ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВРИСТИК ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Капкаева Лидия Семеновна,
доктор педагогических наук, профессор
e-mail: lskapkaeva@mail.ru
Пивкина Юлия Александровна,
студент,
e-mail: pivkinay@list.ru
Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева», г. Саранск, РФ

В современных условиях новые стандарты общего образования (ФГОС) ориентируют среднюю школу на создание условий, способствующих развитию интеллектуальных и творческих способностей учащихся, самостоятельному приобретению ими знаний, умений и способов деятельности. Одним из главных подходов к созданию таких условий в ФГОС определен системно-деятельностный подход, предполагающий, что новые знания не даются ученикам в готовом виде, учащихся необходимо научить самостоятельно «добывать» эти знания, анализировать, делать выводы и применять полученные знания на практике, то есть использовать в своей деятельности эвристики и эвристические приемы.

Существуют разные трактовки понятий «эвристика». В методике обучения математике под эвристикой, как правило, понимается всякий способ, применение которого может привести к отысканию нужного метода решения задачи или доказательства теоремы [3, с. 147]. Эвристические приемы трактуются как «особые приемы, которые сформировались в ходе решения одних задач и более или менее сознательно переносятся на другие» [4, с. 27]. Они могут привести к общему поиску решения задачи, но не гарантируют получение результата.

Методике обучения математике с использованием эвристик посвятили свои труды известные ученые, математики и методисты: В.М.Брадис, Е.С.Канин, Ю.М.Колягин, Ю.Н.Кулюткин, С.Р.Мугаллимова, Д.Пойа, Г.И.Саранцев, Е.И.Скафа, Е.Е.Семенов, Л.М.Фридман и др. Ими было раскрыто содержание понятия эвристики, приведена классификация эвристик и эвристических приемов решения задач, разработаны идеи и направления эвристического обучения математике, указана важность использования эвристик при решении задач и открытии новых знаний.

Несмотря на это, как показывает практика, школьники слабо владеют умением применять эвристики при поиске способов решения задач и доказательства теорем. А особенно это заметно при изучении алгебры и начал математического анализа, так как использование эвристик в обучении математике, как правило, больше касается геометрии. Между тем, в старших классах также имеются возможности для применения эвристических приемов. Так, С.И.Калинин отмечает, что при изучении «дифференциального и интегрального исчисления необходимо специально рассматривать вопросы, прививающие навыки самостоятельного поиска новых закономерностей и связей и знакомящие с достаточно общими, едиными приемами самостоятельного целенаправленного поиска решения задач и доказательства теорем» [1, с. 25].

В процессе применения эвристик в обучении алгебре и началам математического анализа следует опираться на основные виды эвристик в математике (общие, базовые, специальные, эвристические приемы и методы научного познания). Рассмотрим эвристики, которые можно использовать при изучении производной и интеграла в школьном курсе математики. Акцентируем внимание на то, что обучение элементам математического анализа предполагает тесную связь с ранее изученным материалом, который составляет основу для дальнейшего продвижения в изучении данного курса. Для этого целесообразно в процессе изучения алгебры и начал математического анализа в старших классах применять вопросы, направляющие поиск решения предложенной задачи, которые можно считать основными эвристиками при изучении данной дисциплины.

Учитывая, что математический анализ – это раздел математики о функциях и их обобщениях, то основные эвристики будут касаться функций. Продемонстрируем сказанное на конкретном примере.

Пример 1. Найдите производную функции: $y = \ln\left(\sqrt{x}\ \sin x\right)$.

Решение. Первое действие – вычисление натурального логарифма. По таблице находим: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Поэтому $y' = \frac{1}{\sqrt{x}\sin x}\left(\sqrt{x}\ \sin x\right)'$.

Найдем теперь производную $\left(\sqrt{x}\ \sin x\right)'$ по формуле производной произведения двух функций:

$$\left(\sqrt{x}\ \sin x\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(\sin x) + \sqrt{x}\,(\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x.$$

Окончательно получаем: $\left(\ln\left(\sqrt{x}\sin x\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}\sin x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)$.

При выполнении подобного задания школьники испытывают затруднения. Поэтому для нахождения производной сложной функции можно предложить систему вопросов, направляющих поиск решения и образующих следующие эвристики:

1). К какому типу относится функция? *(Функция логарифмическая)*

2). Является ли эта функция сложной? *(Да)*

3). Как найти производную сложной функции? *(Находим производную от внешней функции, оставляя прежним аргумент функции, затем находим производную от внутренней функции)*

4). Как найти производную от внешней (в данном случае логарифмической) функции?

5). Что представляет собой в формуле внутренняя функция в смысле арифметической операции?

6). Как найти производную произведения двух функций? *(По правилу дифференцирования произведения двух функций)*

Аналогичная система вопросов может использоваться в интегральном исчислении при нахождении первообразной функции.

Эвристики дифференциального исчисления имеют большое значение, так как производная помогает нам исследовать функцию и строить ее график. Но особое внимание следует уделить эвристикам, направляющим поиск решения текстовых задач на нахождение наименьшего и наибольшего значений, так как при решении этих задач учащиеся испытывают наибольшие трудности. Система эвристик, направляющих поиск решения подобных задач может быть следующей:

1). О наибольшем (наименьшем) значении какой величины говорится в задаче? *(О наибольшем (наименьшем) объеме, площади, периметре и т. д.)*

2). Какую формулу следует использовать для нахождения этой величины? Запишите эту формулу.

3). В формуле обычно неизвестными являются две величины. Какую из двух величин следует обозначить за аргумент x? *(Выбирается наиболее оптимальный вариант)* Каков интервал его изменения?

4). Как выразить вторую неизвестную в формуле величину через аргумент и известные величины, данные в задаче?

5). Как составить функцию искомой величины, о наибольшем (наименьшем) значении которой говорится в задаче, как функцию независимой переменной x?

6). Как найти искомое наибольшее (наименьшее) значение функции на заданном интервале или отрезке?

Очень важное значение в интегральном исчислении имеют эвристики для решения задач геометрического содержания: вычисление площадей фигур и объемов тел. Рассмотрим примеры нахождения площадей фигур.

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной: 1) параболами $y = x^2$, $y = 2x - x^2$ и осью *Ox*; 2) параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.

Первый шаг в решении этих задач – построение графиков функций и выделение полученной фигуры. Система эвристик, направляющих поиск решения этих задач может быть следующей. ***Для первой задачи*** (рис. 1):

1). Является ли эта фигура криволинейной трапецией? (*Не является*)

2). Почему фигура не является криволинейной трапецией? *(Она ограничена сверху не одним, а двумя графиками функций)*

3). Как можно разбить эту фигуру на две криволинейные трапеции?

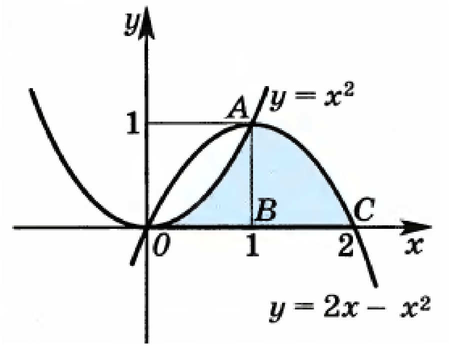

Рисунок 1 – Фигура к задаче 1

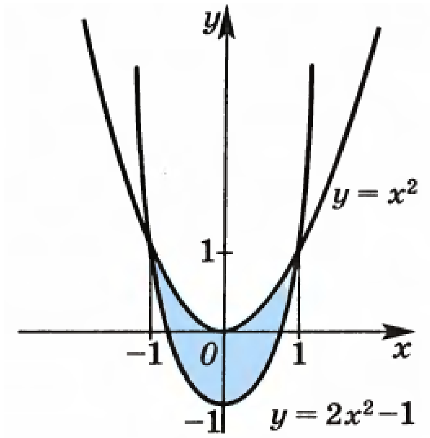

Рисунок 2 – Фигура к задаче 2

4). Какое свойство площадей можно использовать в этом случае, чтобы найти площадь всей фигуры?

5). Чему будет равна тогда площадь данной фигуры? *(Сумме площадей двух криволинейных трапеций)*

4). Как найти площадь криволинейной трапеции? *(По формуле Ньютона-Лейбница)* и т. д.

Система эвристик для второй задачи (рис. 2):

1). Является ли эта фигура криволинейной трапецией? (*Не является*)

2). Как можно рационально найти площадь данной фигуры? Является ли эта фигура симметричной? *(Она симметрична относительно оси Oy)*

3). Как можно найти площадь одной части фигуры? Какие формулы Вы ещё знаете для нахождения площади фигуры? *(Искомая площадь равна разности площадей криволинейных трапеций, т. е. под соответствующим интегралом будет разность функций: верхней и нижней)* И т. д.

В рассмотренных примерах роль эвристик выполняют вопросы, направляющие поиск решения задачи. Таких эвристик в курсе алгебры и начал математического анализа достаточно много, их можно классифицировать по типу решаемых задач.

Необходимо отметить, что наиболее эффективное использование эвристик характерно для «открытия» учащимися новых понятий, утверждений, методов и способов доказательства теорем. Использование эвристик при введении некоторых понятий и теорем математического анализа подробно изложено в статье [2].

Таким образом, проведенное исследование убеждает нас в том, что при обучении алгебре и началам математического анализа имеются большие возможности для использования эвристик в разных ситуациях. Они помогают учителю организовать эвристическое обучение математике, а в целом, использование эвристик развивает творческое мышление школьников и готовит их к поисково-исследовательской деятельности не только в математике, но и в других областях знаний, а также на практике при решении разнообразных практических задач.

Литература

1. Калинин С. И. Методическая система обучения студентов педвуза дифференциальному и интегральному исчислению функций в контексте фундаментализации образования : автореферат дис. … доктора педагогических наук : 13.00.02 / Калинин Сергей Иванович; Институт содержания и методов обучения Российской академии образования. – Москва, 2009. – 43 с.
2. Капкаева Л.С. Организация поисково-исследовательской деятельности учащихся по алгебре и началам математического анализа в профильной школе / Л.С.Капкаева, Е.А.Герасимова // Учебный эксперимент в образовании. – 2018. – № 4. – С. 33-43. – ISSN 2079-875X. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/309791 (дата обращения: 12.12.2021).
3. Саранцев Г.И. Методика обучения математике : методология и теория : учебное пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») / Г.И.Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2012. – 292 с. – ISBN 978-5-93962-554-8.
4. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике : теория, методика, технология : монография / Е. И. Скафа. – Донецк: Издательство ДонНУ, 2004. – 440 с. – ISBN 966-639-171-6.