2,973	-3,415
	$\pi/3$	-2,947	-5,158	-2,264	-4,475
	$5\pi/12$	-1,934	-5,311	-1,151	-4,524
M2	$\pi/12$	0,011	0,017	0,041	0,039
	$\pi/6$	0,018	0,044	0,038	0,052
	$\pi/4$	0,023	0,063	0,019	0,057
	$\pi/3$	0,026	0,064	0,005	0,054
	$5\pi/12$	0,021	0,042	-0,001	0,036
M3	$\pi/12$	-0,056	0,086	0,311	0,269
	$\pi/6$	0,065	0,299	-0,028	0,098
	$\pi/4$	0,181	0,241	-0,501	-0,085
	$\pi/3$	-0,066	-0,190	0,205	0,018
	$5\pi/12$	-0,165	-0,393	0,523	0,063
		Контур отверстия теплоизолирован			
M1	$\pi/12$	1,110	0,979	0,484	0,353
	$\pi/6$	2,151	1,985	1,465	1,298
	$\pi/4$	2,896	3,336	2,820	3,258
	$\pi/3$	2,947	5,158	3,631	5,842
	$5\pi/12$	1,934	5,311	2,718	6,099
M2	$\pi/12$	-0,011	-0,017	0,020	0,005
	$\pi/6$	-0,018	-0,044	0,003	-0,035
	$\pi/4$	-0,023	-0,063	-0,027	-0,069
	$\pi/3$	-0,026	-0,064	-0,047	-0,075
	$5\pi/12$	-0,021	-0,042	-0,044	-0,048
M3	$\pi/12$	0,063	-0,096	0,537	0,243
	$\pi/6$	-0,072	-0,334	-0,038	-0,353
	$\pi/4$	-0,203	-0,269	-0,903	-0,572
	$\pi/3$	0,074	0,213	0,221	0,246
	$5\pi/12$	0,184	0,439	0,795	0,681

Таблица А. 2.6. Значения напряженностей $E_s \cdot 10^{-3}$ в точках контура кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6) на площадках, перпендикулярных контуру

Материал	θ , рад.	Тип задачи			
		ТЭУ	ТЭМУ	ТЭУ	ТЭМУ
		Контур отверстия не подкреплён		Контур отверстия жестко подкреплён	
		На контуре отверстия нулевая температура			
M1	$\pi/12$	-1,330	-1,330	1,191	1,191
	$\pi/6$	-2,304	-2,304	2,062	2,062
	$\pi/4$	-2,660	-2,660	2,381	2,381
	$\pi/3$	-2,304	-2,304	2,062	2,062
	$5\pi/12$	-1,330	-1,330	1,191	1,191
M2	$\pi/12$	1,135	1,135	-1,371	-0,903
	$\pi/6$	1,966	1,966	-2,375	-1,564
	$\pi/4$	2,270	2,270	-2,743	-1,806
	$\pi/3$	1,966	1,966	-2,375	-1,564
	$5\pi/12$	1,135	1,135	-1,371	-0,903
M3	$\pi/12$	-0,377	-0,386	-1,936	-1,932
	$\pi/6$	-0,653	-0,669	-3,352	-3,346
	$\pi/4$	-0,754	-0,773	-3,871	-3,864
	$\pi/3$	-0,653	-0,669	-3,352	-3,346
	$5\pi/12$	-0,377	-0,386	-1,936	-1,932
		Контур отверстия теплоизолирован			
M1	$\pi/12$	-1,330	-1,330	1,191	1,191
	$\pi/6$	-2,304	-2,304	2,062	2,062
	$\pi/4$	-2,660	-2,660	2,381	2,381
	$\pi/3$	-2,304	-2,304	2,062	2,062
	$5\pi/12$	-1,330	-1,330	1,191	1,191
M2	$\pi/12$	1,135	1,135	-1,371	-0,903
	$\pi/6$	1,966	1,966	-2,375	-1,564
	$\pi/4$	2,270	2,270	-2,743	-1,806
	$\pi/3$	1,966	1,966	-2,375	-1,564
	$5\pi/12$	1,135	1,135	-1,371	-0,903
M3	$\pi/12$	-0,427	-0,417	-1,996	-1,994
	$\pi/6$	-0,740	-0,722	-3,457	-3,453
	$\pi/4$	-0,855	-0,834	-3,992	-3,988
	$\pi/3$	-0,740	-0,722	-3,457	-3,453
	$5\pi/12$	-0,427	-0,417	-1,996	-1,994

Таблица А. 2.7. Значения индукций $B_s \cdot 10^{-1}$ в точках контура кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6) на площадках, перпендикулярных контуру

Материал	θ , рад	Тип задачи			
		ТМУ	ТЭМУ	ТМУ	ТЭМУ
		Контур отверстия не подкреплён		Контур отверстия жестко подкреплён	
		На контуре отверстия нулевая температура			
M1	$\pi/12$	-1,1736	-1,1735	-1,1757	-1,1757
	$\pi/6$	-2,3577	-2,3577	-2,3608	-2,3607
	$\pi/4$	-3,4848	-3,4848	-3,4862	-3,4863
	$\pi/3$	-4,1951	-4,1959	-4,1923	-4,1931
	$5\pi/12$	-3,3936	-3,3957	-3,3881	-3,3901
M2	$\pi/12$	-0,0014	-0,0016	0,0000	-0,0004
	$\pi/6$	-0,0016	-0,0024	-0,0005	-0,0016
	$\pi/4$	-0,0010	-0,0028	-0,0011	-0,0028
	$\pi/3$	-0,0005	-0,0026	-0,0015	-0,0033
	$5\pi/12$	-0,0001	-0,0016	-0,0015	-0,0028
M3	$\pi/12$	-0,0039	-0,0039	0,0030	0,0028
	$\pi/6$	-0,0045	-0,0045	0,0011	0,0009
	$\pi/4$	-0,0025	-0,0025	-0,0045	-0,0045
	$\pi/3$	-0,0017	-0,0018	-0,0069	-0,0070
	$5\pi/12$	-0,0012	-0,0018	-0,0049	-0,0049
		Контур отверстия теплоизолирован			
M1	$\pi/12$	1,1736	1,1735	1,1714	1,1714
	$\pi/6$	2,3577	2,3577	2,3547	2,3546
	$\pi/4$	3,4848	3,4848	3,4833	3,4833
	$\pi/3$	4,1951	4,1959	4,1979	4,1987
	$5\pi/12$	3,3936	3,3957	3,3991	3,4013
M2	$\pi/12$	0,0014	0,0016	0,0029	0,0028
	$\pi/6$	0,0016	0,0024	0,0026	0,0032
	$\pi/4$	0,0010	0,0028	0,0009	0,0028
	$\pi/3$	0,0005	0,0026	-0,0005	0,0018
	$5\pi/12$	0,0001	0,0016	-0,0013	0,0003
M3	$\pi/12$	0,0044	0,0044	0,0118	0,0115
	$\pi/6$	0,0050	0,0051	0,0112	0,0113
	$\pi/4$	0,0028	0,0028	0,0011	0,0010
	$\pi/3$	0,0019	0,0020	-0,0040	-0,0040
	$5\pi/12$	0,0013	0,0020	-0,0031	-0,0021

Таблица А. 2.8. Значения напряженностей $H_s \cdot 10^{-3}$ в точках контура кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6) на площадках, перпендикулярных контуру

Материал	θ , рад	Тип задачи			
		ТМУ	ТЭМУ	ТМУ	ТЭМУ
		Контур отверстия не подкреплён		Контур отверстия жестко подкреплён	
		На контуре отверстия нулевая температура			
M1	$\pi/12$	-1,330	-1,330	-1,328	-1,328
	$\pi/6$	-2,304	-2,304	-2,300	-2,300
	$\pi/4$	-2,660	-2,660	-2,656	-2,656
	$\pi/3$	-2,304	-2,304	-2,300	-2,300
	$5\pi/12$	-1,330	-1,330	-1,328	-1,328
M2	$\pi/12$	-0,011	-0,011	-0,017	-0,016
	$\pi/6$	-0,019	-0,019	-0,030	-0,029
	$\pi/4$	-0,022	-0,022	-0,034	-0,033
	$\pi/3$	-0,019	-0,019	-0,030	-0,029
	$5\pi/12$	-0,011	-0,011	-0,017	-0,016
M3	$\pi/12$	-0,032	-0,032	-0,062	-0,062
	$\pi/6$	-0,056	-0,056	-0,108	-0,107
	$\pi/4$	-0,065	-0,065	-0,125	-0,124
	$\pi/3$	-0,056	-0,056	-0,108	-0,107
	$5\pi/12$	-0,032	-0,032	-0,062	-0,062
		Контур отверстия теплоизолирован			
M1	$\pi/12$	-1,330	-1,330	-1,328	-1,328
	$\pi/6$	-2,304	-2,304	-2,300	-2,300
	$\pi/4$	-2,660	-2,660	-2,656	-2,656
	$\pi/3$	-2,304	-2,304	-2,300	-2,300
	$5\pi/12$	-1,330	-1,330	-1,328	-1,328
M2	$\pi/12$	-0,011	-0,011	-0,017	-0,016
	$\pi/6$	-0,019	-0,019	-0,030	-0,029
	$\pi/4$	-0,022	-0,022	-0,034	-0,033
	$\pi/3$	-0,019	-0,019	-0,030	-0,029
	$5\pi/12$	-0,011	-0,011	-0,017	-0,016
M3	$\pi/12$	-0,037	-0,037	-0,067	-0,066
	$\pi/6$	-0,064	-0,063	-0,116	-0,115
	$\pi/4$	-0,073	-0,073	-0,134	-0,133
	$\pi/3$	-0,064	-0,063	-0,116	-0,115
	$5\pi/12$	-0,037	-0,037	-0,067	-0,066

Таблица А. 2.9. Значения внутренней энергии U в точках контура кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6)

Материал	θ , рад	Тип задачи							
		ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
		Контур отверстия не подкреплён				Контур отверстия жестко подкреплён			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
На контуре отверстия задана нулевая температура									
М1	$-\pi/2$	-1,19E-3	-1,19E-3	-1,19E-3	-1,19E-3	-3,55E-4	-3,59E-4	-3,55E-4	-3,59E-4
	$-5\pi/12$	-1,03E-3	-9,82E-4	3,42E-1	3,43E-1	-4,80E-4	-4,54E-4	3,42E-1	3,43E-1
	$-\pi/3$	-6,60E-4	-5,43E-4	8,19E-1	8,19E-1	-7,34E-4	-6,39E-4	8,18E-1	8,19E-1
	$-\pi/4$	-3,14E-4	-1,76E-4	9,62E-1	9,62E-1	-8,93E-4	-7,42E-4	9,62E-1	9,62E-1
	$-\pi/6$	-1,08E-4	-5,10E-7	7,97E-1	7,97E-1	-8,14E-4	-6,65E-4	7,97E-1	7,97E-1
	$-\pi/12$	-2,59E-5	2,90E-5	4,42E-1	4,42E-1	-4,85E-4	-3,96E-4	4,43E-1	4,43E-1
	0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	6,42E-7	6,54E-7	6,42E-7	6,55E-7
	$\pi/12$	2,59E-5	-2,90E-5	-4,42E-1	-4,42E-1	4,87E-4	3,97E-4	-4,42E-1	-4,42E-1
	$\pi/6$	1,08E-4	6,10E-7	-7,96E-1	-7,96E-1	8,15E-4	6,66E-4	-7,97E-1	-7,97E-1
	$\pi/4$	3,14E-4	1,76E-4	-9,61E-1	-9,61E-1	8,94E-4	7,44E-4	-9,61E-1	-9,61E-1
	$\pi/3$	6,61E-4	5,44E-4	-8,18E-1	-8,18E-1	7,35E-4	6,40E-4	-8,17E-1	-8,18E-1
	$5\pi/12$	1,03E-3	9,83E-4	-3,42E-1	-3,42E-1	4,80E-4	4,54E-4	-3,42E-1	-3,42E-1
	$\pi/2$	1,19E-3	1,19E-3	1,19E-3	1,19E-3	3,56E-4	3,59E-4	3,56E-4	3,59E-4
	$-\pi/2$	-1,32E-5	-1,32E-5	-1,32E-5	-1,32E-5	-4,47E-6	-4,29E-6	-4,34E-6	-4,23E-6
М2	$-5\pi/12$	-1,18E-5	-9,05E-6	-1,18E-5	-5,95E-6	-5,56E-6	-5,17E-6	-4,40E-6	7,43E-7
	$-\pi/3$	-8,24E-6	-2,96E-6	-7,29E-6	9,54E-6	-8,19E-6	-5,86E-6	-3,52E-6	1,10E-5
	$-\pi/4$	-4,22E-6	3,74E-7	7,37E-7	2,20E-5	-1,05E-5	-4,84E-6	-2,40E-6	1,75E-5
	$-\pi/6$	-1,47E-6	1,44E-6	1,15E-5	2,55E-5	-1,03E-5	-2,19E-6	-3,37E-6	1,46E-5
	$-\pi/12$	-3,27E-7	1,13E-6	1,47E-5	1,83E-5	-6,42E-6	2,92E-7	-5,36E-6	4,30E-6
	0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	2,56E-9	2,35E-9	2,41E-9	2,29E-9
	$\pi/12$	3,27E-7	-1,13E-6	-1,47E-5	-1,83E-5	6,42E-6	-2,88E-7	5,37E-6	-4,30E-6
	$\pi/6$	1,47E-6	-1,44E-6	-1,15E-5	-2,55E-5	1,03E-5	2,19E-6	3,38E-6	-1,46E-5
	$\pi/4$	4,22E-6	-3,73E-7	-7,33E-7	-2,20E-5	1,05E-5	4,84E-6	2,41E-6	-1,75E-5
	$\pi/3$	8,24E-6	2,96E-6	7,29E-6	-9,54E-6	8,19E-6	5,86E-6	3,52E-6	-1,10E-5
	$5\pi/12$	1,18E-5	9,06E-6	1,18E-5	5,96E-6	5,56E-6	5,17E-6	4,40E-6	-7,36E-7
	$\pi/2$	1,32E-5	1,32E-5	1,32E-5	1,32E-5	4,48E-6	4,29E-6	4,35E-6	4,23E-6
	$-\pi/2$	-4,34E-5	-4,31E-5	-4,25E-5	-4,19E-5	-2,35E-5	-2,31E-5	-2,22E-5	-2,20E-5
	$-5\pi/12$	-4,26E-5	-4,23E-5	-4,15E-5	-4,06E-5	-2,10E-5	-2,10E-5	-1,81E-5	-1,79E-5
	$-\pi/3$	-3,83E-5	-3,83E-5	-3,68E-5	-3,67E-5	-2,04E-5	-2,02E-5	-1,30E-5	-1,29E-5
М3	$-\pi/4$	-2,51E-5	-2,51E-5	-2,09E-5	-2,11E-5	-4,00E-5	-4,03E-5	-2,55E-5	-2,55E-5
	$-\pi/6$	-8,52E-6	-8,73E-6	8,50E-6	8,43E-6	-5,99E-5	-5,93E-5	-5,52E-5	-5,44E-5
	$-\pi/12$	-1,66E-6	-1,59E-6	1,93E-5	1,89E-5	-3,99E-5	-4,03E-5	-5,06E-5	-4,99E-5
	0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	5,01E-8	4,85E-8	4,51E-8	4,41E-8
	$\pi/12$	1,66E-6	1,59E-6	-1,93E-5	-1,89E-5	4,01E-5	4,05E-5	5,07E-5	5,00E-5
	$\pi/6$	8,53E-6	8,74E-6	-8,45E-6	-8,39E-6	6,02E-5	5,96E-5	5,54E-5	5,46E-5
	$\pi/4$	2,51E-5	2,51E-5	2,09E-5	2,12E-5	4,02E-5	4,06E-5	2,57E-5	2,57E-5
	$\pi/3$	3,84E-5	3,84E-5	3,69E-5	3,68E-5	2,05E-5	2,03E-5	1,32E-5	1,31E-5
	$5\pi/12$	4,27E-5	4,24E-5	4,15E-5	4,07E-5	2,11E-5	2,11E-5	1,82E-5	1,80E-5
	$\pi/2$	4,35E-5	4,32E-5	4,26E-5	4,20E-5	2,36E-5	2,32E-5	2,23E-5	2,21E-5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
			Контур отверстия теплоизолирован							
M1	$-\pi/2$	-2,43E+0	-2,43E+0	-2,43E+0	-2,43E+0	-2,43E+0	-2,43E+0	-2,43E+0	-2,43E+0	
	$-5\pi/12$	-2,35E+0	-2,35E+0	-2,69E+0	-2,69E+0	-2,35E+0	-2,35E+0	-2,69E+0	-2,69E+0	
	$-\pi/3$	-2,11E+0	-2,11E+0	-2,93E+0	-2,93E+0	-2,11E+0	-2,11E+0	-2,93E+0	-2,93E+0	
	$-\pi/4$	-1,72E+0	-1,72E+0	-2,68E+0	-2,68E+0	-1,72E+0	-1,72E+0	-2,68E+0	-2,68E+0	
	$-\pi/6$	-1,22E+0	-1,22E+0	-2,01E+0	-2,01E+0	-1,22E+0	-1,22E+0	-2,01E+0	-2,01E+0	
	$-\pi/12$	-6,30E-1	-6,30E-1	-1,07E+0	-1,07E+0	-6,31E-1	-6,31E-1	-1,07E+0	-1,07E+0	
	0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	6,42E-7	6,54E-7	6,42E-7	6,55E-7	
	$\pi/12$	6,31E-1	6,31E-1	1,07E+0	1,07E+0	6,31E-1	6,31E-1	1,07E+0	1,07E+0	
	$\pi/6$	1,22E+0	1,22E+0	2,02E+0	2,02E+0	1,22E+0	1,22E+0	2,02E+0	2,02E+0	
	$\pi/4$	1,72E+0	1,72E+0	2,69E+0	2,69E+0	1,72E+0	1,73E+0	2,69E+0	2,02E+0	
	$\pi/3$	2,11E+0	2,11E+0	2,93E+0	2,93E+0	2,11E+0	2,11E+0	2,93E+0	2,93E+0	
	$5\pi/12$	2,36E+0	2,36E+0	2,70E+0	2,70E+0	2,36E+0	2,36E+0	2,70E+0	2,70E+0	
	$\pi/2$	2,44E+0	2,44E+0	2,44E+0	2,44E+0	2,44E+0	2,44E+0	2,44E+0	2,44E+0	
M2	$-\pi/2$	-5,98E-1	-5,98E-1	-5,98E-1	-5,98E-1	-5,98E-1	-5,98E-1	-5,98E-1	-5,98E-1	
	$-5\pi/12$	-5,78E-1	-5,78E-1	-5,78E-1	-5,78E-1	-5,78E-1	-5,78E-1	-5,78E-1	-5,78E-1	
	$-\pi/3$	-5,18E-1	-5,18E-1	-5,18E-1	-5,18E-1	-5,18E-1	-5,18E-1	-5,18E-1	-5,18E-1	
	$-\pi/4$	-4,23E-1	-4,23E-1	-4,23E-1	-4,23E-1	-4,23E-1	-4,23E-1	-4,23E-1	-4,23E-1	
	$-\pi/6$	-2,99E-1	-2,99E-1	-2,99E-1	-2,99E-1	-2,99E-1	-2,99E-1	-2,99E-1	-2,99E-1	
	$-\pi/12$	-1,55E-1	-1,55E-1	-1,55E-1	-1,55E-1	-1,55E-1	-1,55E-1	-1,55E-1	-1,55E-1	
	0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	2,56E-9	2,35E-9	2,41E-9	2,29E-9	
	$\pi/12$	1,55E-1	1,55E-1	1,55E-1	1,55E-1	1,55E-1	1,55E-1	1,55E-1	1,55E-1	
	$\pi/6$	2,99E-1	2,99E-1	2,99E-1	2,99E-1	2,99E-1	2,99E-1	2,99E-1	2,99E-1	
	$\pi/4$	4,23E-1	4,23E-1	4,23E-1	4,23E-1	4,23E-1	4,23E-1	4,23E-1	4,23E-1	
	$\pi/3$	5,19E-1	5,19E-1	5,19E-1	5,19E-1	5,19E-1	5,19E-1	5,19E-1	5,19E-1	
	$5\pi/12$	5,78E-1	5,78E-1	5,78E-1	5,78E-1	5,78E-1	5,78E-1	5,78E-1	5,78E-1	
	$\pi/2$	5,99E-1	5,99E-1	5,99E-1	5,99E-1	5,99E-1	5,99E-1	5,99E-1	5,99E-1	
M3	$-\pi/2$	-4,57E+0	-4,57E+0	-4,57E+0	-4,57E+0	-4,57E+0	-4,57E+0	-4,57E+0	-4,57E+0	
	$-5\pi/12$	-4,42E+0	-4,42E+0	-4,42E+0	-4,42E+0	-4,42E+0	-4,42E+0	-4,42E+0	-4,42E+0	
	$-\pi/3$	-3,96E+0	-3,96E+0	-3,96E+0	-3,96E+0	-3,96E+0	-3,96E+0	-3,96E+0	-3,96E+0	
	$-\pi/4$	-3,23E+0	-3,23E+0	-3,23E+0	-3,23E+0	-3,23E+0	-3,23E+0	-3,23E+0	-3,23E+0	
	$-\pi/6$	-2,29E+0	-2,29E+0	-2,29E+0	-2,29E+0	-2,29E+0	-2,29E+0	-2,29E+0	-2,29E+0	
	$-\pi/12$	-1,19E+0	-1,19E+0	-1,19E+0	-1,19E+0	-1,19E+0	-1,19E+0	-1,19E+0	-1,19E+0	
	0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	0,00E+0	4,93E-8	4,77E-8	4,47E-8	4,38E-8	
	$\pi/12$	1,19E+0	1,19E+0	1,19E+0	1,19E+0	1,19E+0	1,19E+0	1,19E+0	1,19E+0	
	$\pi/6$	2,29E+0	2,29E+0	2,29E+0	2,29E+0	2,29E+0	2,29E+0	2,29E+0	2,29E+0	
	$\pi/4$	3,25E+0	3,25E+0	3,25E+0	3,25E+0	3,25E+0	3,25E+0	3,25E+0	3,25E+0	
	$\pi/3$	3,98E+0	3,98E+0	3,98E+0	3,98E+0	3,98E+0	3,98E+0	3,98E+0	3,98E+0	
	$5\pi/12$	4,44E+0	4,44E+0	4,44E+0	4,44E+0	4,44E+0	4,44E+0	4,44E+0	4,44E+0	
	$\pi/2$	4,59E+0	4,59E+0	4,59E+0	4,59E+0	4,59E+0	4,59E+0	4,59E+0	4,59E+0	

Таблица А. 2.10. Значения напряжений σ_s в точках кругового отверстия в бесконечной пластинке (рис. 2.6) на площадках, перпендикулярных контуру, когда на контуре имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, в зависимости от значения ha_1

Тип задачи	θ , рад.	Значения ha_1								
		0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
		Материал М1								
ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,036	-0,034	-0,024	-0,016	-0,004	0,022	0,035	0,036
	$\pi/6$	-0,102	-0,101	-0,094	-0,068	-0,044	-0,011	0,061	0,097	0,102
	$\pi/4$	-0,204	-0,202	-0,188	-0,136	-0,087	-0,023	0,122	0,194	0,204
	$\pi/3$	-0,327	-0,324	-0,302	-0,218	-0,140	-0,036	0,196	0,311	0,327
	$5\pi/12$	-0,433	-0,430	-0,400	-0,289	-0,186	-0,048	0,260	0,412	0,433
	$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,317	-0,204	-0,053	0,286	0,453	0,476
ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,187	0,174	0,125	0,081	0,021	-0,113	-0,179	-0,188
	$\pi/6$	0,357	0,354	0,329	0,238	0,153	0,040	-0,214	-0,339	-0,357
	$\pi/4$	0,448	0,445	0,414	0,299	0,192	0,050	-0,269	-0,427	-0,448
	$\pi/3$	0,330	0,328	0,305	0,220	0,142	0,037	-0,198	-0,314	-0,330
	$5\pi/12$	-0,120	-0,119	-0,110	-0,080	-0,051	-0,013	0,072	0,114	0,120
	$\pi/2$	-0,476	-0,472	-0,440	-0,317	-0,204	-0,053	0,286	0,453	0,476
		Материал М2								
ТУ	$\pi/12$	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	-0,001	-0,001
	$\pi/6$	0,004	0,004	0,004	0,004	0,003	0,003	0,000	-0,003	-0,004
	$\pi/4$	0,008	0,008	0,008	0,007	0,006	0,005	0,000	-0,007	-0,008
	$\pi/3$	0,012	0,012	0,011	0,010	0,009	0,007	-0,001	-0,010	-0,012
	$5\pi/12$	0,014	0,014	0,014	0,013	0,011	0,009	-0,001	-0,012	-0,014
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,015	0,013	0,012	0,009	-0,001	-0,012	-0,015
ТЭМУ	$\pi/12$	0,005	0,005	0,005	0,004	0,004	0,003	0,000	-0,004	-0,005
	$\pi/6$	0,009	0,009	0,009	0,008	0,007	0,006	0,000	-0,007	-0,009
	$\pi/4$	0,011	0,011	0,011	0,010	0,009	0,007	-0,001	-0,009	-0,011
	$\pi/3$	0,013	0,013	0,013	0,011	0,010	0,008	-0,001	-0,011	-0,013
	$5\pi/12$	0,014	0,014	0,014	0,013	0,011	0,009	-0,001	-0,012	-0,014
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,015	0,013	0,012	0,009	-0,001	-0,012	-0,015
		Материал М3								
ТУ	$\pi/12$	0,015	0,015	0,013	0,008	0,003	-0,002	-0,010	-0,013	-0,014
	$\pi/6$	0,051	0,050	0,044	0,025	0,010	-0,007	-0,034	-0,044	-0,046
	$\pi/4$	0,101	0,099	0,087	0,049	0,019	-0,013	-0,067	-0,087	-0,090
	$\pi/3$	0,116	0,114	0,100	0,056	0,022	-0,015	-0,077	-0,100	-0,103
	$5\pi/12$	0,109	0,107	0,094	0,053	0,021	-0,015	-0,073	-0,095	-0,097
	$\pi/2$	0,105	0,103	0,091	0,051	0,020	-0,014	-0,070	-0,091	-0,094
ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,032	0,029	0,016	0,006	-0,004	-0,022	-0,029	-0,029
	$\pi/6$	0,081	0,080	0,070	0,039	0,015	-0,011	-0,054	-0,070	-0,073
	$\pi/4$	0,123	0,121	0,107	0,060	0,023	-0,016	-0,082	-0,107	-0,110
	$\pi/3$	0,129	0,127	0,112	0,063	0,025	-0,017	-0,087	-0,112	-0,116
	$5\pi/12$	0,113	0,111	0,098	0,055	0,022	-0,015	-0,076	-0,098	-0,101
	$\pi/2$	0,101	0,100	0,088	0,049	0,019	-0,014	-0,068	-0,088	-0,091

Таблица А. 2.11. Значения величин в точке А контура эллиптического отверстия (рис. 2.7) в пластинке из материала М1

Тип задачи	Значения b_1/a_1								
	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00002	0,00001	0
	Значения σ_s								
ТУ	0,476	0,669	2,208	19,52	192,7	1924	9619	19237	–
ТЭМУ	0,476	0,393	-0,277	-7,81	-83,1	-836	-4183	-8367	–
	Значения U								
ТУ	0,0019	0,0017	0,0055	0,0502	0,6147	18,07	355,5	1374	–
ТЭМУ	0,0019	0,0010	-0,0007	-0,0193	-0,1831	0,41	52,2	230	–
	Значения $k_{тек} \cdot 10^{-2}$								
ТУ	118,1925	81,5436	29,0858	11,6596	9,7454	9,5519	9,5325	9,5325	9,5325
ТЭМУ	-98,8007	-69,1308	-22,0491	-5,9417	-4,1698	-3,9907	-3,9728	-3,9728	-3,9728

Таблица А. 2.12. Значения КИН $k_1^- \cdot 10^{-2}$ для нижней вершины вертикально ориентированной трещины (рис. 2.8)

Материал	Тип задачи							
	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
	Берега трещины не подкреплены				Берега трещины жёстко подкреплены			
	На берегах трещины задана нулевая температура							
M1	−9,5325	−8,8355	2,9498	3,9728	0,3116	0,4784	1,9988	2,3236
M2	0,3257	0,2238	0,4295	0,3809	−0,0088	−0,0058	−0,0183	−0,0094
M3	2,5205	2,5056	2,8934	2,8662	−0,3169	−0,3486	−0,3812	−0,4330
	Берега трещины теплоизолированы							
M1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0139	1,0691	1,0157	1,0710
M2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	−0,0345	−0,0322	−0,0337	−0,0321
M3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	−0,4912	−0,5296	−0,4569	−0,5099

Таблица А. 2.13. Значения КИНИН для левой вершины трещины (рис. 2.9) в бесконечной пластинке из материала М1 для различных типов задач при некоторых значениях угла φ_1

φ_1 , рад.	КИНИН	Тип задачи							
		ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
		Берега свободны				Берега жёстко подкреплены			
		На берегах трещины задана нулевая температура							
0	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	4,3450	4,5816	4,3528	4,5898
$\pi/6$	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	-3,0998	-2,4259	5,9816	6,6847	0,5782	1,0998	6,3531	6,8356
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,9622	1,1501	2,6019	2,7125	4,0068	4,4647	6,8606	7,2507
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	—	-0,0545	—	-0,0604	—	-0,0545	—	-0,0604
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	—	-7,2219	—	-4,3354	—	-12,8086	—	-13,4976
	$k_B^- \cdot 10^{-2}$	—	—	-6,3196	-6,3199	—	—	-6,3196	-6,3199
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	—	—	-4,5930	-4,5916	—	—	-4,6035	-4,6028
$\pi/3$	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	-7,2933	-6,5018	5,1566	6,1531	0,5138	9,1120	4,8220	0,5288
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	1,6665	1,9919	4,5067	4,6983	2,5949	3,1514	7,5301	7,9687
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	—	-0,0545	—	-0,0604	—	-0,0545	—	-0,0604
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	—	-8,8878	—	-8,9774	—	-14,6503	—	-18,9334
	$k_B^- \cdot 10^{-2}$	—	—	-6,3196	-6,3199	—	—	-6,3196	-6,3199
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	—	—	-2,5890	-2,5882	—	—	-2,6014	-2,6014
		Берега трещины теплоизолированы							
0	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	-9,5325	-8,8355	2,9498	3,9728	3,6428	3,9910	5,3360	5,8425
$\pi/6$	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	1,6665	1,9919	4,5067	4,6983	0,9293	1,3951	5,8615	6,2093
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	-7,2933	-6,5018	5,1566	6,1531	3,3986	3,9531	7,7120	8,3355
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	—	-0,0545	—	-0,0604	—	-0,0545	—	-0,0604
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	—	-3,5028	—	-6,0107	—	-13,5231	—	-11,9835
	$k_B^- \cdot 10^{-2}$	—	—	-6,3196	-6,3199	—	—	-6,3196	-6,3199
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	—	—	-4,5907	-4,5884	—	—	-4,6037	-4,6029
$\pi/3$	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,9622	1,1501	2,6019	2,7125	1,1219	1,4227	3,9705	4,2032
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	-3,0998	-2,4259	5,9816	6,6847	2,2438	2,8561	8,0217	8,5950
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	—	-0,0545	—	-0,0604	—	-0,0545	—	-0,0604
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	—	-4,7631	—	-10,8302	—	-15,4793	—	-17,1783
	$k_B^- \cdot 10^{-2}$	—	—	-6,3196	-6,3199	—	—	-6,3196	-6,3199
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	—	—	-2,5903	-2,5900	—	—	-2,5998	-2,5993

Таблица А. 2.14. Значения напряжений σ_x в пластинке в точке $\theta = \pi/2$ контура кругового включения (рис. 2.11) для случаев одного изменяемого параметра включения, когда остальные равны 1

Параметр	Тип задачи	Значения параметра								
		0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
		Материал М1								
$\lambda_T^{(1)}$	ТЭМУ	0,025	0,025	0,020	0,008	0,000	-0,008	-0,020	-0,025	-0,025
	ТУ	-0,309	-0,303	-0,253	-0,103	0,000	0,103	0,253	0,303	0,309
$\lambda_s^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	ТУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_g^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_p^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_\beta^{(1)}$	ТЭМУ	*	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_v^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_\chi^{(1)}$	ТЭМУ	*	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_\alpha^{(1)}$	ТЭМУ	-0,175	-0,174	-0,158	-0,088	0,000	0,175	1,579	17,364	—
	ТУ	-0,168	-0,166	-0,151	-0,084	0,000	0,168	1,508	16,587	—
$\lambda_t^{(1)}$	ТЭМУ	-0,008	-0,008	-0,007	-0,004	0,000	0,008	0,073	0,804	—
$\lambda_m^{(1)}$	ТЭМУ	-0,318	-0,315	-0,286	-0,159	0,000	0,318	2,859	31,451	—
$\lambda_{pe}^{(1)}$	ТУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,015	—
	ТЭУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	*	—
	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	*	—
		Материал М3								
$\lambda_T^{(1)}$	ТЭМУ	0,097	0,095	0,078	0,031	0,000	-0,030	-0,071	-0,085	-0,087
	ТУ	0,089	0,087	0,072	0,029	0,000	-0,028	-0,066	-0,078	-0,080
$\lambda_s^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	ТУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_g^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_p^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_\beta^{(1)}$	ТЭМУ	*	*	*	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_v^{(1)}$	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	*	*	0,000	0,000
$\lambda_\chi^{(1)}$	ТЭМУ	*	*	*	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
$\lambda_\alpha^{(1)}$	ТЭМУ	0,037	0,037	0,033	0,018	0,000	-0,037	-0,332	-3,651	—
	ТУ	0,017	0,017	0,015	0,008	0,000	-0,017	-0,151	-1,656	—
$\lambda_t^{(1)}$	ТЭМУ	-0,005	-0,005	-0,005	-0,003	0,000	0,005	0,048	0,526	—
$\lambda_m^{(1)}$	ТЭМУ	-0,021	-0,021	-0,019	-0,011	0,000	0,021	0,192	2,117	—
$\lambda_{pe}^{(1)}$	ТУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	—
	ТЭУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	*	*	*	—
	ТЭМУ	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	*	*	*	—

Таблица А. 2.15. Значения напряжений σ_x в пластинке из материала М1 в точке $\theta = \pi/2$ контура кругового включения (рис. 2.11) при некоторых значениях параметров материала включения

$\lambda_{тек}$	Другие $\lambda_i^{(1)}$	Тип задачи	Значения $\lambda_{тек}$ при постоянных значениях других $\lambda_i^{(1)}$								
			0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
			Материал М1								
$\lambda_T^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	-0,188	-0,187	-0,176	-0,143	-0,120	-0,098	-0,065	-0,054	-0,052
	2,0	ТЭМУ	0,243	0,240	0,220	0,158	0,116	0,074	0,013	-0,007	-0,010
$\lambda_s^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	-0,233	-0,229	-0,203	-0,143	-0,114	-0,093	-0,077	-0,076	-0,076
		ТУ	-0,290	-0,288	-0,272	-0,235	-0,215	-0,196	-0,169	-0,160	-0,159
	2,0	ТЭМУ	0,269	0,263	0,224	0,137	0,098	0,074	0,068	0,075	0,076
		ТУ	0,290	0,288	0,272	0,235	0,215	0,196	0,169	0,160	0,159
$\lambda_p^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	-0,145	-0,145	-0,145	-0,143	-0,141	-0,137	-0,117	-0,199	-0,240
	2,0	ТЭМУ	0,100	0,100	0,098	0,093	0,087	0,074	-0,016	-0,013	0,159
$\lambda_\alpha^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	-0,303	-0,300	-0,271	-0,143	0,017	0,338	2,903	31,757	–
	1,0	ТЭМУ	-0,175	-0,174	-0,158	-0,088	0,000	0,175	1,579	17,364	–
	2,0	ТЭМУ	-0,081	-0,080	-0,073	-0,042	-0,003	0,074	0,695	7,675	–
			Материал М3								
$\lambda_T^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	0,131	0,129	0,111	0,059	0,025	-0,008	-0,054	-0,068	-0,070
	2,0	ТЭМУ	0,055	0,053	0,039	-0,000	-0,026	-0,051	-0,086	-0,097	-0,098
$\lambda_s^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	0,068	0,067	0,065	0,059	0,055	0,051	0,043	0,038	0,037
		ТУ	0,058	0,057	0,052	0,043	0,040	0,037	0,035	0,034	0,034
	2,0	ТЭМУ	-0,063	-0,063	-0,062	-0,058	-0,055	-0,051	-0,043	-0,037	-0,036
		ТУ	-0,056	-0,055	-0,050	-0,042	-0,039	-0,036	-0,033	-0,033	-0,032
$\lambda_p^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	0,058	0,058	0,058	0,059	0,060	0,060	0,057	0,054	0,054
	2,0	ТЭМУ	-0,048	-0,048	-0,049	-0,050	-0,050	-0,051	-0,048	-0,044	-0,043
$\lambda_\alpha^{(1)}$	0,5	ТЭМУ	0,093	0,092	0,086	0,059	0,025	-0,043	-0,585	-6,689	–
	1,0	ТЭМУ	0,037	0,037	0,033	0,018	0,000	-0,037	-0,332	-3,651	–
	2,0	ТЭМУ	-0,017	-0,017	-0,019	-0,025	-0,034	-0,051	-0,188	-1,731	–

Таблица А. 2.16. Значения напряжений σ_x в пластинке из М1 в точке $\theta=\pi/2$ контура кругового включения (рис. 2.11) при некоторых значениях параметров материала включения

Значения $\lambda_T^{(1)}$	Значения $\lambda_{pe}^{(1)}$	Значения $\lambda_s^{(1)}, \lambda_\alpha^{(1)}$								
		0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,00	0,00	-0,87	-0,85	-0,75	-0,48	-0,31	-0,14	0,14	0,25	0,27
	0,01	-0,87	-0,86	-0,75	-0,48	-0,31	-0,14	0,14	0,25	0,26
	0,10	-0,89	-0,88	-0,78	-0,51	-0,35	-0,18	0,11	0,22	0,23
	0,50	-0,87	-0,86	-0,75	-0,48	-0,30	-0,13	0,14	0,25	0,27
	1,00	-0,73	-0,71	-0,56	-0,18	0,03	0,20	0,43	0,51	0,52
	2,00	-0,95	-0,89	-0,46	0,56	1,04	1,35	1,43	1,31	1,29
	10,00	-80,66	-79,42	-69,47	-41,82	-24,55	-8,76	9,78	10,48	9,53
	100,00	-696,73	-696,08	-690,25	-665,34	-636,28	-584,20	-334,61	25,78	107,59
	∞	-783,76	-1050,49	-1022,48	-776,21	-776,33	-776,28	-1020,51	-824,94	0,38
0,01	0,00	-0,86	-0,85	-0,74	-0,47	-0,30	-0,13	0,15	0,26	0,27
	0,01	-0,86	-0,85	-0,74	-0,47	-0,31	-0,14	0,14	0,25	0,27
	0,10	-0,89	-0,87	-0,77	-0,51	-0,34	-0,17	0,11	0,22	0,24
	0,50	-0,86	-0,85	-0,74	-0,47	-0,30	-0,13	0,15	0,26	0,27
	1,00	-0,73	-0,71	-0,55	-0,18	0,02	0,20	0,43	0,51	0,51
	2,00	-0,94	-0,88	-0,45	0,55	1,03	1,33	1,41	1,30	1,28
	10,00	-79,82	-78,59	-68,74	-41,38	-24,30	-8,66	9,68	10,38	9,43
	100,00	-689,79	-689,14	-683,38	-658,71	-629,95	-578,38	-331,27	25,53	106,53
	∞	-834,48	-832,29	-1075,03	-898,06	-898,10	-898,08	-871,44	-1016,18	-35,20
0,10	0,00	-0,78	-0,77	-0,67	-0,41	-0,25	-0,09	0,17	0,27	0,29
	0,01	-0,79	-0,77	-0,67	-0,42	-0,26	-0,10	0,17	0,27	0,28
	0,10	-0,81	-0,80	-0,70	-0,45	-0,29	-0,13	0,13	0,24	0,25
	0,50	-0,80	-0,78	-0,68	-0,43	-0,27	-0,11	0,16	0,26	0,27
	1,00	-0,67	-0,66	-0,52	-0,17	0,02	0,19	0,41	0,48	0,49
	2,00	-0,86	-0,81	-0,42	0,50	0,93	1,21	1,30	1,20	1,19
	10,00	-72,95	-71,82	-62,82	-37,80	-22,18	-7,89	8,88	9,52	8,66
	100,00	-633,03	-632,44	-627,14	-604,51	-578,11	-530,79	-303,99	23,47	97,80
	∞	-737,86	-920,99	-1091,00	-687,12	-687,05	-687,05	-1003,44	-794,83	-177,15
0,50	0,00	-0,55	-0,54	-0,45	-0,24	-0,10	0,03	0,24	0,33	0,34
	0,01	-0,55	-0,54	-0,46	-0,24	-0,11	0,02	0,24	0,32	0,33
	0,10	-0,58	-0,57	-0,49	-0,27	-0,14	-0,01	0,20	0,29	0,30
	0,50	-0,59	-0,58	-0,51	-0,30	-0,17	-0,03	0,19	0,27	0,28
	1,00	-0,52	-0,50	-0,40	-0,14	0,01	0,15	0,34	0,41	0,42
	2,00	-0,61	-0,58	-0,31	0,33	0,64	0,86	0,96	0,92	0,91
	10,00	-52,37	-51,57	-45,09	-27,09	-15,85	-5,57	6,50	6,97	6,35
	100,00	-463,17	-462,74	-458,86	-442,30	-422,97	-388,34	-222,36	17,30	71,71
	∞	-576,59	-817,70	-630,35	-549,45	-549,43	-549,43	-511,80	-473,04	-72,51
1,00	0,00	-0,39	-0,38	-0,31	-0,12	0,00	0,11	0,29	0,36	0,37
	0,01	-0,40	-0,39	-0,31	-0,12	0,00	0,11	0,29	0,36	0,37
	0,10	-0,42	-0,41	-0,34	-0,16	-0,04	0,07	0,25	0,33	0,33
	0,50	-0,46	-0,45	-0,38	-0,21	-0,10	0,01	0,21	0,28	0,29
	1,00	-0,41	-0,40	-0,32	-0,12	0,00	0,12	0,30	0,36	0,37
	2,00	-0,45	-0,42	-0,24	0,22	0,44	0,61	0,72	0,72	0,71

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,00	10,00	-38,23	-37,64	-32,90	-19,73	-11,50	-3,98	4,86	5,21	4,76
	100,00	-346,39	-346,07	-343,17	-330,78	-316,32	-290,41	-166,23	13,06	53,76
	∞	-383,25	-567,19	-511,24	-339,64	-339,71	-339,64	-573,72	-492,92	-82,38
2,00	0,00	-0,23	-0,23	-0,16	0,01	0,10	0,20	0,34	0,40	0,41
	0,01	-0,24	-0,23	-0,16	0,00	0,10	0,19	0,34	0,40	0,40
	0,10	-0,26	-0,26	-0,19	-0,04	0,06	0,15	0,30	0,36	0,37
	0,50	-0,32	-0,31	-0,26	-0,12	-0,03	0,06	0,23	0,29	0,30
	1,00	-0,30	-0,29	-0,24	-0,10	-0,01	0,09	0,25	0,32	0,33
	2,00	-0,28	-0,27	-0,16	0,10	0,24	0,36	0,49	0,52	0,52
	10,00	-24,09	-23,71	-20,71	-12,36	-7,16	-2,39	3,22	3,45	3,17
	100,00	-229,62	-229,40	-227,48	-219,26	-209,67	-192,48	-110,11	8,82	35,82
	∞	-310,53	-437,41	-349,81	-315,40	-315,39	-315,40	-309,00	-301,62	-15,47
10,00	0,00	0,00	0,00	0,06	0,18	0,25	0,32	0,42	0,45	0,46
	0,01	-0,01	0,00	0,05	0,18	0,25	0,31	0,41	0,45	0,45
	0,10	-0,04	-0,03	0,02	0,14	0,20	0,27	0,37	0,41	0,42
	0,50	-0,11	-0,11	-0,08	0,01	0,07	0,14	0,26	0,31	0,31
	1,00	-0,14	-0,14	-0,12	-0,07	-0,02	0,04	0,18	0,25	0,26
	2,00	-0,04	-0,04	-0,05	-0,06	-0,04	0,00	0,15	0,23	0,24
	10,00	-3,51	-3,45	-2,98	-1,65	-0,83	-0,07	0,83	0,89	0,86
	100,00	-59,76	-59,70	-59,20	-57,04	-54,53	-50,04	-28,47	2,66	9,72
	∞	-71,22	-85,70	-99,49	-71,28	-71,28	-71,28	-79,62	-94,02	-32,05
100,00	0,00	0,07	0,08	0,13	0,24	0,30	0,36	0,44	0,47	0,47
	0,01	0,07	0,08	0,12	0,23	0,30	0,35	0,44	0,47	0,47
	0,10	0,04	0,05	0,09	0,19	0,25	0,31	0,40	0,43	0,43
	0,50	-0,05	-0,04	-0,02	0,05	0,10	0,16	0,27	0,31	0,32
	1,00	-0,09	-0,09	-0,08	-0,06	-0,02	0,03	0,16	0,22	0,23
	2,00	0,04	0,03	-0,02	-0,12	-0,14	-0,12	0,03	0,13	0,15
	10,00	3,36	3,32	2,95	1,92	1,29	0,70	0,03	0,04	0,08
	100,00	-3,00	-2,99	-2,96	-2,84	-2,70	-2,44	-1,20	0,60	1,00
	∞	-7,80	-10,51	-12,50	-7,14	-7,14	-7,14	-9,35	-11,21	-4,98
∞	0,00	0,08	0,09	0,14	0,25	0,31	0,36	0,44	0,47	0,48
	0,01	0,08	0,09	0,13	0,24	0,30	0,36	0,44	0,47	0,47
	0,10	0,05	0,06	0,10	0,20	0,26	0,32	0,40	0,43	0,43
	0,50	-0,04	-0,04	-0,01	0,06	0,11	0,16	0,27	0,31	0,32
	1,00	-0,08	-0,08	-0,08	-0,06	-0,03	0,03	0,16	0,22	0,23
	2,00	0,05	0,04	-0,01	-0,13	-0,15	-0,13	0,02	0,12	0,14
	10,00	4,20	4,14	3,67	2,36	1,54	0,80	-0,06	-0,06	-0,01

Таблица А. 2.17. Значения напряжений σ_s в пластинке из материала М1 в точках контура кругового включения (рис. 2.17) при некоторых значениях параметра λ

θ , рад.	Значение λ														
	0	0,1	0,5	2	5	8	10	12	15	20	100	1000	10000	100000	∞
$\pi/12$	0,160	0,148	0,078	-0,107	-0,200	-0,186	-0,166	-0,145	-0,116	-0,077	0,062	-0,034	-0,162	-0,185	-0,188
$\pi/6$	0,291	0,277	0,155	-0,216	-0,432	-0,444	-0,426	-0,404	-0,371	-0,323	-0,133	-0,208	-0,331	-0,354	-0,357
$\pi/4$	0,319	0,327	0,202	-0,294	-0,628	-0,701	-0,712	-0,712	-0,703	-0,684	-0,561	-0,485	-0,454	-0,449	-0,449
$\pi/3$	0,101	0,160	0,140	-0,228	-0,529	-0,637	-0,674	-0,700	-0,725	-0,748	-0,767	-0,558	-0,369	-0,334	-0,330
$5\pi/12$	-0,460	-0,329	-0,104	0,094	0,157	0,134	0,111	0,089	0,058	0,017	-0,124	-0,031	0,094	0,117	0,120
$\pi/2$	-0,869	-0,699	-0,298	0,362	0,749	0,825	0,831	0,825	0,808	0,775	0,596	0,507	0,481	0,477	0,476

Таблица А. 2.18. Значения КИН k_1^- для нижней вершины вертикального линейного включения (рис. 2.12) в пластинке из материала М1 при некоторых значениях параметров материала включения

Значение $\lambda_T^{(1)}$	Значение $\lambda_{pe}^{(1)}$	Значение $\lambda_s^{(1)}, \lambda_\alpha^{(1)}$											
		0	10^{-4}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^1	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	0	1,0709	1,0709	1,0709	1,0709	1,0709	1,0711	1,0722	1,1848	2,2097	2,3223	2,3236	2,3236
	10^{-4}	1,0709	1,0709	1,0709	1,0709	1,0709	1,0711	1,0722	1,1848	2,2097	2,3223	2,3236	2,3236
	10^{-2}	1,0659	1,0659	1,0659	1,0659	1,0659	1,0660	1,0671	1,1794	2,2005	2,3127	2,3140	2,3140
	10^{-1}	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2036	0,2273	0,4423	0,4659	0,4662	0,4662
	1	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
	10^1	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2807	0,2538	0,0091	-0,0177	-0,0180	-0,0180
	10^2	308,0619	308,0619	308,0619	308,0616	308,0588	308,0309	307,7522	279,8763	26,2055	-1,6704	-1,9771	-1,9802
	10^4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28,4418	4,2018	3,9592
10^{-8}	0	1,0706	1,0706	1,0706	1,0707	1,0707	1,0708	1,0719	1,1845	2,2091	2,3217	2,3229	2,3230
	10^{-4}	1,0706	1,0706	1,0706	1,0706	1,0707	1,0708	1,0719	1,1845	2,2091	2,3217	2,3229	2,3230
	10^{-2}	1,0656	1,0656	1,0656	1,0656	1,0656	1,0657	1,0669	1,1791	2,1999	2,3121	2,3134	2,3134
	10^{-1}	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2034	0,2036	0,2273	0,4422	0,4659	0,4661	0,4661
	1	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
	10^1	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2807	0,2538	0,0091	-0,0177	-0,0180	-0,0180
	10^2	308,0619	308,0619	308,0619	308,0616	308,0588	308,0309	307,7522	279,8763	26,2055	-1,6704	-1,9771	-1,9802
	10^4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28,4418	4,2018	3,9592
	10^{-6}	0	1,0432	1,0432	1,0432	1,0432	1,0432	1,0433	1,0444	1,1541	2,1525	2,2622	2,2634
10^{-4}		1,0432	1,0432	1,0432	1,0432	1,0432	1,0433	1,0444	1,1541	2,1525	2,2622	2,2634	2,2634
10^{-2}		1,0384	1,0384	1,0384	1,0384	1,0384	1,0385	1,0396	1,1489	2,1438	2,2531	2,2543	2,2543
10^{-1}		0,2023	0,2023	0,2023	0,2023	0,2023	0,2023	0,2025	0,2260	0,4399	0,4634	0,4636	0,4636
1		0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
10^1		0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2807	0,2538	0,0091	-0,0177	-0,0180	-0,0180

Продолжение таблицы А. 2.18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	10 ²	308,0619	308,0619	308,0619	308,0616	308,0588	308,0309	307,7522	279,8763	26,2055	-1,6704	-1,9771	-1,9802
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4418	4,2018	3,9592
	10 ⁻⁴	0	0,2928	0,2928	0,2928	0,2928	0,2928	0,2932	0,3241	0,6054	0,6363	0,6366	0,6366
	10 ⁻⁴	0,2928	0,2928	0,2928	0,2928	0,2928	0,2928	0,2932	0,3241	0,6054	0,6363	0,6366	0,6366
10 ⁻⁴	10 ⁻²	0,2923	0,2923	0,2923	0,2923	0,2923	0,2923	0,2926	0,3235	0,6046	0,6355	0,6358	0,6358
	10 ⁻¹	0,1317	0,1317	0,1317	0,1317	0,1317	0,1317	0,1319	0,1473	0,2870	0,3024	0,3026	0,3026
	1	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
	10 ¹	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2807	0,2538	0,0091	-0,0177	-0,0180	-0,0180
	10 ²	308,0619	308,0619	308,0619	308,0616	308,0588	308,0309	307,7522	279,8763	26,2055	-1,6704	-1,9771	-1,9802
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4418	4,2018	3,9592
	10 ⁻²	0	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0048	0,0104	0,0110	0,0110	0,0110
	10 ⁻⁴	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0048	0,0104	0,0110	0,0110	0,0110
	10 ⁻²	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0042	0,0048	0,0104	0,0110	0,0110	0,0110
	10 ⁻¹	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0038	0,0039	0,0045	0,0100	0,0106	0,0106	0,0106
10 ⁻¹	1	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013
	10 ¹	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2807	0,2538	0,0091	-0,0177	-0,0180	-0,0180
	10 ²	308,0619	308,0619	308,0618	308,0616	308,0588	308,0309	307,7521	279,8762	26,2055	-1,6704	-1,9771	-1,9802
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4418	4,2018	3,9592
	10 ⁻¹	0	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0008	0,0029	0,0032	0,0032	0,0032
	10 ⁻⁴	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0008	0,0029	0,0032	0,0032	0,0032
	10 ⁻²	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0008	0,0029	0,0032	0,0032	0,0032
	10 ⁻¹	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0008	0,0029	0,0031	0,0031	0,0031
	1	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0005	0,0015	0,0016	0,0016	0,0016
	10 ¹	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2810	0,2809	0,2807	0,2538	0,0091	-0,0177	-0,0180	-0,0180
10 ⁻¹	10 ²	308,0616	308,0616	308,0616	308,0613	308,0585	308,0306	307,7519	279,8760	26,2054	-1,6704	-1,9771	-1,9801
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4418	4,2018	3,9592

Продолжение таблицы А. 2.18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10 ¹	1	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0024	0,0024	0,0024
	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0024	0,0024	0,0024
	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0024	0,0024	0,0024
	10 ⁻¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0024	0,0024	0,0024
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0018	0,0019	0,0020	0,0020
	10 ¹	0,2807	0,2807	0,2807	0,2807	0,2807	0,2806	0,2804	0,2535	0,0092	-0,0177	-0,0180	-0,0180
	10 ²	308,0589	308,0589	308,0589	308,0586	308,0558	308,0279	307,7492	279,8735	26,2052	-1,6704	-1,9770	-1,9801
	10 ⁴	-	-	-	-	-	-	-	-	-	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28,4418	4,2018	3,9592
	10 ¹	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0026	0,0026	0,0026
10 ²	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0026	0,0026	0,0026
	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0026	0,0026	0,0026
	10 ⁻¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0022	0,0026	0,0026	0,0026
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0019	0,0023	0,0023	0,0023
	10 ¹	0,2778	0,2778	0,2778	0,2778	0,2778	0,2777	0,2775	0,2509	0,0092	-0,0174	-0,0176	-0,0176
	10 ²	308,0318	308,0318	308,0317	308,0315	308,0287	308,0008	307,7221	279,8489	26,2032	-1,6700	-1,9766	-1,9796
	10 ⁴	-	-	-	-	-	-	-	-	-	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28,4418	4,2018	3,9592
	10 ²	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0029	0,0056	0,0056	0,0056
	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0029	0,0056	0,0056	0,0056
10 ⁴	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0029	0,0056	0,0056	0,0056
	10 ⁻¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0029	0,0056	0,0056	0,0056
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0027	0,0053	0,0054	0,0054
	10 ¹	0,2515	0,2515	0,2515	0,2515	0,2515	0,2515	0,2512	0,2273	0,0098	-0,0141	-0,0143	-0,0143
	10 ²	307,7608	307,7608	307,7607	307,7605	307,7577	307,7298	307,4513	279,6030	26,1827	-1,6657	-1,9720	-1,9751
	10 ⁴	-	-	-	-	-	-	-	-	-	26,8537	2,6162	2,3736
	∞	-	-	-	-	-	-	-	-	-	28,4418	4,2018	3,9592
	10 ⁴	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0092	0,0779	0,3083	0,3108	0,3108
	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0092	0,0779	0,3083	0,3108	0,3108
	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0092	0,0779	0,3083	0,3108	0,3108
	10 ⁻¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0092	0,0779	0,3082	0,3108	0,3108

Продолжение таблицы А. 2.18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10 ⁴	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0092	0,0777	0,3080	0,3105	0,3106
	10 ¹	-2,0031	-2,0031	-2,0031	-2,0031	-2,0031	-2,0029	-2,0008	-1,7944	0,0841	0,2905	0,2928	0,2928
	10 ²	280,3710	280,3710	280,3709	280,3707	280,3682	280,3428	280,0894	254,7454	24,1153	-1,2287	-1,5075	-1,5103
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26,8535	2,6162	2,3736
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4418	4,2018	3,9592
10 ⁶	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0462	0,8741	3,5221	3,5512	3,5515
	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0462	0,8741	3,5221	3,5512	3,5515
	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0462	0,8741	3,5221	3,5512	3,5515
	10 ⁻¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0462	0,8741	3,5221	3,5512	3,5515
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0462	0,8741	3,5220	3,5512	3,5515
	10 ¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0463	0,8748	3,5200	3,5491	3,5494
	10 ²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0019	0,0498	3,4552	3,3525	3,3513	3,3513
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	26,8370	2,6172	2,3748
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4418	4,2018	3,9592
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0481	0,9764	3,9352	3,9677	3,9680
10 ⁸	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0481	0,9764	3,9352	3,9677	3,9680
	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0481	0,9764	3,9352	3,9677	3,9680
	10 ⁻¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0481	0,9764	3,9352	3,9677	3,9680
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0481	0,9764	3,9352	3,9677	3,9680
	10 ¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0481	0,9764	3,9351	3,9677	3,9680
	10 ²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0511	1,0050	3,9333	3,9655	3,9658
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	25,2979	2,7083	2,4822
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4417	4,2018	3,9592
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
∞	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
	10 ⁻¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
	10 ¹	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
	10 ²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0485	0,9779	3,9398	3,9724	3,9727
	10 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	–	–	6,6890	3,8097	3,7808
	∞	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28,4399	4,2018	3,9592
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
	10 ⁻⁴	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727
	10 ⁻²	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0021	0,0484	0,9776	3,9398	3,9724	3,9727

Таблица А. 3.1. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия в пластинке из материала М1 с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями (рис. 3.3), на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстиями к их радиусу

c/a_1	θ , рад.	Тип задачи							
		ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
		На контурах отверстий задана одинаковая температура				Контур отверстия теплоизолированы			
0,01	$\pi/12$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,003	0,010	0,009
	$\pi/4$	-0,002	-0,009	-0,067	-0,076	-0,062	-0,051	-0,166	-0,147
	$\pi/2$	0,511	0,513	0,549	0,554	-0,962	-0,966	-1,040	-1,052
	$3\pi/4$	0,295	0,246	-0,457	-0,512	-0,560	-0,470	0,798	0,898
0,10	$\pi/12$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,012	0,012	0,035	0,035
	$\pi/4$	0,004	-0,005	-0,070	-0,080	-0,047	-0,035	-0,065	-0,046
	$\pi/2$	0,514	0,516	0,551	0,557	-0,859	-0,862	-0,927	-0,937
	$3\pi/4$	0,297	0,248	-0,457	-0,512	-0,500	-0,419	0,717	0,808
0,50	$\pi/12$	-0,025	-0,023	-0,044	-0,041	0,053	0,050	0,122	0,118
	$\pi/4$	0,024	0,011	-0,090	-0,104	-0,048	-0,031	0,065	0,086
	$\pi/2$	0,523	0,525	0,559	0,564	-0,727	-0,730	-0,779	-0,786
	$3\pi/4$	0,304	0,255	-0,455	-0,511	-0,425	-0,357	0,608	0,684
1,00	$\pi/12$	-0,062	-0,060	-0,132	-0,127	0,089	0,087	0,207	0,201
	$\pi/4$	0,039	0,023	-0,131	-0,149	-0,054	-0,034	0,147	0,171
	$\pi/2$	0,528	0,531	0,564	0,569	-0,661	-0,664	-0,706	-0,713
	$3\pi/4$	0,309	0,260	-0,450	-0,507	-0,388	-0,327	0,549	0,619
2,00	$\pi/12$	-0,074	-0,077	-0,210	-0,210	0,088	0,091	0,252	0,253
	$\pi/4$	0,054	0,034	-0,223	-0,246	-0,062	-0,039	0,253	0,280
	$\pi/2$	0,526	0,529	0,560	0,566	-0,596	-0,599	-0,635	-0,641
	$3\pi/4$	0,309	0,260	-0,439	-0,495	-0,350	-0,295	0,492	0,554
10,00	$\pi/12$	-0,002	-0,016	-0,194	-0,206	0,002	0,017	0,197	0,209
	$\pi/4$	0,139	0,106	-0,385	-0,422	-0,141	-0,108	0,390	0,428
	$\pi/2$	0,487	0,488	0,497	0,499	-0,494	-0,494	-0,504	-0,506
	$3\pi/4$	0,259	0,217	-0,412	-0,461	-0,263	-0,220	0,418	0,467
100,00	$\pi/12$	0,032	0,014	-0,174	-0,190	-0,032	-0,015	0,174	0,190
	$\pi/4$	0,196	0,159	-0,404	-0,447	-0,196	-0,159	0,404	0,447
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,477	0,477	-0,476	-0,476	-0,477	-0,477
	$3\pi/4$	0,211	0,173	-0,406	-0,450	-0,211	-0,173	0,406	0,450
∞	$\pi/12$	0,036	0,018	-0,172	-0,188	-0,036	-0,018	0,172	0,188
	$\pi/4$	0,204	0,166	-0,405	-0,448	-0,204	-0,166	0,405	0,448
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,476	0,476	-0,476	-0,476	-0,476	-0,476
	$3\pi/4$	0,204	0,166	-0,405	-0,448	-0,204	-0,166	0,405	0,448

Таблица А. 3.2. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия в пластинке из материала М2 с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями (рис. 3.3), на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстиями к их радиусу

c/a_1	θ , рад.	Тип задачи							
		ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
		На контурах отверстий задана одинаковая температура				Контур отверстия теплоизолированы			
0,01	$\pi/12$	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001
	$\pi/4$	0,000	0,000	-0,001	-0,001	0,004	0,003	0,000	0,000
	$\pi/2$	-0,016	-0,016	-0,015	-0,016	0,030	0,031	0,029	0,029
	$3\pi/4$	-0,011	-0,005	-0,018	-0,014	0,021	0,009	0,033	0,026
0,10	$\pi/12$	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,001	-0,001	0,000	0,000
	$\pi/4$	-0,001	0,000	-0,002	-0,001	0,003	0,002	0,001	0,001
	$\pi/2$	-0,016	-0,016	-0,015	-0,016	0,027	0,027	0,026	0,026
	$3\pi/4$	-0,011	-0,005	-0,018	-0,014	0,019	0,008	0,030	0,024
0,50	$\pi/12$	0,001	0,001	0,000	0,000	-0,003	-0,002	0,000	0,000
	$\pi/4$	-0,002	0,000	-0,003	-0,002	0,003	0,001	0,003	0,002
	$\pi/2$	-0,016	-0,017	-0,016	-0,016	0,023	0,023	0,022	0,022
	$3\pi/4$	-0,012	-0,005	-0,019	-0,015	0,016	0,007	0,025	0,020
1,00	$\pi/12$	0,003	0,003	0,000	0,001	-0,004	-0,004	0,000	-0,001
	$\pi/4$	-0,002	-0,001	-0,004	-0,003	0,003	0,001	0,005	0,004
	$\pi/2$	-0,016	-0,017	-0,016	-0,016	0,021	0,021	0,020	0,020
	$3\pi/4$	-0,012	-0,005	-0,019	-0,015	0,015	0,006	0,023	0,018
2,00	$\pi/12$	0,003	0,003	0,000	0,000	-0,004	-0,004	0,000	0,000
	$\pi/4$	-0,003	-0,001	-0,006	-0,005	0,003	0,001	0,007	0,005
	$\pi/2$	-0,016	-0,017	-0,016	-0,016	0,018	0,019	0,018	0,018
	$3\pi/4$	-0,012	-0,005	-0,018	-0,015	0,013	0,006	0,021	0,016
10,00	$\pi/12$	0,000	0,001	-0,004	-0,003	0,000	-0,001	0,004	0,003
	$\pi/4$	-0,006	-0,002	-0,012	-0,009	0,006	0,002	0,012	0,009
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	0,015	0,016	0,015	0,015
	$3\pi/4$	-0,010	-0,004	-0,016	-0,013	0,010	0,004	0,017	0,013
∞	$\pi/12$	-0,001	0,000	-0,006	-0,005	0,001	0,000	0,006	0,005
	$\pi/4$	-0,008	-0,003	-0,014	-0,011	0,008	0,003	0,014	0,011
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
	$3\pi/4$	-0,008	-0,003	-0,014	-0,011	0,008	0,003	0,014	0,011

Таблица А. 3.3. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия в пластинке из материала МЗ с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями (рис. 3.3), на площадках, перпендикулярных контуру, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстиями к их радиусу

c/a_1	θ , рад.	Тип задачи							
		ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ	ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
		На контурах отверстий задана одинаковая температура				Контур отверстия теплоизолированы			
0,01	$\pi/12$	0,000	0,000	0,000	0,000	-0,001	0,000	0,000	0,001
	$\pi/4$	-0,011	-0,004	-0,011	-0,007	0,052	0,017	0,015	-0,004
	$\pi/2$	-0,100	-0,100	-0,098	-0,096	0,209	0,208	0,204	0,200
	$3\pi/4$	-0,126	-0,123	-0,152	-0,146	0,265	0,258	0,314	0,299
0,10	$\pi/12$	-0,001	0,000	0,000	0,000	-0,002	0,000	-0,001	0,001
	$\pi/4$	-0,014	-0,006	-0,014	-0,009	0,043	0,016	0,020	0,006
	$\pi/2$	-0,101	-0,100	-0,098	-0,096	0,185	0,185	0,181	0,178
	$3\pi/4$	-0,127	-0,123	-0,153	-0,146	0,235	0,229	0,279	0,266
0,50	$\pi/12$	0,010	0,004	0,006	0,001	-0,021	-0,006	-0,009	0,000
	$\pi/4$	-0,022	-0,013	-0,024	-0,018	0,040	0,022	0,035	0,025
	$\pi/2$	-0,102	-0,102	-0,100	-0,098	0,156	0,155	0,152	0,150
	$3\pi/4$	-0,129	-0,126	-0,155	-0,148	0,198	0,193	0,235	0,225
1,00	$\pi/12$	0,020	0,009	0,009	0,002	-0,031	-0,014	-0,013	0,000
	$\pi/4$	-0,027	-0,019	-0,034	-0,028	0,039	0,026	0,046	0,039
	$\pi/2$	-0,102	-0,102	-0,100	-0,099	0,141	0,141	0,138	0,137
	$3\pi/4$	-0,130	-0,127	-0,156	-0,149	0,180	0,175	0,214	0,204
2,00	$\pi/12$	0,017	0,007	0,004	-0,003	-0,022	-0,009	-0,005	0,005
	$\pi/4$	-0,033	-0,027	-0,049	-0,045	0,042	0,034	0,061	0,056
	$\pi/2$	-0,101	-0,101	-0,099	-0,099	0,127	0,127	0,125	0,124
	$3\pi/4$	-0,129	-0,125	-0,153	-0,147	0,161	0,157	0,192	0,184
10,00	$\pi/12$	-0,005	-0,010	-0,020	-0,021	0,005	0,011	0,023	0,024
	$\pi/4$	-0,069	-0,065	-0,091	-0,088	0,078	0,073	0,103	0,099
	$\pi/2$	-0,095	-0,095	-0,093	-0,092	0,108	0,107	0,106	0,104
	$3\pi/4$	-0,108	-0,105	-0,133	-0,128	0,123	0,119	0,150	0,145
100,00	$\pi/12$	-0,013	-0,016	-0,030	-0,029	0,014	0,018	0,033	0,032
	$\pi/4$	-0,088	-0,084	-0,111	-0,107	0,098	0,094	0,125	0,120
	$\pi/2$	-0,094	-0,093	-0,092	-0,091	0,105	0,104	0,103	0,101
	$3\pi/4$	-0,092	-0,089	-0,116	-0,112	0,103	0,100	0,130	0,125
∞	$\pi/12$	-0,014	-0,016	-0,031	-0,029	0,015	0,018	0,035	0,033
	$\pi/4$	-0,090	-0,087	-0,114	-0,110	0,101	0,097	0,127	0,123
	$\pi/2$	-0,094	-0,093	-0,092	-0,091	0,105	0,104	0,103	0,101
	$3\pi/4$	-0,090	-0,087	-0,114	-0,110	0,101	0,097	0,127	0,123

Таблица А. 3.4. Значения напряжений σ_s в точках контура центрального отверстия в пластинке с $\mathcal{L}$ одинаковыми неподкрепленными круговыми отверстиями (рис. 3.4), на контурах которых задана одинаковая температура, при некоторых значениях отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу, в зависимости от значения $\mathcal{L}$

c/a	Тип задачи	θ, рад.	Значения $\mathcal{L}$				
			1	3	5	7	∞
			Материал М1				
1,0	ТУ	π/12	0,036	0,020	0,000	−0,013	−0,076
		π/4	0,204	0,144	0,131	0,123	0,090
		π/2	0,476	0,540	0,573	0,596	0,715
	ТЭМУ	π/12	−0,188	−0,169	−0,156	−0,151	−0,129
		π/4	−0,448	−0,196	−0,181	−0,175	−0,156
		π/2	0,476	0,708	0,752	0,770	0,795
0,5	ТУ	π/12	0,036	0,085	0,067	0,056	−0,032
		π/4	0,204	0,108	0,098	0,093	0,060
		π/2	0,476	0,507	0,533	0,551	0,721
	ТЭМУ	π/12	−0,188	−0,101	−0,081	−0,073	−0,039
		π/4	−0,448	−0,143	−0,133	−0,130	−0,115
		π/2	0,476	0,714	0,759	0,778	0,788
0,1	ТУ	π/12	0,036	0,132	0,117	0,110	0,000
		π/4	0,204	0,027	0,025	0,024	0,022
		π/2	0,476	0,468	0,477	0,485	0,716
	ТЭМУ	π/12	−0,188	−0,073	−0,051	−0,043	−0,000
		π/4	−0,448	−0,088	−0,090	−0,090	−0,091
		π/2	0,476	0,714	0,760	0,782	0,770
			Материал М3				
1,0	ТУ	π/12	−0,014	−0,002	0,004	0,008	0,024
		π/4	−0,090	−0,069	−0,063	−0,060	−0,048
		π/2	−0,094	−0,104	−0,110	−0,113	−0,129
	ТЭМУ	π/12	−0,029	−0,022	−0,016	−0,012	0,006
		π/4	−0,110	−0,068	−0,061	−0,058	−0,044
		π/2	−0,091	−0,091	−0,098	−0,103	−0,139
0,5	ТУ	π/12	−0,014	−0,023	−0,017	−0,013	0,014
		π/4	−0,090	−0,057	−0,053	−0,051	−0,040
		π/2	−0,094	−0,099	−0,103	−0,106	−0,132
	ТЭМУ	π/12	−0,029	−0,032	−0,026	−0,022	0,003
		π/4	−0,110	−0,050	−0,045	−0,043	−0,030
		π/2	−0,091	−0,080	−0,084	−0,088	−0,143
0,1	ТУ	π/12	−0,014	−0,041	−0,037	−0,035	−0,001
		π/4	−0,090	−0,023	−0,022	−0,022	−0,026
		π/2	−0,094	−0,091	−0,092	−0,093	−0,132
	ТЭМУ	π/12	−0,029	−0,039	−0,033	−0,031	−0,000
		π/4	−0,110	−0,018	−0,017	−0,017	−0,015
		π/2	−0,091	−0,068	−0,067	−0,067	−0,144

Таблица А. 3.5. Значения напряжений σ_s в точках контура центрального отверстия в пластинке с $\mathcal{L}$ одинаковыми неподкрепленными круговыми отверстиями (рис. 3.4), контуры которых теплоизолированы, при некоторых значениях отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу, в зависимости от значения $\mathcal{L}$

c/a	Тип задачи	θ , рад.	Значения $\mathcal{L}$				
			1	3	5	7	∞
			Материал М1				
1,0	ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,042	-0,009	0,017	0,174
		$\pi/4$	-0,204	-0,238	-0,244	-0,243	-0,201
		$\pi/2$	-0,476	-0,794	-0,960	-1,065	-1,536
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,313	0,321	0,324	0,315
		$\pi/4$	0,448	0,304	0,305	0,307	0,307
		$\pi/2$	-0,476	-1,063	-1,282	-1,394	-1,681
0,5	ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,181	-0,175	-0,159	0,127
		$\pi/4$	-0,204	-0,235	-0,257	-0,266	-0,220
		$\pi/2$	-0,476	-0,881	-1,124	-1,290	-2,349
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,306	0,295	0,289	0,210
		$\pi/4$	0,448	0,230	0,244	0,253	0,267
		$\pi/2$	-0,476	-1,311	-1,688	-1,903	-2,497
0,1	ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,417	-0,521	-0,587	0,033
		$\pi/4$	-0,204	-0,128	-0,162	-0,186	-0,333
		$\pi/2$	-0,476	-1,083	-1,533	-1,883	-6,288
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,379	0,378	0,383	0,112
		$\pi/4$	0,448	0,008	0,035	0,055	0,173
		$\pi/2$	-0,476	-1,870	-2,772	-3,429	-6,474
			Материал М3				
1,0	ТУ	$\pi/12$	0,015	0,008	-0,004	-0,013	-0,058
		$\pi/4$	0,101	0,121	0,125	0,125	0,113
		$\pi/2$	0,105	0,168	0,199	0,218	0,294
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,045	0,037	0,031	-0,011
		$\pi/4$	0,123	0,118	0,118	0,117	0,100
		$\pi/2$	0,101	0,144	0,174	0,196	0,320
0,5	ТУ	$\pi/12$	0,015	0,055	0,050	0,043	-0,053
		$\pi/4$	0,101	0,127	0,141	0,148	0,145
		$\pi/2$	0,105	0,187	0,234	0,266	0,447
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,084	0,080	0,075	-0,007
		$\pi/4$	0,123	0,107	0,114	0,116	0,095
		$\pi/2$	0,101	0,144	0,181	0,211	0,493
0,1	ТУ	$\pi/12$	0,015	0,146	0,181	0,202	-0,003
		$\pi/4$	0,101	0,084	0,110	0,128	0,287
		$\pi/2$	0,105	0,230	0,320	0,388	1,182
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,151	0,174	0,190	0,006
		$\pi/4$	0,123	0,039	0,051	0,060	0,098
		$\pi/2$	0,101	0,148	0,196	0,238	1,324

Таблица А. 3.6. Значения напряжений σ_s в точках контуров отверстий в пластинке из материала М1 с бесконечным рядом неподкрепленных круговых отверстий (рис. 3.4), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу

Материал	Тип задачи	θ , рад.	Значения c/a					
			∞	10	2	1	0,5	0,1
М1	ТУ	$\pi/12$	0,036	0,016	-0,081	-0,076	-0,032	0,000
		$\pi/6$	0,102	0,076	-0,049	-0,071	-0,065	-0,038
		$\pi/4$	0,204	0,188	0,119	0,090	0,060	0,022
		$\pi/3$	0,327	0,332	0,365	0,360	0,338	0,302
		$5\pi/12$	0,433	0,460	0,586	0,612	0,609	0,595
		$\pi/2$	0,476	0,512	0,676	0,715	0,721	0,716
	ТЭМУ	$\pi/12$	-0,188	-0,209	-0,224	-0,129	-0,039	0,000
		$\pi/6$	-0,357	-0,371	-0,327	-0,224	-0,140	-0,055
		$\pi/4$	-0,448	-0,428	-0,248	-0,156	-0,115	-0,091
		$\pi/3$	-0,330	-0,267	0,031	0,119	0,148	0,152
		$5\pi/12$	0,120	0,199	0,486	0,541	0,551	0,545
		$\pi/2$	0,476	0,550	0,775	0,795	0,788	0,770
М3	ТУ	$\pi/12$	-0,014	-0,010	0,016	0,024	0,014	-0,001
		$\pi/6$	-0,046	-0,038	0,005	0,019	0,020	0,016
		$\pi/4$	-0,090	-0,085	-0,058	-0,048	-0,040	-0,026
		$\pi/3$	-0,103	-0,104	-0,108	-0,110	-0,107	-0,099
		$5\pi/12$	-0,097	-0,100	-0,120	-0,127	-0,128	-0,127
		$\pi/2$	-0,094	-0,098	-0,120	-0,129	-0,132	-0,132
	ТЭМУ	$\pi/12$	-0,029	-0,026	-0,002	0,006	0,003	0,000
		$\pi/6$	-0,073	-0,066	-0,023	-0,005	0,003	0,004
		$\pi/4$	-0,110	-0,103	-0,065	-0,044	-0,030	-0,015
		$\pi/3$	-0,116	-0,113	-0,100	-0,091	-0,082	-0,072
		$5\pi/12$	-0,101	-0,104	-0,121	-0,126	-0,125	-0,122
		$\pi/2$	-0,091	-0,096	-0,128	-0,139	-0,143	-0,144

Таблица А. 3.7. Значения напряжений σ_s в точках контуров отверстий в пластинке из материала М1 с бесконечным рядом неподкрепленных круговых отверстий (рис. 3.4), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения c/a расстояния между отверстиями к их радиусу

Материал	Тип задачи	θ , рад.	Значения c/a					
			∞	10	2	1	0,5	0,1
М1	ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,017	0,125	0,174	0,127	0,033
		$\pi/6$	-0,102	-0,079	0,076	0,156	0,217	0,328
		$\pi/4$	-0,204	-0,197	-0,182	-0,201	-0,220	-0,333
		$\pi/3$	-0,327	-0,348	-0,555	-0,783	-1,130	-2,798
		$5\pi/12$	-0,433	-0,481	-0,888	-1,318	-1,996	-5,278
		$\pi/2$	-0,476	-0,535	-1,024	-1,536	-2,349	-6,288
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,218	0,348	0,315	0,210	0,112
		$\pi/6$	0,357	0,388	0,502	0,503	0,494	0,510
		$\pi/4$	0,448	0,447	0,372	0,307	0,267	0,173
		$\pi/3$	0,330	0,279	-0,059	-0,314	-0,657	-2,227
		$5\pi/12$	-0,120	-0,208	-0,741	-1,184	-1,860	-5,114
		$\pi/2$	-0,476	-0,575	-1,165	-1,681	-2,497	-6,474
М3	ТУ	$\pi/12$	0,015	0,011	-0,027	-0,058	-0,053	-0,003
		$\pi/6$	0,051	0,045	0,008	-0,045	-0,070	-0,144
		$\pi/4$	0,101	0,099	0,095	0,113	0,145	0,287
		$\pi/3$	0,116	0,121	0,177	0,252	0,370	0,932
		$5\pi/12$	0,109	0,117	0,196	0,290	0,438	1,150
		$\pi/2$	0,105	0,114	0,197	0,294	0,447	1,182
	ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,030	0,003	-0,011	-0,007	0,006
		$\pi/6$	0,081	0,077	0,039	0,013	-0,007	-0,033
		$\pi/4$	0,123	0,120	0,106	0,100	0,095	0,098
		$\pi/3$	0,129	0,132	0,163	0,205	0,270	0,592
		$5\pi/12$	0,113	0,121	0,198	0,286	0,425	1,096
		$\pi/2$	0,101	0,112	0,210	0,320	0,493	1,324

Таблица А.3.8. Значения КИНИН для нижней вершины левой трещины в пластинке с двумя вертикальными трещинами (рис. 3.5), на берегах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстиями к их полудлине

Материал	КИНИН	c/a_1	Тип задачи			
			ТУ	ТЭУ	ТМУ	ТЭМУ
М1	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,1	-7,4363	-6,9451	0,2742	0,9566
		0,5	-9,2408	-8,6845	-1,3676	-0,6247
		1,0	-10,3271	-9,7309	-2,0318	-1,2414
		2,0	-10,8065	-10,1938	-1,5958	-0,7761
		10,0	-9,6910	-9,0098	2,4032	3,3894
		100,0	-9,5342	-8,8374	2,9440	3,9665
		∞	-9,5325	-8,8355	2,9498	3,9728
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,1	-1,6589	-1,3781	3,1379	3,4571
		0,5	-1,6698	-1,3346	4,7722	5,1961
		1,0	-1,8324	-1,4881	4,8010	5,2559
		2,0	-2,0844	-1,7830	3,2998	3,7174
		10,0	-0,9061	-0,8349	0,3531	0,4576
		100,0	-0,0953	-0,0883	0,0295	0,0398
		∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
М3	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,1	1,9644	1,9040	2,1367	2,0651
		0,5	2,4528	2,3667	2,5572	2,4307
		1,0	2,7162	2,6235	2,8140	2,6724
		2,0	2,7436	2,7080	2,9466	2,8435
		10,0	2,5340	2,5190	2,9015	2,8720
		100,0	2,5206	2,5057	2,8935	2,8663
		∞	2,5205	2,5056	2,8934	2,8662
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,1	0,5592	0,5840	0,8030	0,7872
		0,5	0,5769	0,6359	0,9507	0,9830
		1,0	0,6304	0,6707	0,9939	1,0205
		2,0	0,7132	0,6917	0,9133	0,9017
		10,0	0,2458	0,2440	0,2822	0,2785
		100,0	0,0252	0,0250	0,0289	0,0287
		∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица А.3.9. Значения КИНИН для вершин А, В Т-образной трещины (рис. 3.6) в пластинке из материала М1, в зависимости от длин составляющих трещин

Вер- шина	Тип задачи	КИНИН	Значения $l_{тек}$							
			0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
			$a_1 = 1, l_2 = l_{тек}$; на берегах задана одинаковая температура							
А	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,066	1,158	3,220	4,707	7,258	-0,147	4,756
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,002	0,040	0,481	0,523	-0,553	-5,678	1,873
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	-0,235	-4,356	-13,048	-18,106	-23,210	-70,786	-1122,393
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,000	-0,001	-0,020	-0,562	-2,219	-4,888	-9,496	-126,347
		$k_D^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,000	-0,009	-0,051	-0,056	-0,044	-0,135	0,188
		$k_E^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,004	1,285	7,177	7,827	6,312	19,667	-9,861
		$k_B^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,194	3,439	9,706	13,691	19,246	67,355	926,484
		$k_H^- \cdot 10^{-2}$	0,000	-0,002	-0,041	-0,117	-0,164	-0,230	-0,805	-11,037
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,003	-0,181	-2,497	-8,302	-26,609	-286,577	-6614,612
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	0,038	0,706	1,544	-1,372	-3,278	42,720	1936,335
			$a_1 = 1, l_2 = l_{тек}$; берега теплоизолированы							
А	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,009	0,075	0,332	0,095	-0,196	1,529	0,019
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	-9,533	-9,552	-9,621	-9,183	-8,430	-7,882	-8,636	-10,128
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	-0,004	-0,008	-0,148	-0,264	0,217	1,085	5,130
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	3,973	3,991	4,026	4,641	4,999	4,498	3,271	1,802
		$k_D^- \cdot 10^{-2}$	0,000	-0,014	-0,076	-0,186	-0,196	-0,176	-0,144	-0,031
		$k_E^- \cdot 10^{-2}$	0,000	1,921	10,445	25,489	26,837	23,997	19,707	4,273
		$k_B^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,004	-0,002	0,000	0,014
		$k_H^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,000	-0,001	-0,003	-0,004	-0,003	-0,003	-0,001
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	1,538	3,949	8,724	8,585	6,806	1,648	-4,958
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	0,860	4,236	4,066	1,397	-0,861	-1,315	-0,554
			$a_1 = l_{тек}, l_2 = 1$; на берегах задана одинаковая температура							
А	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	0,005	-0,005	2,566	4,707	9,108	36,622	66,012
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	0,002	-0,180	-0,196	0,523	1,360	1,265	1,698
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	-1,122	-2,238	-8,206	-18,106	-36,904	-137,736	-235,129
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,126	-0,300	-1,728	-2,219	-1,589	-0,620	-0,712
		$k_D^- \cdot 10^{-2}$	—	0,000	-0,004	-0,015	-0,056	-0,145	-0,285	0,320
		$k_E^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,010	0,622	2,232	7,827	20,299	40,648	3,587
		$k_B^- \cdot 10^{-2}$	—	0,926	2,130	6,804	13,691	27,453	108,760	193,941
		$k_H^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,011	-0,025	-0,081	-0,164	-0,330	-1,300	-2,342
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	-9,533	-6,615	-9,062	-9,408	-8,302	-7,062	-5,730	-3,004
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	3,973	1,936	1,351	-1,159	-1,372	4,367	22,332	38,309

Продолжение таблицы А. 3.9

$a_1 = l_{тек}, l_2 = 1$; берега теплоизолированы										
А	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	0,000	0,048	-0,069	0,095	0,940	2,359	8,612
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,010	-0,273	-2,787	-8,430	-25,973	-304,252	-9551,882
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	0,005	0,034	0,077	-0,264	-0,419	-0,253	-3,803
		$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	0,002	0,103	1,590	4,999	13,127	127,323	3990,732
		$k_D^- \cdot 10^{-2}$	—	0,000	-0,005	-0,062	-0,196	-0,527	-2,416	-14,030
		$k_E^- \cdot 10^{-2}$	—	0,004	0,623	8,484	26,837	72,093	330,309	1920,901
		$k_B^- \cdot 10^{-2}$	—	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,010	-0,041	-0,191
		$k_H^- \cdot 10^{-2}$	—	0,000	0,000	-0,001	-0,004	-0,009	-0,044	-0,276
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	-0,005	0,052	2,406	8,585	24,676	124,863	1537,623
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	-0,001	-0,042	-0,304	1,397	11,501	133,945	860,410

Таблица А.3.10. Значения КИНИН для вершин А, В крестообразной трещины (рис. 3.7) в пластинке из материала М1, в зависимости от значений полуэллипсов составляющих трещин

Вершина	Тип задачи	КИНИН	Значения $a_{тек}$							
			0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100
			$a_1 = 1, a_2 = a_{тек}$; на берегах задана одинаковая температура							
А	ТУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,001	0,078	0,929	0,974	-0,539	-3,803	-4,587
	ТЭМУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,000	-0,051	-2,121	-5,999	-9,143	-10,427	-4,850
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,007	-0,220	-3,139	-9,493	-26,980	-301,436	-9530,607
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	0,015	-0,018	-0,298	2,864	11,041	125,629	3970,961
			$a_1 = 1, a_2 = a_{тек}$; берега теплоизолированы							
А	ТУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	-9,533	-9,578	-9,769	-8,559	-6,450	-5,049	-5,346	-7,804
	ТЭМУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	3,973	3,990	4,165	7,136	7,573	4,923	-0,253	1,649
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	2,768	4,797	8,945	8,359	6,350	2,963	0,962
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	—	0,792	8,375	6,819	-0,384	-2,390	-1,256	-0,402
			$a_1 = a_{тек}, a_2 = 1$; на берегах задана одинаковая температура							
А	ТУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,005	-0,120	-0,191	0,974	2,626	2,454	0,912
	ТЭМУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,005	-0,330	-3,233	-5,999	-6,000	-1,616	-0,396
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	-9,533	-9,531	-9,532	-9,539	-9,493	-8,879	-6,966	-7,400
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	3,973	3,971	3,973	3,904	2,864	-0,844	-0,563	14,514
			$a_1 = a_{тек}, a_2 = 1$; берега теплоизолированы							
А	ТУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	-0,008	-0,169	-1,785	-6,450	-24,209	-308,932	-9577,822
	ТЭМУ	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	—	0,002	-0,008	1,741	7,573	20,184	131,722	3990,490
В	ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,001	0,094	2,245	8,359	25,301	151,707	2768,414
	ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,000	0,000	-0,040	-0,845	-0,384	19,286	264,844	791,543

Таблица А. 3.11. Значения КИН $k_1^+ \cdot 10^{-2}$ для вершины A_1 звездообразной трещины с $\mathcal{L}$ лучами (рис. 3.8) в пластинке из материала М1, на берегах которой задана температура, в зависимости от значения $\mathcal{L}$

Тип задачи	Значения $\mathcal{L}$				
	1	2	4	6	8
	На берегах трещины задана температура				
ТУ	3,3710	9,5519	9,4929	10,6231	10,7595
ТЭМУ	-1,4053	-3,9907	-2,8524	1,5499	4,0514
	Берега трещины теплоизолированы				
ТУ	0,0000	0,0000	-8,3438	-10,2718	-10,2513
ТЭМУ	0,0000	0,0000	0,3844	1,8789	5,0058

Таблица А. 3.12. Значения КИН $k_1^- \cdot 10^{-2}$ для нижних вершин трещин бесконечного ряда трещин (рис. 3.9), когда на их берегах задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a расстояния между трещинами к их полудлинам

Материал	Тип задачи	c/a					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
М1	ТУ	-9,5325	-10,0608	-14,7610	-14,4943	-11,7872	-5,7783
	ТЭМУ	3,9728	2,0669	-11,4150	-13,1022	-11,0780	-5,3790
М3	ТУ	2,5205	2,5649	3,3007	3,4716	2,8874	1,4457
	ТЭМУ	2,8662	2,8880	3,1149	2,9266	2,3706	1,1698

Таблица А. 3.13. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия в пластинке с неподкрепленными круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной (рис. 3.10), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	θ , рад,	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	$\pi/12$	0,036	0,037	0,045	0,065	0,104	0,114
	$\pi/4$	0,204	0,204	0,209	0,207	0,195	0,166
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,472	0,465	0,460	0,455
	$3\pi/4$	0,204	0,204	0,201	0,198	0,197	0,197
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,188	-0,188	-0,195	-0,223	-0,290	-0,310
	$\pi/4$	-0,448	-0,449	-0,452	-0,451	-0,431	-0,372
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,481	0,490	0,502	0,517
	$3\pi/4$	-0,448	-0,448	-0,446	-0,442	-0,439	-0,435
		Материал М2					
ТУ	$\pi/12$	-0,001	-0,001	-0,002	-0,003	-0,004	-0,005
	$\pi/4$	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,006
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,014
	$3\pi/4$	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,005	-0,005	-0,005	-0,006	-0,008	0,040
	$\pi/4$	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,026
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,014	-0,010
	$3\pi/4$	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,008
		Материал М3					
ТУ	$\pi/12$	-0,014	-0,014	-0,016	-0,021	-0,036	-0,054
	$\pi/4$	-0,090	-0,090	-0,092	-0,094	-0,090	-0,071
	$\pi/2$	-0,094	-0,094	-0,093	-0,092	-0,090	-0,087
	$3\pi/4$	-0,090	-0,090	-0,089	-0,087	-0,086	-0,085
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,029	-0,030	-0,032	-0,040	-0,056	-0,059
	$\pi/4$	-0,110	-0,110	-0,111	-0,111	-0,105	-0,091
	$\pi/2$	-0,091	-0,091	-0,089	-0,086	-0,083	-0,080
	$3\pi/4$	-0,110	-0,110	-0,109	-0,108	-0,107	-0,106

Таблица А. 3.14. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия в пластинке с неподкрепленными круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной (рис. 3.10), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	θ , рад,	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,016	0,058	0,139	0,265	0,434
	$\pi/4$	-0,204	-0,172	-0,117	-0,114	-0,144	-0,256
	$\pi/2$	-0,476	-0,485	-0,552	-0,608	-0,667	-0,778
	$3\pi/4$	-0,204	-0,234	-0,287	-0,313	-0,339	-0,389
ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,200	0,281	0,385	0,518	0,531
	$\pi/4$	0,448	0,439	0,357	0,250	0,140	-0,017
	$\pi/2$	-0,476	-0,492	-0,580	-0,626	-0,663	-0,729
	$3\pi/4$	0,448	0,457	0,497	0,531	0,567	0,632
		Материал М2					
ТУ	$\pi/12$	0,001	0,001	-0,002	-0,005	-0,010	-0,017
	$\pi/4$	0,008	0,007	0,005	0,005	0,006	0,010
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,017	0,019	0,020	0,024
	$3\pi/4$	0,008	0,009	0,011	0,012	0,013	0,015
ТЭМУ	$\pi/12$	0,005	0,004	0,001	-0,002	-0,006	0,039
	$\pi/4$	0,011	0,010	0,008	0,007	0,007	-0,005
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,018	0,020	0,022	0,030
	$3\pi/4$	0,011	0,012	0,014	0,015	0,016	0,020
		Материал М3					
ТУ	$\pi/12$	0,015	0,010	-0,009	-0,028	-0,061	-0,131
	$\pi/4$	0,101	0,088	0,064	0,057	0,062	0,105
	$\pi/2$	0,105	0,106	0,118	0,129	0,141	0,166
	$3\pi/4$	0,101	0,112	0,135	0,148	0,161	0,187
ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,028	0,013	-0,001	-0,023	-0,063
	$\pi/4$	0,123	0,110	0,082	0,069	0,062	0,073
	$\pi/2$	0,101	0,103	0,117	0,130	0,145	0,176
	$3\pi/4$	0,123	0,134	0,158	0,171	0,184	0,210

Таблица А. 3.15. Значения КИН $k_2^{\pm} \cdot 10^{-2}$ для вершин трещины в пластинке с неподкрепленными круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной (рис. 3.10), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	Вершина трещины	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	левая	0,0000	-1,6381	-4,7446	-5,7060	-5,9321	-6,5565
	правая	0,0000	-1,5101	-3,9180	-4,7736	-5,3044	-5,8570
ТЭМУ	левая	0,0000	0,7731	4,6283	8,1563	11,0172	12,0115
	правая	0,0000	0,7000	3,0245	4,7480	6,3180	8,4992
		Материал М2					
ТУ	левая	0,0000	0,0562	0,1676	0,2076	0,2214	0,2474
	правая	0,0000	0,0518	0,1367	0,1687	0,1897	0,2123
ТЭМУ	левая	0,0000	0,0659	0,2040	0,2672	0,3079	-0,0051
	правая	0,0000	0,0607	0,1635	0,2062	0,2374	0,2886
		Материал М3					
ТУ	левая	0,0000	0,4634	1,4863	1,9909	2,2814	2,5958
	правая	0,0000	0,4265	1,1747	1,5018	1,7456	2,0285
ТЭМУ	левая	0,0000	0,5284	1,7374	2,3841	2,8331	3,4870
	правая	0,0000	0,4862	1,3603	1,7604	2,0729	2,4680

Таблица А. 3.16. Значения КИН $k_2^{\pm} \cdot 10^{-2}$ для вершин трещины в пластинке с неподкрепленными круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной (рис. 3.10), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	Вершина трещины	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	левая	-9,5325	-7,9676	-5,7504	-6,2232	-8,7141	-19,6978
	правая	9,5325	11,1043	13,9527	15,1463	15,9576	16,7645
ТЭМУ	левая	3,9728	3,2403	-0,3093	-4,3976	-9,7319	-26,5055
	правая	-3,9728	-4,6897	-7,1422	-9,1911	-11,4485	-15,9888
		Материал М2					
ТУ	левая	0,3257	0,2720	0,1894	0,1958	0,2722	0,6462
	правая	-0,3257	-0,3796	-0,4806	-0,5258	-0,5588	-0,5952
ТЭМУ	левая	0,3809	0,3181	0,2151	0,1952	0,2187	0,0283
	правая	-0,3809	-0,4439	-0,5631	-0,6211	-0,6703	-0,7337
		Материал М3					
ТУ	левая	2,5205	2,6548	1,7682	1,6156	2,1076	5,2049
	правая	-2,5205	-3,6473	-4,6387	-5,1427	-5,5567	-6,1011
ТЭМУ	левая	2,8662	3,0189	1,9880	1,7017	1,8663	3,4858
	правая	-2,8662	-4,1477	-5,2764	-5,8587	-6,3609	-7,1360

Таблица А. 3.18. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия в пластинке с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной (рис. 3.11), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	θ , рад,	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	$\pi/12$	0,036	0,015	-0,030	0,024	0,104	0,162
	$\pi/4$	0,204	0,168	0,118	0,109	0,077	-0,021
	$\pi/2$	0,476	0,482	0,509	0,500	0,479	0,448
	$3\pi/4$	0,204	0,234	0,260	0,252	0,239	0,223
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,188	-0,200	-0,240	-0,148	-0,057	-0,045
	$\pi/4$	-0,448	-0,435	-0,287	-0,184	-0,144	-0,092
	$\pi/2$	0,476	0,490	0,560	0,569	0,564	0,552
	$3\pi/4$	-0,448	-0,454	-0,467	-0,471	-0,469	-0,463
		Материал М2					
ТУ	$\pi/12$	-0,001	-0,001	0,001	0,000	-0,004	-0,007
	$\pi/4$	-0,008	-0,007	-0,005	-0,005	-0,003	0,001
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,016	-0,016	-0,015	-0,014
	$3\pi/4$	-0,008	-0,009	-0,010	-0,010	-0,009	-0,009
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,005	-0,004	-0,003	-0,004	-0,005	-0,008
	$\pi/4$	-0,011	-0,010	-0,007	-0,005	-0,004	-0,001
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,012
	$3\pi/4$	-0,011	-0,012	-0,013	-0,013	-0,012	-0,012
		Материал М3					
ТУ	$\pi/12$	-0,014	-0,009	0,005	-0,004	-0,032	-0,052
	$\pi/4$	-0,090	-0,079	-0,058	-0,057	-0,045	0,008
	$\pi/2$	-0,094	-0,094	-0,099	-0,098	-0,094	-0,089
	$3\pi/4$	-0,090	-0,099	-0,110	-0,108	-0,103	-0,097
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,029	-0,025	-0,017	-0,023	-0,033	-0,045
	$\pi/4$	-0,110	-0,098	-0,071	-0,057	-0,042	-0,006
	$\pi/2$	-0,091	-0,092	-0,094	-0,090	-0,084	-0,075
	$3\pi/4$	-0,110	-0,119	-0,128	-0,126	-0,123	-0,117

Таблица А. 3.18. Значения напряжений σ_s в точках контура отверстия в пластинке с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной (рис. 3.11), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	θ , рад,	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	$\pi/12$	-0,036	-0,037	-0,055	-0,105	-0,170	-0,258
	$\pi/4$	-0,204	-0,204	-0,212	-0,206	-0,169	-0,026
	$\pi/2$	-0,476	-0,476	-0,467	-0,450	-0,434	-0,431
	$3\pi/4$	-0,204	-0,204	-0,198	-0,194	-0,192	-0,200
ТЭМУ	$\pi/12$	0,188	0,190	0,238	0,241	0,223	0,202
	$\pi/4$	0,448	0,450	0,435	0,384	0,310	0,107
	$\pi/2$	-0,476	-0,477	-0,514	-0,548	-0,580	-0,620
	$3\pi/4$	0,448	0,447	0,435	0,431	0,432	0,450
		Материал М2					
ТУ	$\pi/12$	0,001	0,001	0,002	0,004	0,007	0,011
	$\pi/4$	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	0,001
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,015	0,014	0,014	0,014
	$3\pi/4$	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	0,008
ТЭМУ	$\pi/12$	0,005	0,005	0,006	0,008	0,011	0,015
	$\pi/4$	0,011	0,011	0,011	0,010	0,008	0,003
	$\pi/2$	0,015	0,015	0,014	0,013	0,011	0,010
	$3\pi/4$	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011	0,011
		Материал М3					
ТУ	$\pi/12$	0,015	0,016	0,020	0,035	0,058	0,091
	$\pi/4$	0,101	0,101	0,104	0,104	0,088	0,012
	$\pi/2$	0,105	0,105	0,103	0,100	0,096	0,095
	$3\pi/4$	0,101	0,101	0,098	0,096	0,095	0,098
ТЭМУ	$\pi/12$	0,033	0,033	0,041	0,055	0,070	0,091
	$\pi/4$	0,123	0,123	0,126	0,120	0,097	0,022
	$\pi/2$	0,101	0,101	0,096	0,086	0,076	0,070
	$3\pi/4$	0,123	0,122	0,120	0,118	0,117	0,122

Таблица А. 3.19. Значения КИНИН для нижней вершины трещины в пластинке с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной (рис. 3.11), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	КИНИН	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	-9,5325	-9,7967	-11,3950	-11,7772	-12,0633	-12,5323
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	1,6562	3,8470	3,9633	3,6548	2,5405
ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	3,9728	3,0334	-0,9074	-0,9115	-0,2761	0,5776
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,8690	-5,2187	-7,0451	-7,4484	-7,1756
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,0674	0,1531	0,1648	0,1669	0,1645
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-3,1898	-11,0008	-13,6187	-14,2760	-13,9980
	$k_B^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	481,0982	1244,6689	1400,8446	1426,5133	1391,7037
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-1,6120	-4,1763	-4,7026	-4,7893	-4,6722
		Материал М2					
ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,3257	0,3328	0,3811	0,3943	0,4039	0,4231
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,0570	-0,1384	-0,1437	-0,1339	-0,0918
ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,3809	0,3864	0,4075	0,4130	0,4229	0,4477
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,0669	-0,1835	-0,2127	-0,2143	-0,1756
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,0007	-0,0018	-0,0021	-0,0021	-0,0020
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,2150	-2,2100	-3,9874	-4,9831	-3,9003
	$k_B^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,2724	0,8302	0,9931	1,0562	1,1052
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,0200	-0,0595	-0,0717	-0,0753	-0,0700
		Материал М3					
ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	2,5205	2,5443	2,8007	2,9770	3,1427	3,3727
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,4751	-1,3152	-1,4110	-1,3002	-0,8926
ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	2,8662	2,8783	3,0119	3,1658	3,3710	3,6158
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,5419	-1,5960	-1,8477	-1,7860	-1,4329
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,0024	0,0071	0,0096	0,0140	0,0235
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,9977	-2,6578	-2,8625	-2,7341	-2,4848
	$k_B^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,2505	0,9182	1,3049	1,6191	1,9757
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,0701	-0,2211	-0,2734	-0,2860	-0,2656

Таблица А. 3.20. Значения КИНИН для нижней вершины трещины в пластинке с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной (рис. 3.11), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия

Тип задачи	КИНИН	Значения c/a_1					
		∞	10	2	1	0,5	0,1
		Материал М1					
ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,3475	3,4055	5,7905	8,0384	11,0190
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-1,6766	-4,3573	-4,6421	-4,1122	-2,4709
ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,8928	3,6958	2,4822	0,6627	-0,9379
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,8884	5,4928	7,4881	7,8356	7,4046
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,0669	-0,1441	-0,1547	-0,1643	-0,1850
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	3,2034	11,2580	14,1088	14,9572	15,3373
	$k_B^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-477,8610	-1186,3704	-1339,6140	-1411,5112	-1515,1410
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	1,6012	3,9817	4,4985	4,7398	5,0858
		Материал М2					
ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,0099	-0,1044	-0,1844	-0,2625	-0,3703
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,0577	0,1569	0,1708	0,1535	0,0900
ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,0092	-0,0994	-0,1849	-0,2737	-0,3971
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,0679	0,2013	0,2403	0,2401	0,1815
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,0007	0,0018	0,0021	0,0021	0,0021
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,2415	3,0958	5,8839	7,2851	4,9590
	$k_B^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,2680	-0,7664	-0,9314	-1,0570	-1,2734
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,0200	0,0609	0,0756	0,0816	0,0781
		Материал М3					
ТУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,0468	-0,6509	-1,4157	-2,2455	-3,3026
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,5362	1,6522	1,8647	1,6351	0,9655
ТЭМУ	$k_1^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	-0,0379	-0,6622	-1,5487	-2,5252	-3,6510
	$k_2^- \cdot 10^{-2}$	0,0000	0,6130	1,9644	2,3120	2,1430	1,5747
	$k_D^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,0024	-0,0012	-0,0019	-0,0115	-0,0338
	$k_E^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	1,1194	3,0205	3,1542	2,9169	2,7623
	$k_B^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	-0,2673	-0,7676	-1,2046	-1,8090	-2,7177
	$k_H^- \cdot 10^{-4}$	0,0000	0,0784	0,2541	0,3226	0,3403	0,3239

Таблица А. 3.21. Значения напряжений σ_s в точках контура кругового отверстия в пластинке с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной (рис. 3.12), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения l_2/a_1 длины трещины к радиусу отверстия

Тип задачи	θ , рад,	Значения l_2/a_1								
		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
		Материал М1								
ТУ	$\pi/12$	0,036	0,029	0,010	-0,003	-0,011	-0,016	-0,019	-0,021	-0,023
	$\pi/4$	0,204	0,203	0,198	0,187	0,176	0,163	0,151	0,140	0,131
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,475	0,472	0,469	0,464	0,458	0,452	0,446
	$3\pi/4$	0,204	0,204	0,204	0,202	0,202	0,200	0,198	0,196	0,194
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,188	-0,156	-0,097	-0,061	-0,044	-0,034	-0,028	-0,024	-0,022
	$\pi/4$	-0,448	-0,445	-0,430	-0,404	-0,376	-0,350	-0,328	-0,308	-0,293
	$\pi/2$	0,476	0,476	0,479	0,486	0,495	0,505	0,516	0,528	0,539
	$3\pi/4$	-0,448	-0,448	-0,448	-0,446	-0,444	-0,441	-0,437	-0,434	-0,430
		Материал М2								
ТУ	$\pi/12$	-0,001	-0,001	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
	$\pi/4$	-0,008	-0,008	-0,008	-0,007	-0,007	-0,006	-0,006	-0,005	-0,005
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,014	-0,014	-0,014
	$3\pi/4$	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,008	-0,007
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,005	-0,003	0,006	0,006	0,009	0,009	0,005	0,010	0,010
	$\pi/4$	-0,011	-0,011	-0,014	-0,013	-0,014	-0,014	-0,011	-0,013	-0,012
	$\pi/2$	-0,015	-0,015	-0,014	-0,014	-0,013	-0,013	-0,013	-0,013	-0,012
	$3\pi/4$	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,011	-0,010	-0,010
		Материал М3								
ТУ	$\pi/12$	-0,014	-0,009	-0,001	0,002	0,004	0,005	0,006	0,006	0,006
	$\pi/4$	-0,090	-0,089	-0,085	-0,077	-0,070	-0,063	-0,058	-0,053	-0,049
	$\pi/2$	-0,094	-0,094	-0,093	-0,092	-0,091	-0,089	-0,088	-0,086	-0,084
	$3\pi/4$	-0,090	-0,090	-0,090	-0,089	-0,088	-0,087	-0,086	-0,084	-0,083
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,029	-0,024	-0,014	-0,006	-0,003	0,000	0,001	0,002	0,003
	$\pi/4$	-0,110	-0,109	-0,106	-0,100	-0,093	-0,086	-0,080	-0,076	-0,071
	$\pi/2$	-0,091	-0,091	-0,090	-0,089	-0,087	-0,084	-0,081	-0,078	-0,075
	$3\pi/4$	-0,110	-0,110	-0,110	-0,109	-0,109	-0,108	-0,107	-0,106	-0,105

Таблица А. 3.22. Значения напряжений σ_s в точках контура кругового отверстия в пластинке с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной (рис. 3.12), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения l_2/a_1 длины трещины к радиусу отверстия

Тип задачи	θ, рад,	Значения l_2/a_1								
		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
		Материал М1								
ТУ	π/12	-0,036	-0,034	-0,036	-0,037	-0,038	-0,039	-0,039	-0,039	-0,039
	π/4	-0,204	-0,220	-0,258	-0,307	-0,359	-0,413	-0,466	-0,518	-0,569
	π/2	-0,476	-0,498	-0,549	-0,619	-0,699	-0,788	-0,882	-0,980	-1,081
	3π/4	-0,204	-0,215	-0,242	-0,278	-0,322	-0,372	-0,426	-0,483	-0,544
ТЭМУ	π/12	0,188	-0,006	-0,006	-0,135	-0,218	-0,269	-0,302	-0,321	-0,331
	π/4	0,448	0,412	0,412	0,321	0,188	0,033	-0,132	-0,299	-0,464
	π/2	-0,476	-0,509	-0,509	-0,551	-0,609	-0,680	-0,762	-0,852	-0,948
	3π/4	0,448	0,497	0,497	0,540	0,586	0,634	0,682	0,730	0,777
		Материал М2								
ТУ	π/12	0,001	0,001	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
	π/4	0,008	0,009	0,010	0,012	0,014	0,016	0,018	0,020	0,022
	π/2	0,015	0,016	0,017	0,019	0,022	0,024	0,027	0,030	0,033
	3π/4	0,008	0,008	0,009	0,011	0,012	0,014	0,016	0,018	0,021
ТЭМУ	π/12	0,005	0,004	0,002	0,000	-0,002	-0,003	-0,004	-0,004	-0,005
	π/4	0,011	0,012	0,012	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013	0,013
	π/2	0,015	0,016	0,018	0,021	0,024	0,027	0,030	0,034	0,037
	3π/4	0,011	0,012	0,013	0,014	0,016	0,018	0,020	0,022	0,024
		Материал М3								
ТУ	π/12	0,015	0,013	0,010	0,008	0,008	0,008	0,007	0,007	0,007
	π/4	0,101	0,109	0,125	0,142	0,160	0,179	0,197	0,216	0,234
	π/2	0,105	0,110	0,122	0,138	0,155	0,173	0,192	0,212	0,232
	3π/4	0,101	0,107	0,120	0,139	0,160	0,183	0,208	0,234	0,262
ТЭМУ	π/12	0,033	0,028	0,011	-0,002	-0,009	-0,014	-0,016	-0,018	-0,019
	π/4	0,123	0,127	0,133	0,133	0,130	0,126	0,121	0,116	0,111
	π/2	0,101	0,108	0,124	0,142	0,163	0,185	0,207	0,230	0,253
	3π/4	0,123	0,129	0,143	0,161	0,182	0,206	0,230	0,256	0,282

Таблица А. 3.23. Значения КИН $k_2^+ \cdot 10^{-2}$ для вершины трещины в пластинке с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной (рис. 3.12), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения l_2/a_1 длины трещины к радиусу отверстия

Тип задачи	Значения l_2/a_1							
	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
Материал М1								
ТУ	-1,0143	-2,4683	-3,7245	-4,7132	-5,4646	-6,0324	-6,4604	-6,7808
ТЭМУ	4,0540	7,3501	9,3944	10,4548	10,9510	11,0981	11,0283	10,8420
Материал М2								
ТУ	0,0417	0,0978	0,1439	0,1787	0,2042	0,2228	0,2364	0,2463
ТЭМУ	0,0775	0,1241	0,1939	0,2379	0,2691	0,3042	0,3061	0,3154
Материал М3								
ТУ	0,4650	1,1104	1,5826	1,8913	2,0923	2,2235	2,3086	2,3628
ТЭМУ	0,7386	1,5542	2,1120	2,4706	2,7036	2,8529	2,9463	3,0028

Таблица А. 3.24. Значения КИН $k_2^+ \cdot 10^{-2}$ для вершины трещины в пластинке с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной (рис. 3.12), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения l_2/a_1 длины трещины к радиусу отверстия

Тип задачи	Значения l_2/a_1							
	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
Материал М1								
ТУ	0,7796	2,3716	4,4228	6,7636	9,3026	11,9880	14,2200	17,6836
ТЭМУ	-5,8713	-12,2037	-17,1461	-20,8524	-23,6594	-25,8473	-27,6177	-29,1123
Материал М2								
ТУ	-0,0320	-0,0953	-0,1733	-0,2595	-0,3511	-0,4467	-0,5454	-0,6469
ТЭМУ	-0,1111	-0,2371	-0,3543	-0,4668	-0,5770	-0,6867	-0,7971	-0,9087
Материал М3								
ТУ	-0,4426	-1,3190	-2,2780	-3,2417	-4,2067	-5,1782	-6,1603	-7,1557
ТЭМУ	-1,0200	-2,3436	-3,5586	-4,6815	-5,7556	-6,8106	-7,8638	-8,9254

Таблица А. 3.25. Значения напряжений σ_s в точках контура кругового отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и вертикальной краевой трещиной (рис. 3.13), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения l_2/a_1 длины трещины к радиусу отверстия

Тип задачи	θ , рад,	Значения l_2/a_1								
		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
ТУ	$-\pi/2$	-0,476	-0,598	-0,676	-0,726	-0,756	-0,793	-0,815	-0,840	-0,851
	$-5\pi/12$	-0,433	-0,549	-0,625	-0,673	-0,701	-0,737	-0,759	-0,782	-0,793
	$-\pi/3$	-0,327	-0,429	-0,497	-0,541	-0,567	-0,600	-0,621	-0,640	-0,649
	$-\pi/4$	-0,204	-0,290	-0,349	-0,387	-0,410	-0,438	-0,458	-0,473	-0,481
	$-\pi/6$	-0,102	-0,172	-0,223	-0,255	-0,275	-0,299	-0,318	-0,327	-0,334
	$-\pi/12$	-0,036	-0,096	-0,140	-0,167	-0,183	-0,203	-0,221	-0,228	-0,234
	0	0,000	-0,056	-0,096	-0,120	-0,134	-0,152	-0,170	-0,175	-0,183
	$\pi/12$	0,036	-0,026	-0,068	-0,093	-0,108	-0,126	-0,145	-0,152	-0,164
	$\pi/6$	0,102	0,021	-0,032	-0,063	-0,083	-0,104	-0,126	-0,138	-0,152
	$\pi/4$	0,204	0,089	0,013	-0,031	-0,059	-0,083	-0,104	-0,118	-0,132
	$\pi/3$	0,327	0,142	0,031	-0,019	-0,045	-0,062	-0,075	-0,083	-0,090
	$5\pi/12$	0,433	0,070	-0,012	-0,024	-0,026	-0,026	-0,026	-0,025	-0,025
	$\pi/2$	0,476	—	—	—	—	—	—	—	—
ТЭМУ	$-\pi/2$	-0,476	-0,669	-0,811	-0,901	-0,954	-1,020	-1,079	-1,105	-1,133
	$-5\pi/12$	-0,120	-0,177	-0,222	-0,250	-0,266	-0,286	-0,305	-0,310	-0,318
	$-\pi/3$	0,330	0,471	0,569	0,631	0,671	0,717	0,759	0,784	0,805
	$-\pi/4$	0,448	0,696	0,872	0,984	1,053	1,136	1,210	1,249	1,285
	$-\pi/6$	0,357	0,645	0,852	0,983	1,062	1,158	1,244	1,285	1,325
	$-\pi/12$	0,188	0,489	0,704	0,839	0,918	1,015	1,102	1,138	1,176
	0	0,000	0,300	0,512	0,640	0,711	0,801	0,882	0,911	0,944
	$\pi/12$	-0,188	0,101	0,297	0,410	0,468	0,546	0,617	0,639	0,665
	$\pi/6$	-0,357	-0,095	0,073	0,163	0,203	0,266	0,325	0,342	0,364
	$\pi/4$	-0,448	-0,250	-0,134	-0,077	-0,054	-0,007	0,041	0,057	0,078
	$\pi/3$	-0,330	-0,278	-0,247	-0,227	-0,216	-0,184	-0,151	-0,135	-0,117
	$5\pi/12$	0,120	-0,095	-0,122	-0,123	-0,120	-0,115	-0,109	-0,105	-0,100
	$\pi/2$	0,476	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица А. 3.26. Значения КИН $k_2^+ \cdot 10^{-2}$ для вершины трещины в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и вертикальной краевой трещиной (рис. 3.13), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения l_2/a_1 длины трещины к радиусу отверстия

Тип задачи	Значения l_2/a_1							
	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
ТУ	3,4008	6,6432	10,3565	14,3779	18,3053	22,4355	27,2665	32,4185
ТЭМУ	-0,8033	-1,7042	-2,6363	-3,4911	-4,2852	-5,2617	-6,3325	-7,8550

Таблица А. 3.27. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия в пластинке с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями, соединенными узкой щелью (рис. 3.14), на контурах которых задана одинаковая температура, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстиями к их радиусу

Тип задачи	θ , рад,	Значения c/a_1						
		∞	10	2	1	0,5	0,1	0
		Материал М1						
ТУ	$\pi/12$	0,036	-0,029	-0,400	-0,045	-0,024	0,000	0,000
	$\pi/4$	0,204	0,077	0,064	0,040	0,024	0,004	-0,002
	$\pi/2$	0,476	0,449	0,527	0,528	0,523	0,514	0,511
	$3\pi/4$	0,204	0,247	0,309	0,309	0,305	0,297	0,295
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,188	-0,030	-0,094	-0,094	-0,040	0,000	0,000
	$\pi/4$	-0,448	-0,216	-0,210	-0,147	-0,104	-0,080	-0,076
	$\pi/2$	0,476	0,606	0,567	0,569	0,564	0,557	0,554
	$3\pi/4$	-0,448	-0,431	-0,495	-0,507	-0,511	-0,512	-0,512
		Материал М2						
ТУ	$\pi/12$	-0,001	0,001	0,002	0,002	0,001	0,000	0,000
	$\pi/4$	-0,008	-0,003	-0,003	-0,002	-0,002	-0,001	0,000
	$\pi/2$	-0,015	-0,014	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016
	$3\pi/4$	-0,008	-0,009	-0,012	-0,012	-0,012	-0,011	-0,011
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,005	0,009	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
	$\pi/4$	-0,011	-0,014	-0,005	-0,003	-0,002	-0,001	-0,001
	$\pi/2$	-0,015	-0,013	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016	-0,016
	$3\pi/4$	-0,011	-0,012	-0,015	-0,015	-0,015	-0,014	-0,014
		Материал М3						
ТУ	$\pi/12$	-0,014	0,006	0,009	0,012	0,010	-0,001	0,000
	$\pi/4$	-0,090	-0,032	-0,037	-0,028	-0,022	-0,014	-0,011
	$\pi/2$	-0,094	-0,084	-0,101	-0,102	-0,102	-0,101	-0,100
	$3\pi/4$	-0,090	-0,099	-0,129	-0,130	-0,129	-0,127	-0,126
ТЭМУ	$\pi/12$	-0,029	0,013	0,001	0,001	0,001	-0,001	0,000
	$\pi/4$	-0,110	-0,056	-0,043	-0,028	-0,018	-0,010	-0,007
	$\pi/2$	-0,091	-0,075	-0,099	-0,099	-0,098	-0,097	-0,096
	$3\pi/4$	-0,110	-0,118	-0,147	-0,149	-0,148	-0,146	-0,146

Таблица А. 3.28. Значения напряжений σ_s в точках контура левого отверстия в пластинке с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями, соединенными узкой щелью (рис. 3.14), контуры которых теплоизолированы, в зависимости от значения отношения c/a_1 расстояния между отверстиями к их радиусу

Тип задачи	θ , рад,	Значения c/a_1					
		10	2	1	0,5	0,1	0
		Материал М1					
ТУ	$\pi/12$	-0,008	0,012	0,046	0,031	0,009	0,002
	$\pi/4$	-2,386	-0,642	-0,354	-0,214	-0,060	-0,064
	$\pi/2$	-6,108	-1,844	-1,410	-1,210	-0,903	-0,970
	$3\pi/4$	-4,419	-1,146	-0,853	-0,719	-0,526	-0,564
ТЭМУ	$\pi/12$	0,224	-0,050	0,053	0,050	0,035	0,005
	$\pi/4$	-4,232	-1,492	-0,855	-0,534	-0,041	-0,162
	$\pi/2$	-4,230	-1,825	-1,459	-1,285	-0,930	-1,060
	$3\pi/4$	2,714	1,369	1,167	1,060	0,803	0,904
		Материал М2					
ТУ	$\pi/12$	0,002	0,000	-0,002	-0,001	-0,001	0,000
	$\pi/4$	0,094	0,028	0,016	0,010	0,003	0,004
	$\pi/2$	0,183	0,057	0,044	0,037	0,027	0,030
	$3\pi/4$	0,165	0,043	0,032	0,027	0,019	0,021
ТЭМУ	$\pi/12$	0,068	0,015	0,019	0,000	0,000	-0,001
	$\pi/4$	-0,045	-0,004	-0,007	0,000	0,001	0,000
	$\pi/2$	0,217	0,061	0,045	0,037	0,026	0,029
	$3\pi/4$	0,166	0,048	0,037	0,033	0,024	0,027
		Материал М3					
ТУ	$\pi/12$	-0,007	-0,004	-0,016	-0,017	-0,002	0,000
	$\pi/4$	0,965	0,307	0,185	0,123	0,044	0,053
	$\pi/2$	1,248	0,396	0,304	0,262	0,187	0,210
	$3\pi/4$	1,969	0,535	0,401	0,339	0,238	0,267
ТЭМУ	$\pi/12$	0,011	-0,010	-0,010	-0,002	0,004	0,000
	$\pi/4$	0,223	0,003	-0,008	-0,008	0,006	-0,006
	$\pi/2$	1,623	0,413	0,306	0,258	0,177	0,202
	$3\pi/4$	1,831	0,557	0,434	0,375	0,264	0,301

Таблица А. 4.1. Значения напряжений σ_s в пластинке в точках контура левого включения в пластинке из материала М1 с двумя включениями (рис. 4.3) при некоторых значениях параметров материала включений в зависимости значения отношения c/a_1 расстояния между включениями к их радиусу

θ , рад.	Значения $\lambda_{тек}$	Значения c/a_1					
		0	0,1	1	10	100	∞
		$\lambda_s^{(1)} = \lambda_{тек} ; \lambda_p^{(1)} = 2$					
$\pi/6$	0,00	0,128	0,130	0,132	0,103	0,088	0,086
	0,01	0,131	0,130	0,130	0,100	0,086	0,084
	0,10	0,114	0,112	0,111	0,080	0,067	0,065
	0,50	0,052	0,051	0,049	0,027	0,016	0,015
	1,00	0,004	0,004	0,004	-0,010	-0,018	-0,019
	2,00	-0,050	-0,050	-0,049	-0,051	-0,055	-0,056
	10,00	-0,153	-0,153	-0,146	-0,124	-0,120	-0,120
	100,00	-0,199	-0,198	-0,189	-0,150	-0,147	-0,147
	∞	-0,205	-0,204	-0,194	-0,160	-0,151	-0,150
$\pi/2$	0,00	0,249	0,247	0,267	0,268	0,269	0,269
	0,01	0,242	0,241	0,261	0,263	0,263	0,263
	0,10	0,206	0,204	0,233	0,225	0,224	0,224
	0,50	0,131	0,133	0,148	0,140	0,137	0,137
	1,00	0,104	0,106	0,118	0,103	0,098	0,098
	2,00	0,093	0,095	0,104	0,081	0,074	0,074
	10,00	0,110	0,109	0,112	0,077	0,068	0,068
	100,00	0,125	0,125	0,125	0,085	0,075	0,075
	∞	0,128	0,128	0,127	0,086	0,076	0,076
		$\lambda_s^{(1)} = 2 ; \lambda_p^{(1)} = \lambda_{тек}$					
$\pi/6$	0,00	-0,164	-0,163	-0,159	-0,136	-0,127	-0,125
	0,01	-0,163	-0,163	-0,158	-0,136	-0,126	-0,125
	0,10	-0,158	-0,158	-0,153	-0,132	-0,123	-0,122
	0,50	-0,136	-0,135	-0,131	-0,115	-0,109	-0,108
	1,00	-0,107	-0,106	-0,103	-0,094	-0,091	-0,091
	2,00	-0,050	-0,050	-0,049	-0,051	-0,055	-0,056
	10,00	0,377	0,377	0,365	0,267	0,211	0,203
	100,00	0,908	0,883	0,827	0,548	0,417	0,398
	∞	-0,121	-0,160	-0,106	-0,114	-0,118	-0,119
$\pi/2$	0,00	0,130	0,131	0,133	0,106	0,100	0,100
	0,01	0,130	0,130	0,133	0,106	0,100	0,100
	0,10	0,130	0,130	0,132	0,105	0,098	0,098
	0,50	0,120	0,121	0,126	0,100	0,093	0,093
	1,00	0,112	0,113	0,118	0,093	0,087	0,087
	2,00	0,093	0,095	0,104	0,081	0,074	0,074
	10,00	-0,044	-0,038	-0,003	-0,008	-0,016	-0,016
	100,00	-0,105	-0,093	-0,029	-0,005	-0,013	-0,013
	∞	0,176	0,180	0,174	0,161	0,159	0,159

Таблица А. 4.2. Значения напряжений σ_s в пластинке в точках контура левого включения в пластинке из материала М1 с двумя включениями (рис. 4.3) при $c/a_1 = 1$ в зависимости от значения параметра λ

θ , рад.	Значение λ						
	0	0,1	0,5	2	10	1000	∞
$\pi/12$	-0,023	0,056	0,066	-0,063	-0,033	-0,224	-0,127
$\pi/6$	-0,071	0,079	0,128	-0,180	-0,294	-0,009	-0,213
$\pi/4$	-0,186	0,034	0,158	-0,284	-0,636	-0,028	-0,149
$\pi/3$	-0,484	-0,190	0,084	-0,235	-0,645	-0,349	0,101
$5\pi/12$	-0,953	-0,638	-0,158	0,080	0,074	-0,052	0,493
$\pi/2$	-0,974	-0,784	-0,324	0,356	0,787	0,670	0,569
$7\pi/12$	-0,201	-0,186	-0,091	0,110	0,151	0,148	0,017
$2\pi/3$	0,414	0,356	0,170	-0,207	-0,602	-0,659	-0,434
$3\pi/4$	0,549	0,485	0,232	-0,278	-0,659	-0,717	-0,507
$5\pi/6$	0,429	0,382	0,180	-0,207	-0,395	-0,288	-0,382
$11\pi/12$	0,224	0,200	0,092	-0,103	-0,152	0,052	-0,197

Таблица А. 4.3. Значения напряжений σ_s в пластинке в точках $\theta = \pi/4$ контуров включений в пластинке с бесконечным рядом круговых включений при некоторых значениях отношения c/a расстояния между ними к их радиусу параметров материала включений и в зависимости от значений некоторых параметров материала включений

Параметр	Тип задачи	$\frac{c}{a}$	Значения параметра								
			0	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100	∞
λ_T	ТУ	∞	-0,142	-0,137	-0,096	0,027	0,111	0,196	0,319	0,360	0,365
		10,0	-0,173	-0,167	-0,121	0,018	0,111	0,203	0,335	0,378	0,383
		1,0	-0,796	-0,768	-0,563	-0,116	0,099	0,267	0,456	0,509	0,515
		0,1	-3,946	-3,489	-1,385	-0,061	0,232	0,400	0,548	0,583	0,587
	ТЭМУ	∞	0,612	0,607	0,567	0,446	0,363	0,280	0,159	0,118	0,113
		10,0	0,561	0,557	0,524	0,427	0,362	0,298	0,206	0,176	0,172
		1,0	-0,105	-0,092	0,002	0,204	0,300	0,374	0,456	0,478	0,480
		0,1	-2,157	-1,907	-0,814	0,060	0,265	0,385	0,493	0,519	0,522
λ_s	ТУ	∞	0,290	0,288	0,272	0,235	0,215	0,196	0,169	0,160	0,159
		10,0	0,288	0,286	0,271	0,238	0,219	0,203	0,181	0,174	0,173
		1,0	0,263	0,263	0,260	0,258	0,261	0,267	0,282	0,288	0,289
		0,1	0,246	0,246	0,251	0,266	0,278	0,291	0,316	0,327	0,328
	ТЭМУ	∞	0,318	0,311	0,312	0,307	0,297	0,280	0,237	0,215	0,212
		10,0	0,309	0,309	0,313	0,315	0,310	0,298	0,263	0,244	0,242
		1,0	0,285	0,287	0,306	0,347	0,364	0,374	0,375	0,371	0,371
		0,1	0,264	0,268	0,295	0,348	0,370	0,385	0,395	0,395	0,395
λ_p	ТЭМУ	∞	0,265	0,265	0,265	0,268	0,272	0,280	0,336	0,393	0,209
		10,0	0,282	0,282	0,283	0,286	0,290	0,298	0,356	0,417	0,223
		1,0	0,359	0,359	0,360	0,363	0,367	0,374	0,430	0,491	0,295
		0,1	0,370	0,370	0,371	0,374	0,378	0,385	0,439	0,491	0,314
λ_α	ТУ	∞	0,047	0,048	0,055	0,084	0,122	0,196	0,790	7,473	—
		10,0	0,056	0,057	0,063	0,093	0,130	0,203	0,792	7,419	—
		1,0	0,149	0,150	0,155	0,179	0,208	0,267	0,740	6,054	—
		0,1	0,264	0,264	0,270	0,298	0,332	0,400	0,946	7,087	—
	ТЭМУ	∞	0,123	0,124	0,131	0,162	0,202	0,280	0,905	7,939	—
		10,0	0,143	0,143	0,150	0,181	0,220	0,298	0,919	7,892	—
		1,0	0,251	0,251	0,257	0,281	0,312	0,374	0,868	6,421	—
		0,1	0,289	0,290	0,294	0,313	0,337	0,385	0,767	5,062	—

Приложение Б. Рисунки

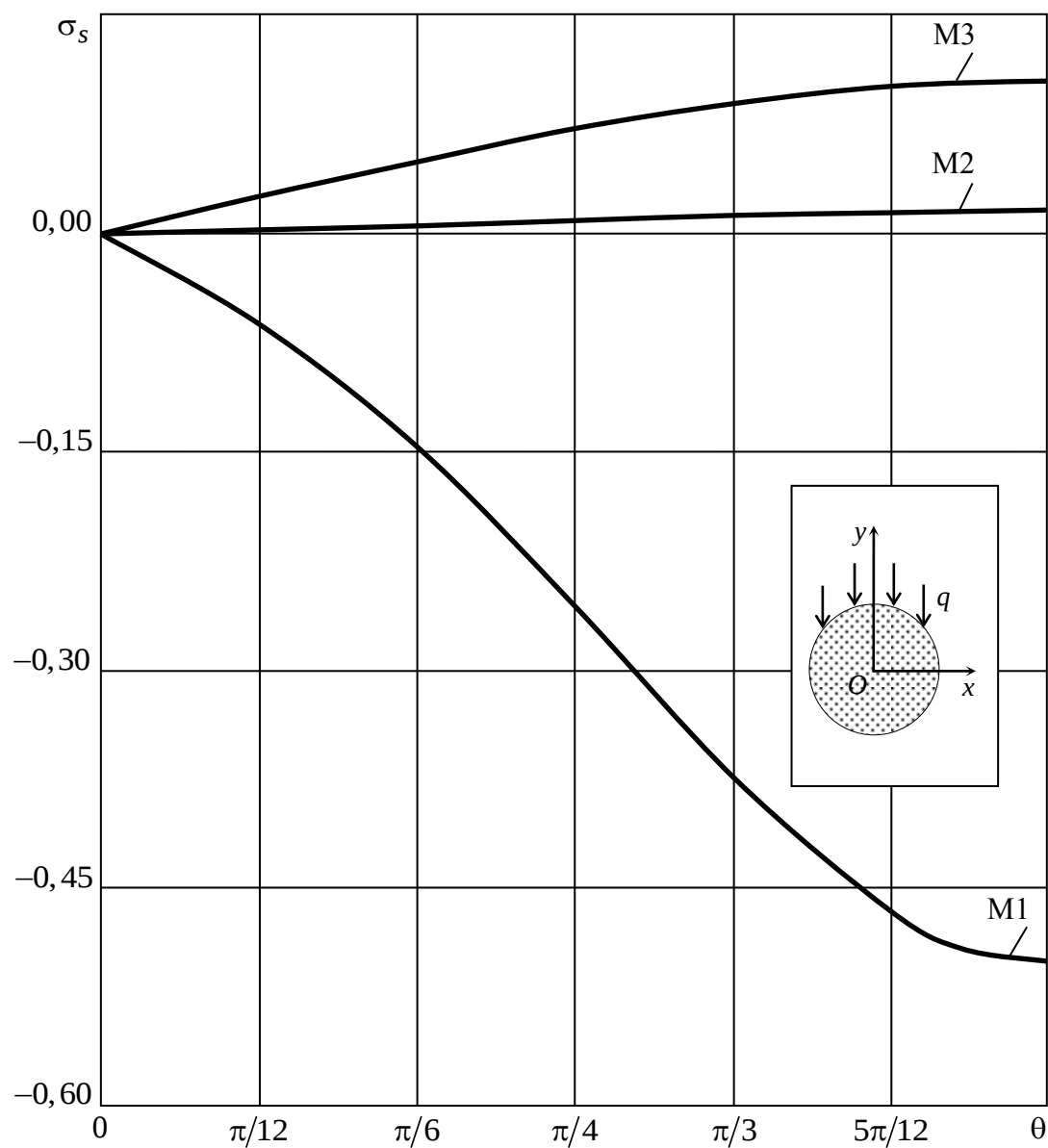


Рис. Б. 2.1. Графики распределения нормальных напряжений σ_s по контуру конечной сплошной круговой пластинки на площадках, перпендикулярных контуру.

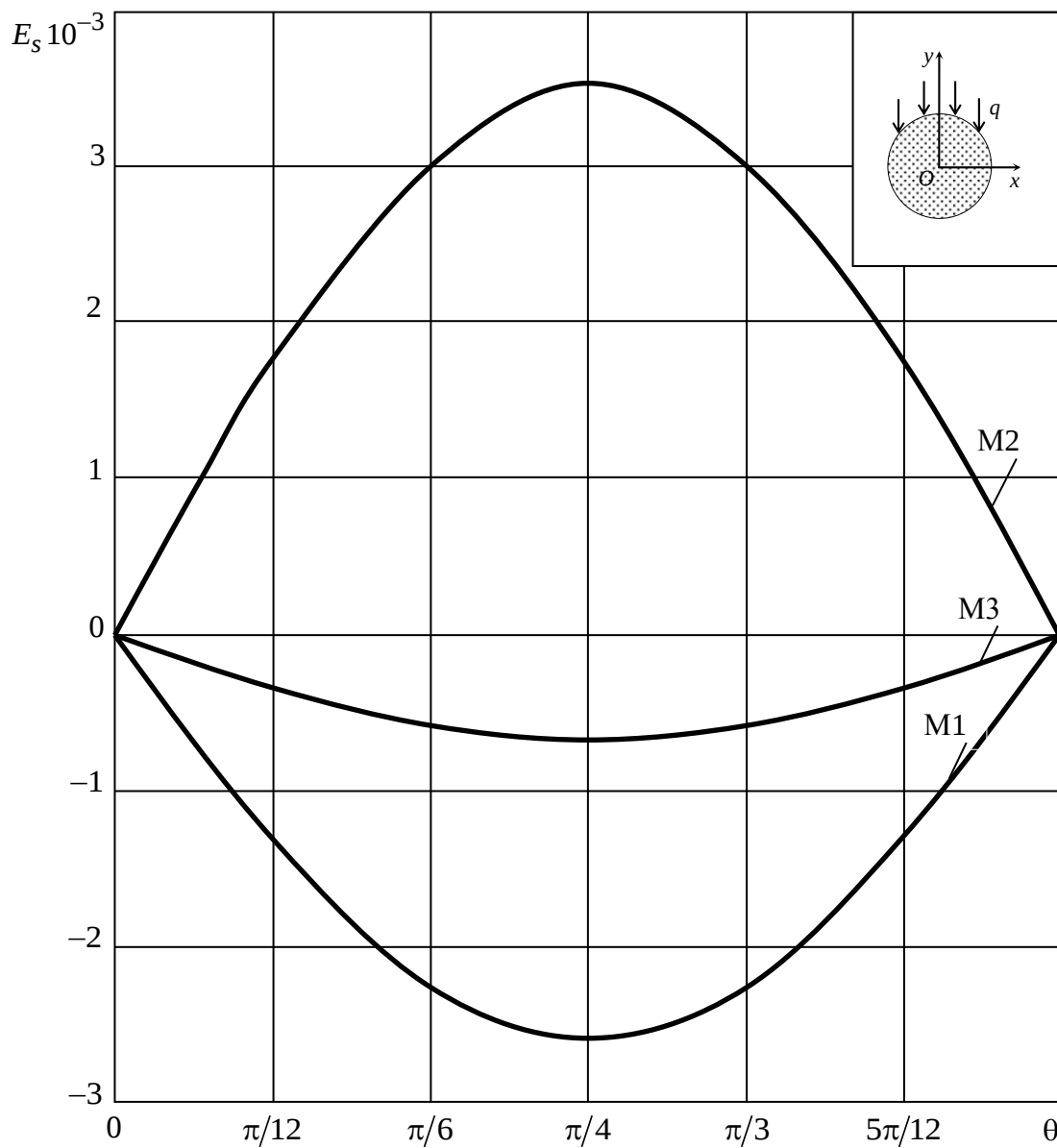


Рис. Б. 2.2. Графики распределения напряженностей E_s по контуру конечной сплошной круговой пластинки.

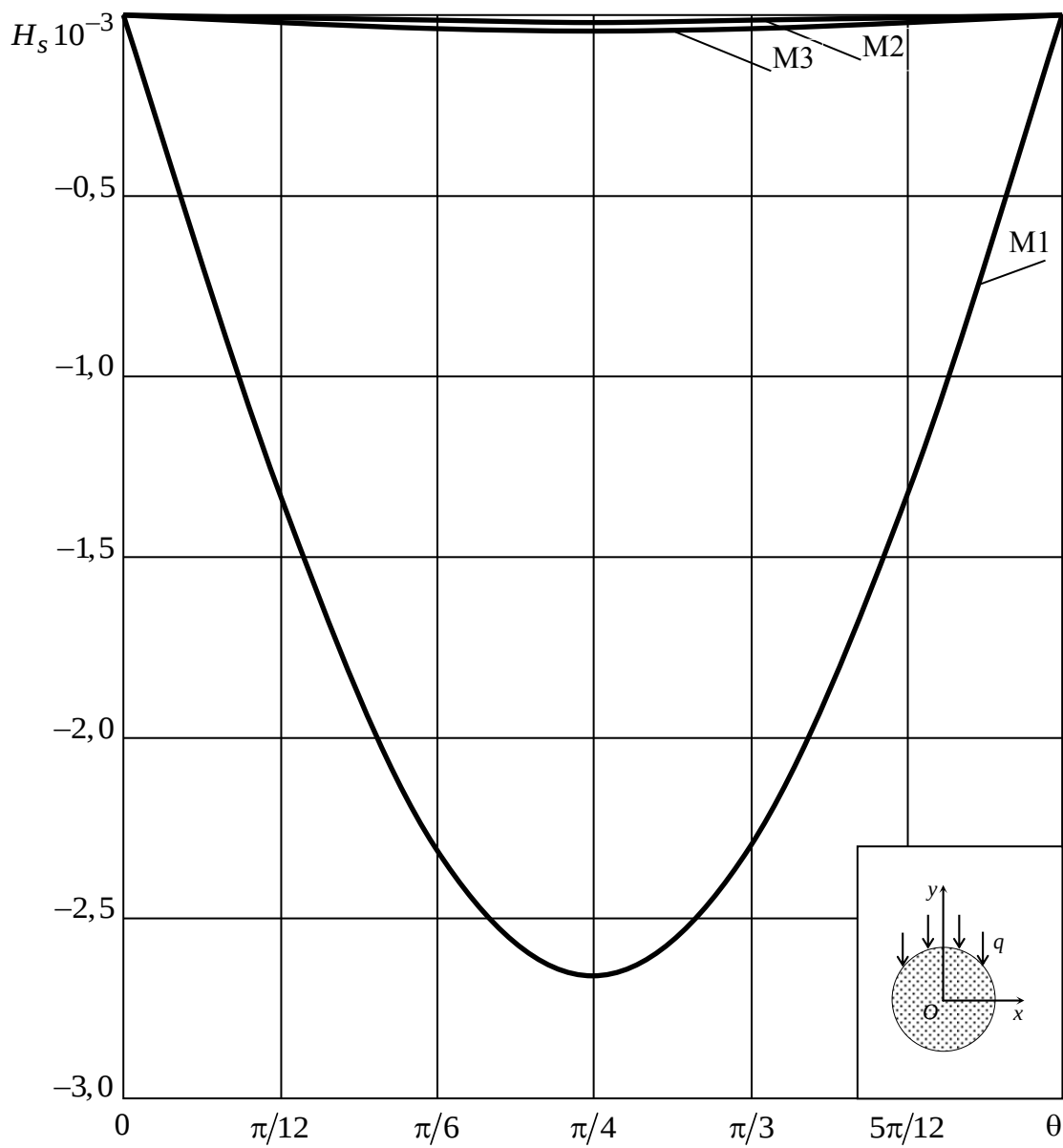


Рис. Б. 2.3. Графики распределения напряженностей H_s по контуру конечной сплошной круговой пластинки.

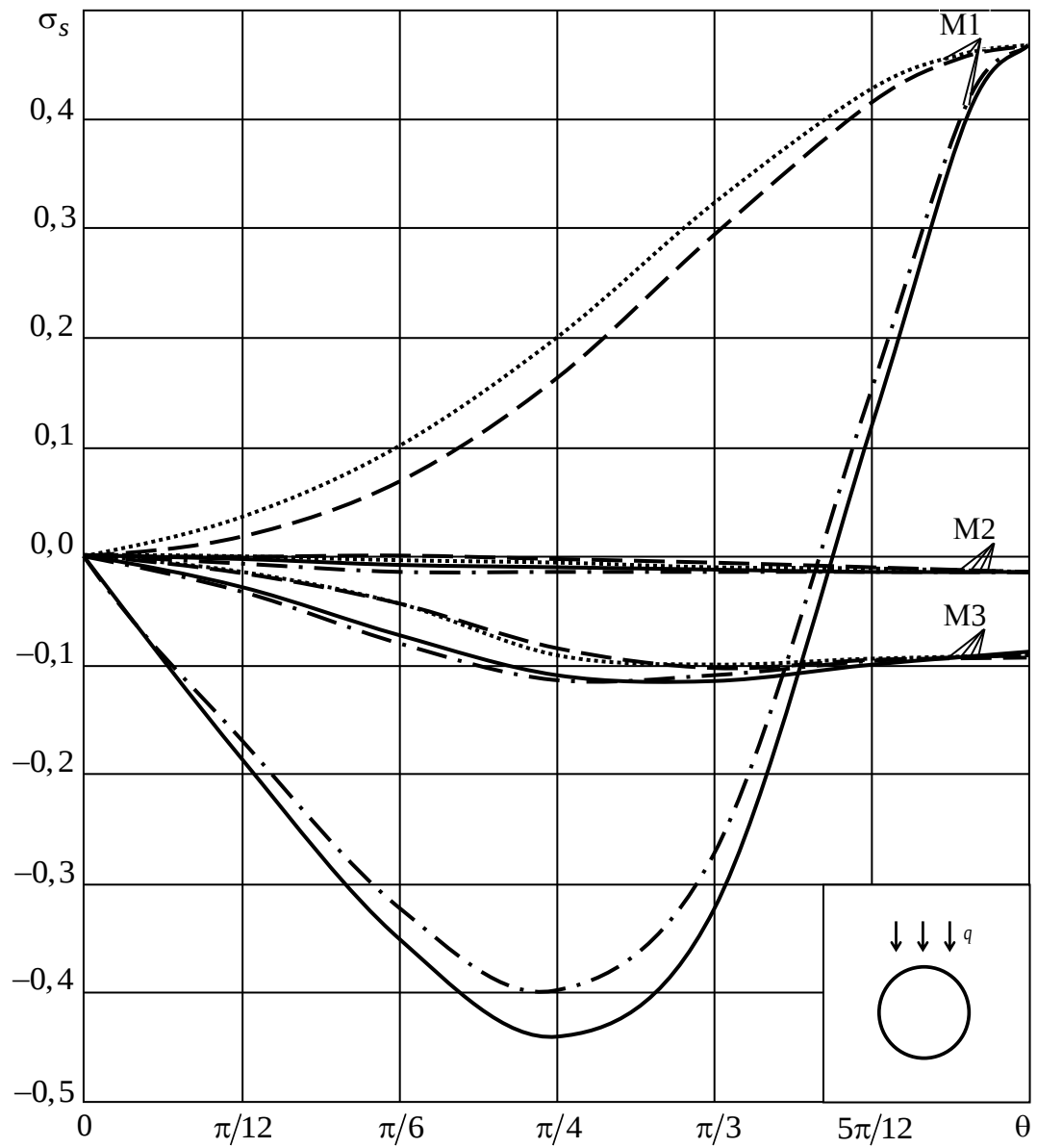


Рис. Б. 2.4. Графики распределения напряжений σ_s по контуру кругового отверстия в бесконечной пластинке с одним неподкрепленным отверстием, на котором задана температура.

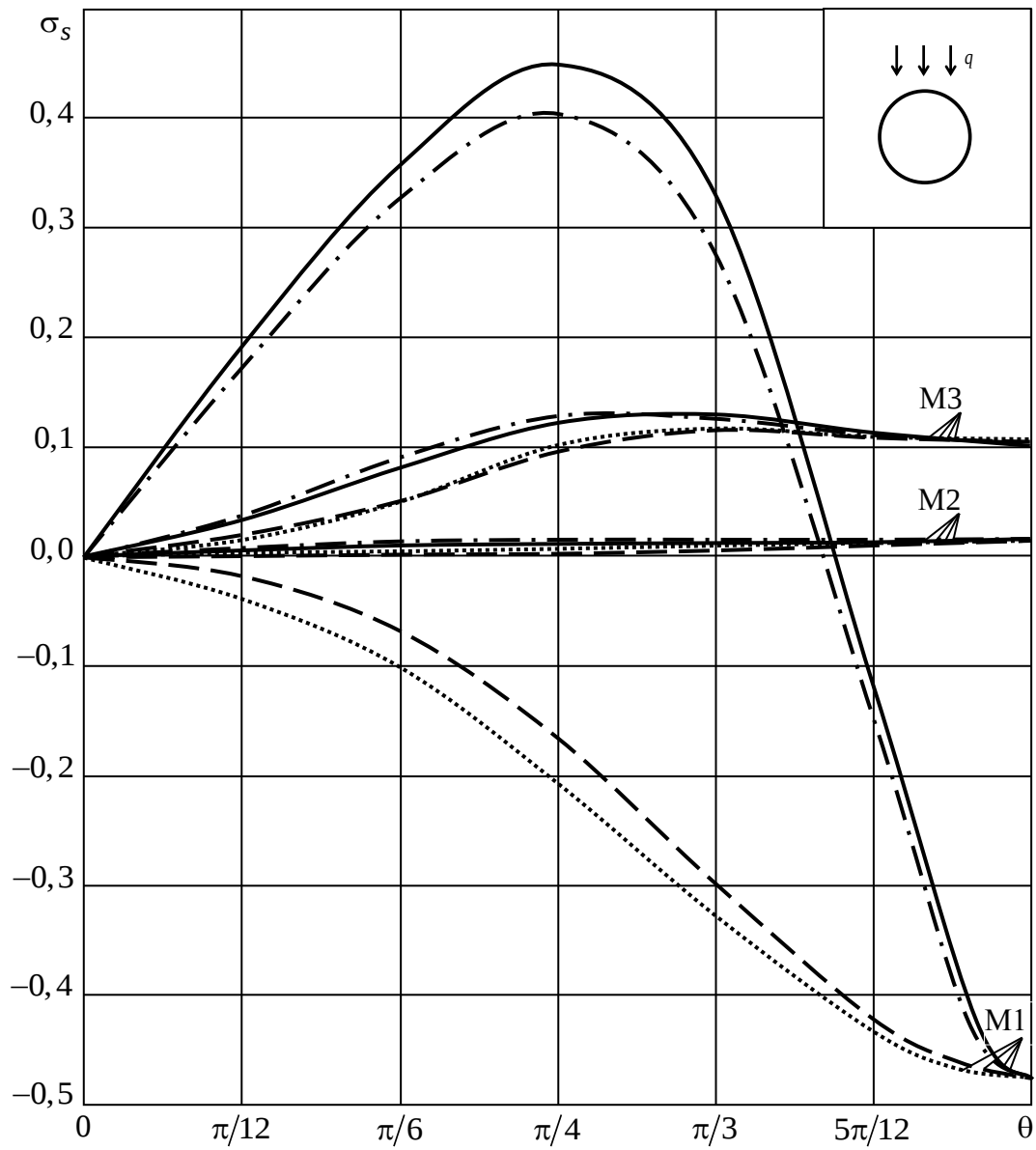


Рис. Б. 2.5. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке с одним круглым отверстием, контур которого теплоизолирован и не подкреплён.

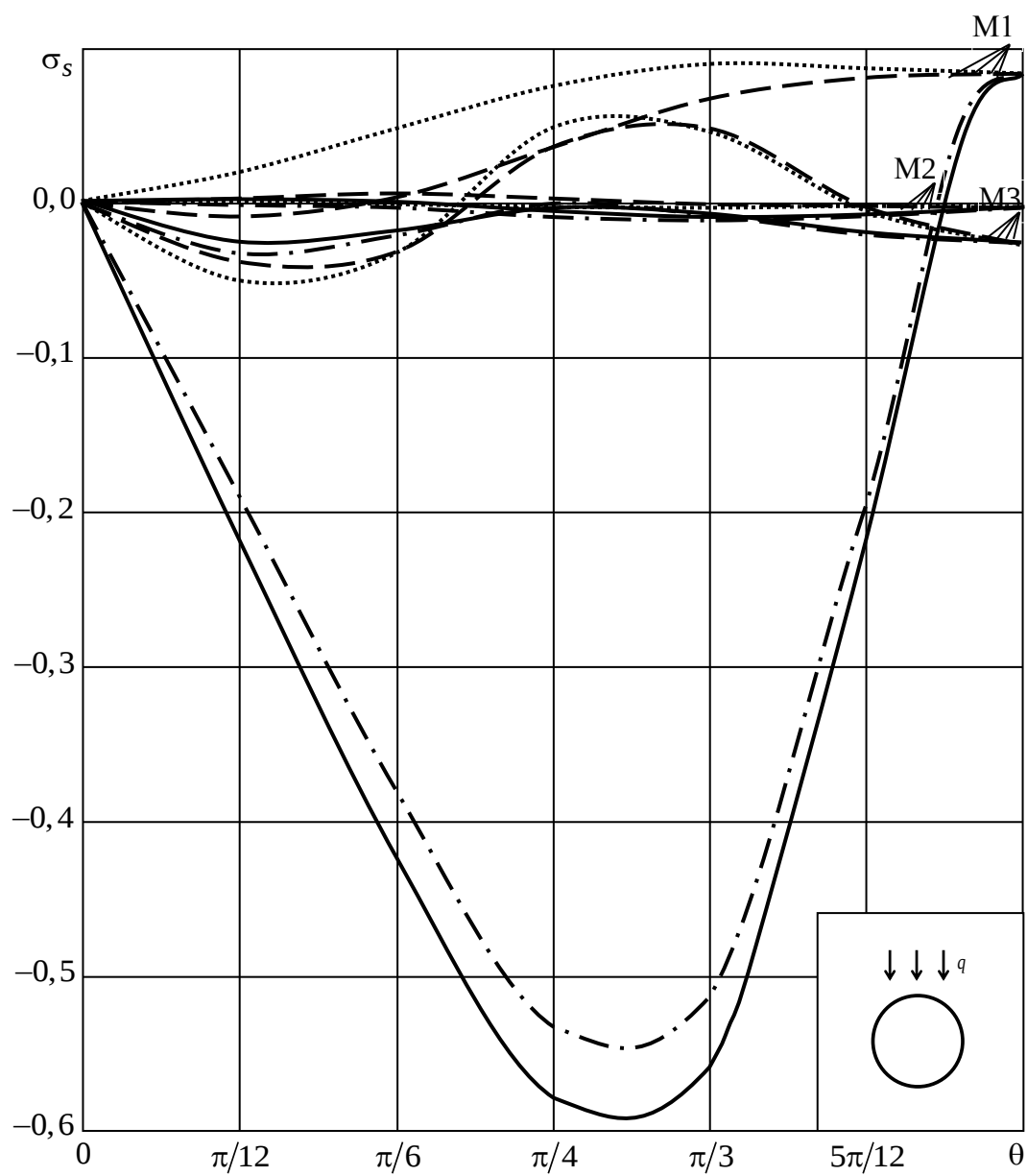


Рис. Б. 2.6. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке с одним круговым отверстием, на контуре которого задана температура и он жестко подкреплён.

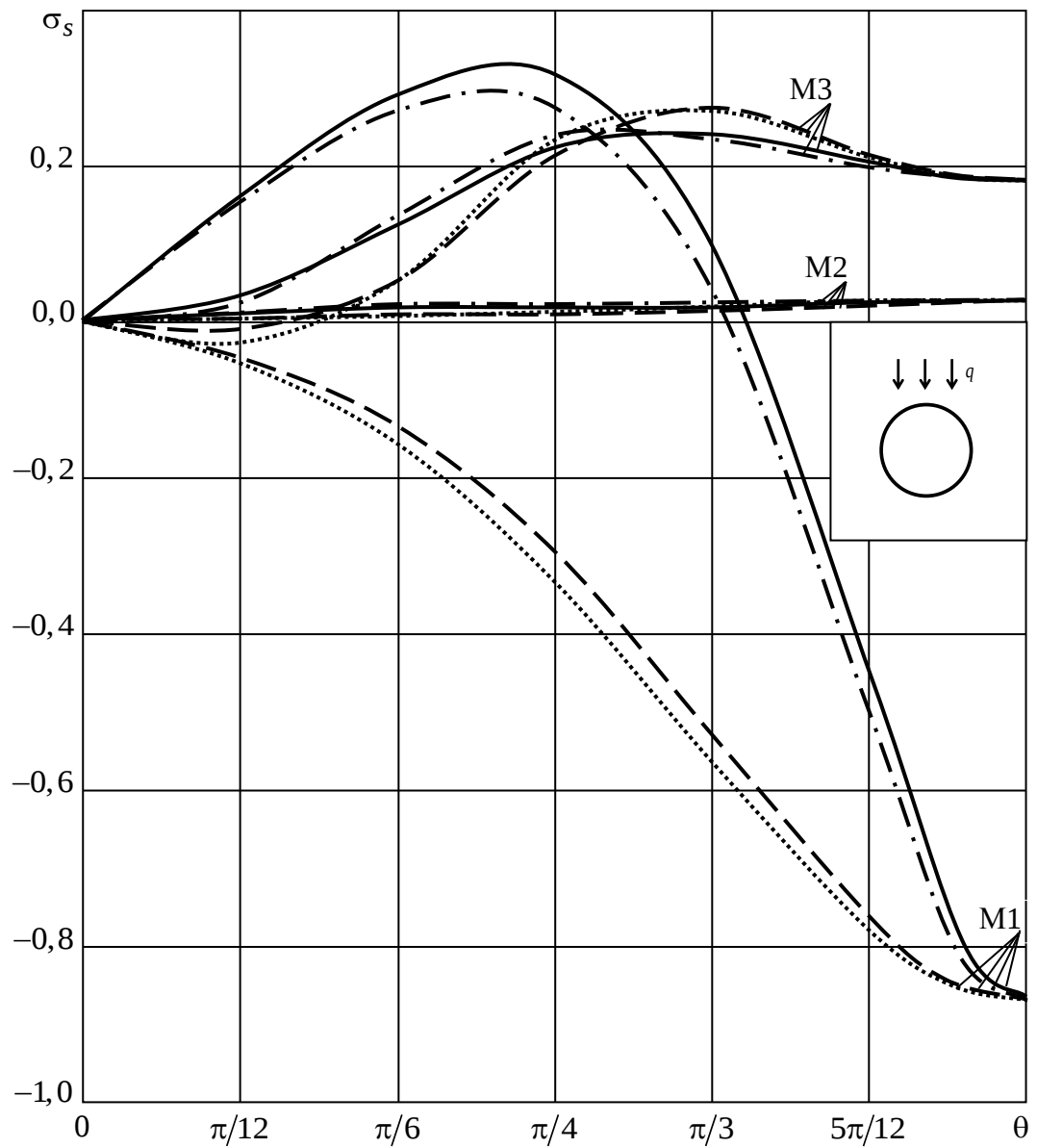


Рис. Б. 2.7. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке с одним круговым отверстием, контур которого теплоизолирован и жестко подкреплён.

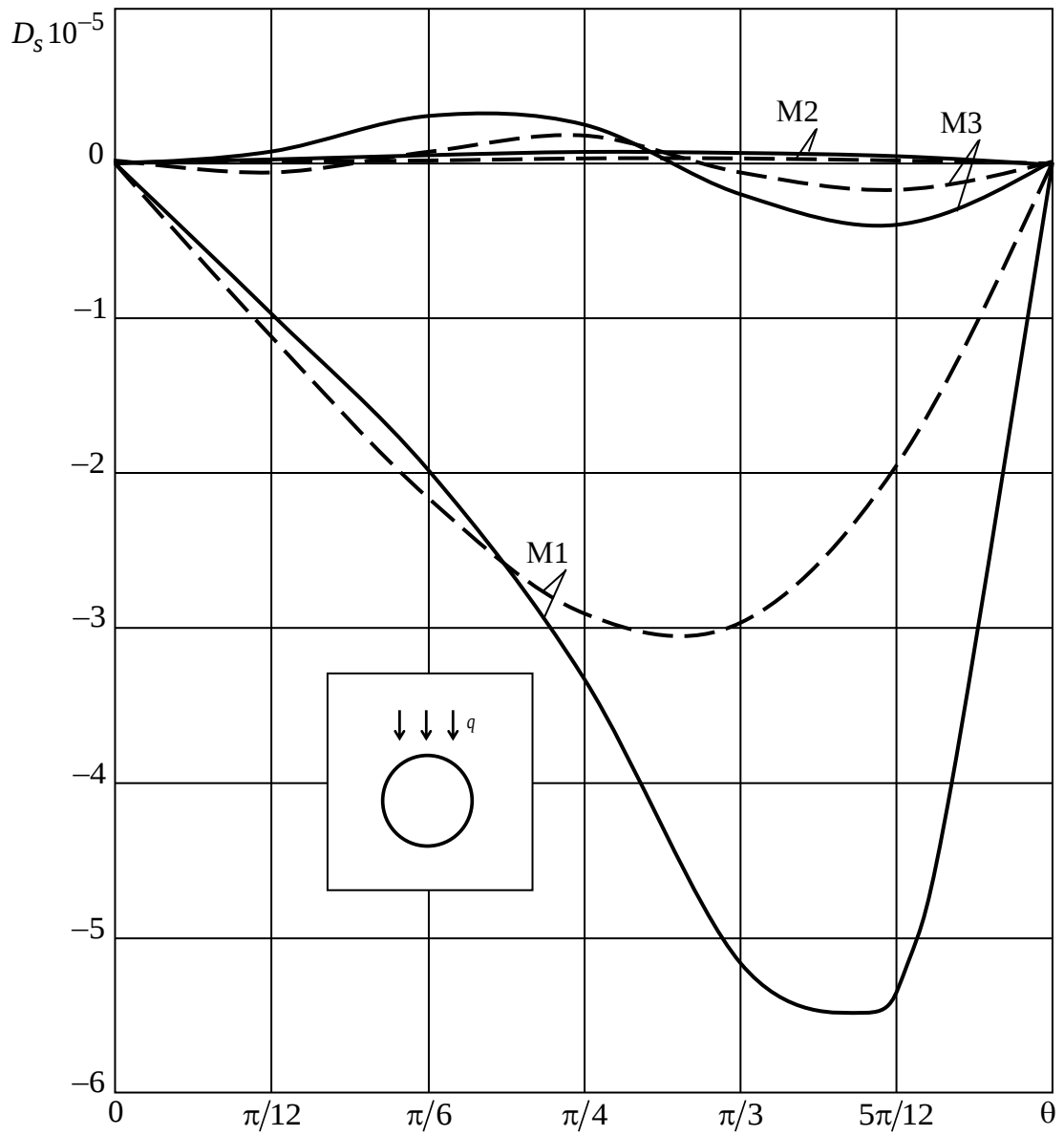


Рис. Б. 2.8. Графики распределения индукций D_s по контуру отверстия в пластинке с одним круговым отверстием, на контуре которого задана температура и он не подкреплён.

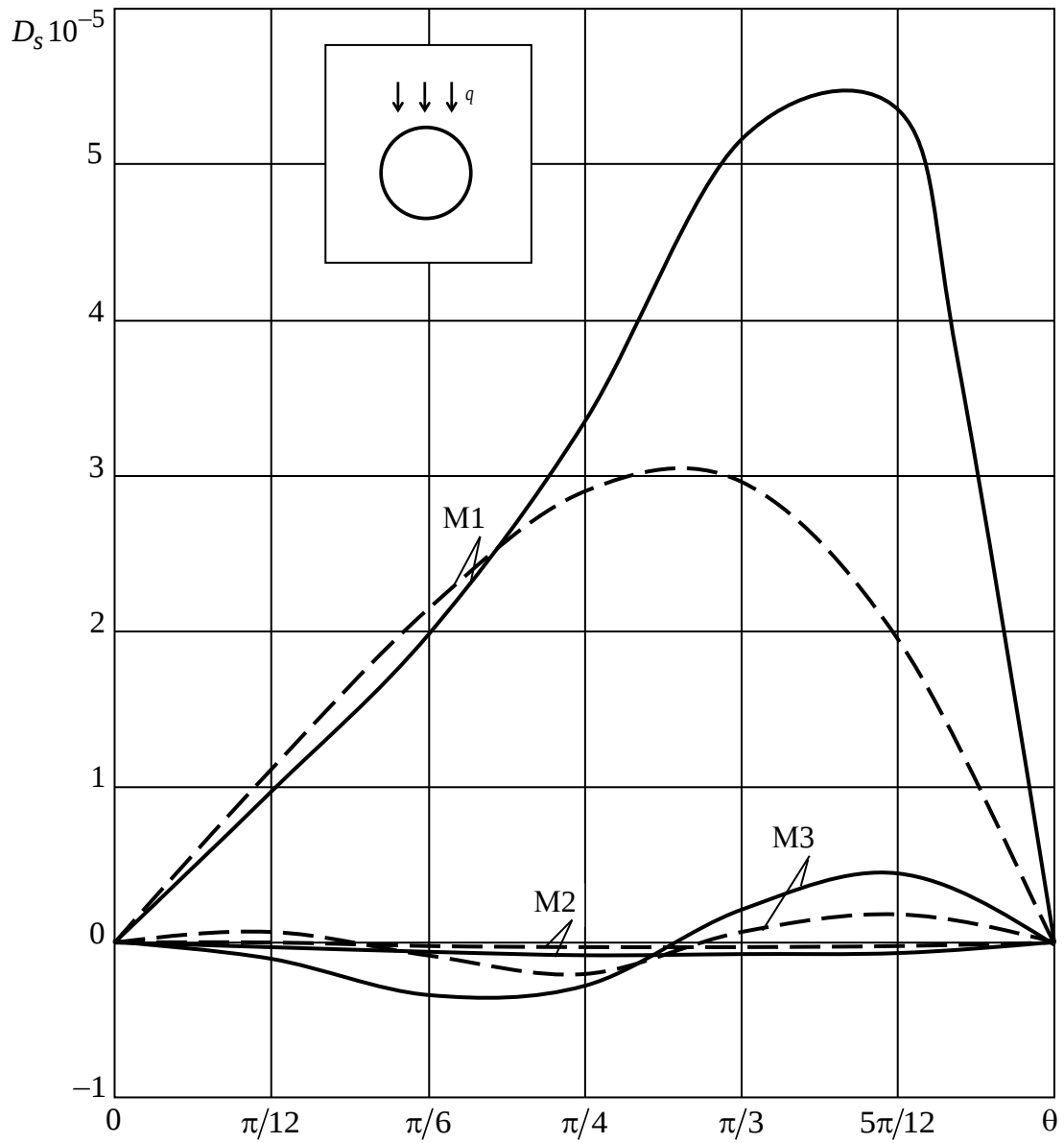


Рис. Б. 2.9. Графики распределения индукций D_s по контуру отверстия в пластинке с одним круговым отверстием, контур которого теплоизолирован и не подкреплён.

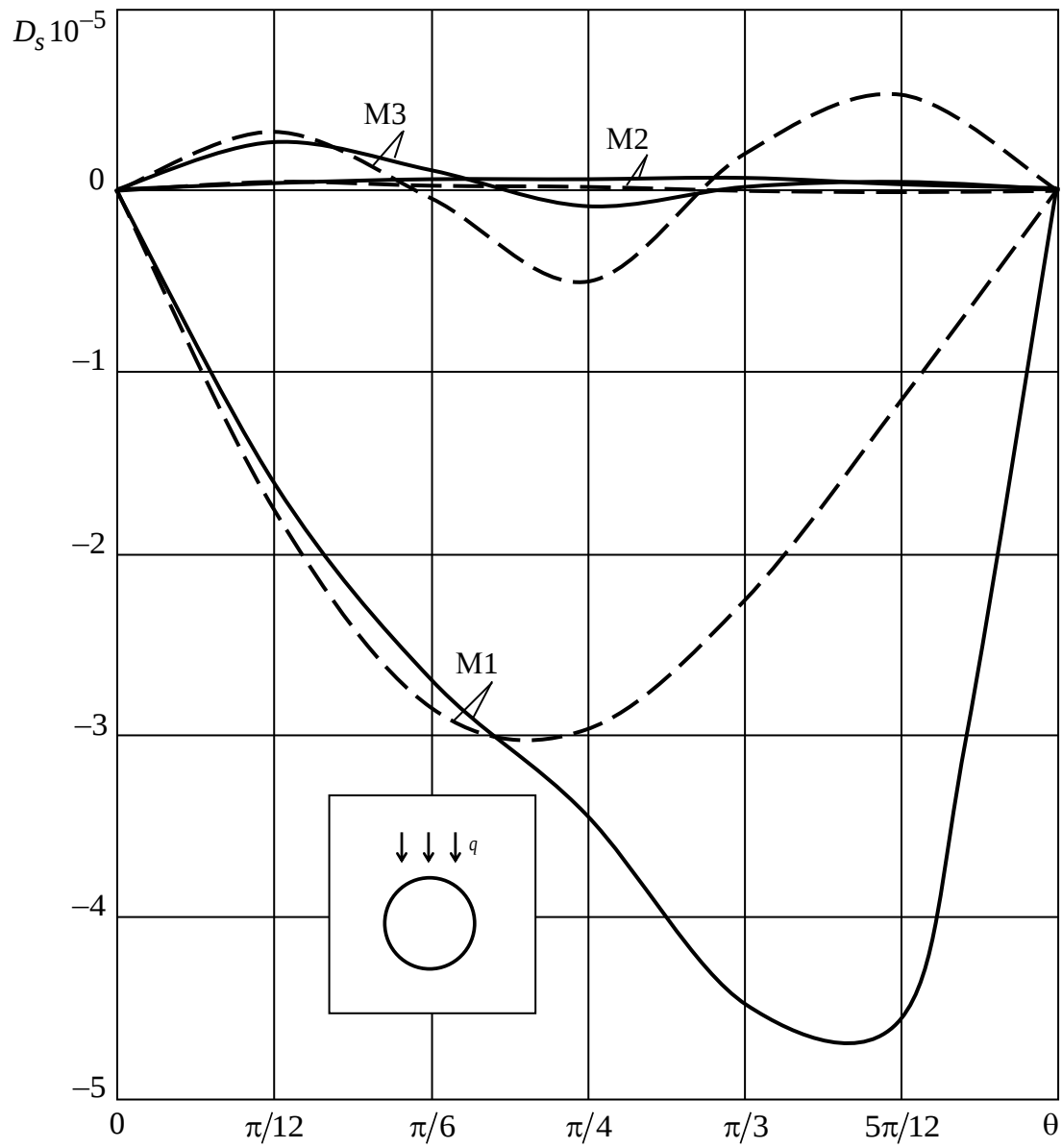


Рис. Б. 2.10. Графики распределения индукций D_s по контуру отверстия в пластинке с одним круговым отверстием, на контуре которого задана температура и он жестко креплен.

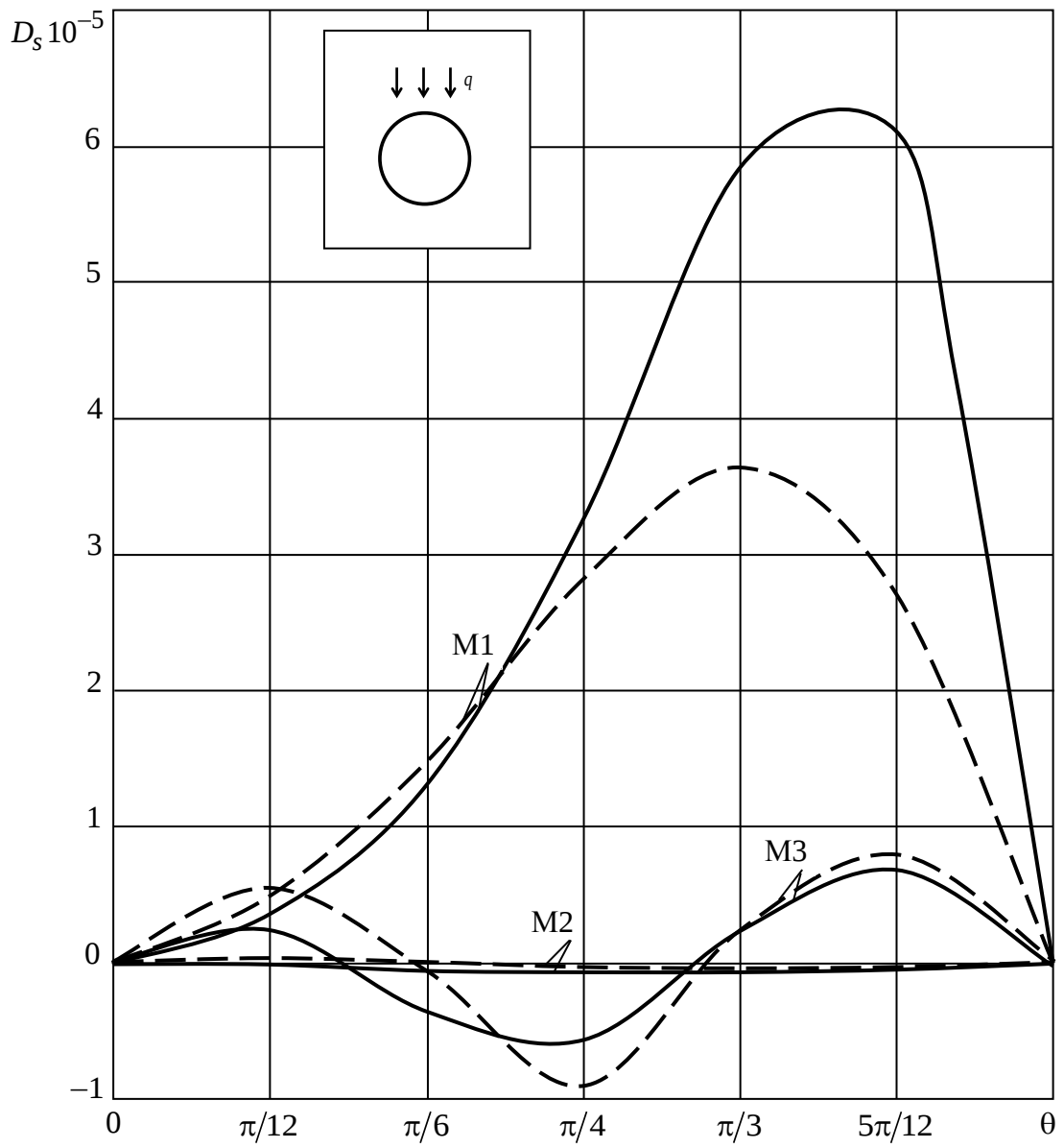


Рис. Б.2.11. Графики распределения индукций D_s по контуру отверстия в пластинке с одним круговым отверстием, контур которого теплоизолирован и жестко подкреплён.

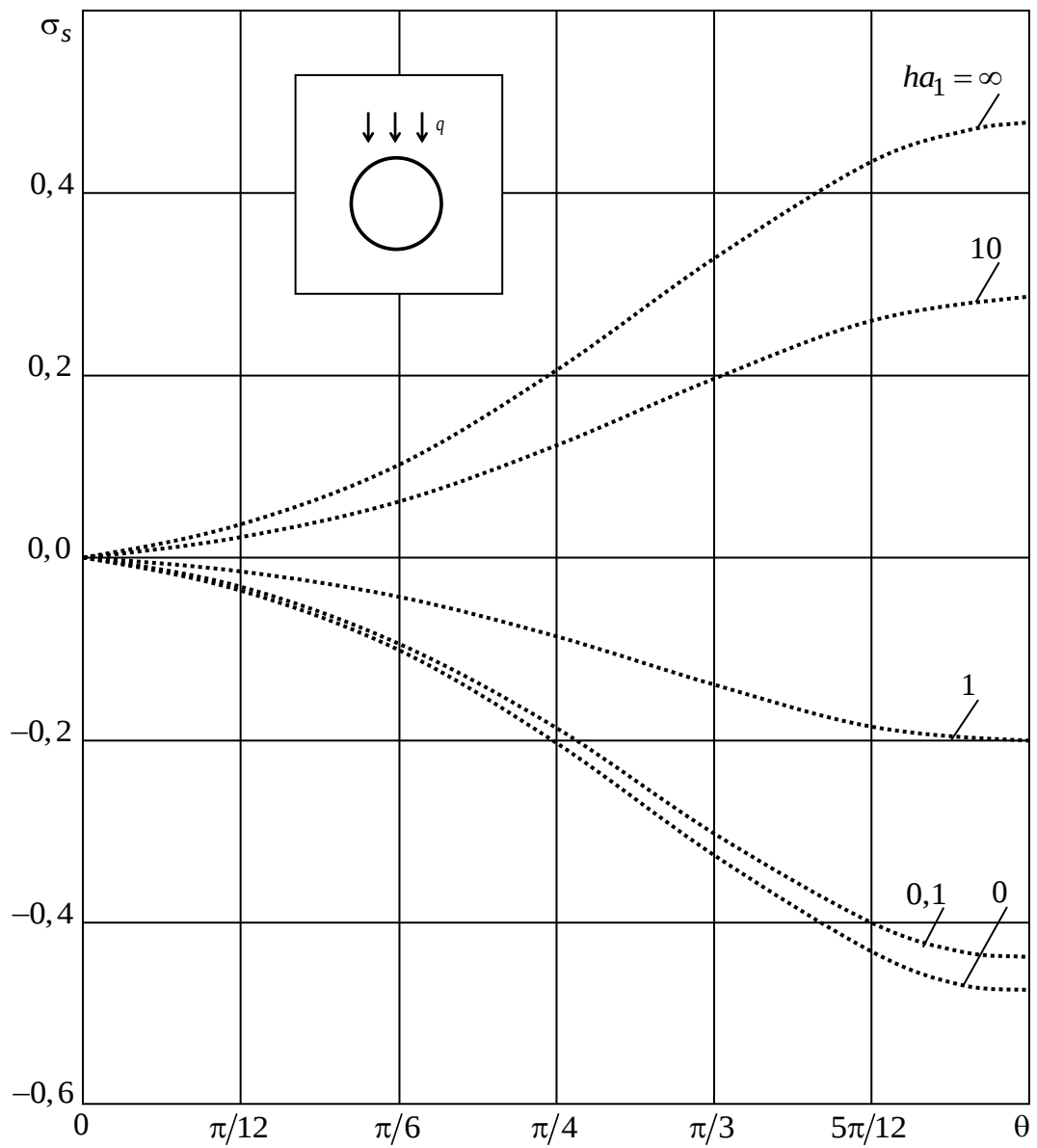


Рис. Б. 2.12. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с одним круговым отверстием, на контуре которого имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, для некоторых значений ha_1 .

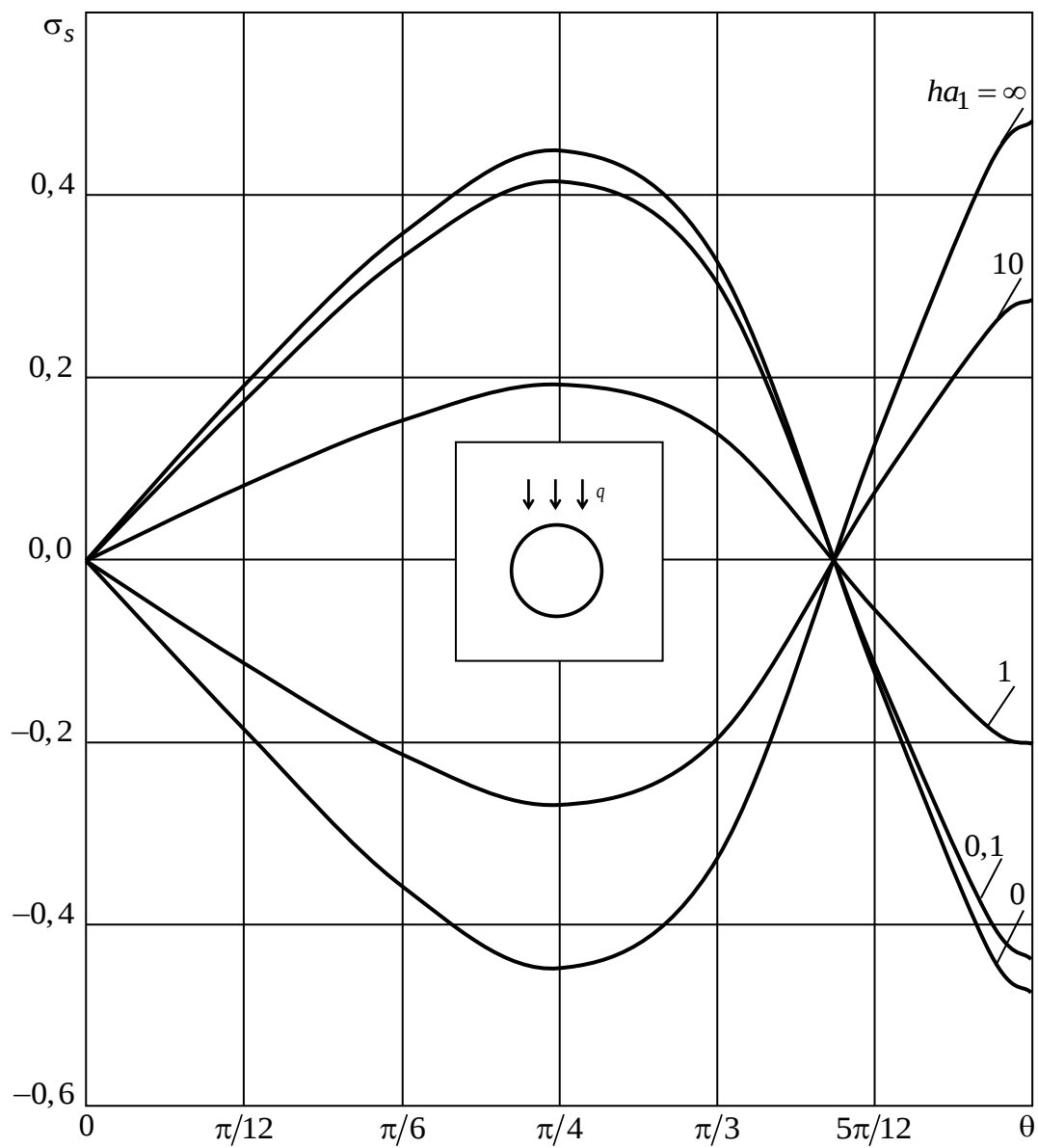


Рис. Б. 2.13. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с одним круговым отверстием, на контуре которого имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, для некоторых значений ha_1 .

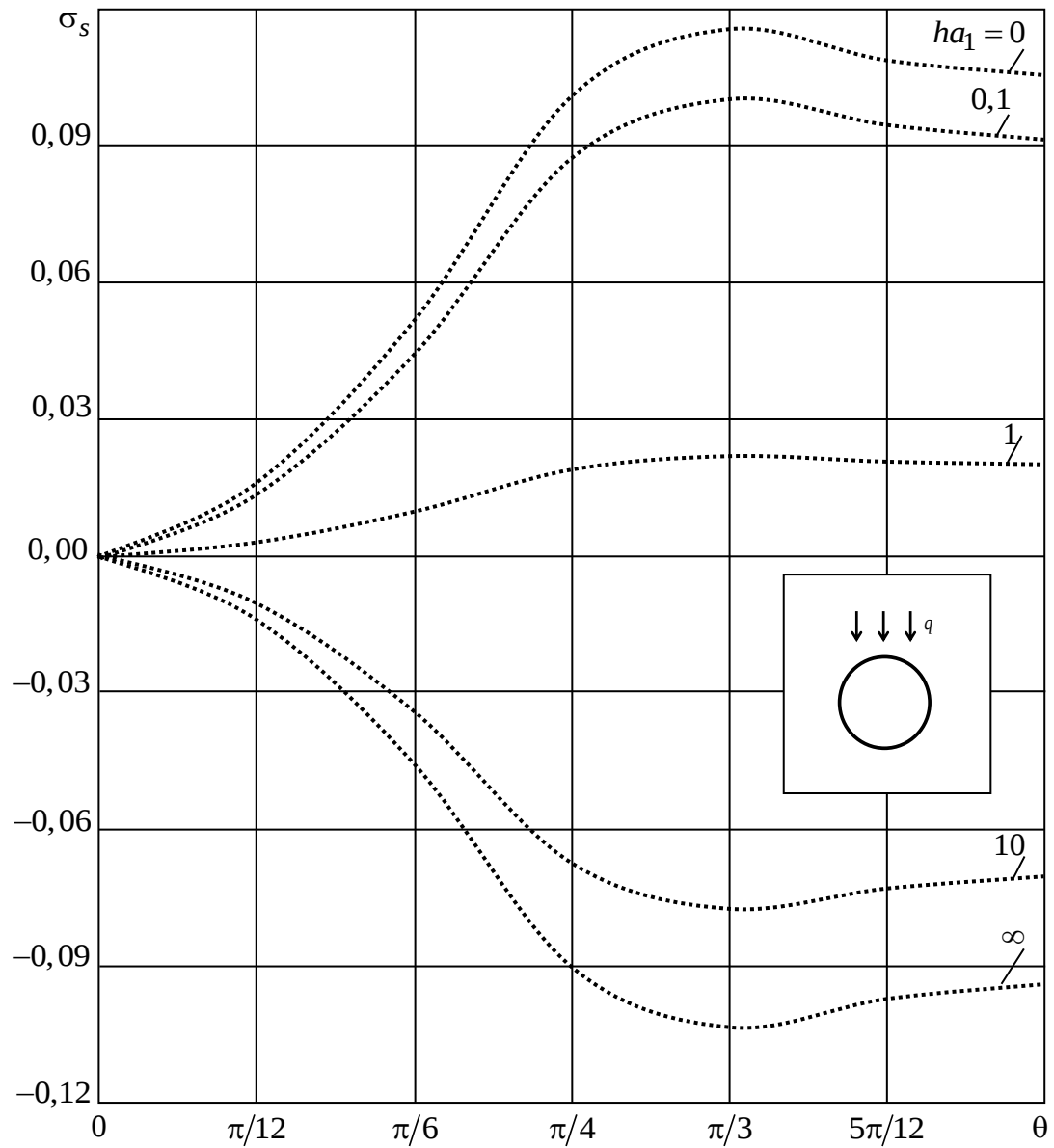


Рис. Б. 2.14. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с одним круговым отверстием, на контуре которого имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, для некоторых значений ha_1 .

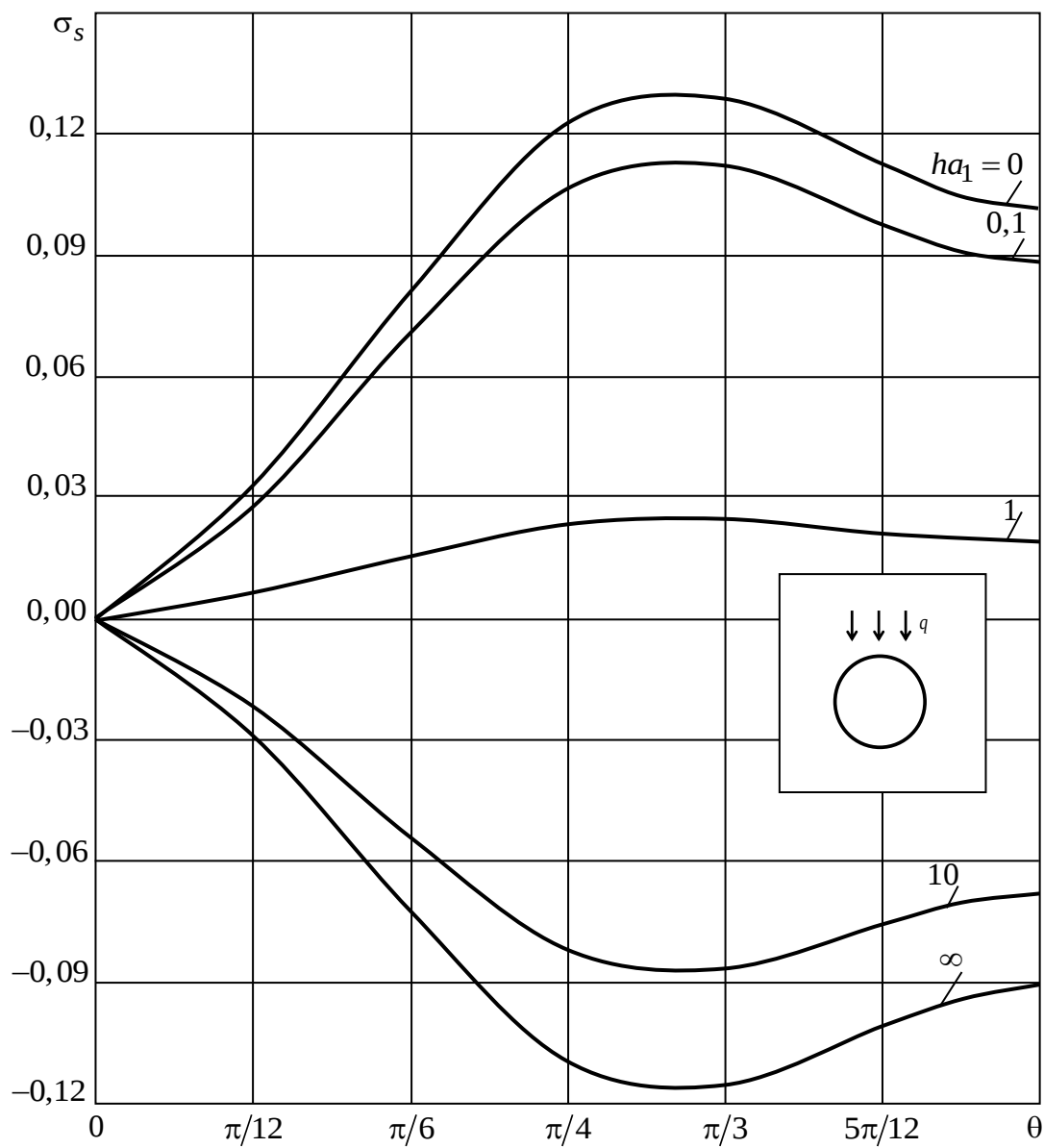


Рис. Б. 2.15. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с одним круговым отверстием, на контуре которого имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, для некоторых значений ha_1 .

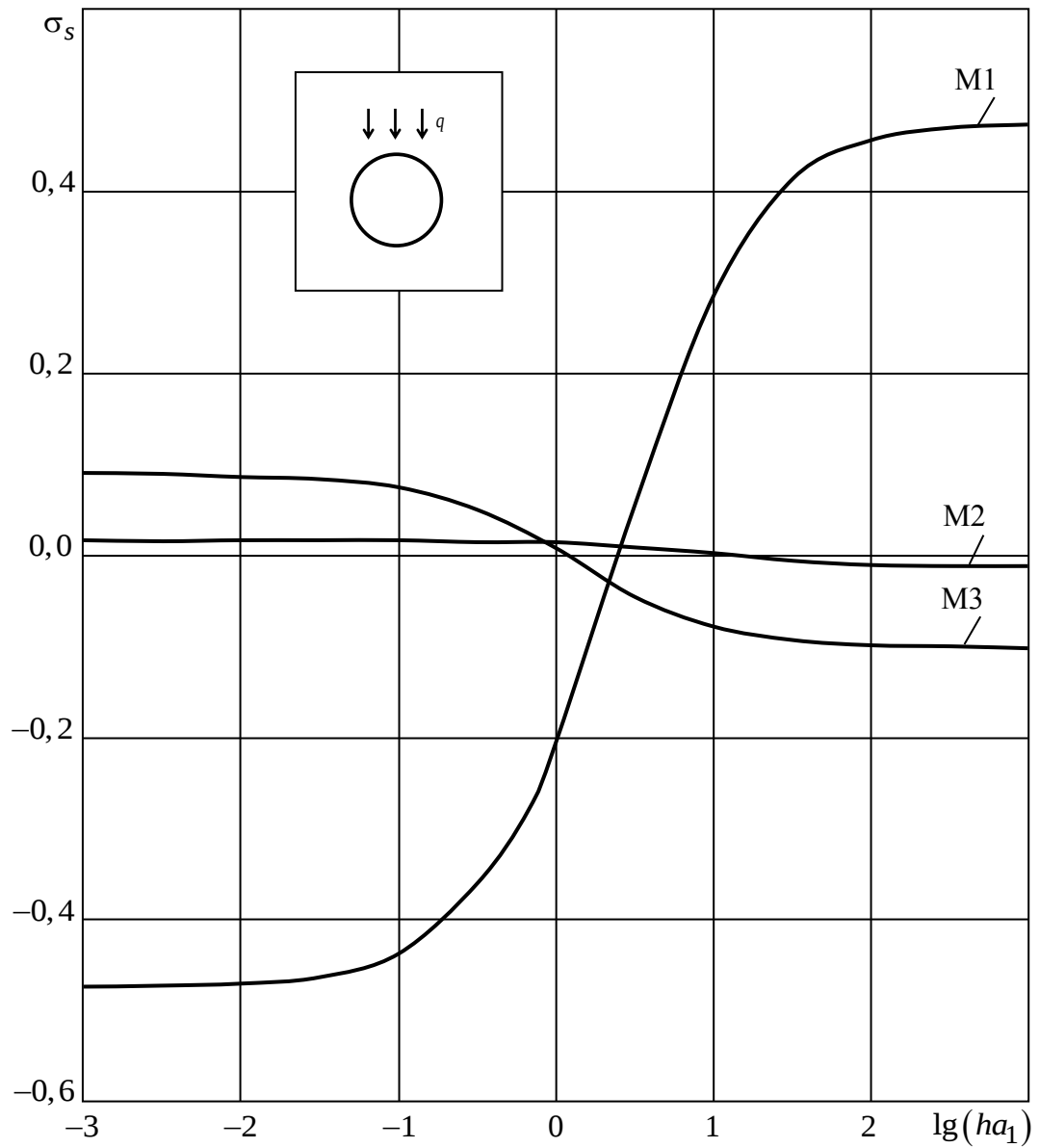


Рис. Б. 2.16. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в точке $\theta = \pi/2$ в пластинке с одним круговым отверстием, на контуре которого имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, для различных материалов в зависимости от $\lg(ha_1)$.

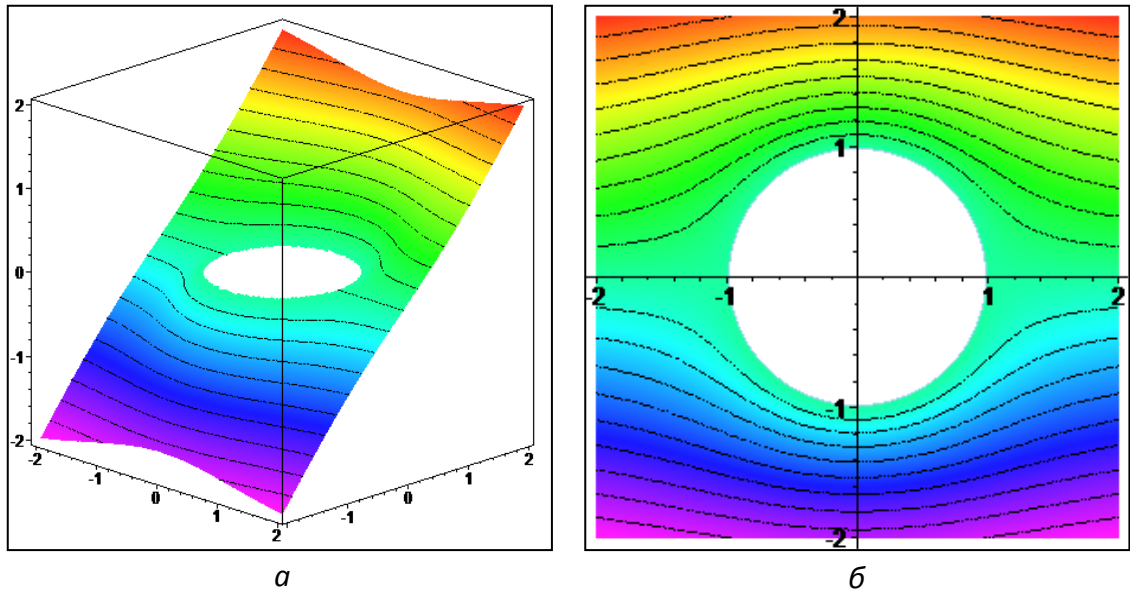


Рис. Б. 2.17

Рис. Б. 2.17. Поверхность (рис. *а*) и линии уровня (рис. *б*) плотности внутренней энергии U в пластинке из материала М1 с круговым отверстием в случае задачи ТУ.

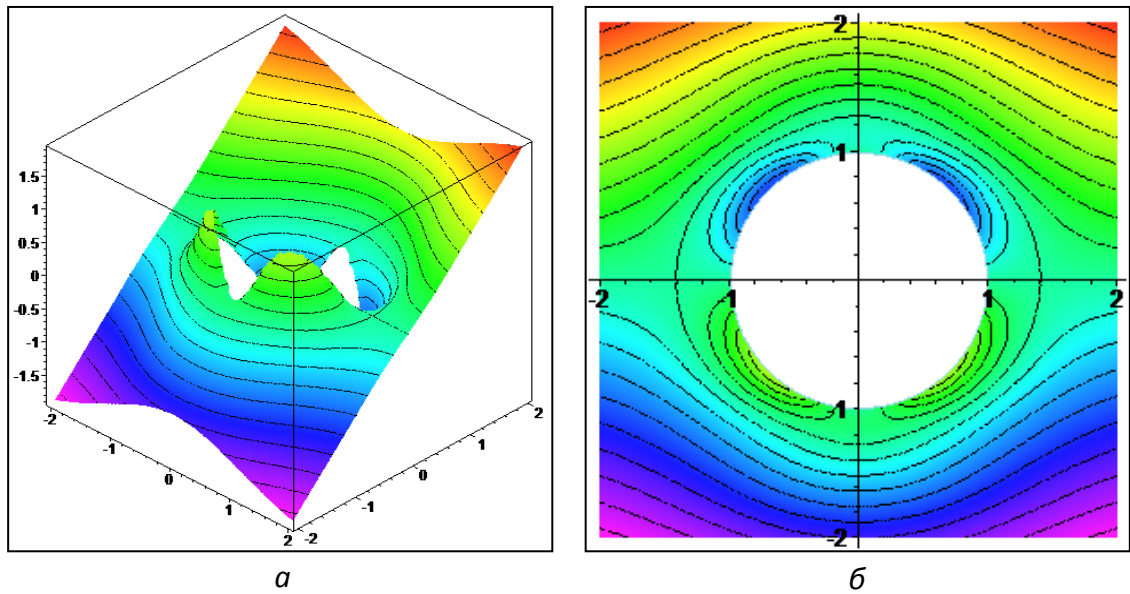


Рис. Б. 2.18

Рис. Б. 2.18. Поверхность (рис. *а*) и линии уровня (рис. *б*) плотности внутренней энергии U в пластинке из материала М1 с круговым отверстием в случае задачи ТЭМУ.

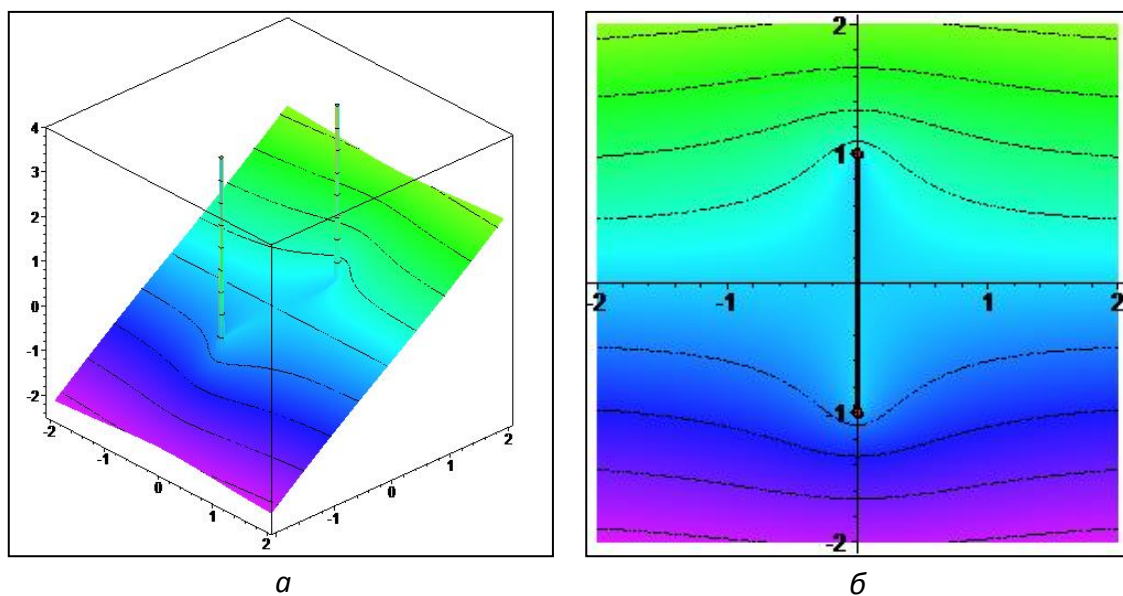


Рис. Б. 2.19

Рис. Б. 2.19. Поверхность (рис. а) и линии уровня (рис. б) плотности внутренней энергии U в пластинке из материала М1 с вертикальной трещиной в случае задачи ТУ.

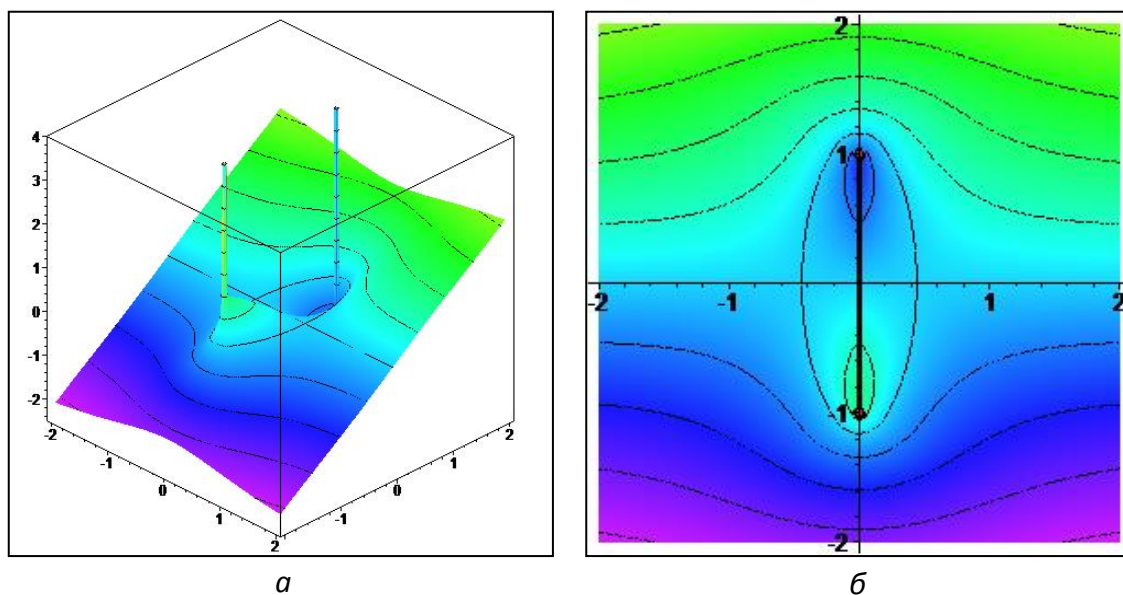


Рис. Б. 2.20

Рис. Б. 2.20. Поверхность (рис. а) и линии уровня (рис. б) плотности внутренней энергии U в пластинке из материала М1 с вертикальной трещиной в случае задачи ТЭМУ.

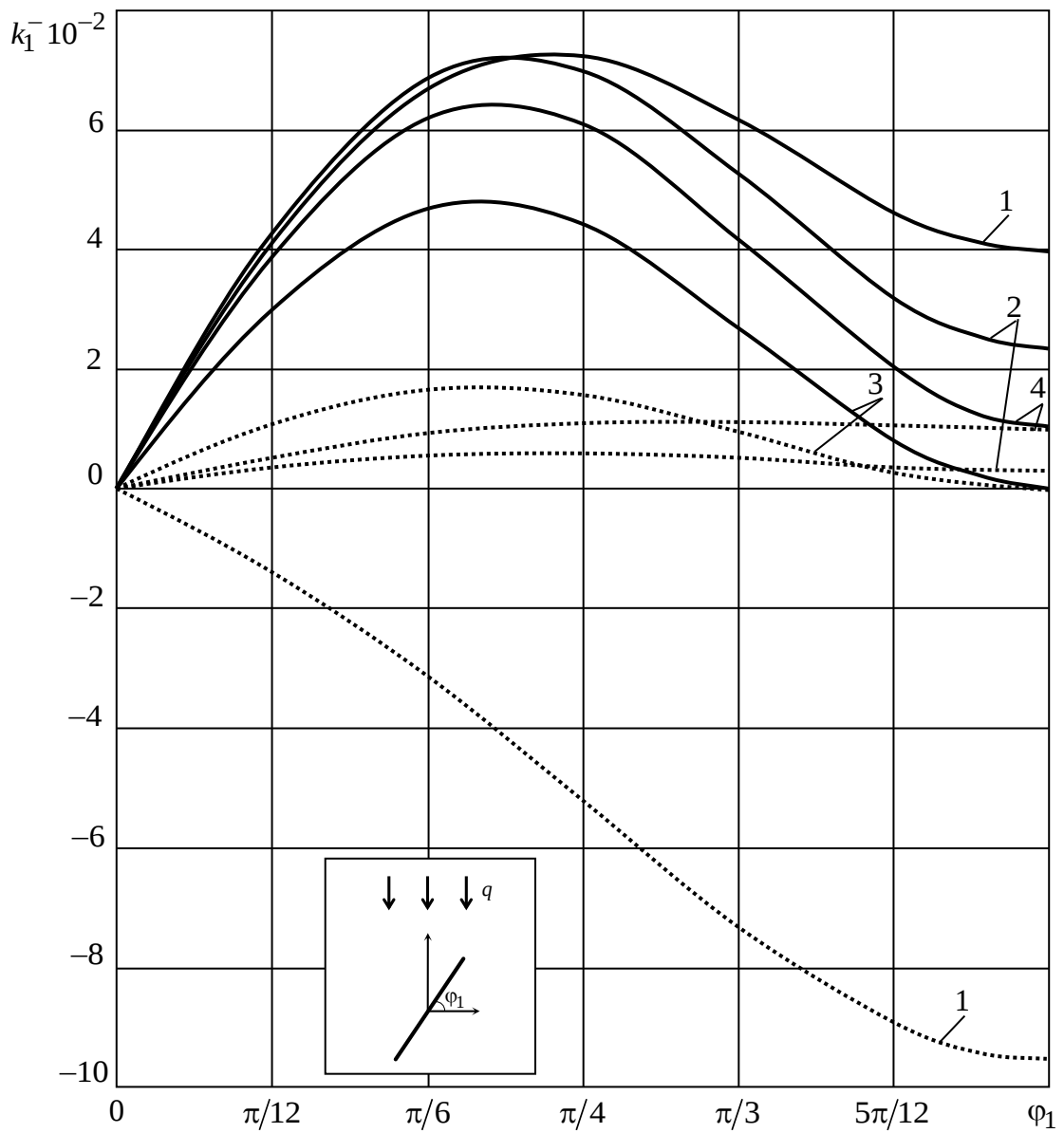


Рис. Б. 2.21. График изменения КИН k_1^- для нижней вершины трещины в пластинке из материала М1 с трещиной, в зависимости от угла наклона трещины для случаев: 1 – на берегах трещины задана температура, берега неподкреплены; 2 – берега теплоизолированы и неподкреплены; 3 – на берегах трещины задана температура, берега жестко подкреплены; 4 – берега теплоизолированы и жестко подкреплены.

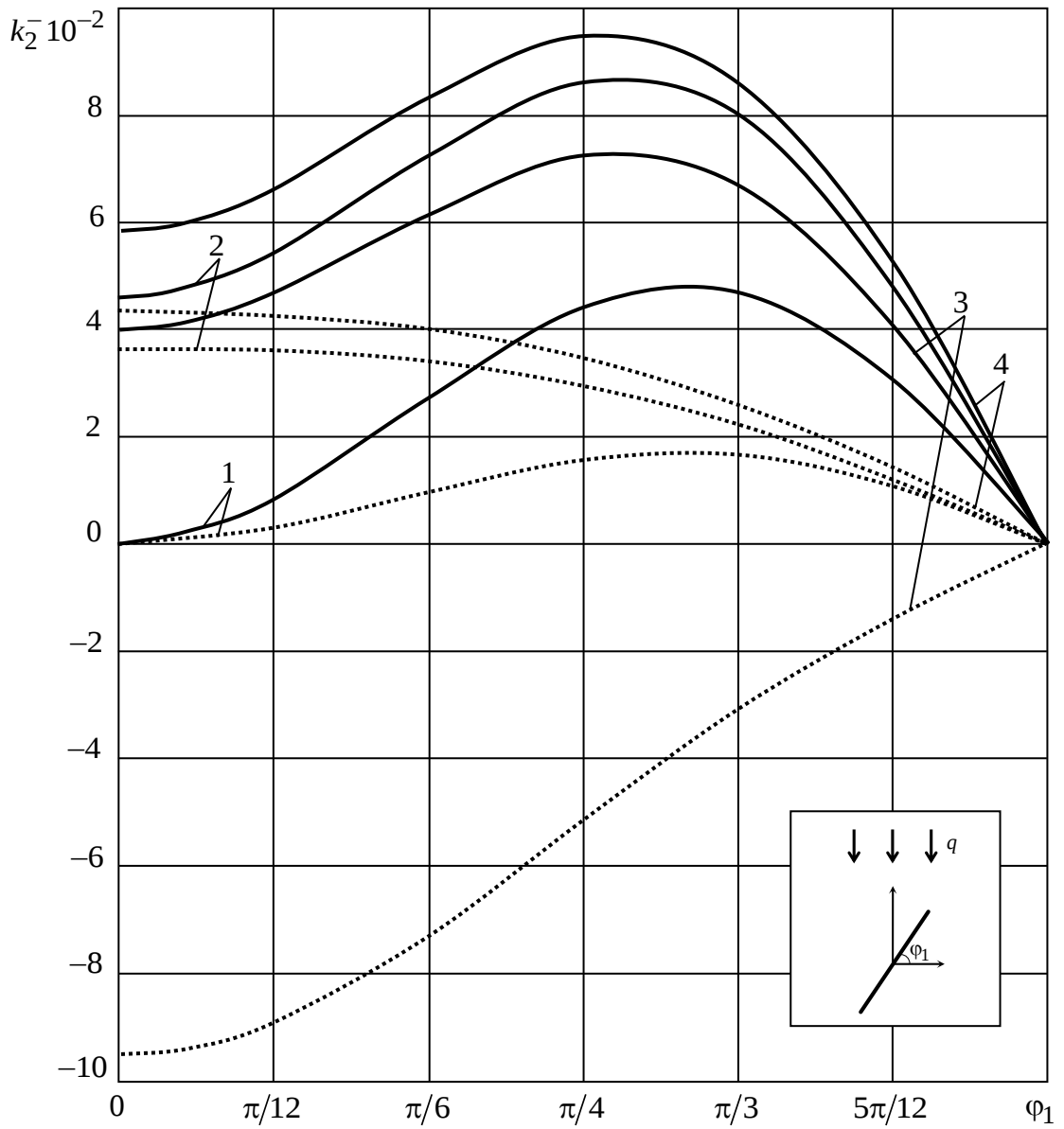


Рис. Б. 2.22. Графики изменения КИН k_2^- у левого угла трещины в пластинке из материала М1 с трещиной, в зависимости от угла наклона трещины для случаев: 1 – на берегах трещины задана температура, берега неподкреплены; 2 – берега теплоизолированы и неподкреплены; 3 – на берегах трещины задана температура, берега жестко подкреплены; 4 – берега теплоизолированы и жестко подкреплены.

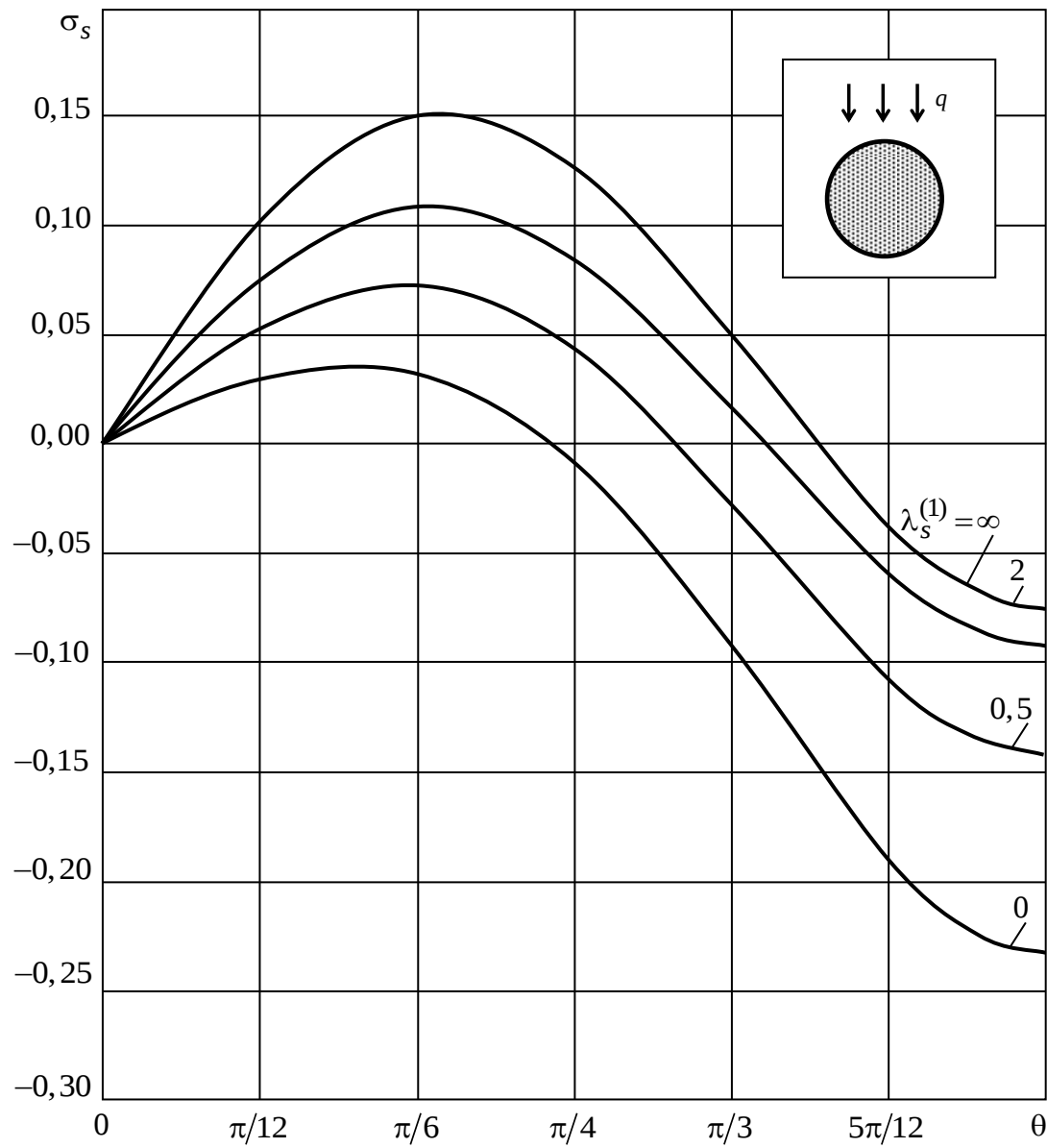


Рис. Б. 2.23. График распределения напряжений σ_s по контуру кругового включения в пластинке из материала М1 для некоторых значений параметра $\lambda_s^{(1)}$ при $\lambda_T^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = 0,5$.

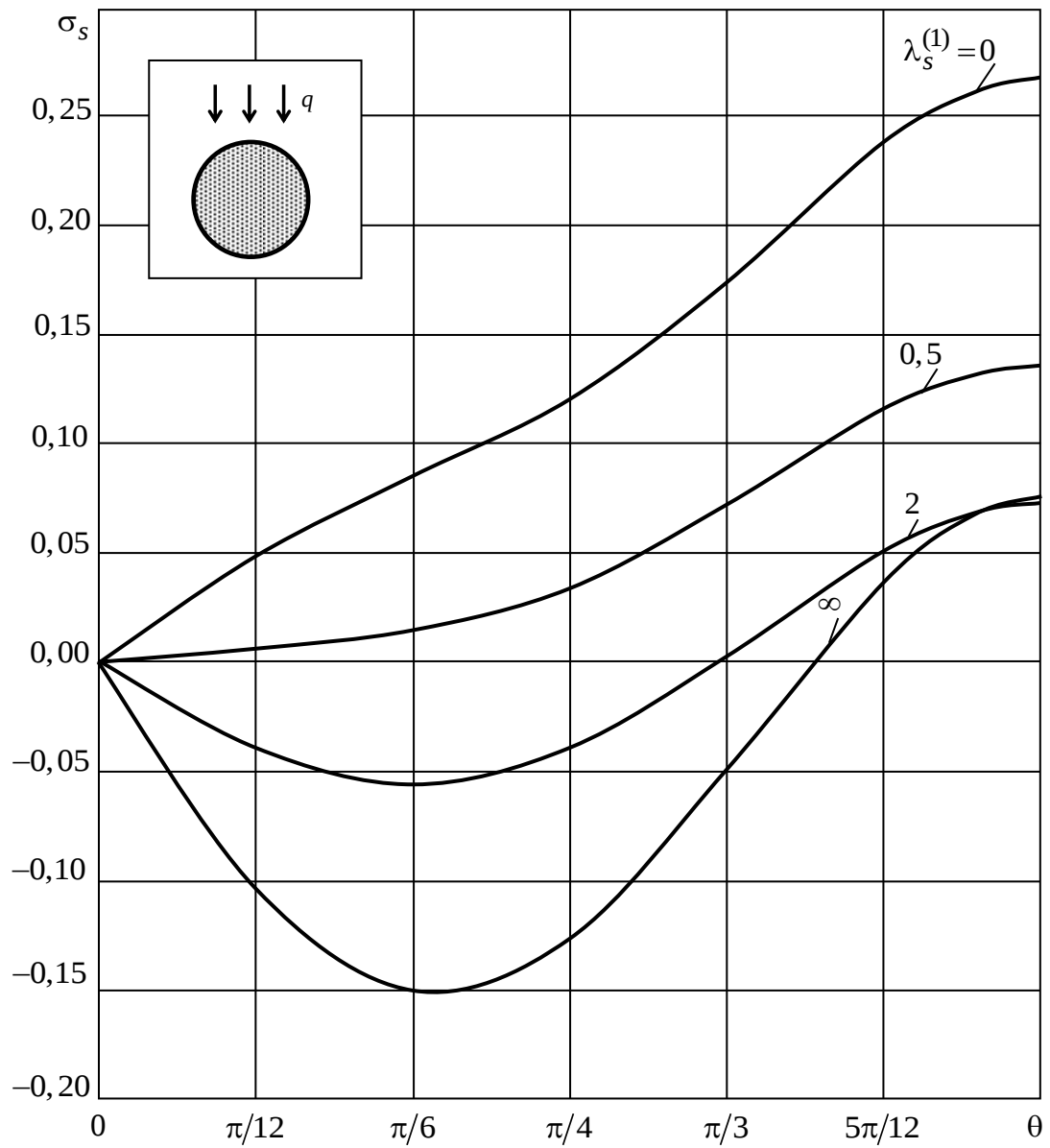


Рис. Б. 2.24. График распределения напряжений σ_s по контуру кругового включения в пластинке из материала М1 для некоторых значений параметра $\lambda_s^{(1)}$ при $\lambda_T^{(1)} = \lambda_p^{(1)} = \lambda_\alpha^{(1)} = 2$.

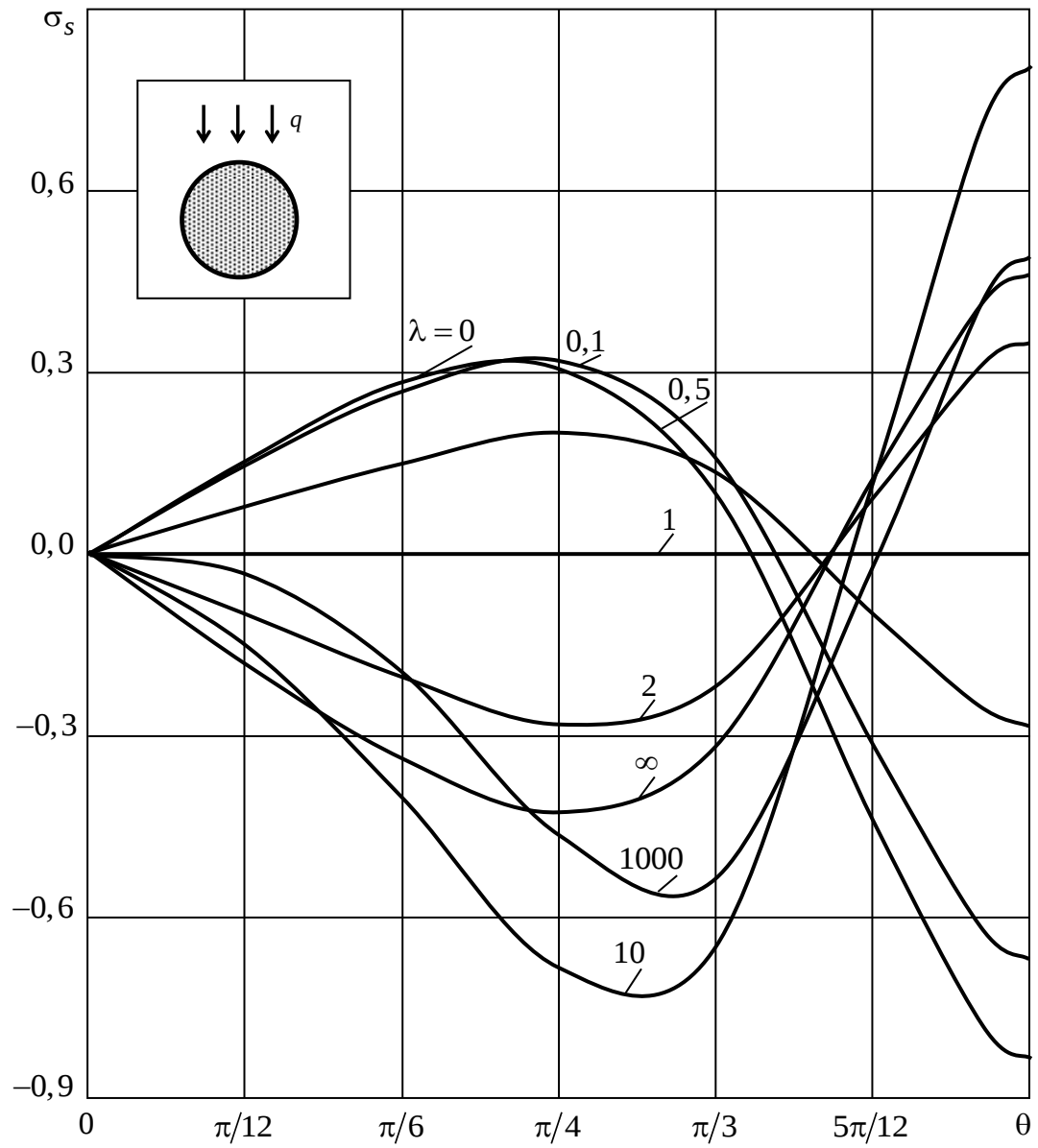


Рис. Б. 2.25. График распределения напряжений σ_s по контуру кругового включения в пластинке из материала М1 для некоторых значений параметра λ материала включения.

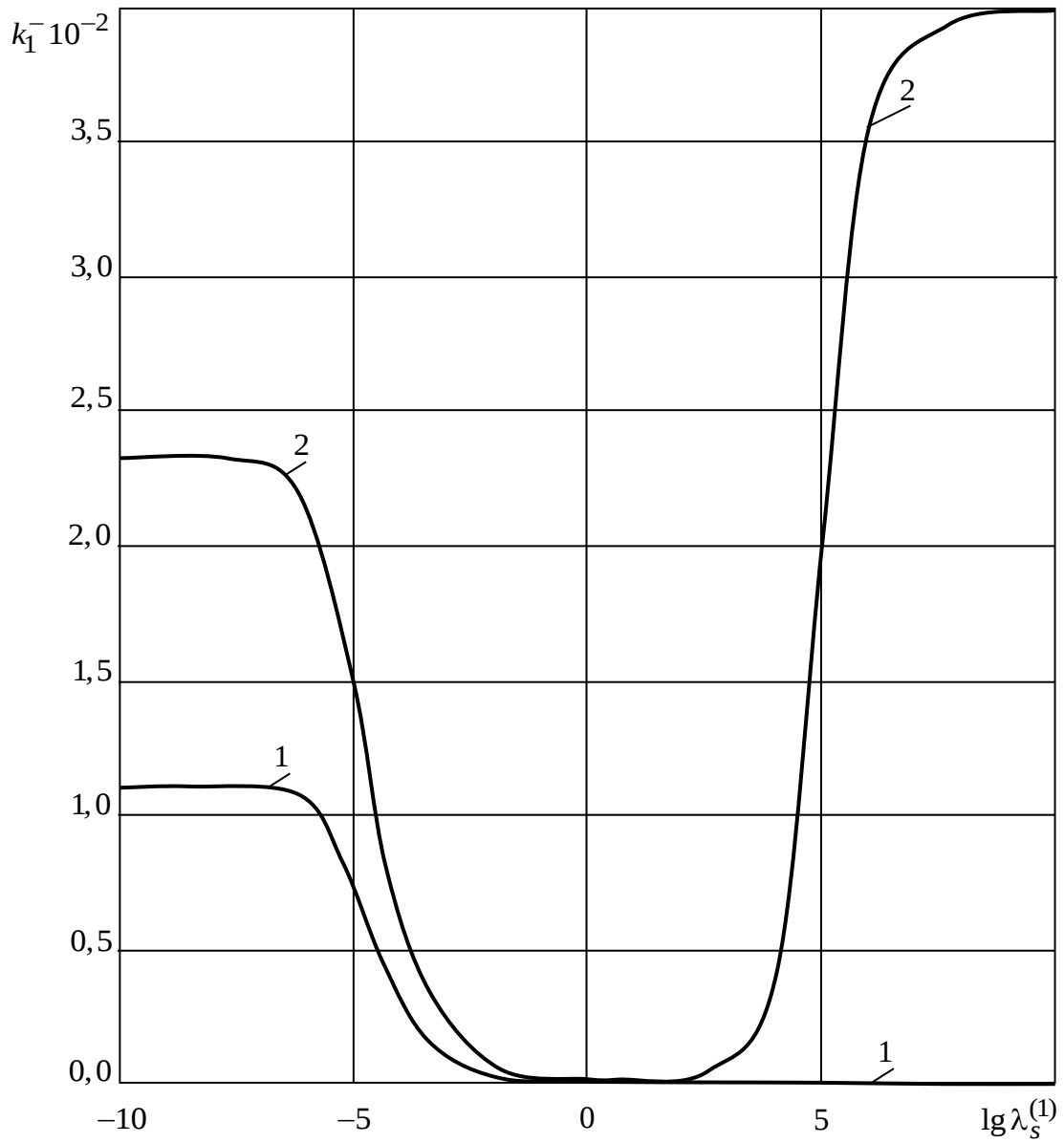


Рис. Б. 2.26. Графики изменения КИН k_1^- для нижней вершины вертикального линейного включения в зависимости от значения $\lambda_s^{(1)}$ при $\lambda_{pe}^{(1)} = 0$ и значениях $\lambda_T^{(1)} = 0$ (кривая 1) и $\lambda_T^{(1)} = \infty$ (кривая 2).

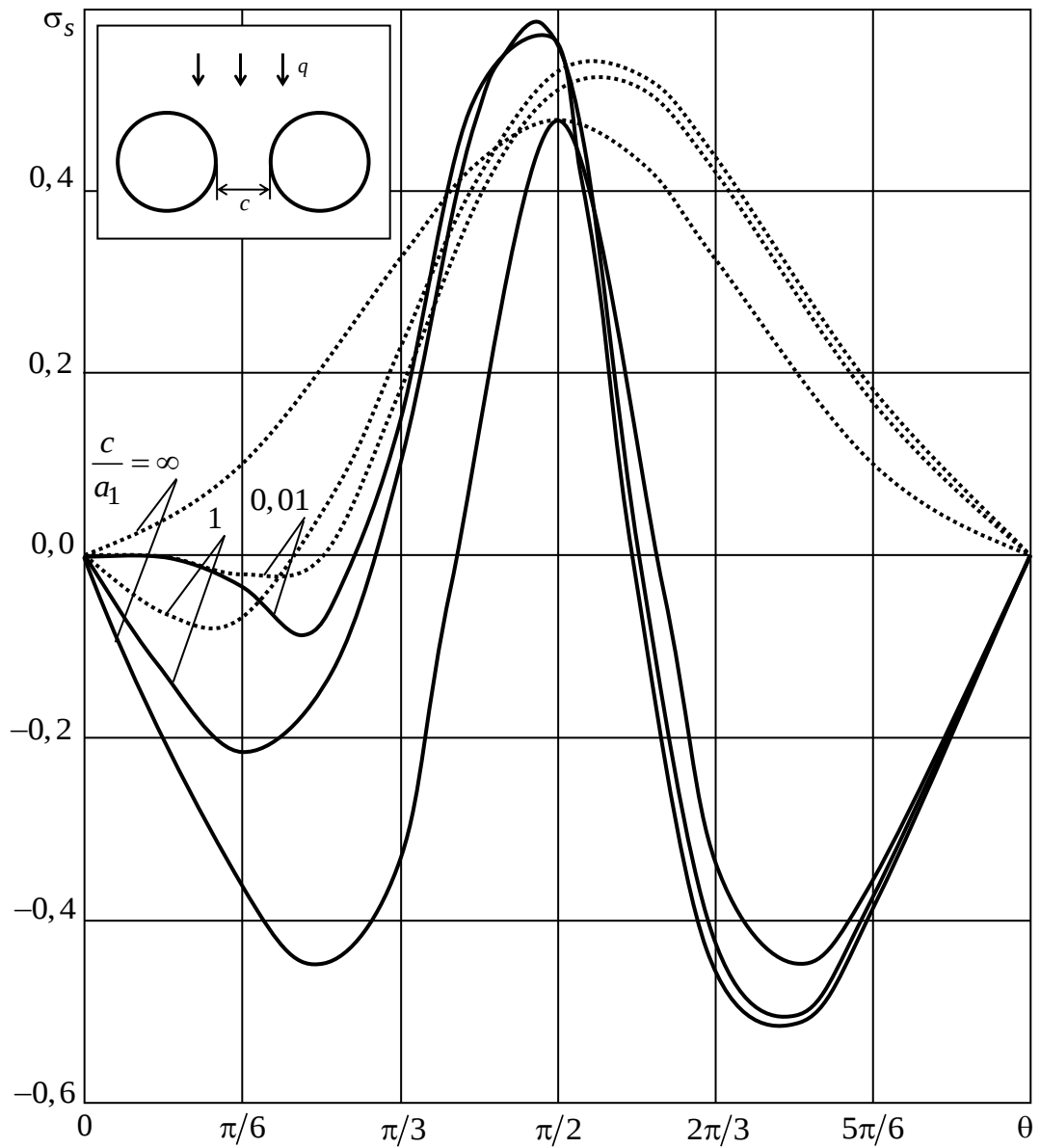


Рис. Б. 3.1. Графики распределения напряжений σ_s по контуру левого отверстия в пластинке из материала М1 с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a_1 – отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

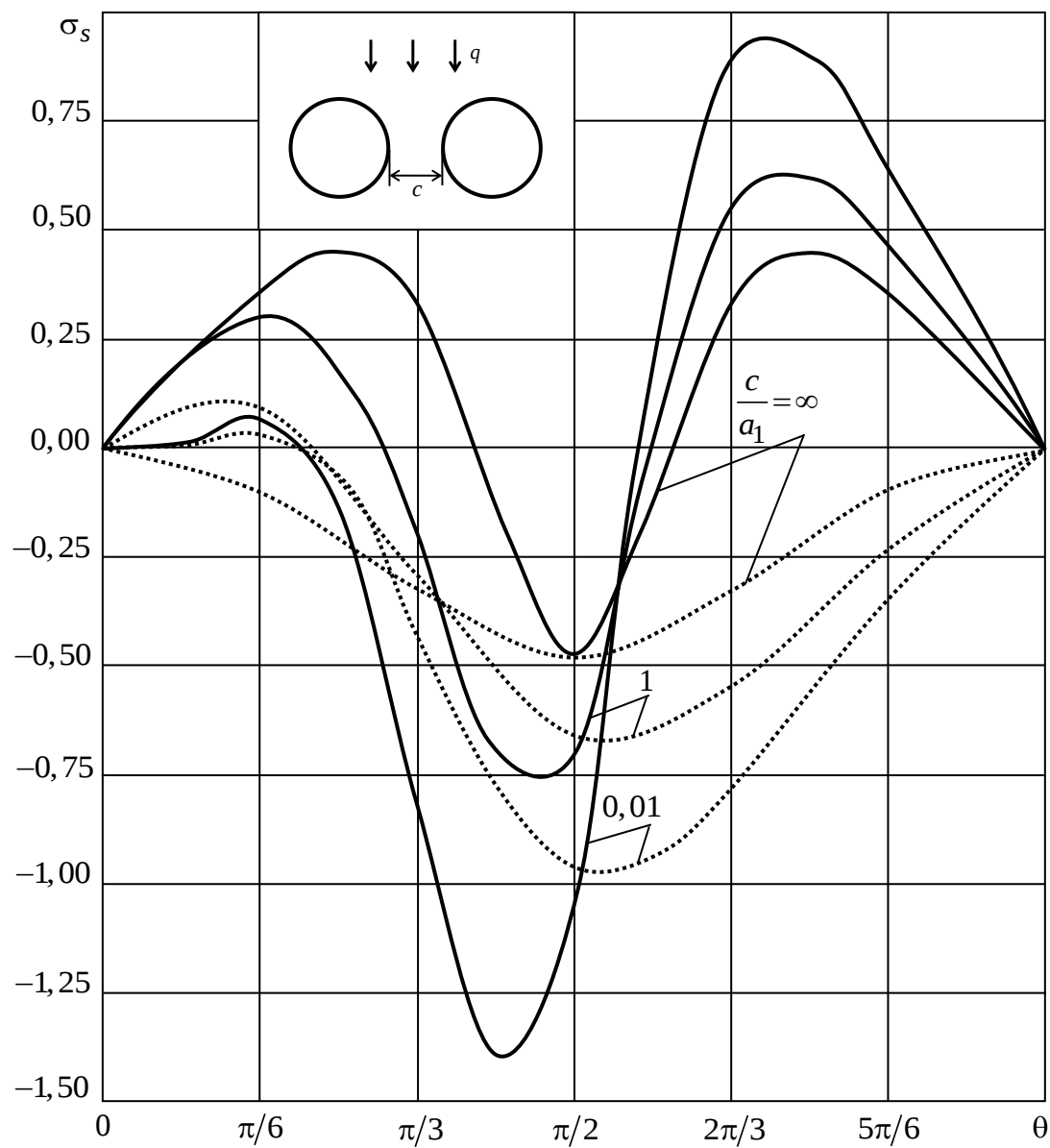


Рис. Б. 3.2. Графики распределения напряжений σ_s по контуру левого отверстия в пластинке из материала М1 с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a_1 — отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

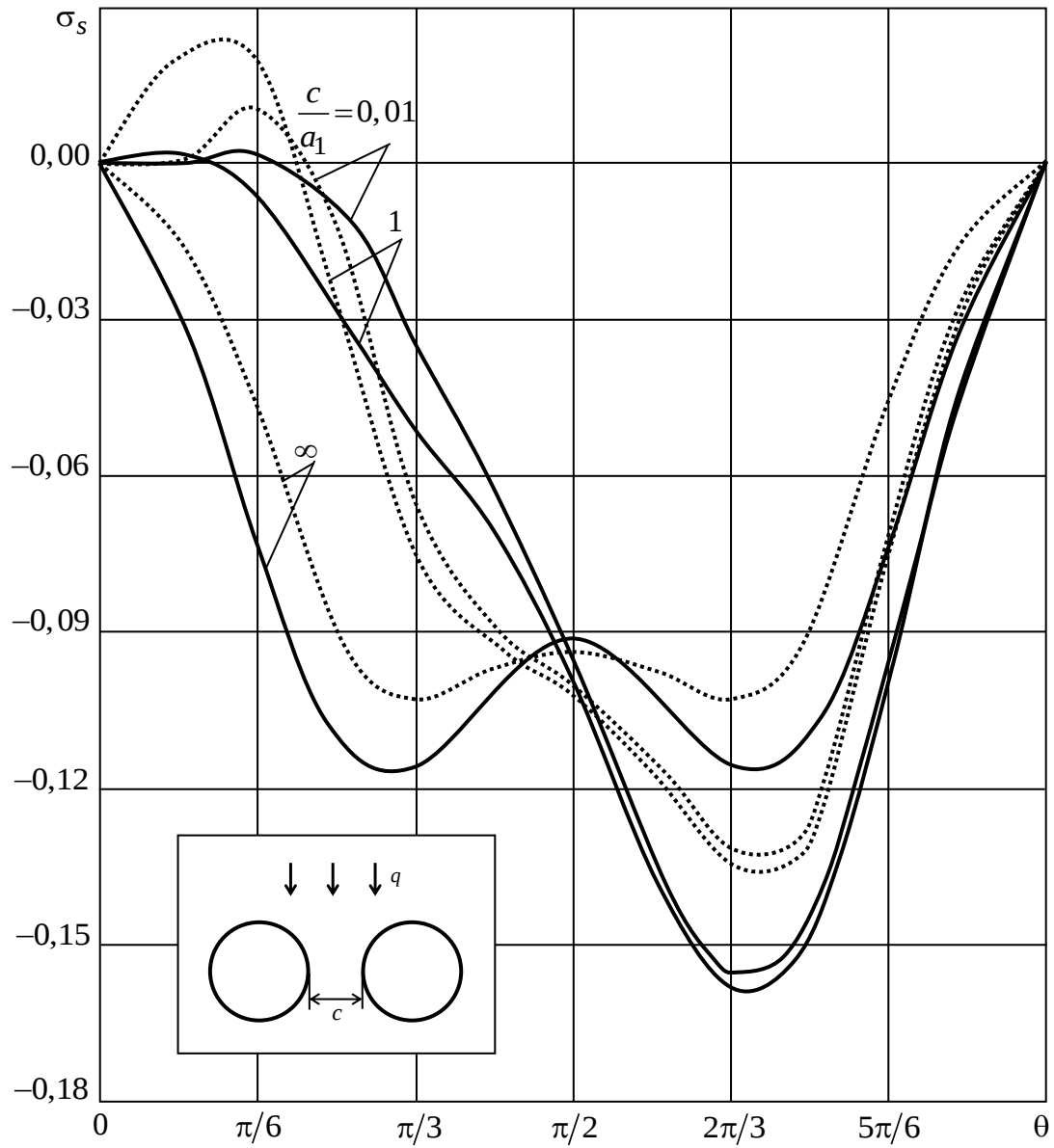


Рис. Б. 3.3. Графики распределения напряжений σ_s по контуру левого отверстия в пластинке из материала МЗ с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a_1 — отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

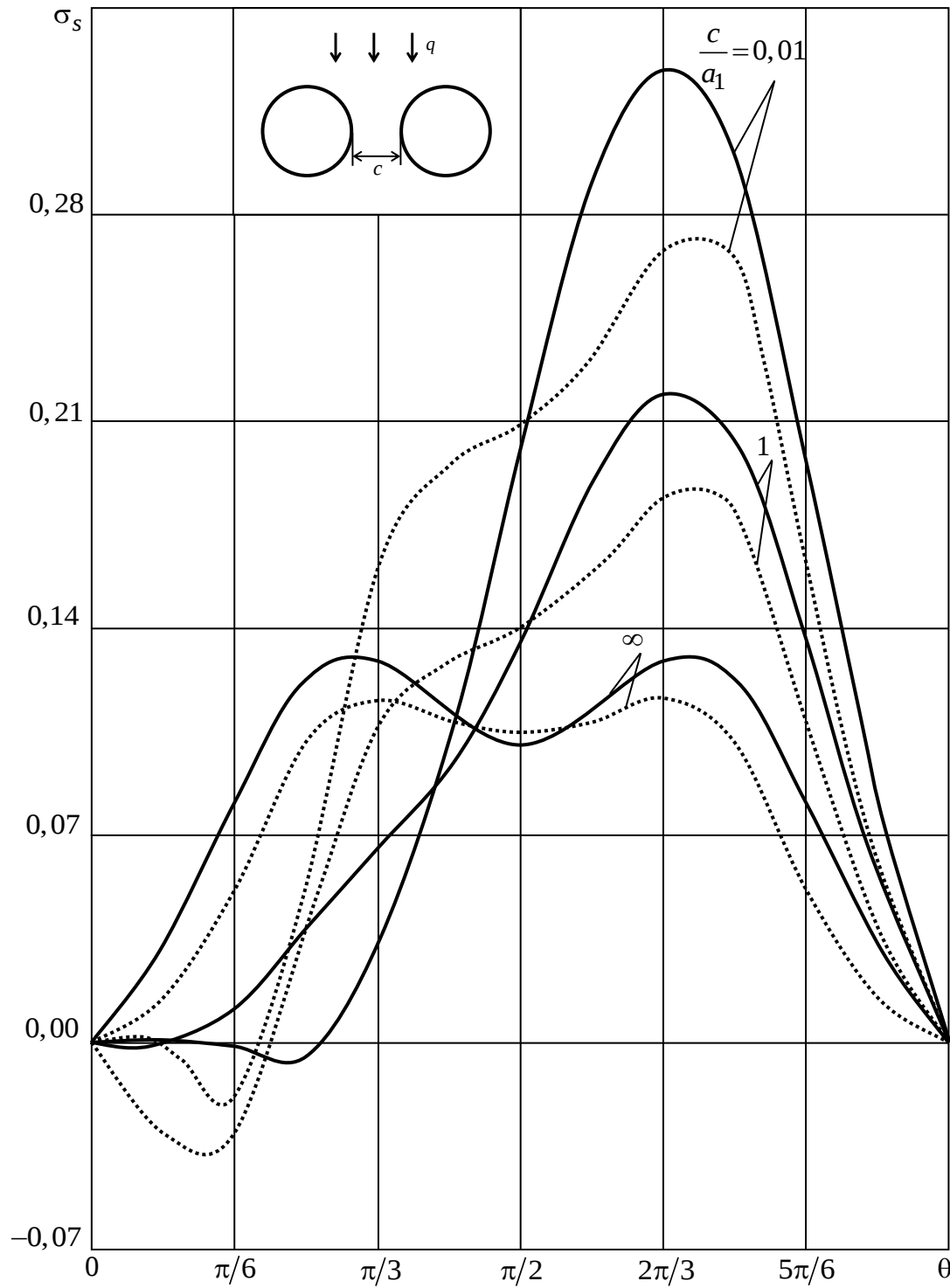


Рис. Б. 3.4. Графики распределения напряжений σ_s по контуру левого отверстия в пластинке из материала МЗ с двумя неподкрепленными круговыми отверстиями, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a_1 – отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

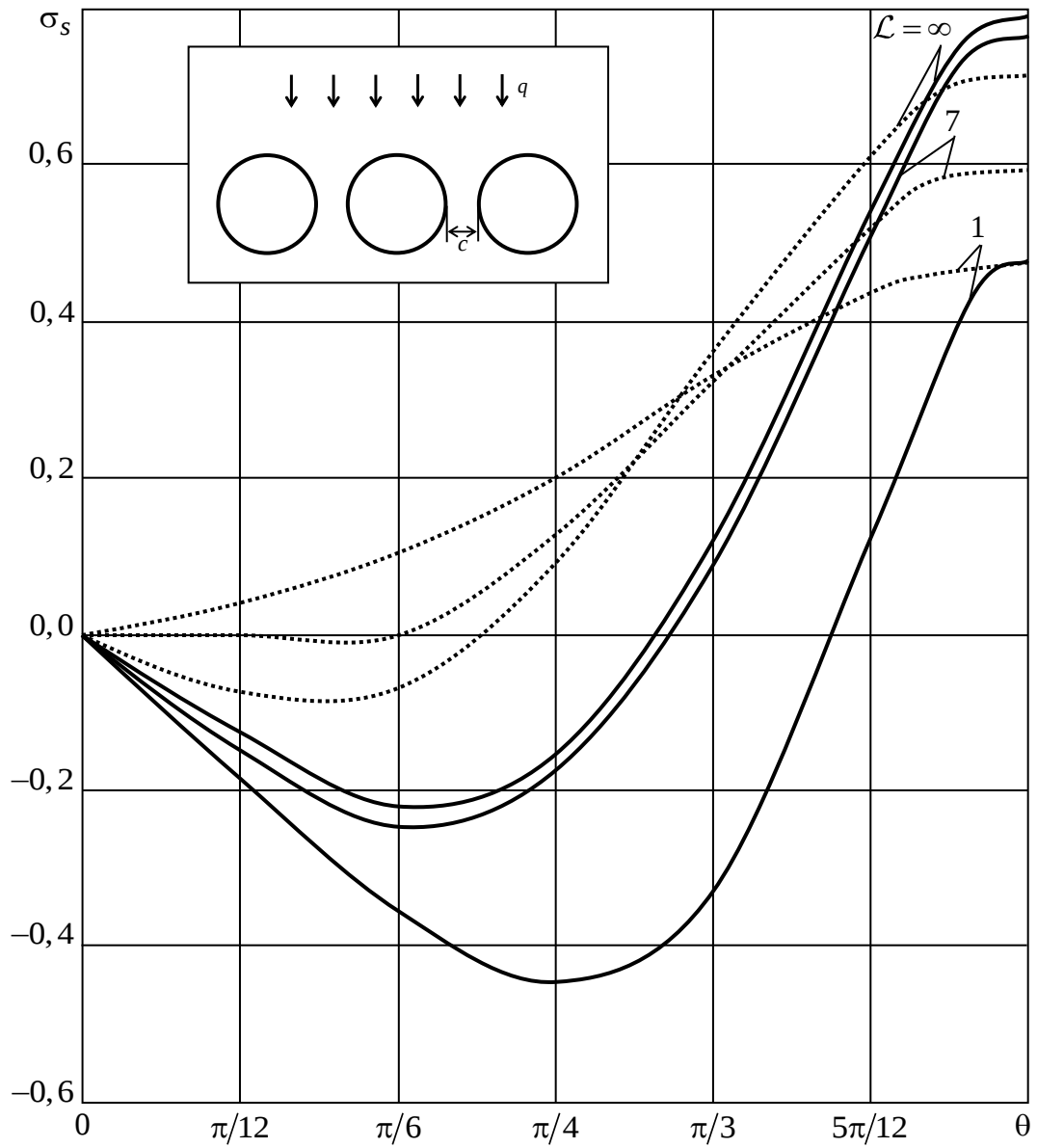


Рис. Б. 3.5. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала М1 с $\mathcal{L}$ одинаковыми круговыми отверстиями, на контурах которых задана одинаковая температура, при $c/a=1$ (расстояния между отверстиями, равных их радиусу).

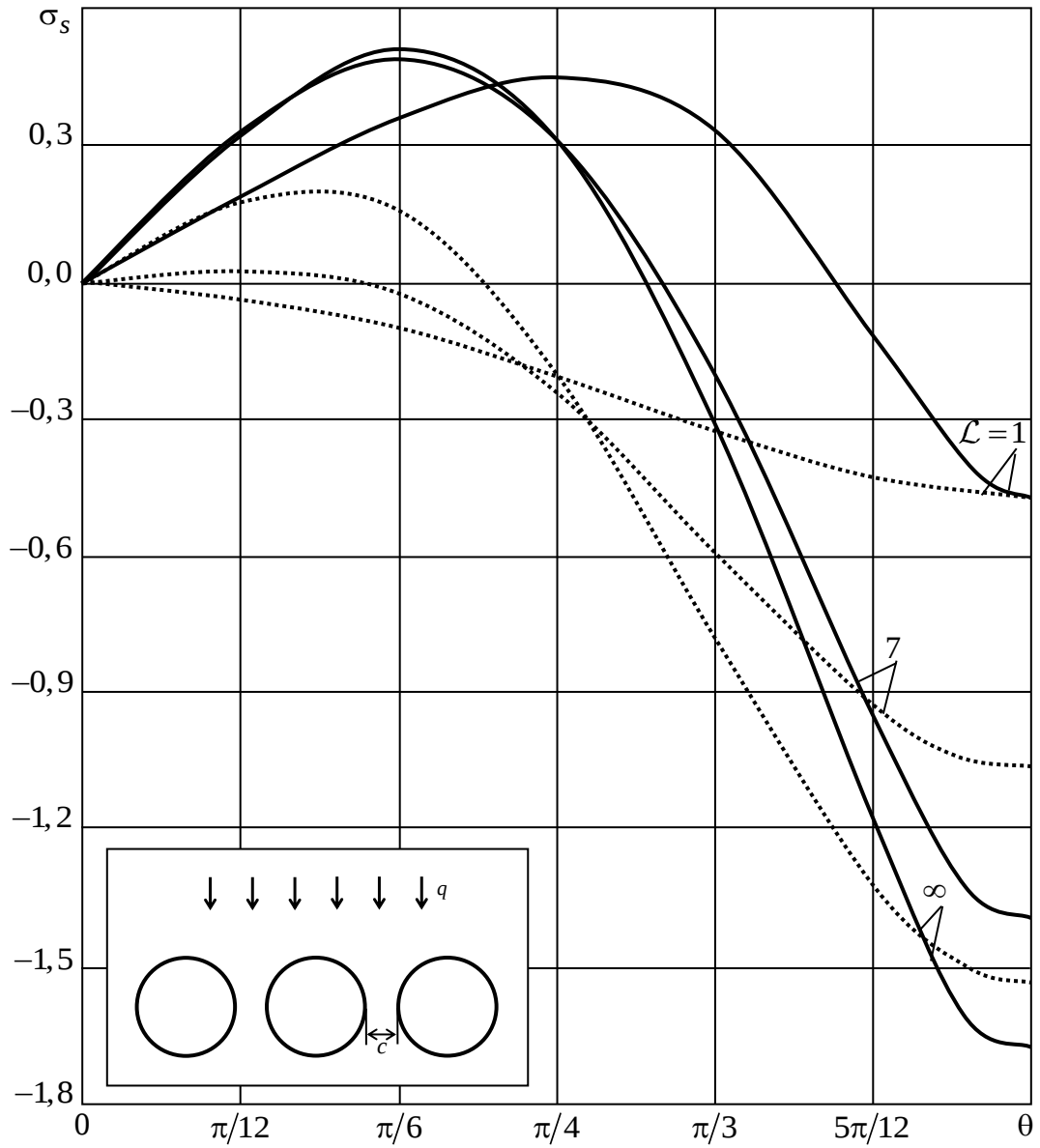


Рис. Б. 3.6. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала М1 с $\mathcal{L}$ одинаковыми круговыми отверстиями с теплоизолированными контурами, при $c/a=1$ (расстояния между отверстиями, равных их радиусу).

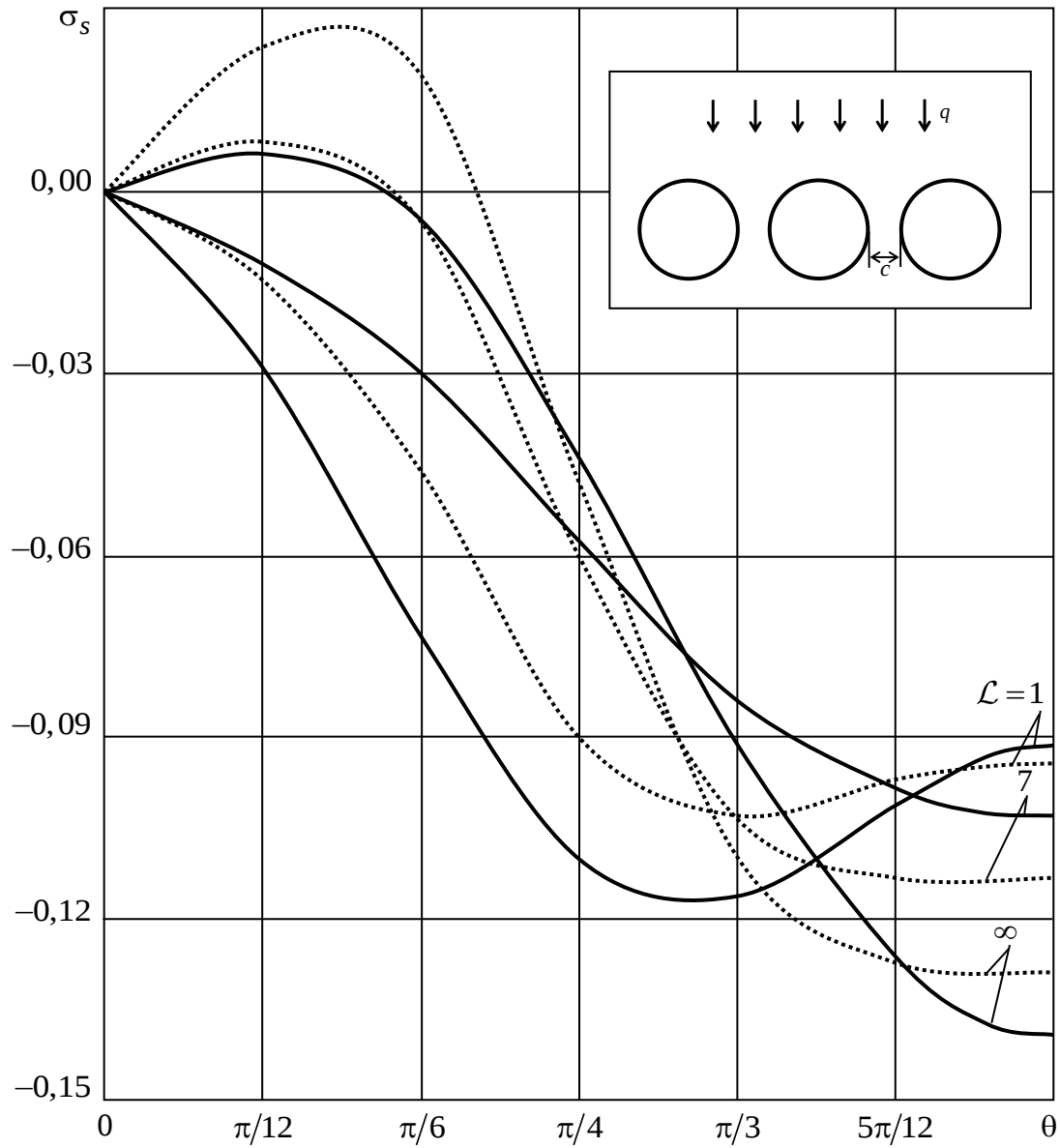


Рис. Б. 3.7. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала М3 с $\mathcal{L}$ одигнаковыми круговыми отверстиями, на контурах которых задана одинаковая температура, при $c/a=1$ (расстояния между отверстиями, равных их радиусу).

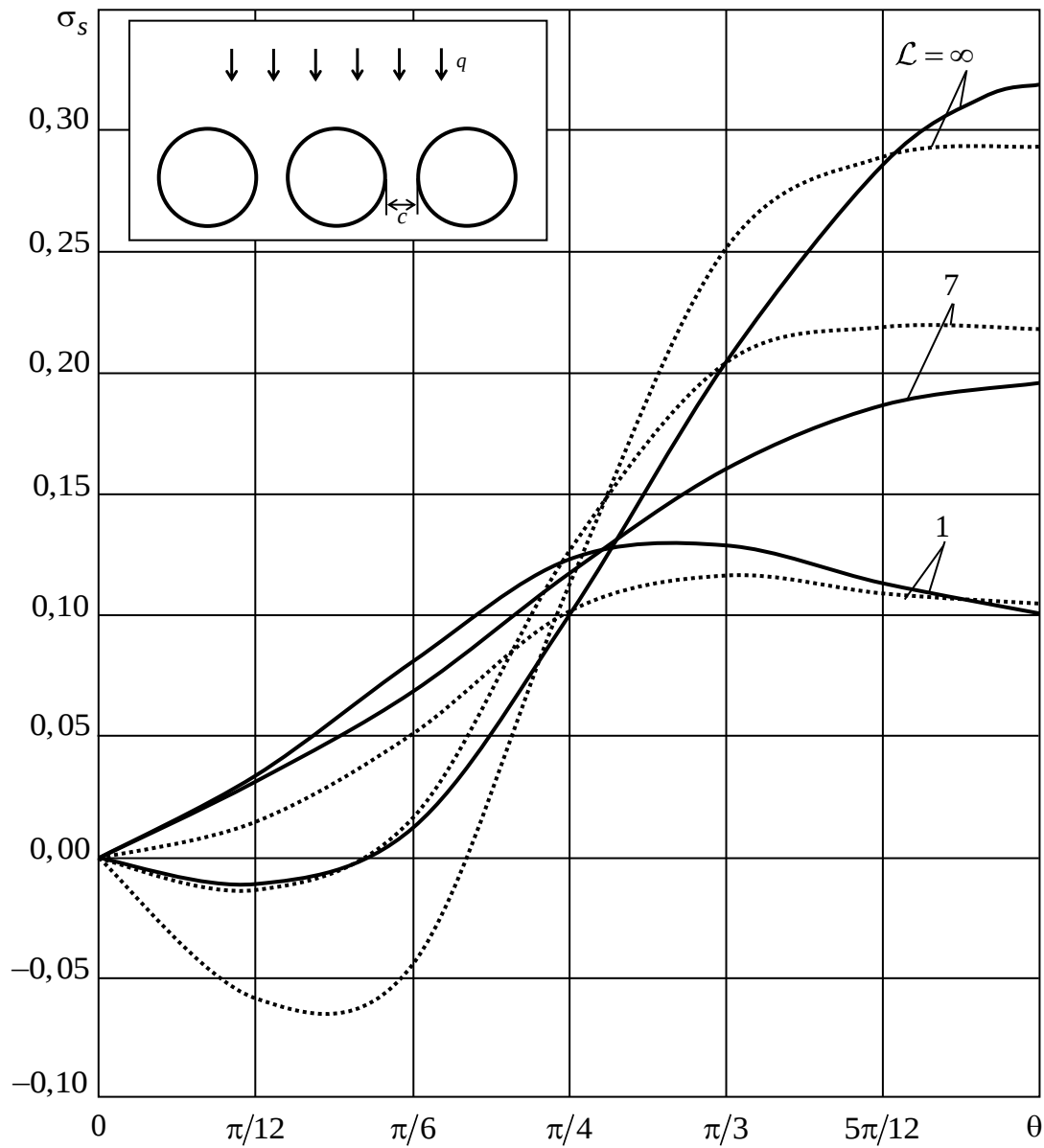


Рис. Б. 3.8. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала МЗ с L одинаковыми круговыми отверстиями, контуры которых теплоизолированы, при $c/a = 1$ (расстояния между отверстиями, равных их радиусу).

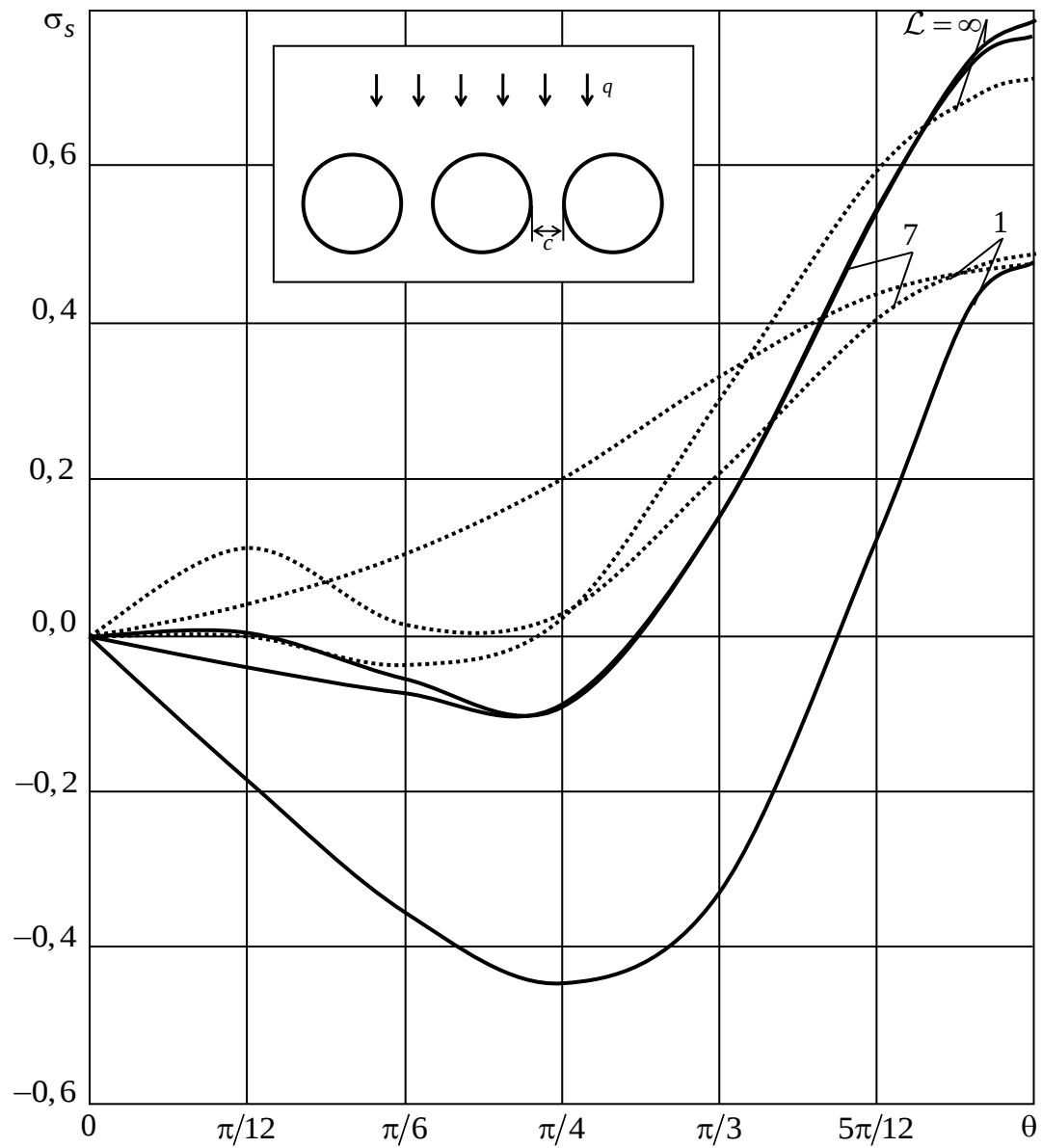


Рис. Б. 3.9. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала М1 с $\mathcal{L}$ одигнаковыми круговыми отверстиями, на контурах которых задана одинаковая температура, при $c/a = 0,1$.

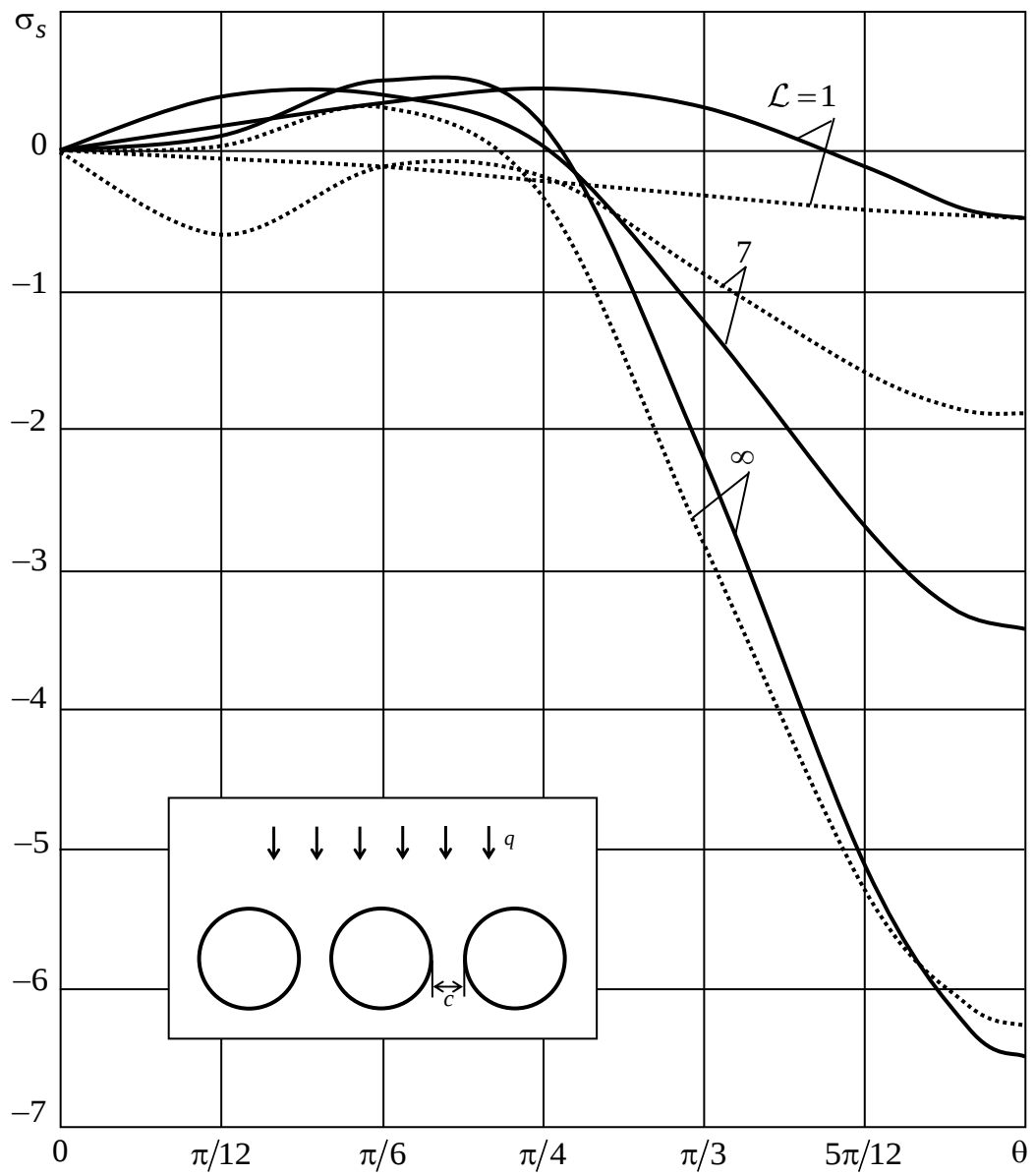


Рис. Б. 3.10. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала М1 с $\mathcal{L}$ одинаковыми круговыми отверстиями, контуры которых теплоизолированы, при $c/a = 0,1$

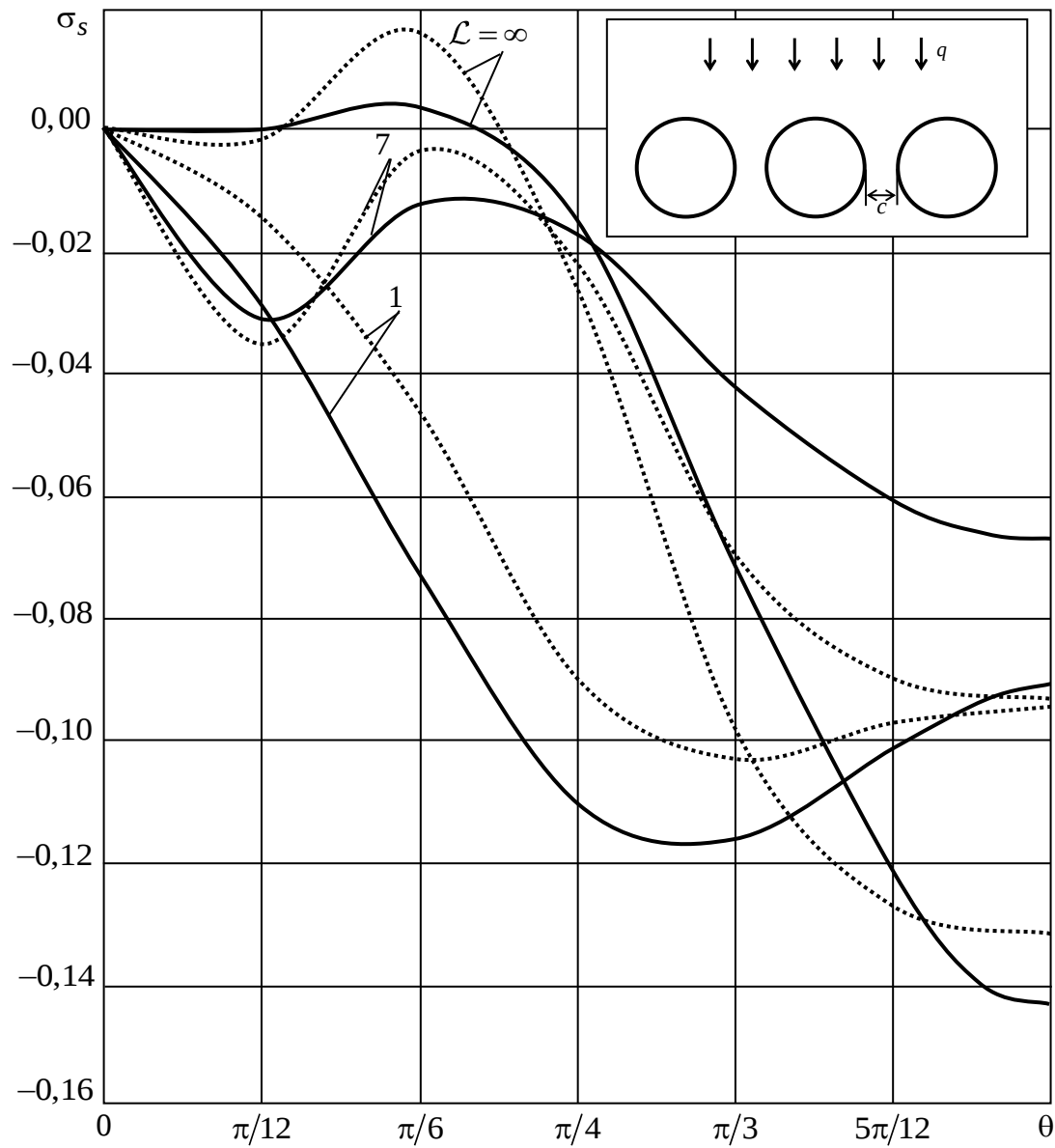


Рис. Б. 3.11. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала М3 с $\mathcal{L}$ одигнаковыми круговыми отверстиями, на контурах которых задана одинаковая температура, при $c/a = 0,1$.

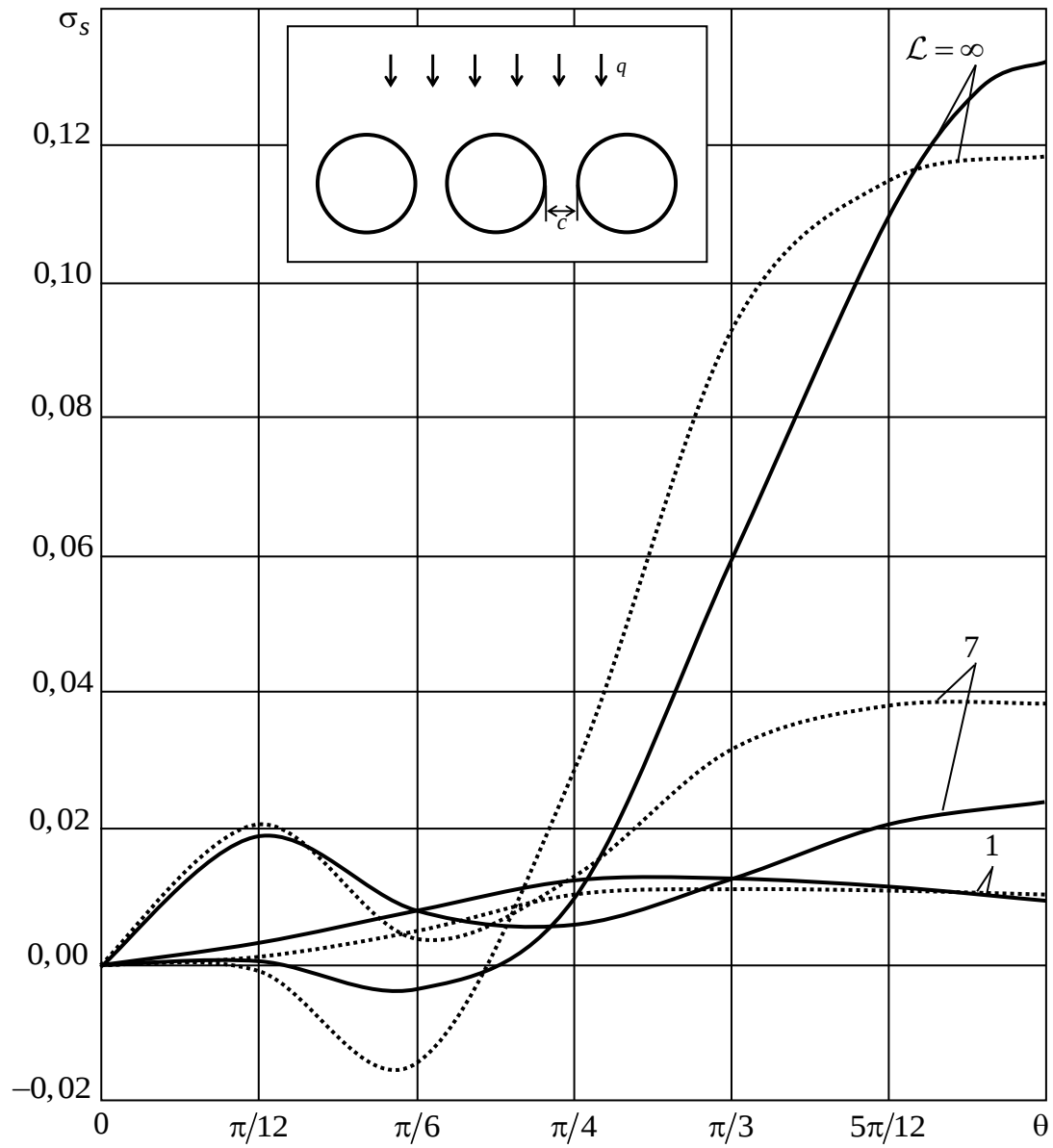


Рис. Б. 3.12. Графики распределения напряжений σ_s по контуру центрального отверстия в пластинке из материала МЗ с $\mathcal{L}$ одинаковыми круговыми отверстиями, контуры которых теплоизолированы, при $c/a = 0,1$

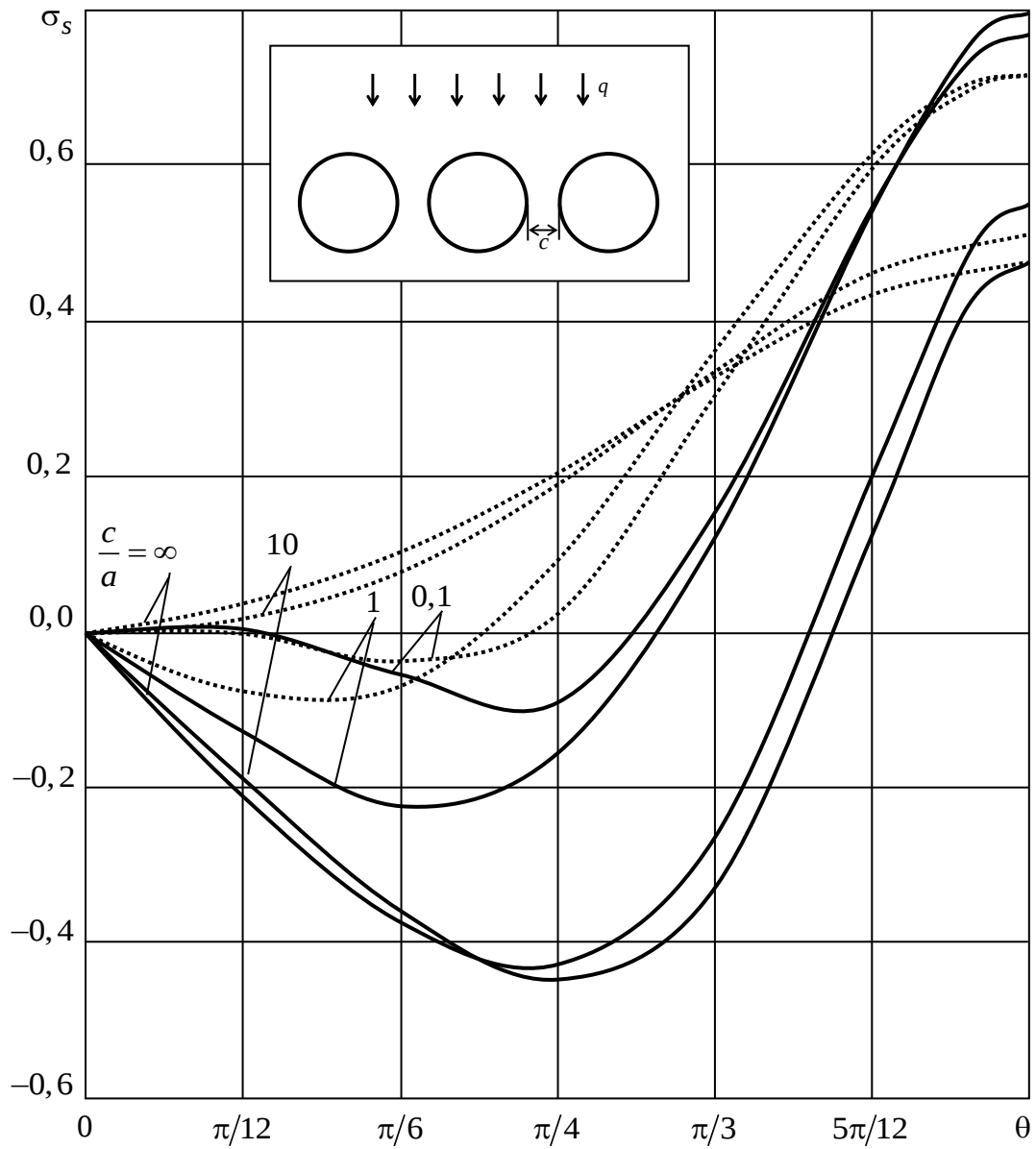


Рис. Б. 3.13. Графики распределения напряжений σ_s по контурам отверстий в пластинке из материала М1 с бесконечным рядом неподкреплённых круговых отверстий, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a – отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

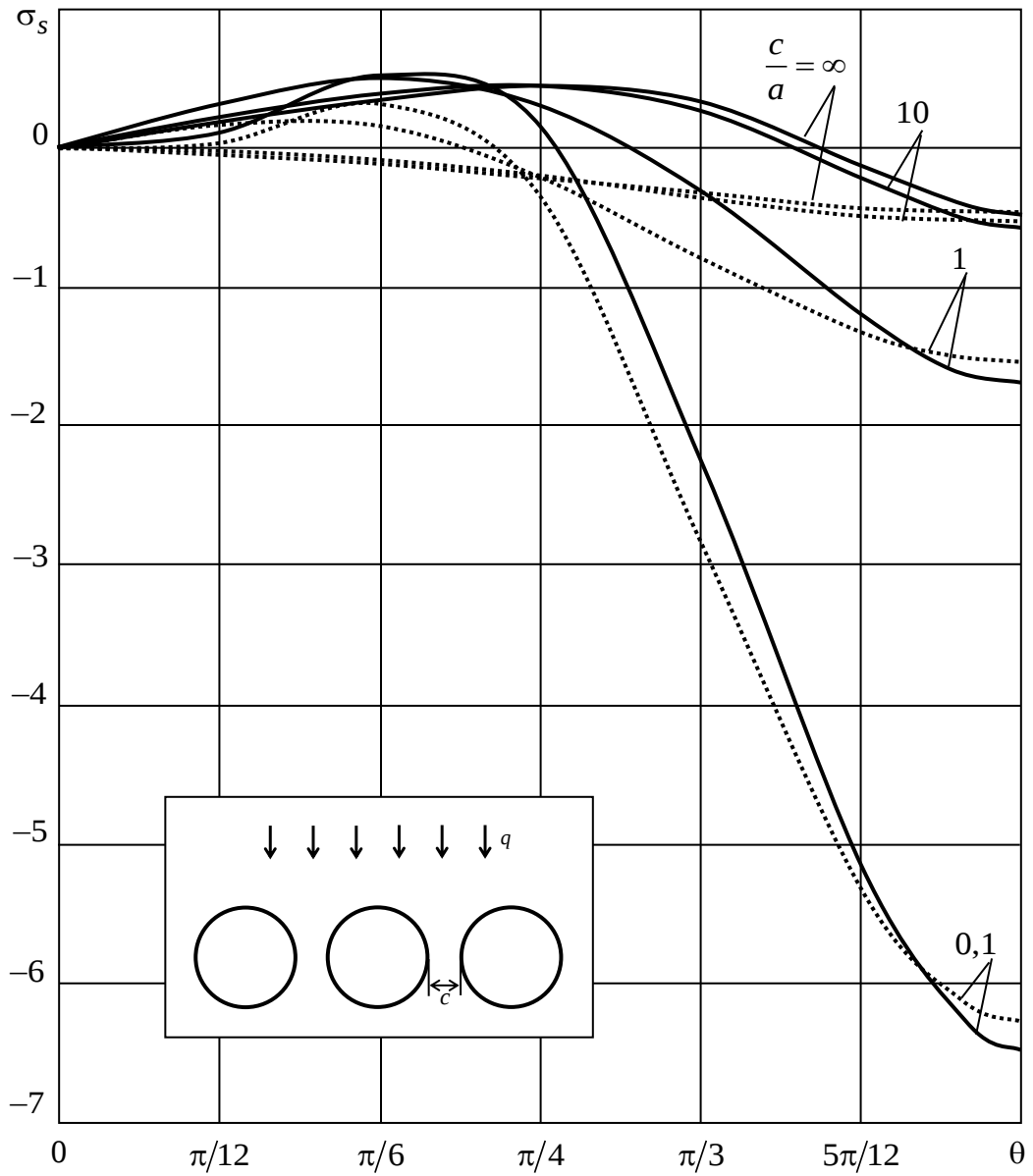


Рис. Б. 3.14. Графики распределения напряжений σ_s по контурам отверстий в пластинке из материала М1 с бесконечным рядом неподкрепленных круговых отверстий, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a — отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

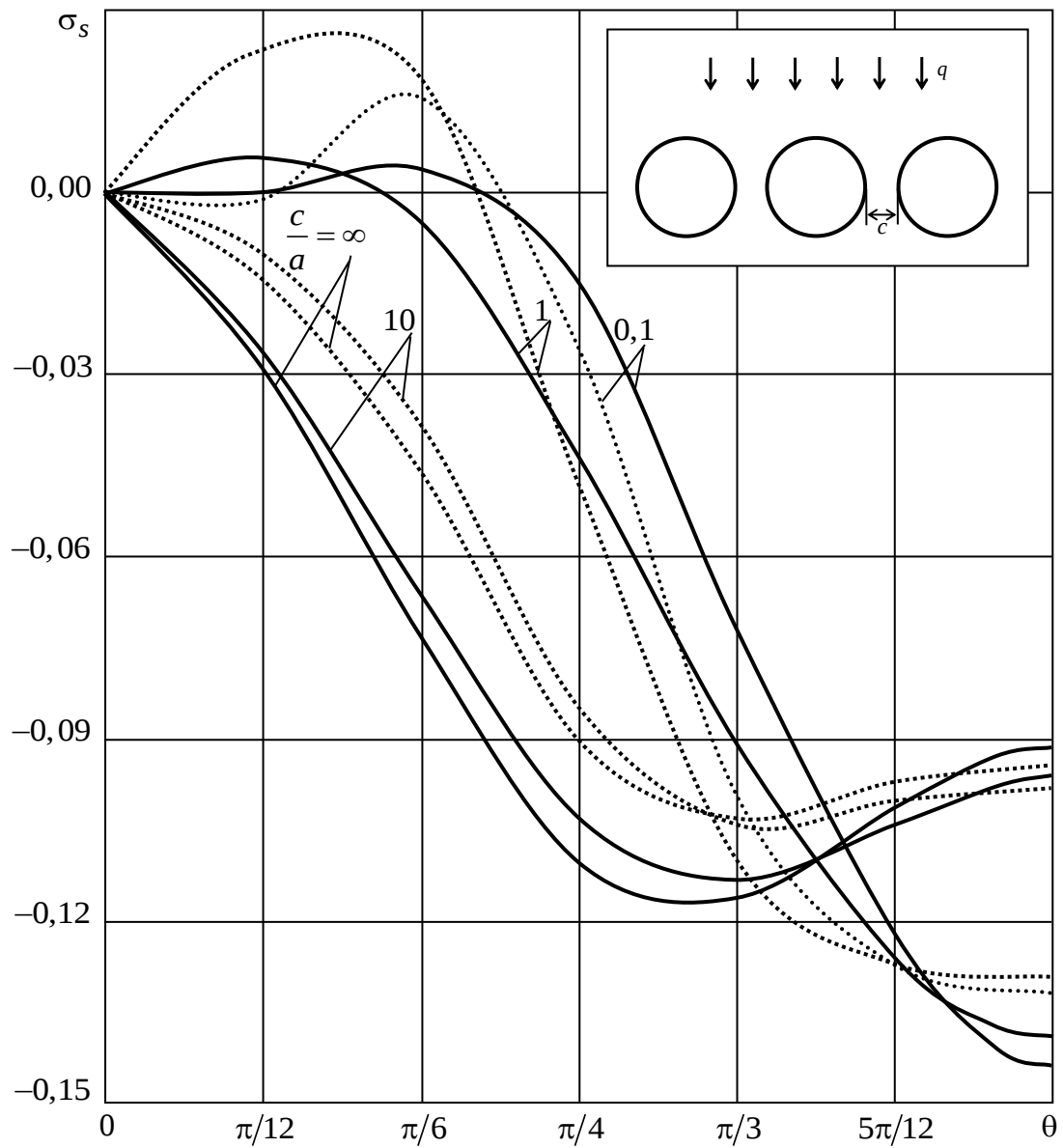


Рис. Б. 3.15. Графики распределения напряжений σ_s по контурам отверстий в пластинке из материала МЗ с бесконечным рядом неподкрепленных круговых отверстий, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a – отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

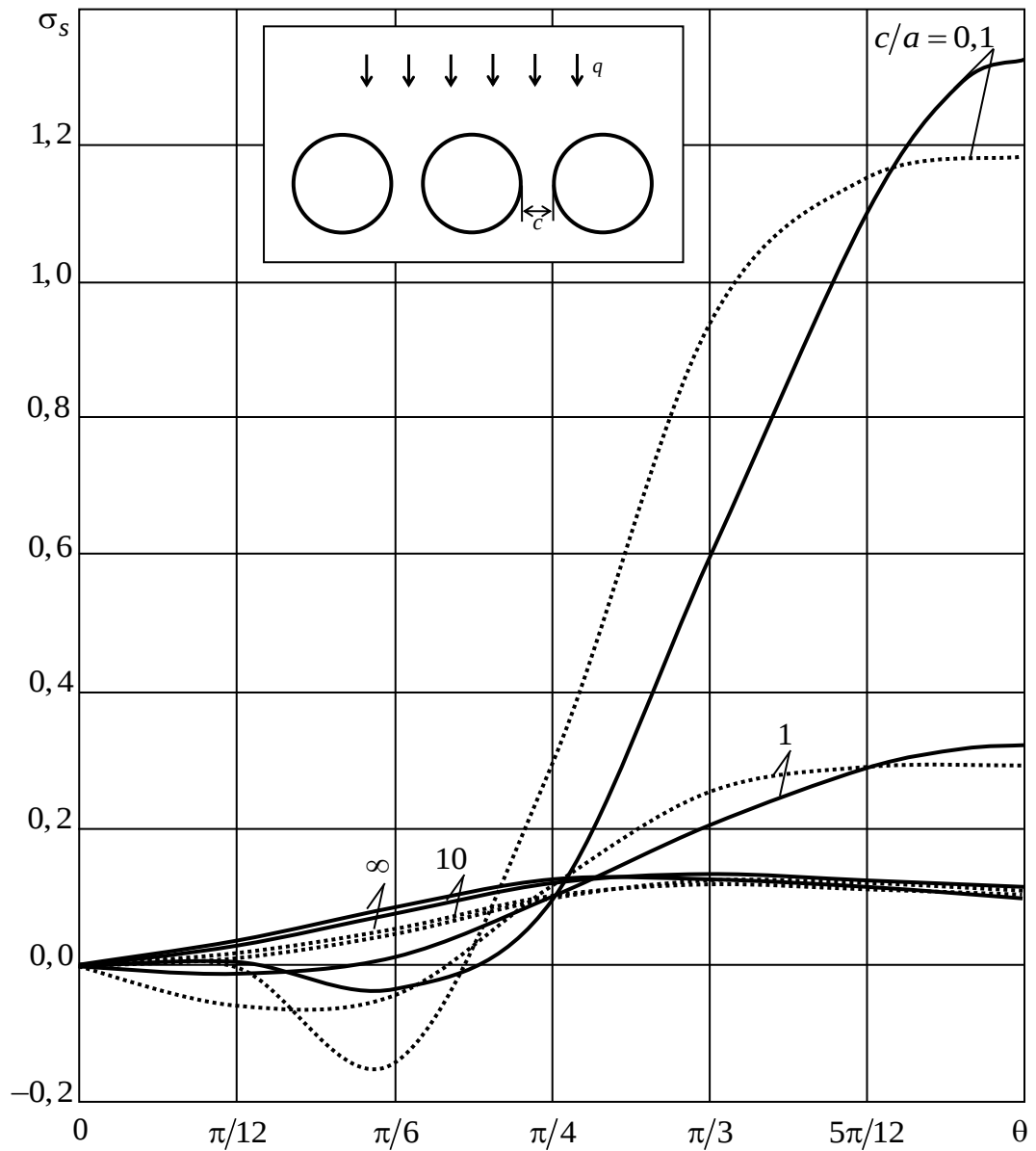


Рис. Б. 3.16. Графики распределения напряжений σ_s по контурам отверстий в пластинке из материала МЗ с бесконечным рядом неподкреплённых круговых отверстий, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a — отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

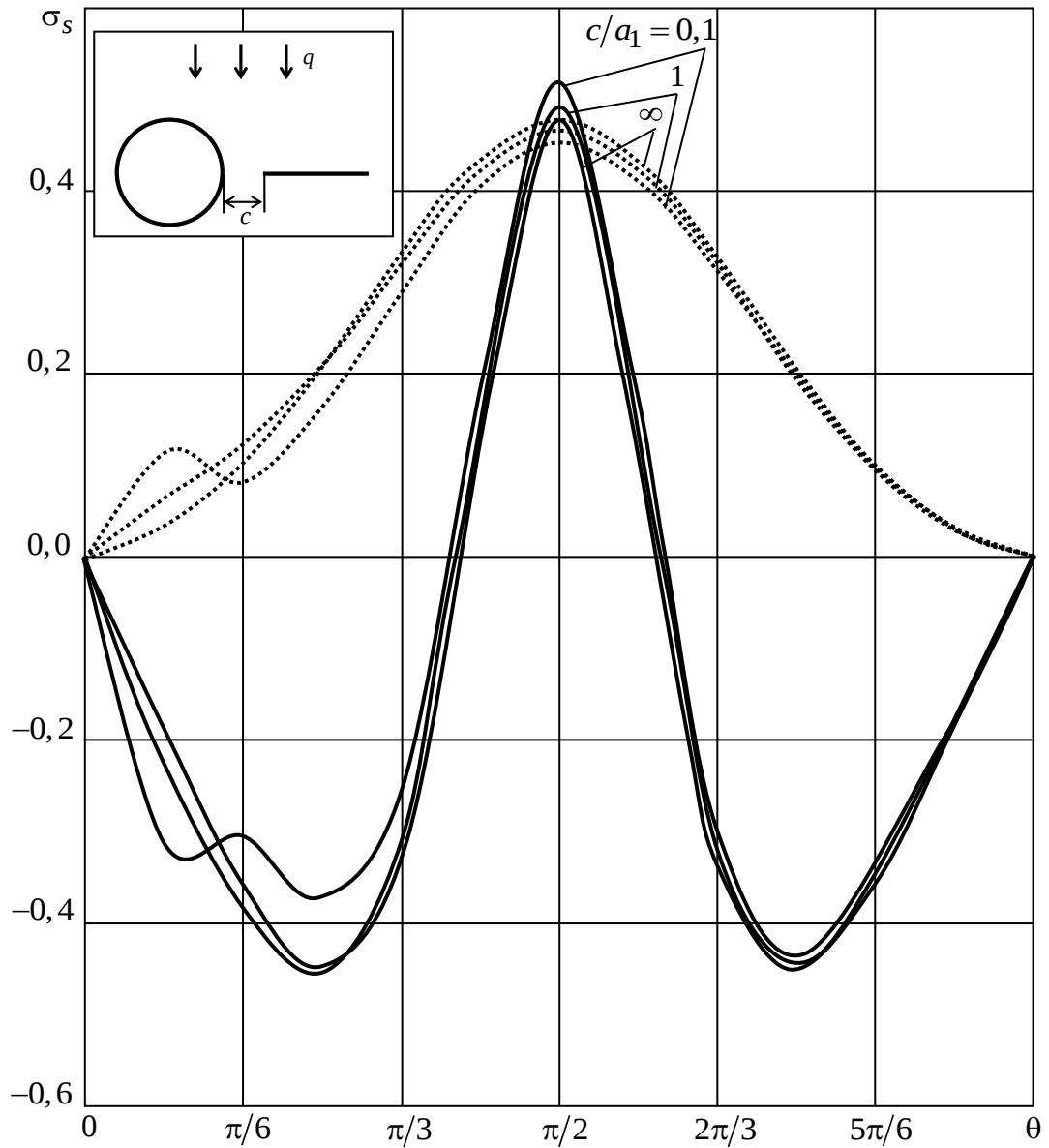


Рис. Б. 3.17. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a_1 – отношения расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия.

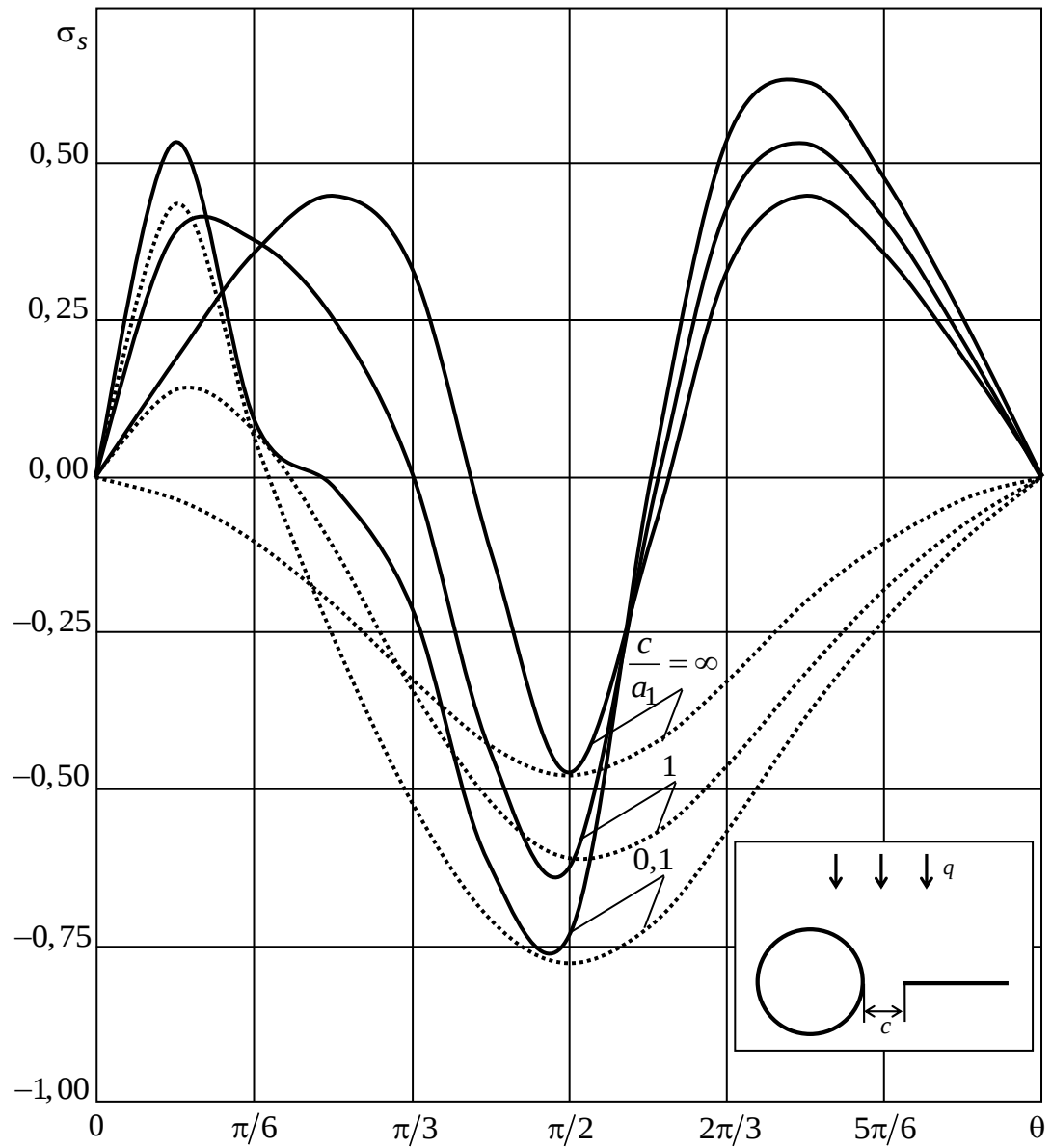


Рис. Б. 3.18. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a_1 – отношения расстояния между отверстиями и трещиной к радиусу отверстия.

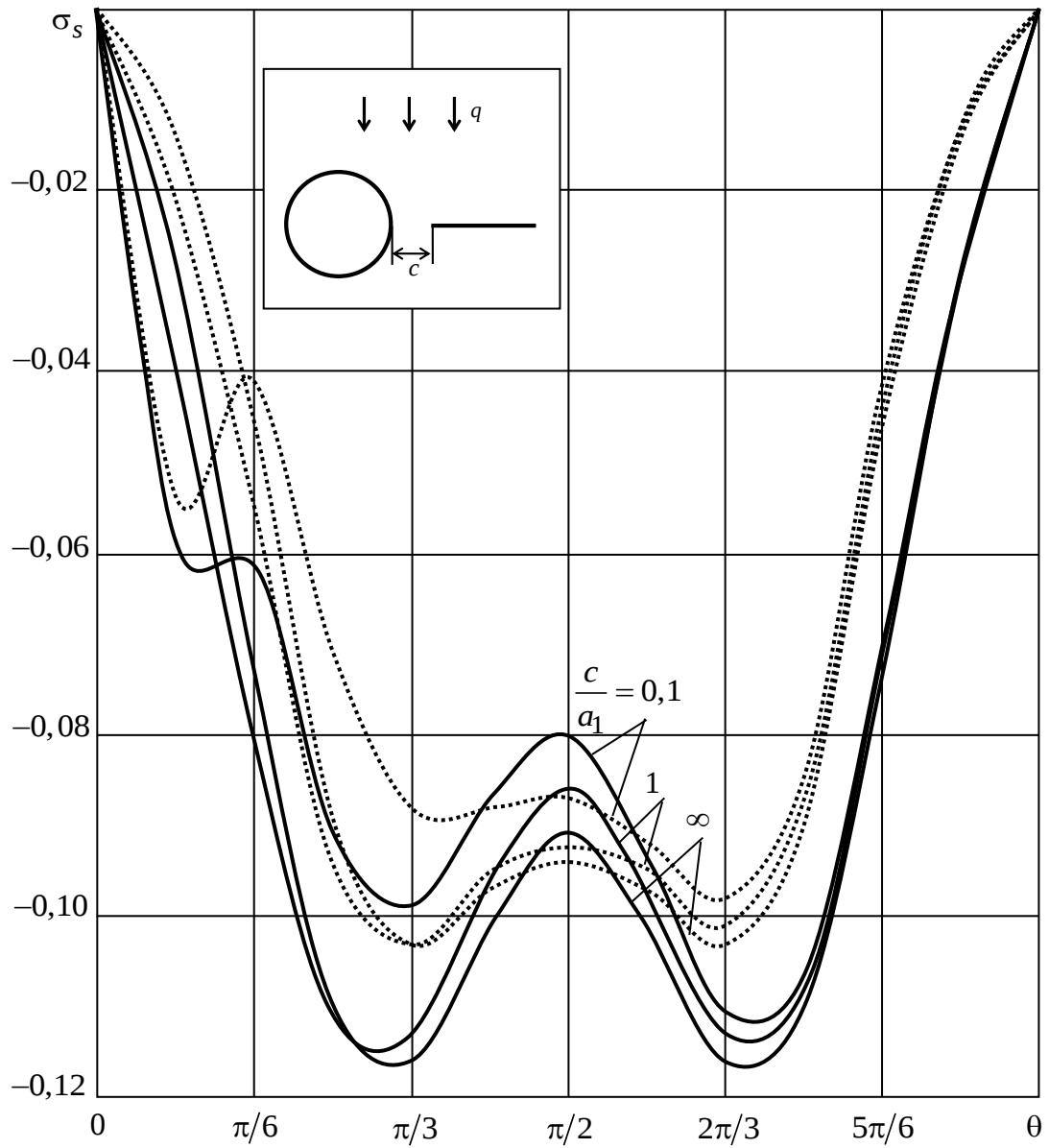


Рис. Б. 3.19. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a_1 — отношения расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия.

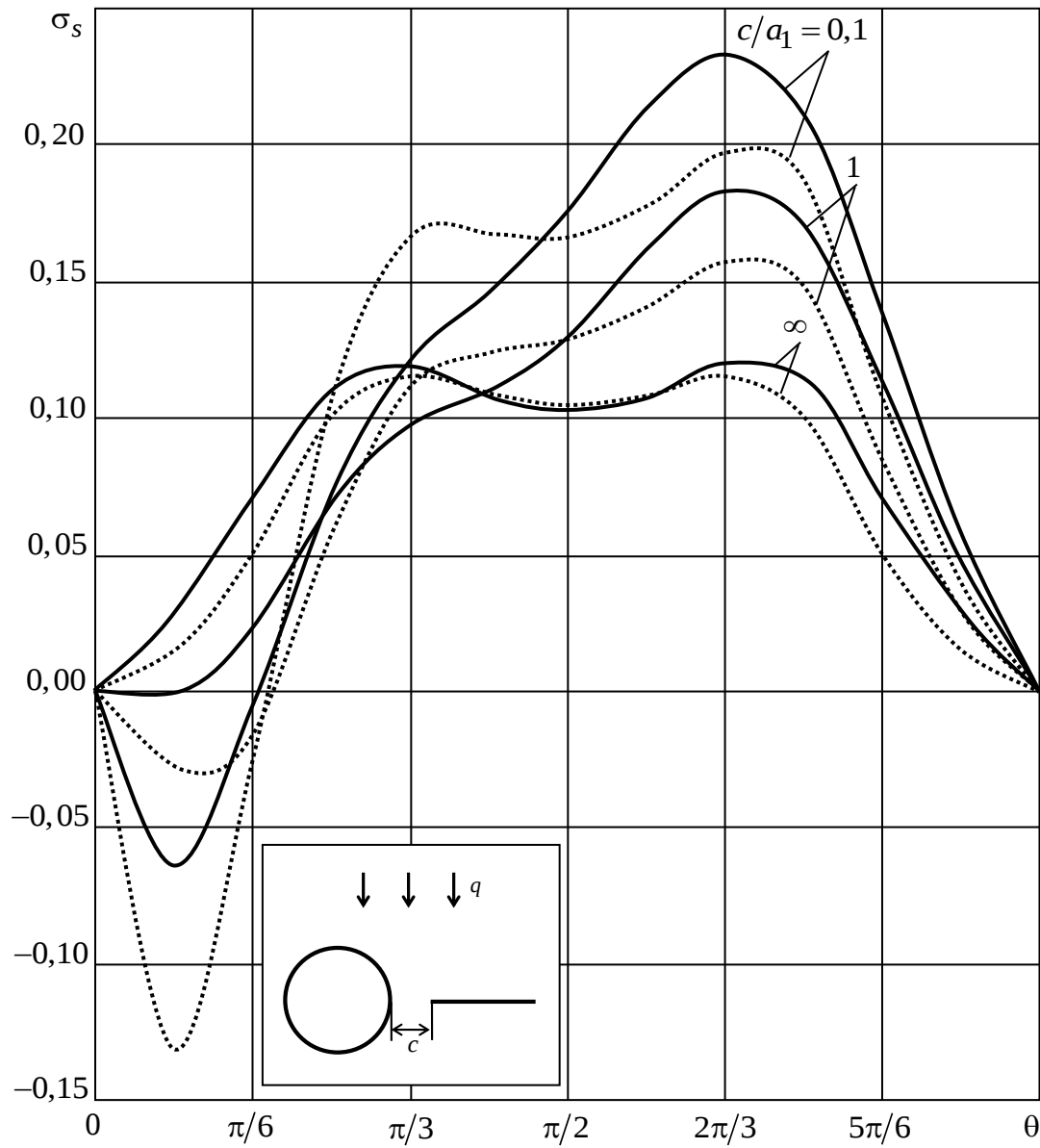


Рис. Б. 3.20. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с круговым отверстием и горизонтальной некраевой трещиной, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a_1 — отношения расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия.

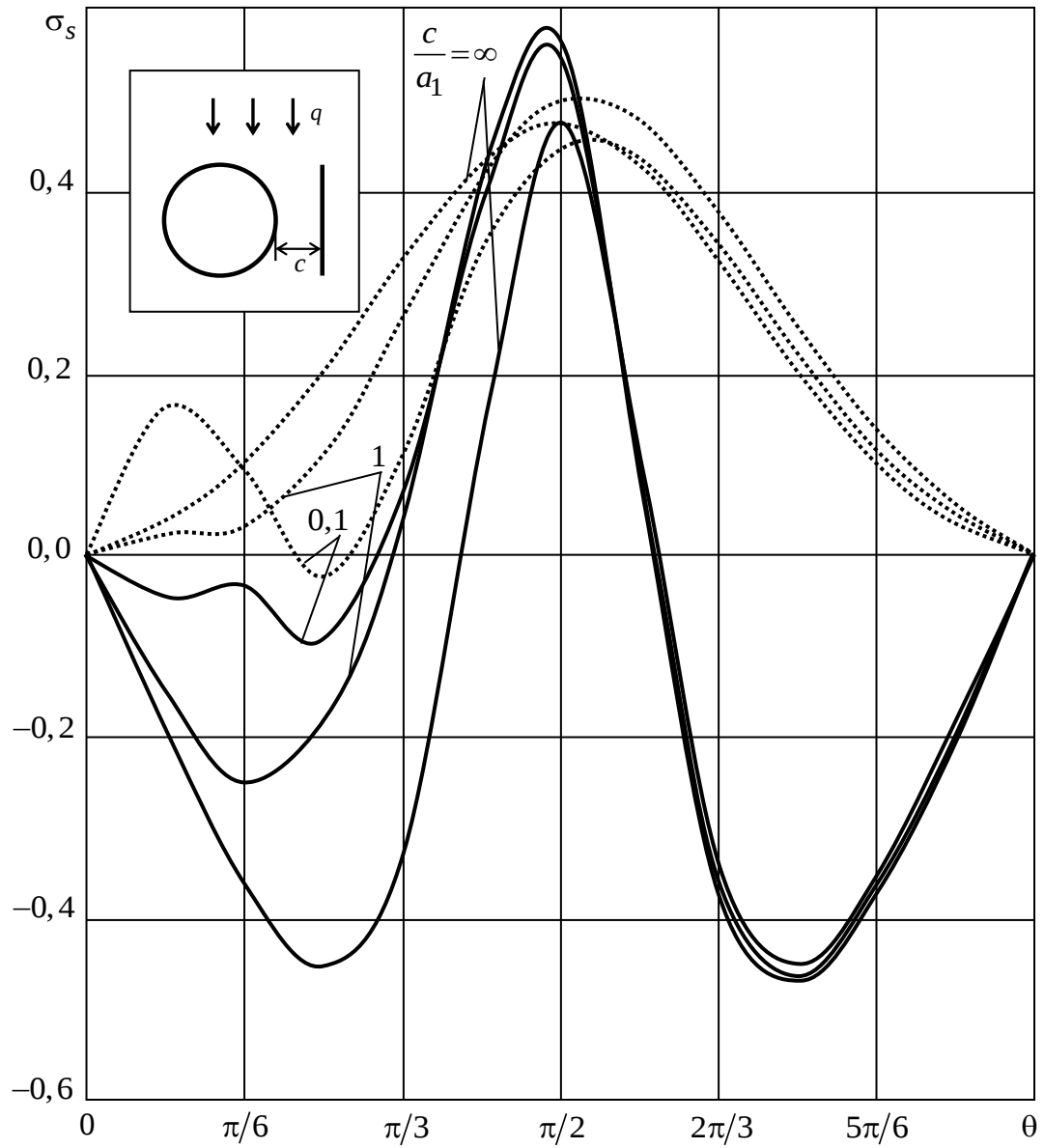


Рис. Б. 3.21. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a_1 — отношения расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия.

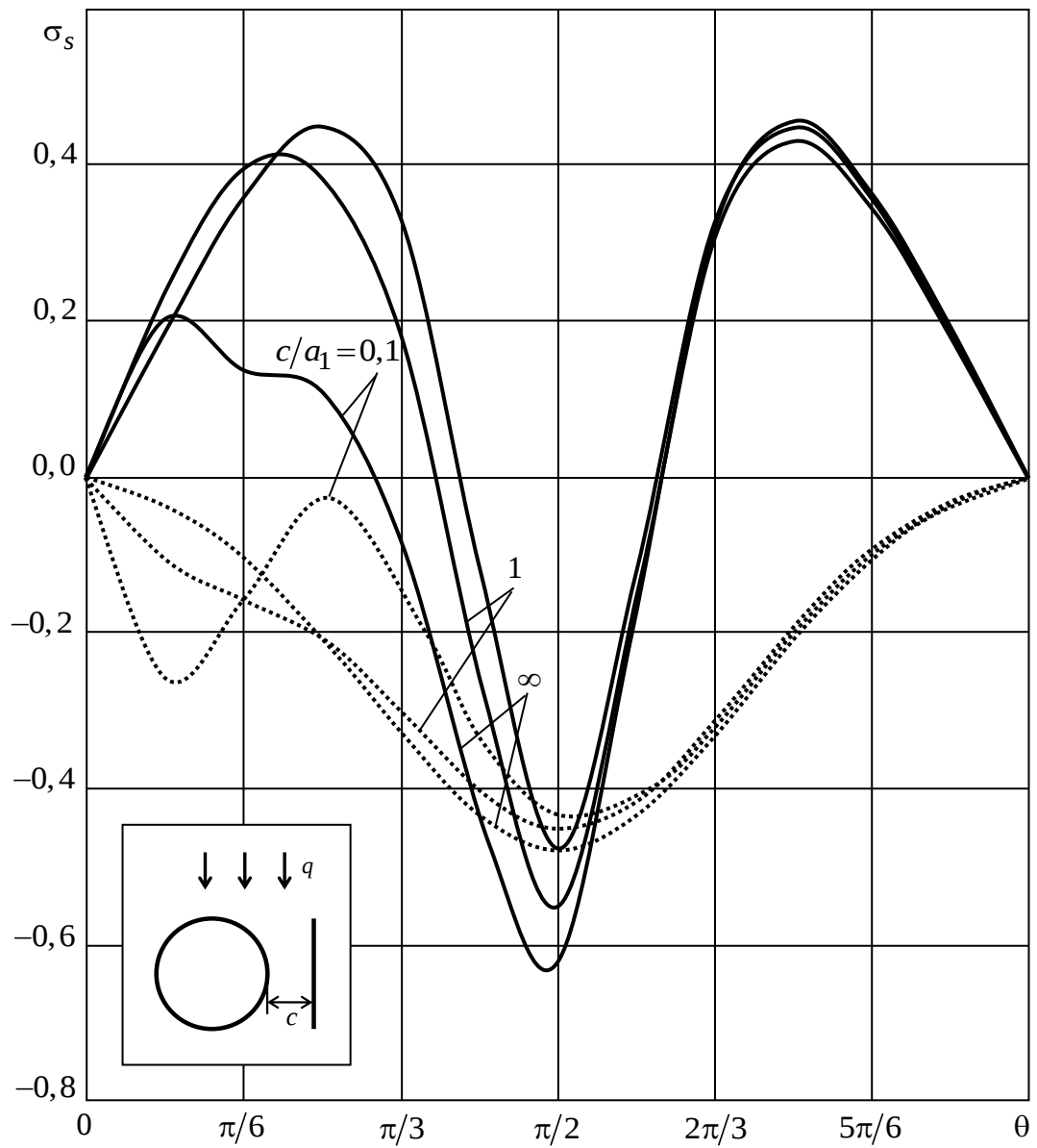


Рис. Б. 3.22. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a_1 – отношения расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия.

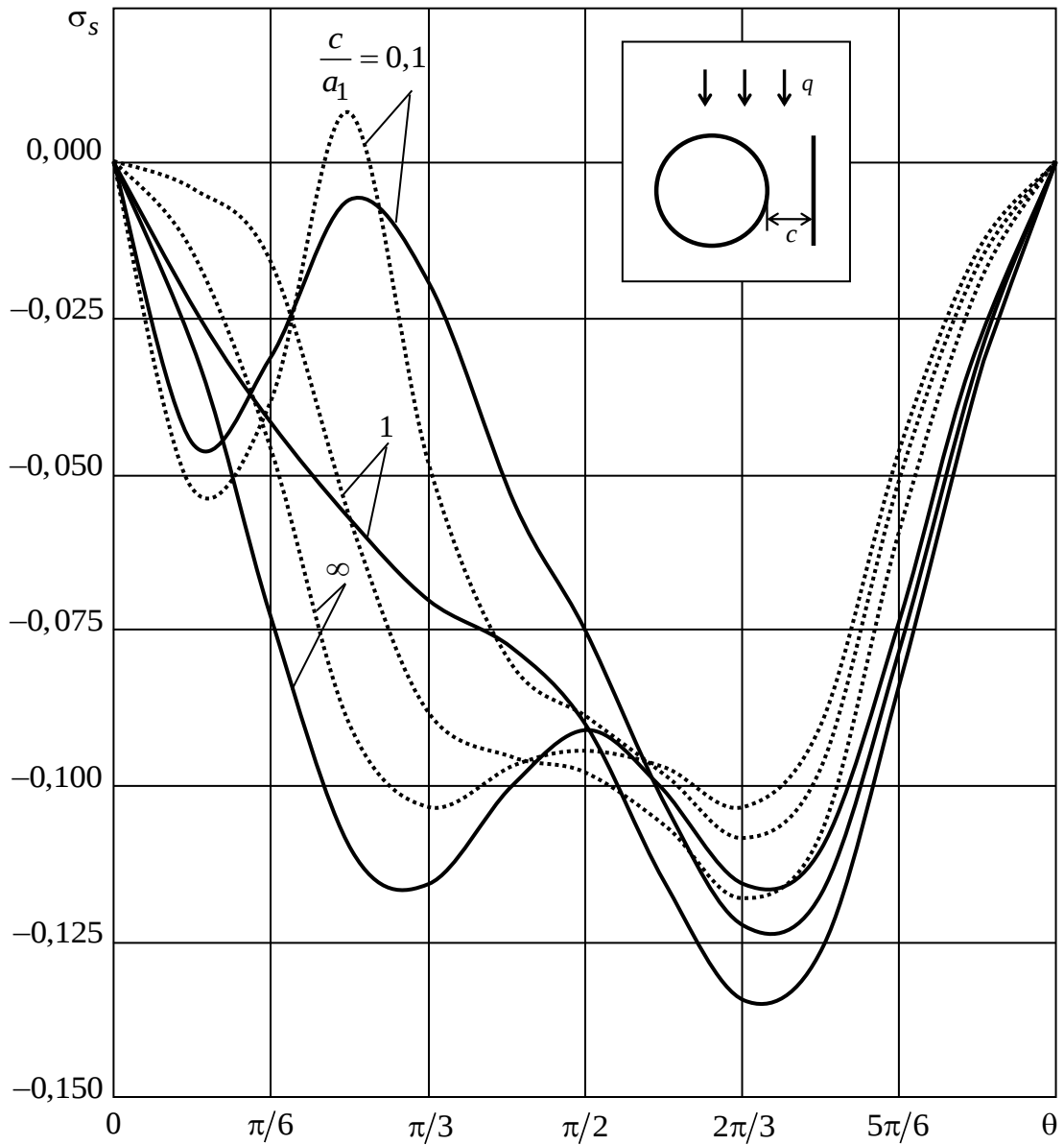


Рис. Б. 3.23. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М3 с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a_1 — отношения расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия.

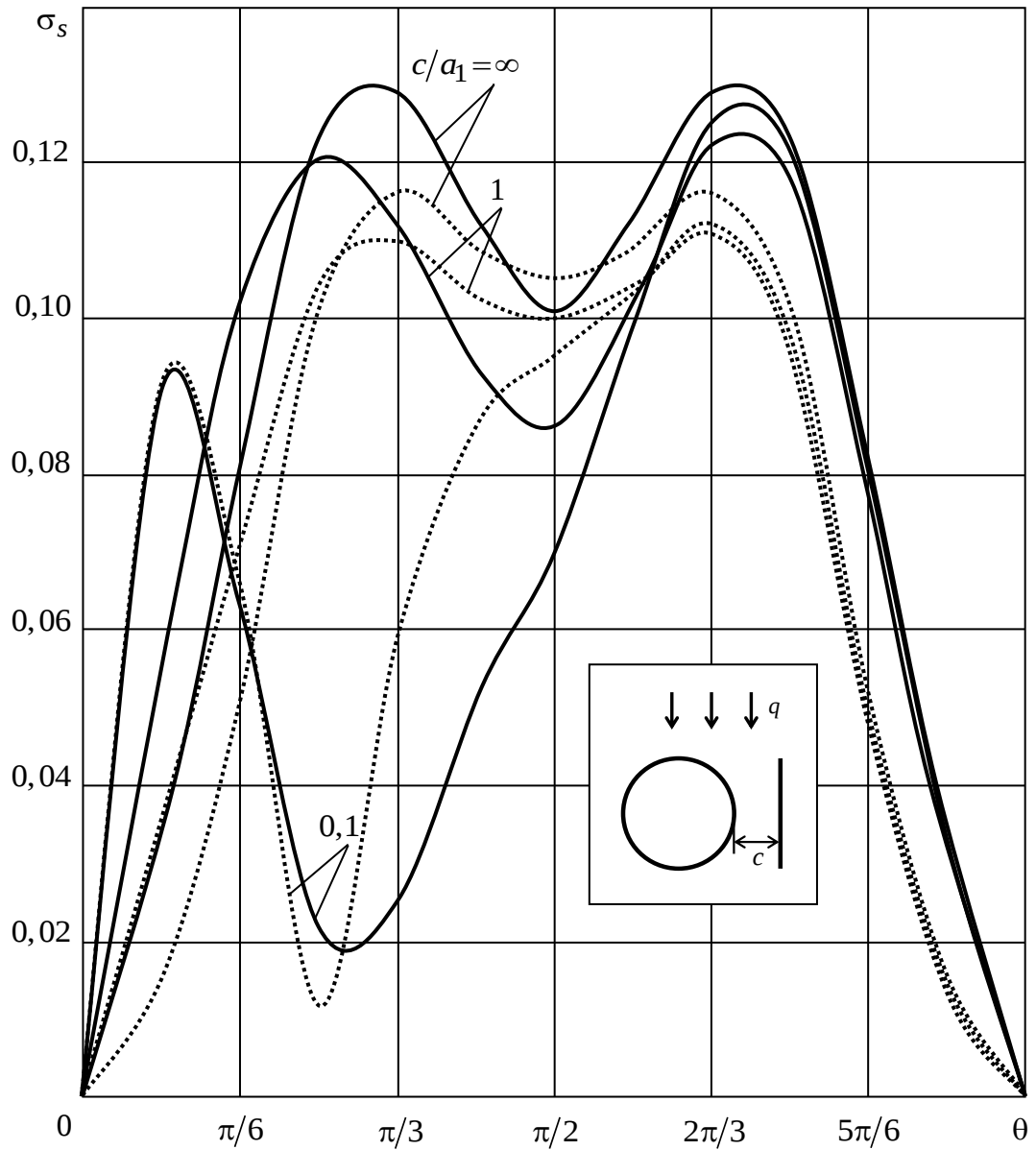


Рис. Б. 3.24. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с круговым отверстием и вертикальной некраевой трещиной, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a_1 – отношения расстояния между отверстием и трещиной к радиусу отверстия.

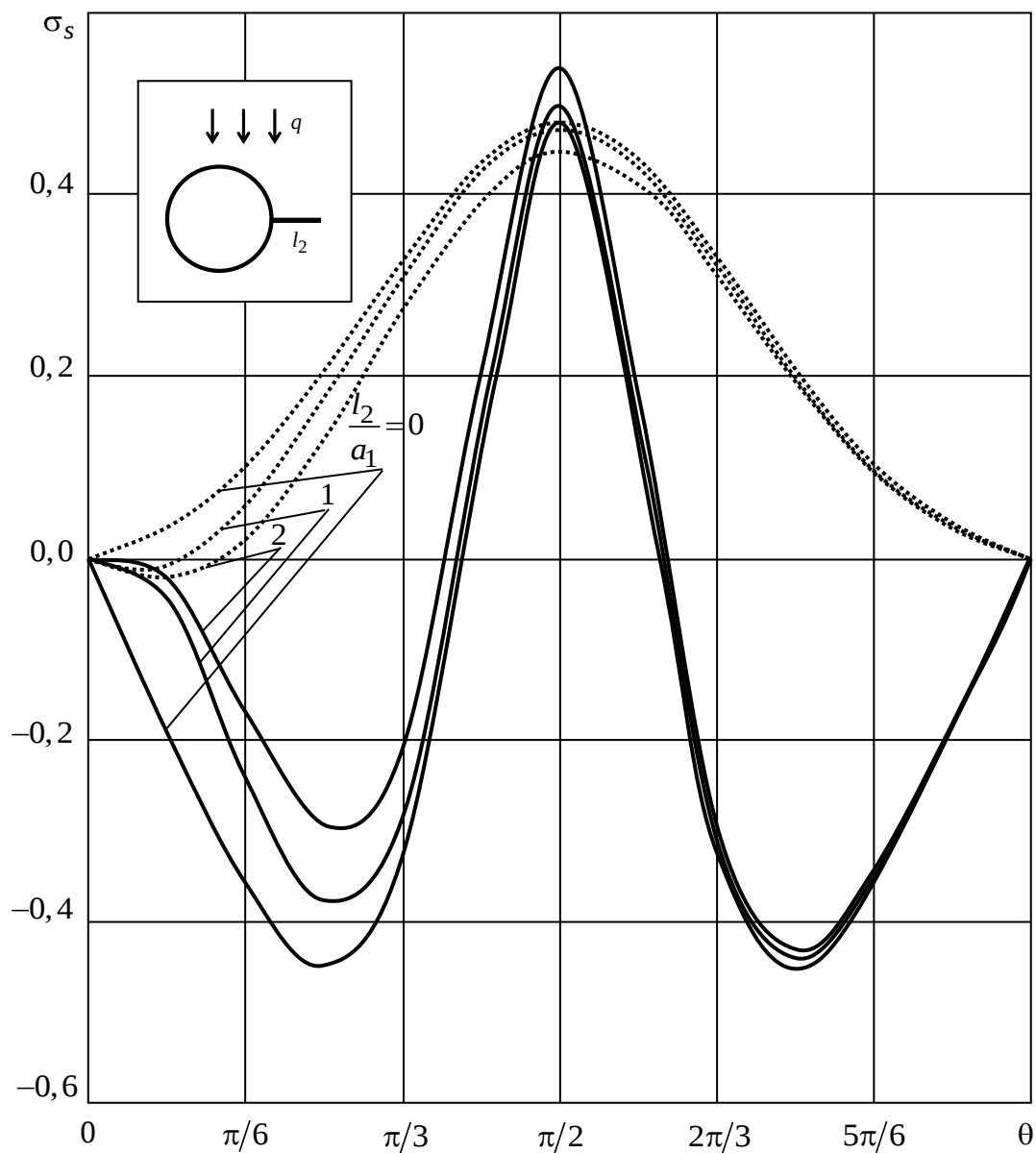


Рис. Б. 3.25. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений l_2/a_1 – отношения длины трещины к радиусу отверстия.

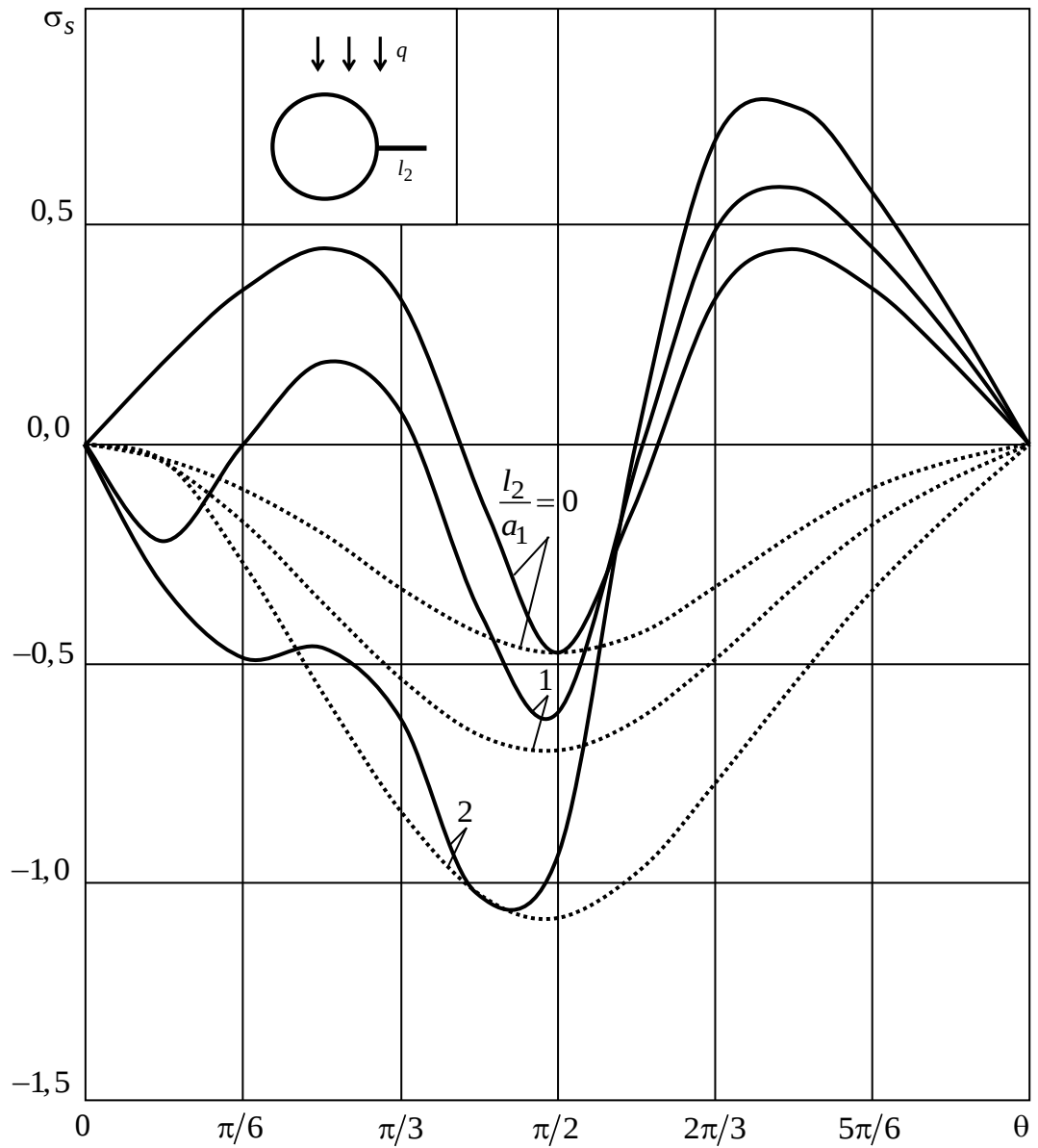


Рис. Б. 3.26. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и краевой трещиной, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений l_2/a_1 – отношения длины трещины к радиусу отверстия.

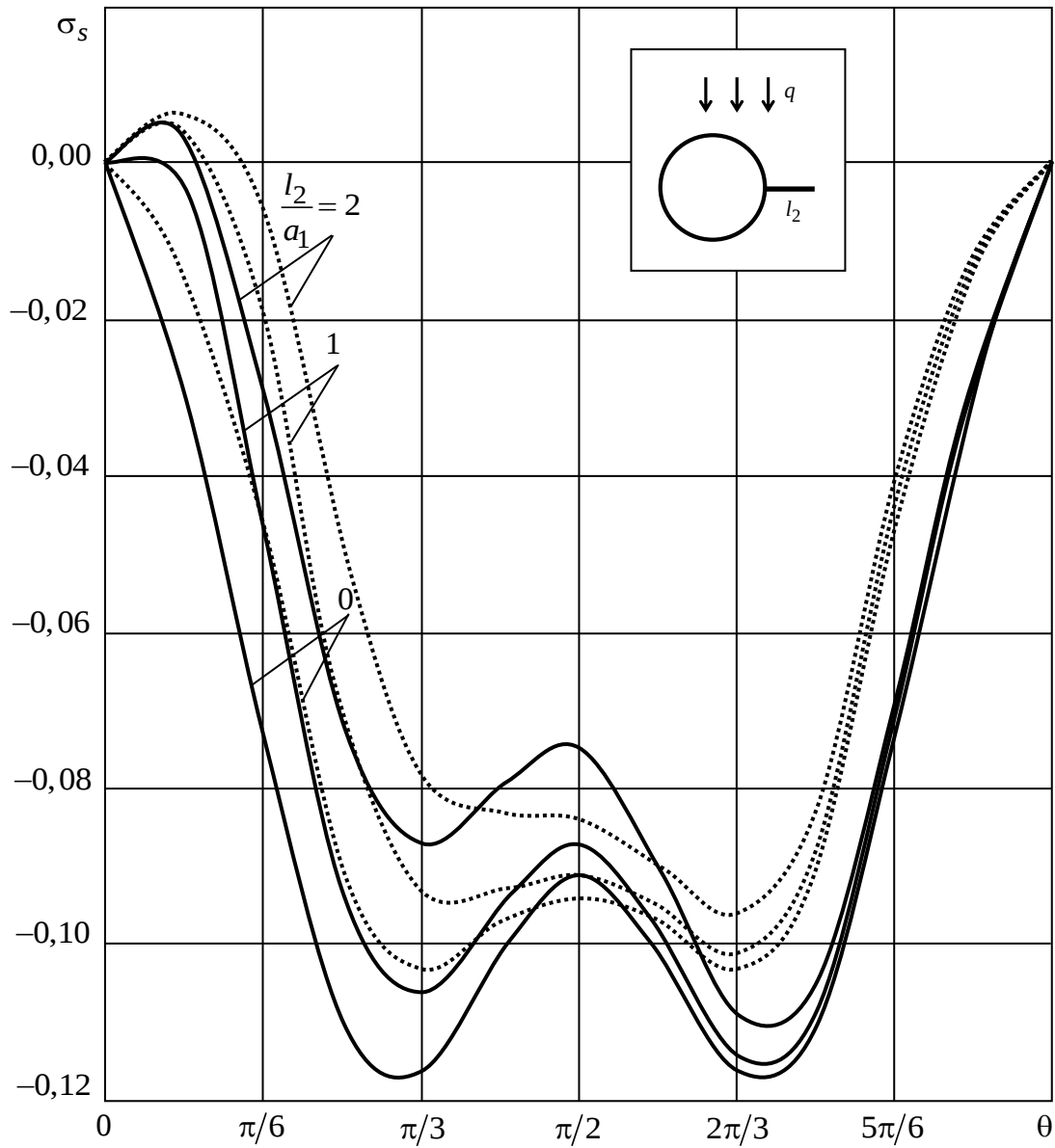


Рис. Б. 3.27. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной, на контурах которых задана постоянная температура, для некоторых значений l_2/a_1 – отношения длины трещины к радиусу отверстия.

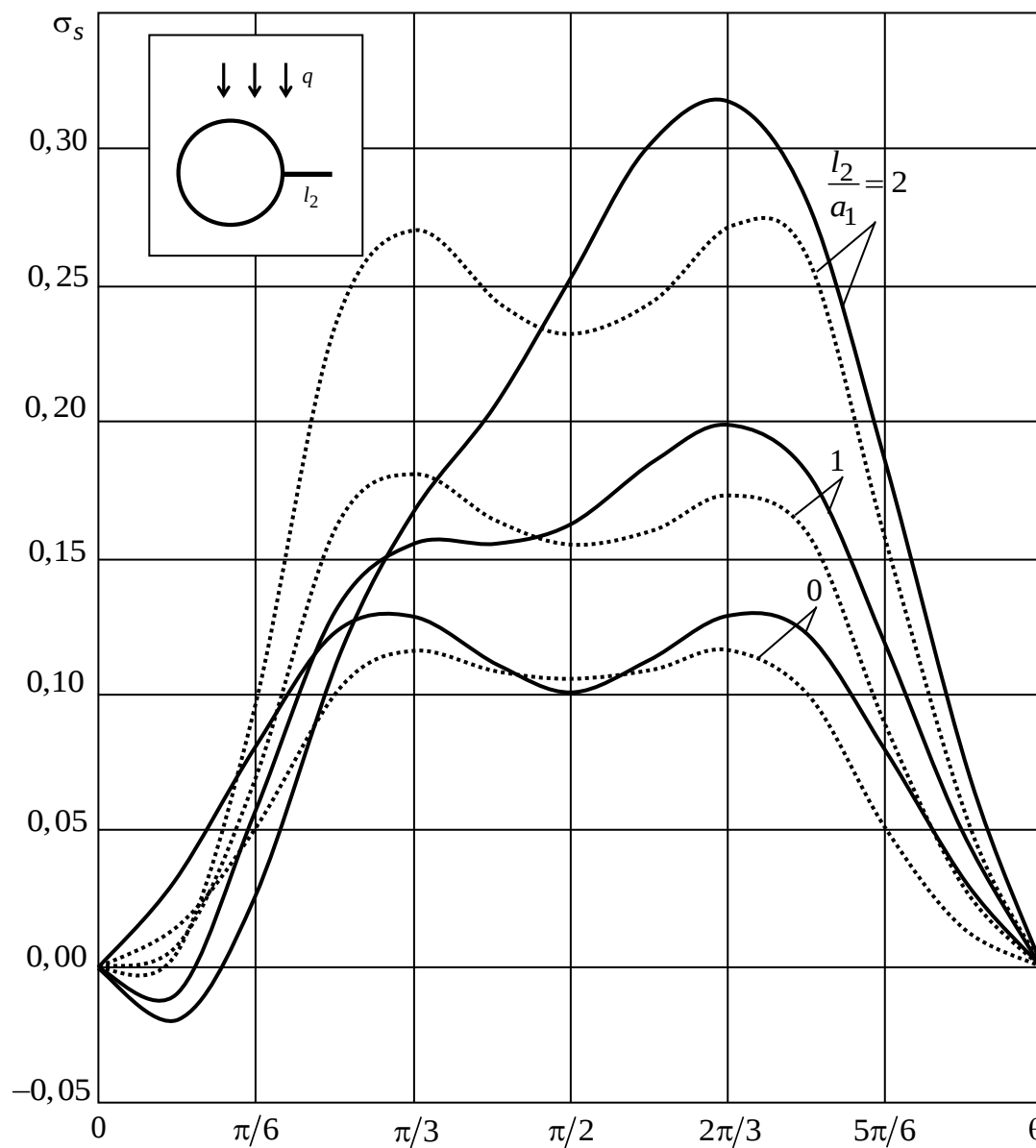


Рис. Б. 3.28. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с круговым отверстием и краевой трещиной, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений l_2/a_1 – отношения длины трещины к радиусу отверстия.

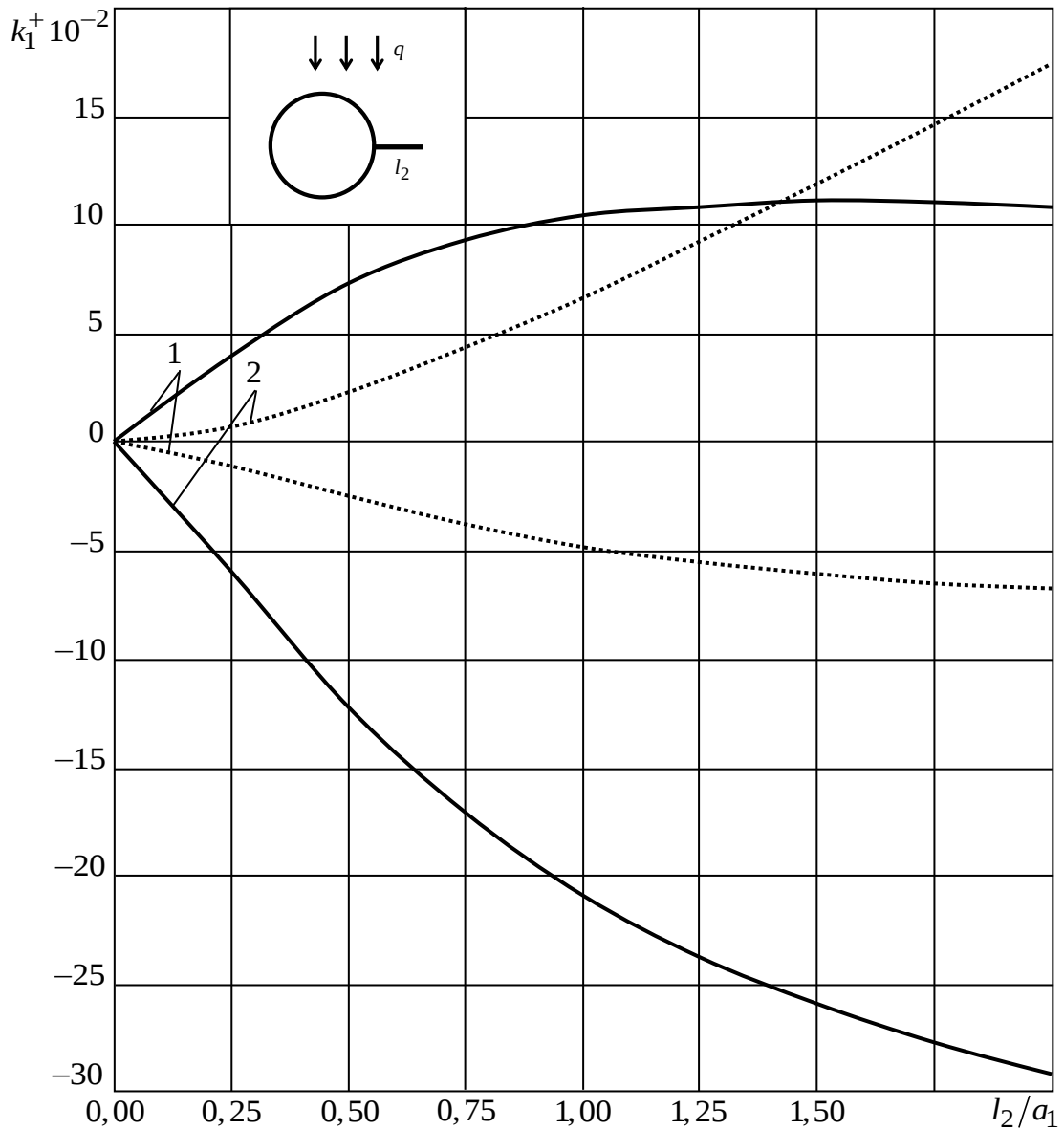


Рис. Б. 3.29. Графики изменения КИН k_1^+ для вершины горизонтальной краевой трещины в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной в зависимости от l_2/a_1 для случаев, когда на контурах задана температура (кривые 1) или контуры теплоизолированы (кривые 2).

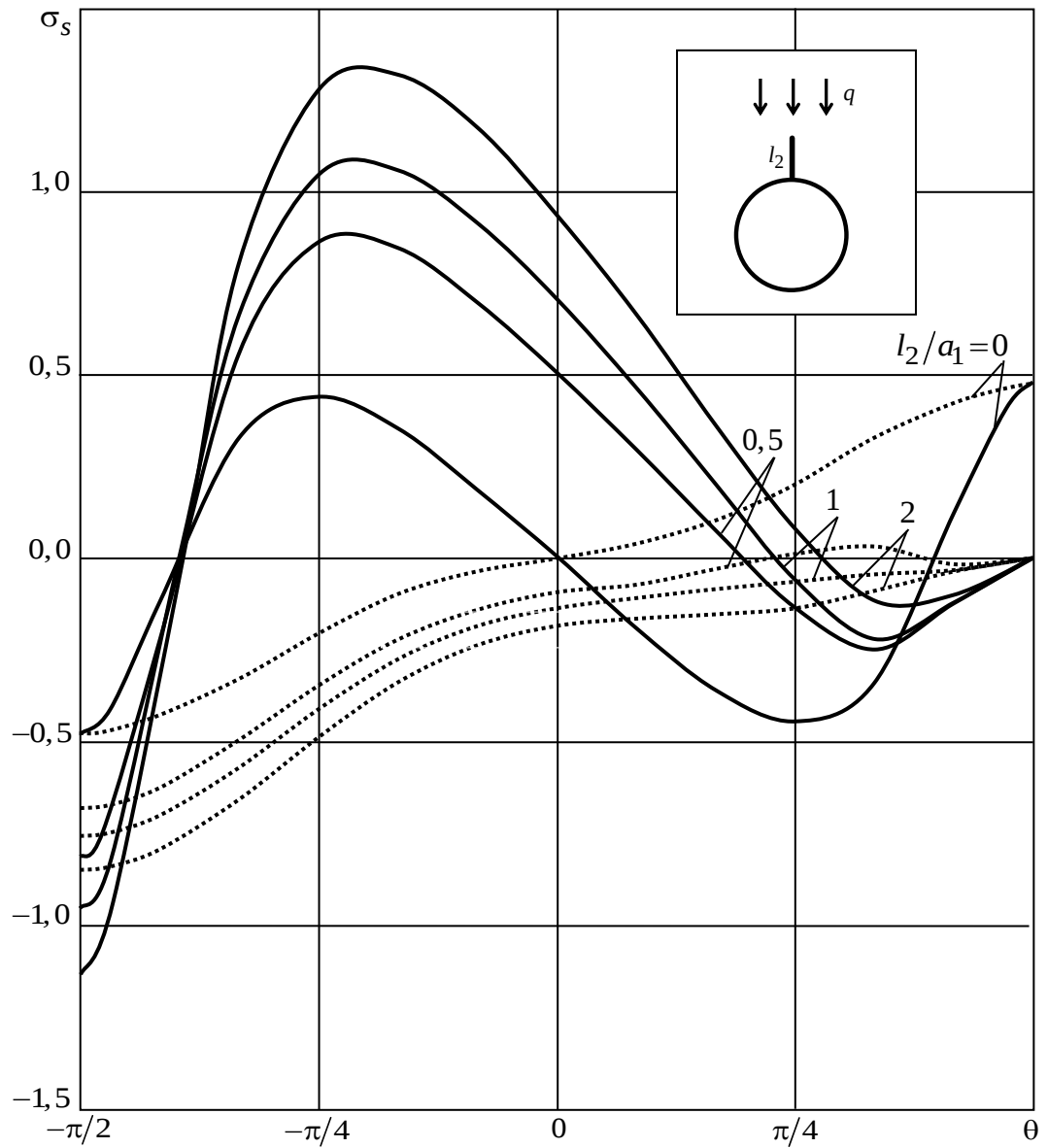


Рис. Б. 3.30. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и вертикальной краевой трещиной, на контурах которых задана постоянная температура, для некоторых значений l_2/a_1 — отношения длины трещины к радиусу отверстия.

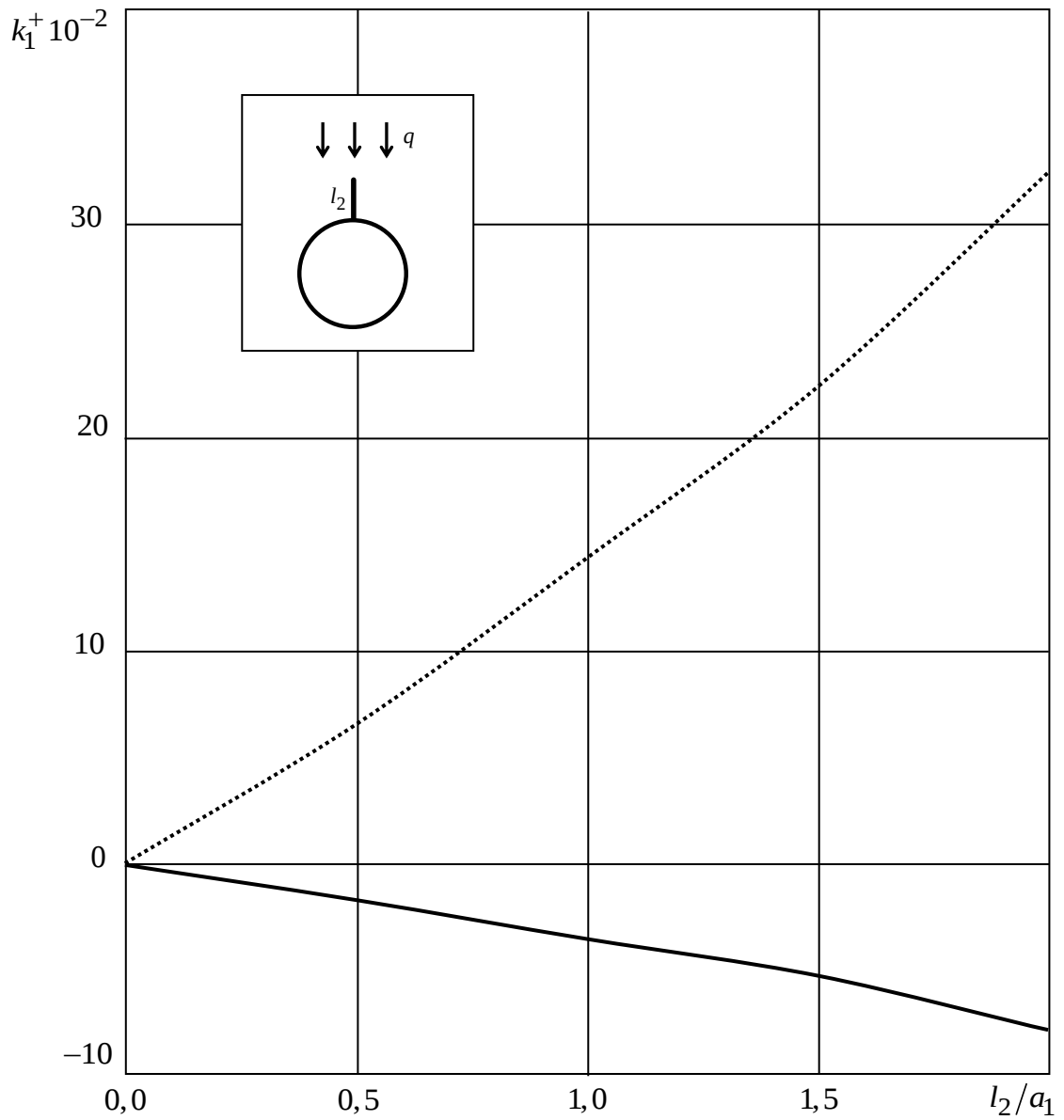


Рис. Б. 3.31. Графики изменения КИН k_1^+ для вершины горизонтальной краевой трещины в пластинке из материала М1 с круговым отверстием и горизонтальной краевой трещиной в зависимости от l_2/a_1 , когда на контурах задана температура.

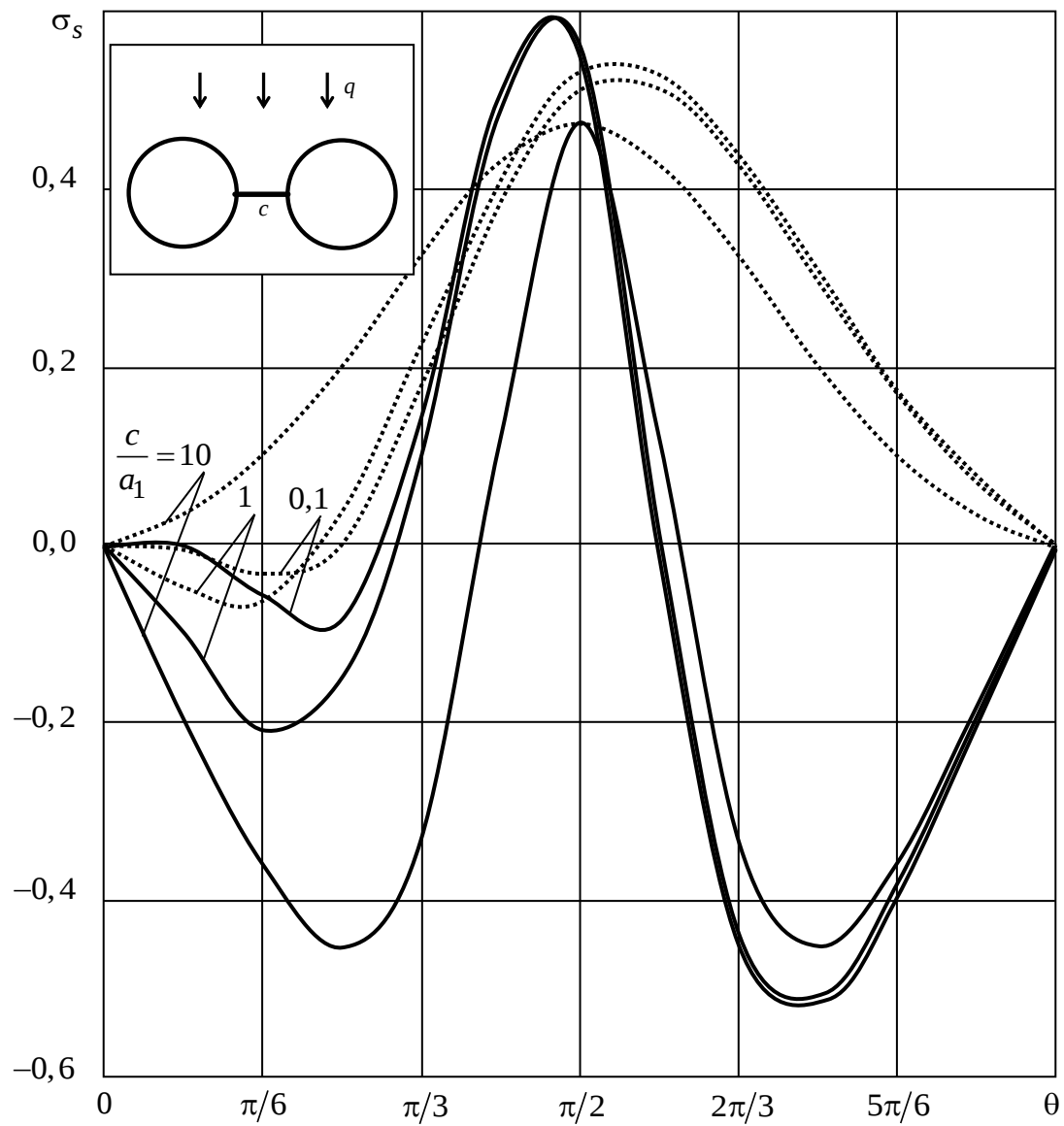


Рис. Б. 3.32. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с двумя круговыми неподкрепленными отверстиями, соединенными узкой щелью, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a_1 — отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

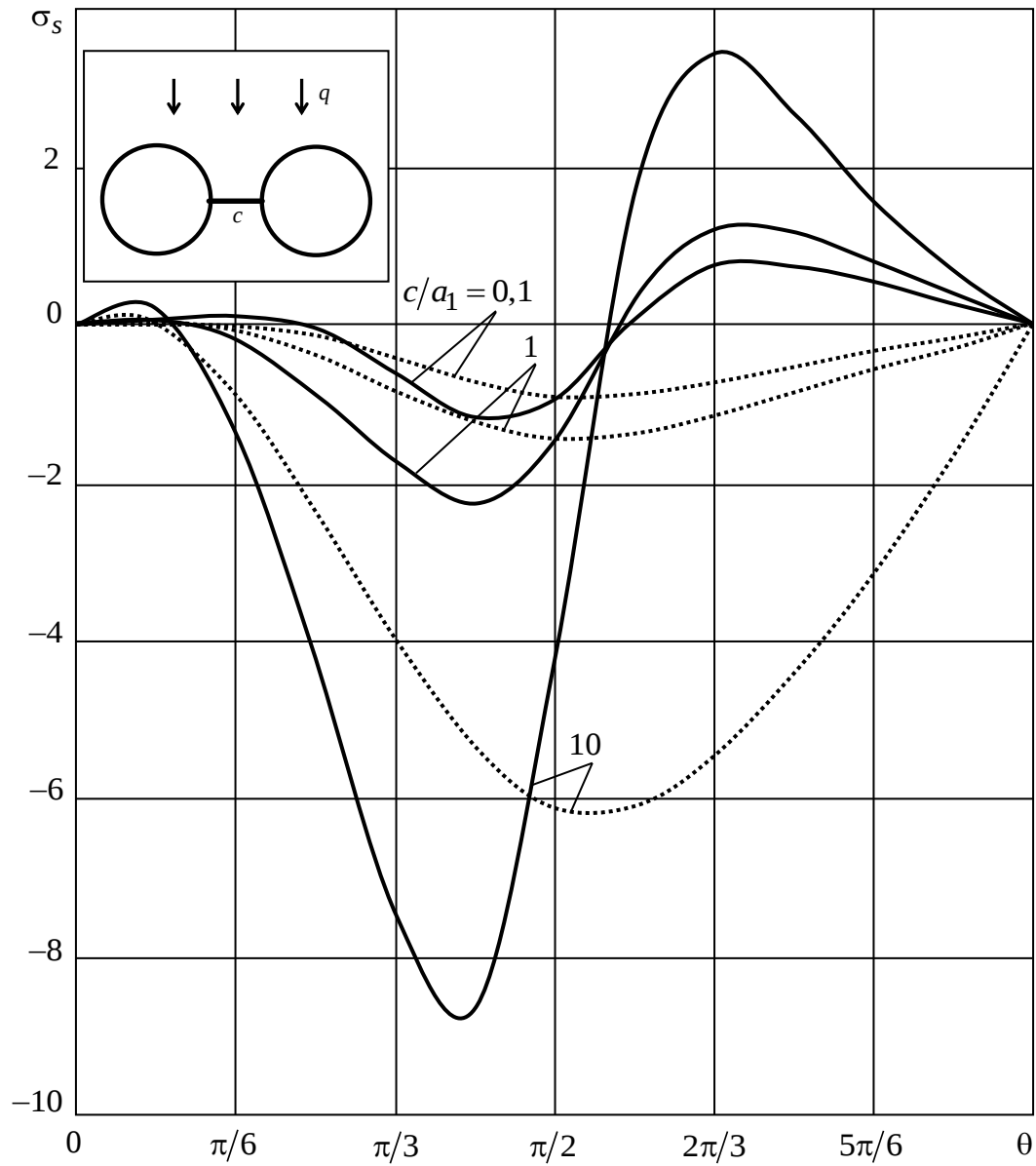


Рис. Б. 3.33. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала М1 с двумя круговыми неподкрепленными отверстиями, соединенными узкой щелью, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a_1 – отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

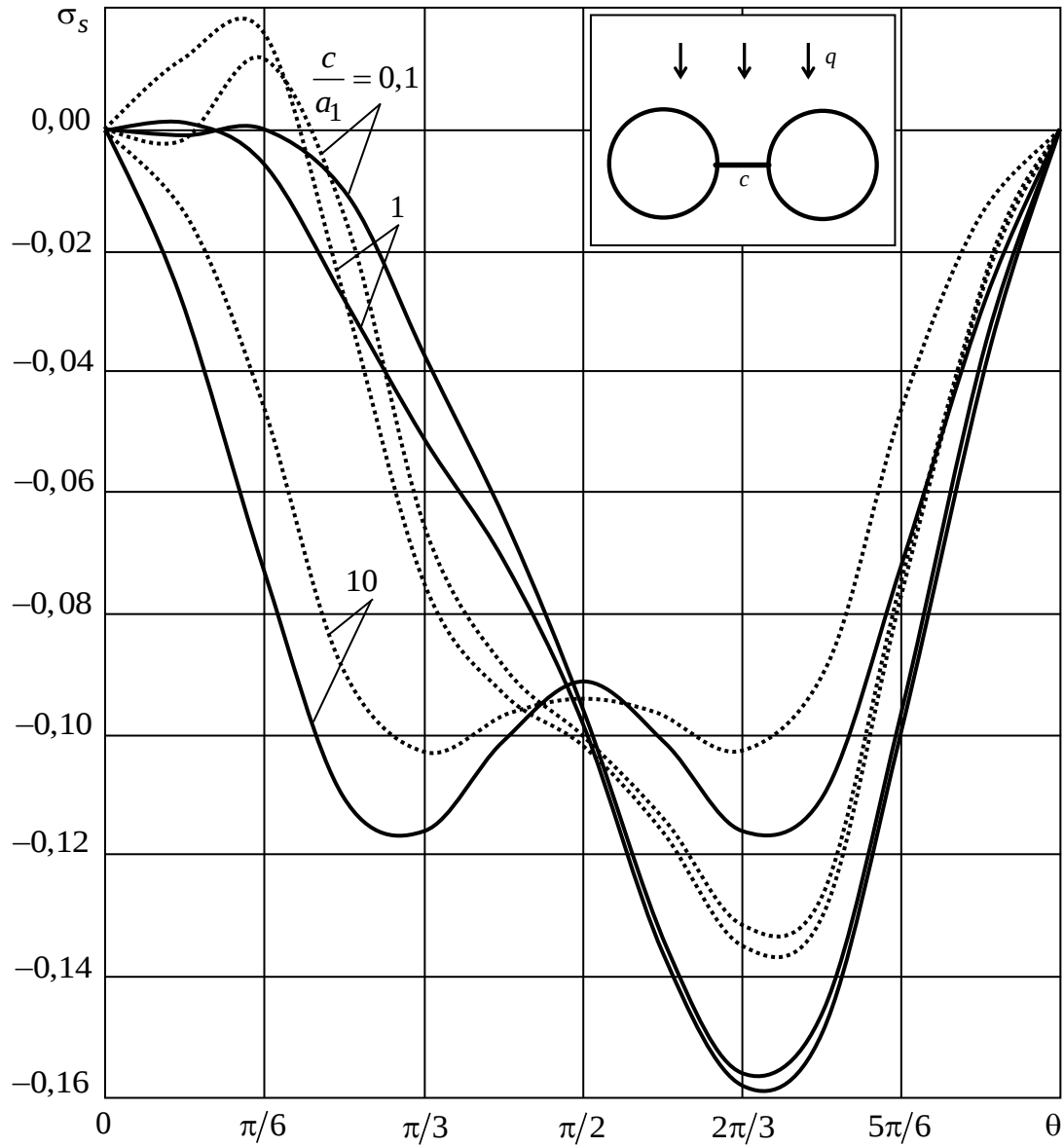


Рис. Б. 3.34. Графики распределения напряжений σ_s по контуру отверстия в пластинке из материала МЗ с двумя круговыми неподкрепленными отверстиями, соединенными узкой щелью, на контурах которых задана одинаковая температура, для некоторых значений c/a – отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

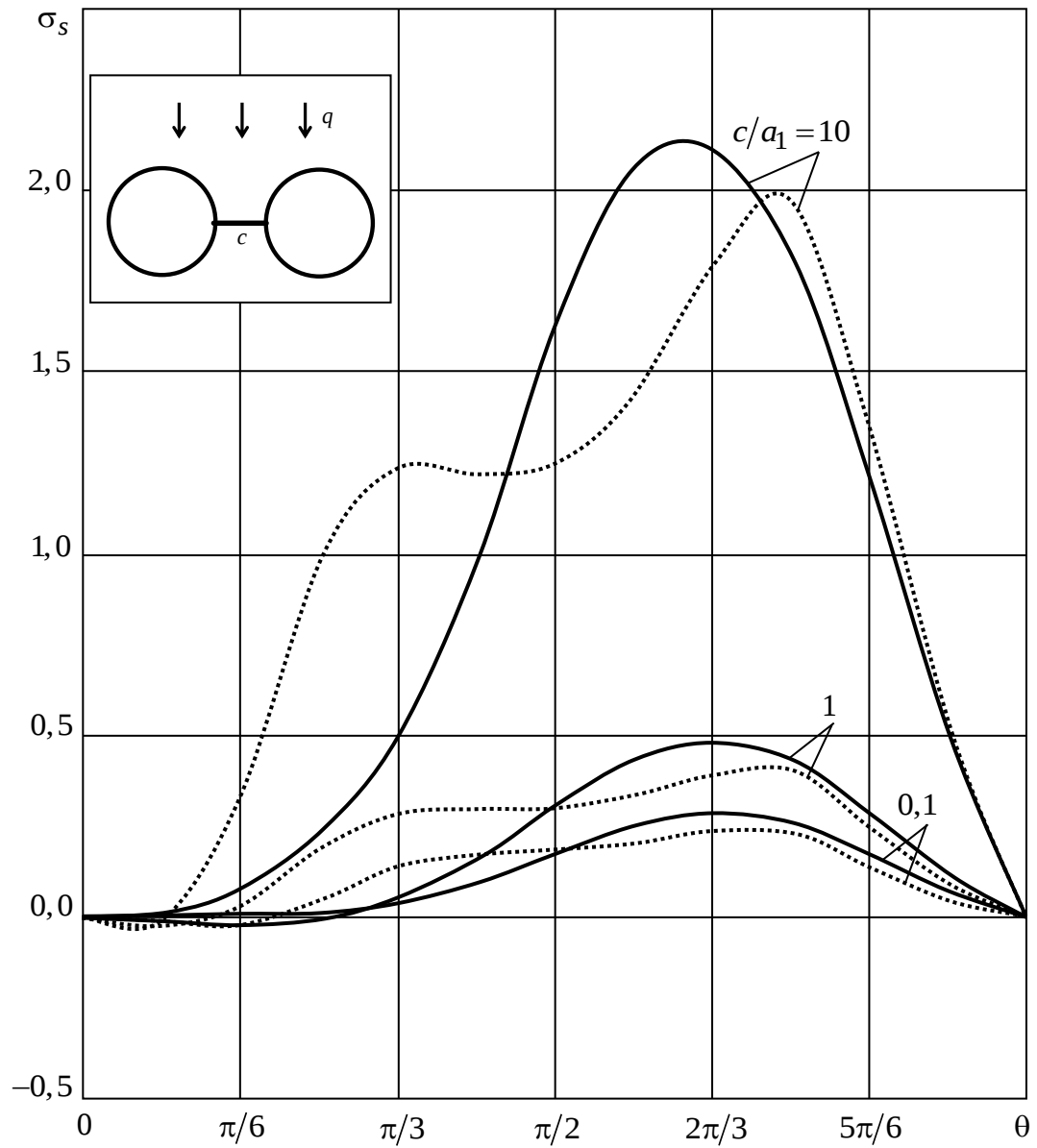


Рис. Б. 3.35. Графики распределения напряжений σ_s по контуру левого отверстия в пластинке из материала МЗ с двумя круговыми σ_s отверстиями, соединенными узкой щелью, контуры которых теплоизолированы, для некоторых значений c/a – отношения расстояния между отверстиями к их радиусу.

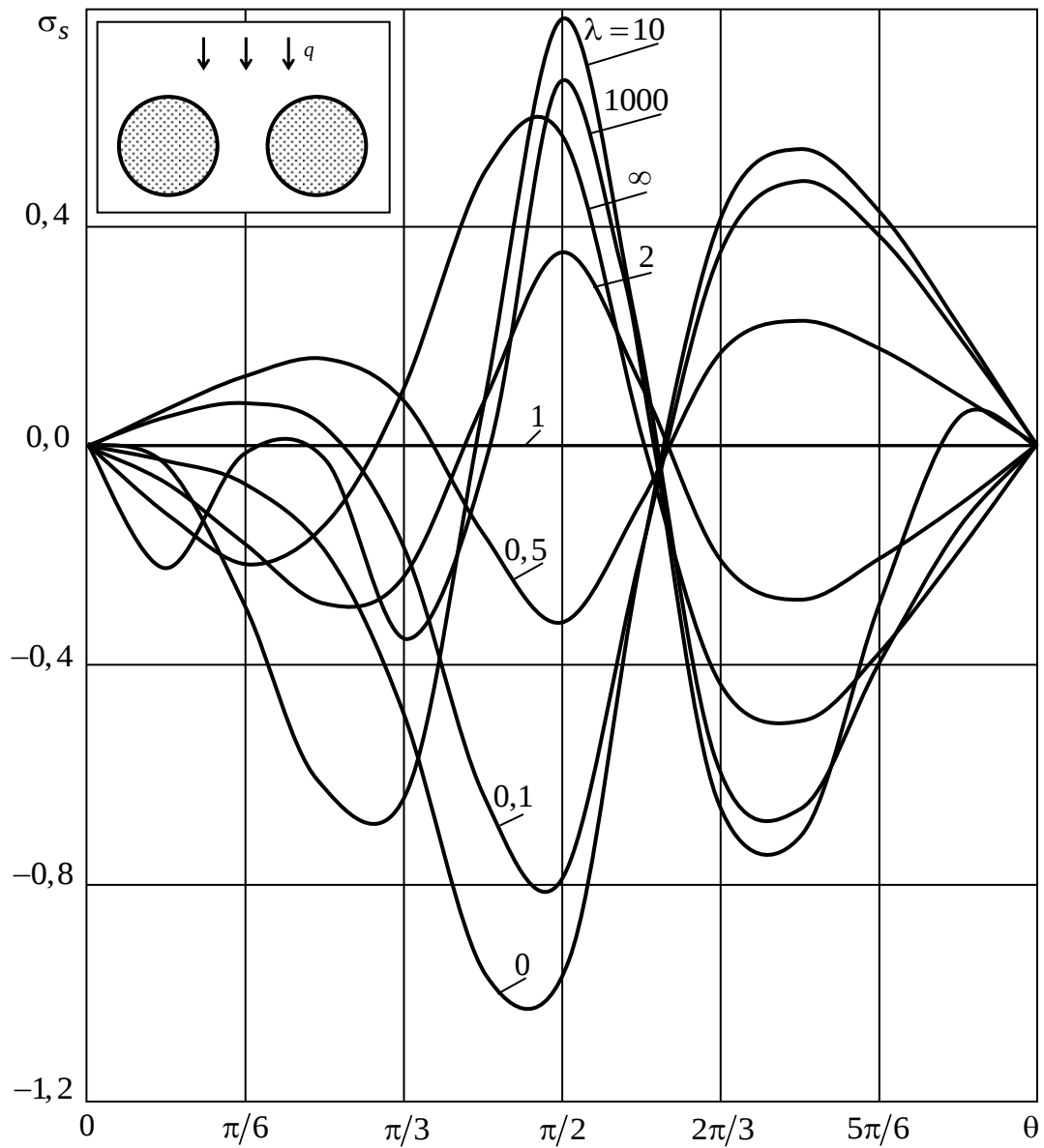


Рис. Б. 4.1. Графики распределения напряжений σ_s по контуру левого включения в пластинке с двумя круговыми включениями для некоторых значений параметра λ материала включений, когда расстояние между включениями равно их радиусу.

Приложение В. Решение переопределенных систем линейных алгебраических уравнений методом сингулярного разложения матрицы

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений в матричном виде

$$Ax = b, \quad (1)$$

где A – прямоугольная матрица системы размерности $m \times n$, x – вектор-столбец размерности n , являющийся решением системы, b – вектор-столбец размерности m , содержащий свободные коэффициенты системы.

Если $m > n$, то систему (1) называют переопределенной. В этом случае зачастую не получается найти точное решение системы. Тогда задача ставится таким образом: необходимо найти такой вектор-столбец y , что

$$\|Ay - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|. \quad (2)$$

Формула (2) описывает постановку задачи наименьших квадратов.

Если $m = n$, то решение системы (1) имеет вид

$$y = A^{-1}b.$$

Когда же $m > n$, то для матрицы A не существует обратной, однако существует ее аналог.

Умножим обе части уравнения (1) справа на A^T :

$$A^T Ax = A^T b. \quad (3)$$

Матрица $A^T A$ является квадратной размерности $n \times n$, и решение (3) имеет вид

$$y = (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (4)$$

Матрицу $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ называют псевдообратной матрицей к A . Для матрицы A^+ справедливы равенства

$$A^+ A = I_n, \quad A A^+ = I_m,$$

где I_k – квадратная единичная матрица размерности $k \times k$. Для квадратной невы-

рожденной матрицы ее псевдообратная матрица совпадает с обратной.

Вычисление псевдообратной матрицы таким способом является довольно громоздкой задачей в смысле алгоритмической сложности, и кроме того, точность вычислений будет резко падать, если $A^T A$ окажется близкой к вырожденной. Поэтому для нахождения псевдообратной матрицы нужен более совершенный метод. В качестве такого метода хорошо зарекомендовал себя метод сингулярного разложения матрицы.

Сингулярное разложение представляет собой преобразование прямоугольной матрицы A к виду

$$A = U \Sigma V^*,$$

где U и V – унитарные матрицы размерностей $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, $\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_i \}$ – диагональная матрица размерности $m \times n$. При этом числа σ_i называются сингулярными числами матрицы A , а U и V содержат левые и правые сингулярные вектора матрицы A . Понятия сингулярных чисел и сингулярных векторов является обобщением понятий собственных чисел и собственных векторов квадратной матрицы на случай прямоугольной матрицы.

Однако многие алгоритмы поиска сингулярного разложения матриц либо являются недостаточно точными (методы, основанные на bidiagonalизации матрицы либо на принципе «разделяй и властвуй»), либо имеют большую алгоритмическую сложность (метод Якоби). Компромиссным вариантом здесь становится метод, предложенный З. Дрмачем и К. Веселичем [141, 142] и являющийся модификацией одностороннего метода Якоби. В указанном методе ряд вычислительно сложных процедур заменен более простыми на основе QR-разложения матриц с поворотами. При этом на основе матрицы A определяются следующие матрицы: унитарная Q (размера $m \times m$), верхнетреугольная R (размера $n \times n$), квадратные матрицы поворота строк и столбцов P_r и P , такие что

$$P_r A P = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где матрица $\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ имеет размерность $m \times n$, ее n верхних строчек совпадают с матрицей R , а $(m - n)$ нижних строчек заполнены нулями.

Алгоритм $(U, \Sigma, V) = \text{SVD}(A)$:

$$P_r A P = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \rho = \text{rank}(R).$$

если $\max_{i=2;n} \frac{\|R(1:i-1, i)\|}{|R_{ii}|}$ **малó, то**

$$X = R; \quad \kappa_0 = \text{estimate}(\|A_c^+\|); \quad X_\infty = X \langle V_x \rangle;$$

$$\sigma_i = \|X_\infty(:, i)\| \text{ при } i = \overline{1; n}; \quad V = P V_x;$$

$$U_x(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} X_\infty(:, i) \text{ при } i = \overline{1; n}; \quad U = P_r Q \begin{pmatrix} U_x & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix};$$

иначе

$$\kappa_0 = \text{estimate}(\|A_c^+\|); \quad \kappa_1 = \text{estimate}(\|A_c^+\|);$$

если $\kappa_1 < n$, **то**

$$R(1:\rho; 1:n)^T = Q_1 \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X = R_1^T;$$

иначе

$$R(1:\rho; 1:n)^T P_1 = Q_1 \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad R_1 = L_2 \langle Q_2 \rangle; \quad X = L_2;$$

$$\kappa_Y = \text{estimate}(\|Y^{-1}\|);$$

если $\kappa_Y \geq n$, **то**

$$\kappa_Z = \text{estimate}(\|Z^{-1}\|)$$

конец

конец

если Y хорошо обусловлена, **то**

$$X_{\infty} = X \langle V_x \rangle; \quad \sigma_i = \|X_{\infty}(:, i)\| \text{ при } i = \overline{1; \rho};$$

$$U_x(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} X_{\infty}(:, i) \text{ при } i = \overline{1; \rho};$$

если $\rho = n$ и $\kappa_1 < n$, то

$$W = R^{-1} X_{\infty}; \quad V = PW; \quad U = P_r^T Q \begin{pmatrix} U_x & 0 \\ 0 & I_{m-\rho} \end{pmatrix};$$

иначе если $\kappa_1 < n$, то

$$V_x = R_1^{-T} X_{\infty}; \quad V = PQ_1 \begin{pmatrix} V_x & 0 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{pmatrix};$$

$$U = P_r^T Q \begin{pmatrix} U_x & 0 \\ 0 & I_{m-\rho} \end{pmatrix};$$

иначе

$$W = R_1^{-1} X_{\infty}; \quad V = PQ_1 \begin{pmatrix} U_x & 0 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{pmatrix};$$

$$U = P_r^T Q \begin{pmatrix} P_1 W & 0 \\ 0 & I_{m-\rho} \end{pmatrix};$$

конец

иначе если $\kappa_Z < n$, то

$$X = L_2^T; \quad X_{\infty} = X \langle V_x \rangle; \quad \sigma_i = \|X_{\infty}(:, i)\| \text{ при } i = \overline{1; \rho};$$

$$U_x(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} X_{\infty}(:, i) \text{ при } i = \overline{1; \rho};$$

$$V_x = L_2^{-T} X_{\infty}; \quad V = PQ_1 \begin{pmatrix} V_x & 0 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{pmatrix};$$

$$U = P_r^T Q \begin{pmatrix} P_1 Q_2^T U_x & 0 \\ 0 & I_{m-\rho} \end{pmatrix};$$

иначе

$$X_{\infty} = X \langle V_x \rangle; \quad \sigma_i = \|X_{\infty}(:, i)\| \text{ при } i = \overline{1; \rho};$$

$$U_x(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} X_\infty(:, i) \text{ при } i = \overline{1; \rho};$$

$$V = PQ_1 \begin{pmatrix} V_x & 0 \\ 0 & I_{n-\rho} \end{pmatrix}; \quad U = P_r^T Q \begin{pmatrix} P_1 Q_2^T U_x & 0 \\ 0 & I_{m-\rho} \end{pmatrix};$$

конец

конец

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_i\}$$

Конец алгоритма.

После нахождения матриц U , Σ , V псевдообратная матрица A^+ определяется по формуле

$$A^+ = V \Sigma^+ U^*, \quad (6)$$

где, очевидно, $\Sigma^+ = \text{diag}\{\sigma_i^{-1}\}$.