

КОГНИТИВНЫЕ МОДЕЛИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Евсеева Елена Геннадиевна
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет»,
г. Донецк, ДНР
e-mail: e.evseeva@donnu.ru

В настоящее время происходит формирование нового научного подхода, получившего название когнитология, объектом изучения которого является человеческий разум, мышление и те ментальные процессы и состояния, которые с ними связаны. Объектом изучения когнитивных исследований в области теории и методики обучения математике является математическое познание (В.А. Бажанов [1], В.А. Далингер [2], М.Л. Лезгина [5] и др.). В качестве предмета выступает математическое знание как когнитивный феномен, как средство познания и восприятия действительности и вследствие этого – как инструмент освоения человеком математической деятельности.

В обучении математике формируется представление человека о мире, навыки осознания окружающего, мыслительные схемы, образные комплексы. Так, в процессе обучения математике у обучающихся накапливается опыт математической деятельности, формируется такие ментальные концепты, как логическое, пространственное, образное мышление, развиваются самостоятельность и критичность мыслительной деятельности [3].

При формировании приемов математической деятельности у обучающихся следует учитывать закономерности протекания когнитивных процессов. Идеализированная когнитивная модель структурирует так называемое ментальное пространство. Под ментальным пространством понимаются постоянно модифицируемые когнитивные конструкторы, которые строятся в режиме реального времени в ходе вербальной познавательной деятельности и хранятся в оперативной памяти говорящих. Ментальные пространства при изучении математики, определяются языком, и поэтому идеализированную когнитивную модель можно описать как структуру формирования в первую очередь лингвальной реальности в математической деятельности. Именно поэтому следует рассматривать мыслительные процессы в обучении математике через призму когнитивной лингвистики [7].

Основным предметом исследований когнитивной лингвистики являются процессы категоризации и концептуализации. Под концептуализацией понимается «осмысление поступающей информации, мысленное конструирование предметов и явлений, которое приводит к образованию определённых представлений о мире в виде концептов (т.е. фиксированных в сознании человека смыслов), например: концепт дома,

времени, пространства, вечности, движения и т.д.» [1, с. 22]. Другими словами, это накопление знаний о некоторых классах элементов (категориях), формирующее концепты – «кванты знаний».

Концептуализация опирается на категоризацию, понимаемую как «когнитивное расчленение реальности, сущность которой заключается в делении всего онтологического пространства на различные категориальные области. Это структурирование мира, акт отнесения объекта к той или иной группе, способ установления иерархических отношений типа «класс – член класса» [7, с. 15]. В результате категоризации возникает категория, то есть осознание совокупности элементов как принадлежащих к одному классу.

Обучении математике как учебно-познавательная деятельность нацелено на формирование у обучающихся понятий – наиболее общих и существенных знаний о классе объектов. Результаты же обыденного познания воплощены в концептах, представляющих собой кванты, наборы всех добытых обучающимся знаний о категории элементов. Основные отличия между концептом и понятием заключаются в том, что понятие является одинаковым для всех, в то время как концепт индивидуален; понятие конструируется на основе анализа, а концепт возникает стихийно и реконструируется в процессе анализа. Поэтому особенно важно понимать то, как происходит в сознании обучающихся процесс реконструкции концепта в математическое понятие.

Выделяется четыре типа когнитивных моделей, определяющих способы категоризации ментальных пространств [7]. Рассмотрим эти модели и возможности их реализации в обучении математике.

Модель 1. *Схематическая модель образа* (образная схема – Р. Лэнкер) – «специфические схематические представления образов, таких, как траектории, длинные тонкие формы или вместилища (контейнеры)» [4, с. 31]. Например, наше знание о прямоугольном параллелепипеде включает представление о ящике как вместилище, которое позволяет называть и считать прямоугольным параллелепипедом и почтовый ящик, и ящик письменного стола. Наше знание о линии на плоскости включает представление о траектории движения футбольного мяча, катящегося по земле, а знание о линии в пространстве – траекторию полёта этого мяча и при ударе футболиста по мячу. Рассматривая принадлежность некоторому множеству его элементов, мы присваиваем множеству образ контейнера, эти элементы содержащего.

Модель 2. *Пропозициональная модель* (Ч. Филлмор). Пропозициональные модели «вычленяют элементы, дают их характеристики и указывают связи между ними» [4, с. 31], но при этом не могут использовать механизмы формирования образности: это, так сказать, чистое знание об элементах. Например, понятие функции одной независимой переменной как модель определённой математической структуры включает в себя знание о виде этой функции (алгебраическая,

рациональная, элементарная и т.д.), об области определения и множестве значений этой функции, о её свойствах (возрастание, убывание, четность, нечетность, выпуклость, вогнутость и т.д.), о наличии экстремумов, точек перегиба, асимптот (вертикальные, горизонтальные, наклонные), о возможных процессах, описываемых функциями такого типа (линейная функция описывает зависимость перемещения от времени при равномерном прямолинейном движении) т.д.

Категоризация при помощи пропозициональных моделей осуществляется путём сопоставления набора данных рассматриваемого объекта с набором данных его прототипа, что позволяет выделить в составе категории центральные (то есть прототипные, имеющие полный набор эталонных характеристик) и менее центральные (имеющие некоторые пропозициональные отличия) и периферийные (имеющие значительные пропозициональные отличия) элементы категории.

Пропозициональные модели подразделяются на простые и комплексные. Базовые простые пропозициональные модели – это минимальные, предельные пропозиции – атомарные характеристики элементов категории.

Во-первых, это фреймовые пропозиции. Под фреймом понимается набор данных о типической статической ситуации (при широком понимании ситуации как ситуативно осознанного объекта, явления или собственно ситуации). Простая пропозиция включает элемент (собственно, прототип категории), аргументы (актанты-объекты и сирконстанты-обстоятельства) и предикаты, истинные относительно данных аргументов. Например, простая пропозиция «функция имеет экстремум», характеризующая категорию «функция», включает элемент «функция», посессивный предикат «иметь» и аргумент «экстремум». Фреймы формируются по схемам «часть – целое», «связь» и т.п.

Во-вторых, это сценарные модели. Под сценарием понимается набор данных о типической динамической (развивающейся) ситуации. Сценарии строятся по схеме «источник (начальное состояние) – путь (последовательность событий) – цель (конечное состояние)». Например, сценарий «математическое моделирование» предполагает «прикладную задачу» как начальное состояние, «построение математической модели» – «решение полученной математической модели» как путь и «интерпретация решения математической модели в терминах исходной прикладной задачи» как конечное состояние.

На основе фреймов и сценариев создаются базовые комплексные пропозициональные модели. Каждая базовая пропозициональная модель входит в структуру комплексной пропозициональной модели в качестве слота. Например, в структуру категории «производная» входят фреймовые слоты «предел функции» (пропозиция: производной функции называется

предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$), «дифференцирование» (пропозиция: отыскание производной называется дифференцированием), «число» (пропозиция: производная функции, вычисленная в точке, является числом) и т.д., а в структуру категории «метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений» сценарные слоты «прямой ход», «элементарные преобразования», «обратный ход» и т.д.

По особенностям организации слотов в модели различают модель «пучок свойств», радиальную градуированную и таксономическую модели.

1. «Пучок свойств» (слотов) – это простой набор фреймовых и скриптовых признаков. Например, для категории «квадратная матрица» пучок слотов состоит из: а) фреймовых слотов: квадратная таблица чисел, имеет размерность $n \times n$, имеет определитель, может иметь обратную матрицу и т.д.; б) сценарных слотов: можно транспонировать, можно складывать с матрицей того же размера, можно умножать на число, можно умножать на согласованную матрицу и т.д.

2. «Радиальная модель» структурируется по схеме «центр – периферия» и предполагает существование в категории центральных компонентов (прототипов), менее центральных и периферийных. Например, прототипом для категории «методы вычисления определителей» является вычисление определителя по теореме Лапласа о разложении определителя по строке или столбцу, применимое для вычисления определителя любого порядка, менее центральную зону формируют методы вычисления с использованием свойств определителя, а периферийную зону образуют, например, мнемонические правила вычисления определителя третьего порядка (правило треугольника, правило Саррюса).

3. «Градуированная модель» представляет собой объединение элементов по определённой шкале градации признака и имеют в своей основе образную схему «верх – низ»: каждый элемент более высокого уровня имеет признак, выраженный в большей мере, чем у элемента более низкого уровня. Например, категория «размерность вектора» представлена элементами «2-мерный вектор» – «3-мерный вектор» – ... – « n -мерный вектор».

4. «Таксономическая модель» представляет собой классификации элементов, создаваемые в процессе познания путём выделения в «пучке свойств» наиболее существенных признаков. Таковы научные классификации, построенные по родо-видовому принципу, а следовательно, созданные на основе образной схемы «часть – целое» и «верх – низ». Каждая категория более высокого уровня является целым (например, множество действительных чисел), а категории ближайшего нижнего уровня – его частями (множества рациональных и иррациональных чисел). Одной из известных таксономических моделей в педагогике является модель Б. Блума, согласно которой цели обучения в когнитивной сфере могут быть

выражены через такие элементы усвоения: знание, понимание, применение, анализ, синтез и оценка (их называют элементами таксономии Блума) [8].

Модель 3. Метафорическая модель (Дж. Лакофф и М. Джонсон), которая предполагает переход «от пропозициональных моделей или схематических моделей образов одной области к соответствующей структуре другой области» [7, с. 31]. Метафорическая модель реализует образную схему, представляющую собой скриптовую модель «источник-путь-цель». Например, в русском языке активно реализуется фреймовая модель «Математика – гимнастика для ума», предполагающая следующие типы осмысления («метафорическую проекцию» или «когнитивное отображение»): осмысление объектов (математика развивает мышление), осмысление действий и состояний (математикой надо заниматься, если хочешь быть умным).

Математическая метафора, в тех случаях, когда она выступает в роли инструмента познания, постулирует, что некоторый сложный набор явлений можно сравнить с какой-то математической конструкцией. Одна из современных математических метафор – это искусственный интеллект (ИИ). С одной стороны, ИИ — это область знаний, относящихся к компьютерам и к новой искусственной реальности, состоящей из аппаратного и программного обеспечения, Интернета и пр. С другой стороны, это математическая модель функционирования мозга и сознания в биологии [6].

Модель 4. Метонимическая модель (Дж. Лакофф и М. Джонсон). К метонимическим относятся «модели одного или нескольких описанных выше типов (схематической модели образов и пропозициональной модели), дополненные указанием функций, выполняемых одним элементом по отношению к другому» [4, с. 31], и абсолютизацией этих функций (слотов) при категоризации. например модель «часть – целое», когда некоторая часть подвергаемого категоризации объекта может заменить целое в его осмыслении: неопределенный интеграл может стать прототипом для категории «интеграл», а привлечение в категорию других видов интегралов осуществляется на основе замещения образа неопределенного интеграла как семейства первообразных функций, например, образом определенного интеграла, в котором основанием для метонимического переноса становится слот «приращение первообразных»; для несобственного интеграла, в том случае, когда слот «предел приращения первообразных» становится заместителем всех остальных слотов в пропозициональной модели и т.д.

На рисунке 1 показано соотношение между различными типами когнитивных моделей, используемых человеком в процессе категоризации. Модели концептуализации, образные схемы, модели организации слотов человек использует, формируя своё индивидуальное ментальное

пространство, в котором, собственно и формируется его математическая деятельность.

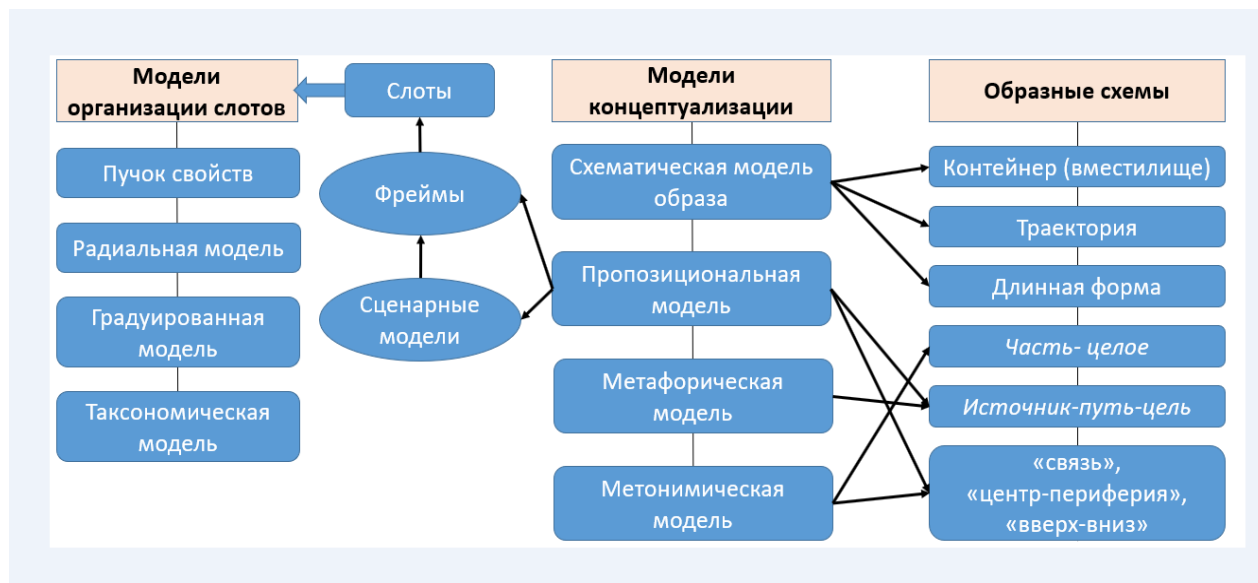


Рисунок 1 – Типология когнитивных моделей категоризации

Таким образом, необходимо учитывать идеализированные когнитивные модели категоризации при проектировании обучения математике, особенно в контексте цифровизации образования. Это связано с необходимостью разработки обучающих компьютерных программ, которые смогли бы эффективно решать дидактические задачи, а для этого человеческие модели когниции должны быть экстраполированы на процессы обработки, хранения и использования информации.

Литература

1. Бажанов В.А. Природа математики в оптике когнитивных исследований // Вопросы философии. – 2020. – № 11. С. 87-96. DOI: <https://doi.org/10.21146/0042-8744-2020-11-87-96>
2. Далингер В.А. Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода // Вестник Брянского государственного университета: Общая педагогика. Профессиональная педагогика. Психология. Частные методики. 2011. № 1. С. 297-303.
3. Евсеева Е.Г. Формирование образного мышления студентов технического университета при обучении математике / Е.Г. Евсеева, Б.В. Забельский // Дидактика математики: проблемы и исследования: международный сборник научных работ. – 2017. – Вып. 46. – С. 38-47.
4. Лакофф Дж. Мышление в зеркале классификаторов / Дж. Лакофф // Новое в зарубежной лингвистике. – Вып. XXIII. – Москва : Прогресс, 1988. – С. 12-51.

5. Лезгина М.Л. Эпистемология становления математических абстракций / М.Л. Лезгина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Гуманитарные и общественные науки. –2015. – № 1 (215). – С. 133-139.
6. Манин Ю.И. Математика как метафора / Ю.И. Манин. – Москва : МЦНМО, 2008. – 400 с.
7. Маслова, В.А. Введение в когнитивную лингвистику: учеб. пособие / В.А. Маслова. – 7-е изд., стер. – Москва : Флинта, 2016. – 296 с.
8. Anderson, Lorin W.; Krathwohl, David R. A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. New York: Longman, 2001. ISBN 978-0-8013-1903-7.