ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ КОНСТРУИРОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Скафа Елена Ивановна,
доктор педагогических наук, профессор,
ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», г. Донецк, ДНР
e-mail: e.skafa@donnu.ru

В современных научных исследованиях по педагогике рассматриваются различные технологии обучения. Среди них важнейшими мы считаем те, которые существенно влияют на современное состояние развития математического образования. При этом главным в этом процессе является обучение решению математических задач, так как именно задачи являются как средством, так и целью обучения и развития математического мышления обучающихся.

В научных исследованиях психологов и педагогов обосновано, что умения школьников решать задачи не зависит от количества решенных задач. Если даже обучающийся решил много задач, но у него не сформирован общий подход к задаче, ее анализу, поиску плана решения, самостоятельно решать задачи он не сможет. Специальные эвристики: метод перебора, инварианты, принцип Дирихле, метод перемещений, геометрических мест точек и другие – составляют необходимый инструментарий для осуществления поисковых действий. Именно на их основе происходит формирование более или менее сложных стратегий поиска [5].

Однако в работах по методике обучения математике отмечается, что интерес представляет скорее не то, как ученик решил задачу, а какие задачи он поставил перед собою. Таким образом, обучение школьников конструированию математических задач является одним из актуальных исследований современных методистов [1; 2; 3].

Чтобы сформировать у обучающихся представление о методах и способах конструирования задач, прежде всего, необходимо будущего учителя обучить технологиям, лежащим в основе развития математической задачи [4; 5].

В практической деятельности к ***способам «развития задачи»*** относят*: преобразование задачи; конструирование задачи, аналогичной данной, но более сложной; обобщение задачи; конкретизацию задачи; конструирование задачи, обратной данной.*

Покажем на примерах работы со школьниками, как технология «развития задачи» оказывает содействие учителю математики в организации и управлении эвристической деятельностью обучающихся.

Преобразование задачи. Решение задачи на нахождение площади боковой поверхности правильной пирамиды приводило нас к формулированию или введению новой для учеников теоремы. Например.

Задача. Апофема правильной треугольной пирамиды равна 5 см, сторона основания – 4 см. Найти площадь боковой поверхности этой пирамиды.

Решив задачу в «общем виде», заменив числовые значения апофемы и сторон треугольника, который лежит в основании, соответственно буквенными значениями a и l, получили ответ $S=\frac{1}{2}(a+a+a)l$ или в виде $S=3\frac{1}{2}\cdot al$. Эта задача подсказала формулировку теоремы:

площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению полупериметра ее основания на апофему пирамиды.

Конструирование задачи, аналогичной данной, но более сложной. Попытки найти в пространстве теорему, аналогичную теореме Пифагора в плоскости, привели учеников к идее рассмотрения тетраэдра, три ребра которого, выходящих из одной вершины, взаимно перпендикулярны, и попыток установить соотношение между площадями трех его граней, которые содержат прямые углы (S_1, S_2, S_3) и площадью (S_4) четвертой гранью (остроугольный треугольник). Проведя соответствующие вычисления, обучающиеся пришли к соотношению $S_1^2+S_2^2+S_3^2=S_4^2$.

Обобщение задачи. Снятие или ослабление ограничений, наложенных на условие предыдущей задачи, приводили учеников к доказательству некоторого утверждения. Например, ученикам предложили задачу.

Задача. Треугольник ABC спроектировали в треугольник DBC. Угол между плоскостями треугольников – φ. Чему равна площадь треугольника ABC, если площадь треугольника DBC – Q.

Затем вместо треугольника DBC предлагается рассмотреть многоугольник и получим новую задачу.

Задача. Через точку, которая не принадлежит плоскости многоугольника, провели прямые, которые соединяют ее с вершинами многоугольника. Полученные плоскости треугольников наклонены к плоскости многоугольника под одинаковым углом φ. Найти общую площадь всех полученных треугольников, если площадь многоугольника Q.

Снимем ограничения плоскостей треугольниками и многоугольниками вообще. Получим теорему, необходимую во время изучения ортогонального проектирования в 10-м классе:

площадь проекции поверхности на плоскость равна площади представленной поверхности, умноженной на косинус угла между этими плоскостями.

Продолжить развитие задачи ученики смогут в 11-м классе. Анализируя доказательство предыдущего утверждения и конкретизируя его, старшеклассники выдвинули новые гипотезы:

– если каждый двугранный угол при основании пирамиды равен φ, а площадь ее основания – S_0, то площадь боковой поверхности – $S_б = \frac{S_0}{\cos\varphi}$;

– боковая поверхность конуса с основанием, радиус которого r, а угол между образующей и плоскостью основания φ, находится из формулы $S_б = \frac{\pi r^2}{\cos\varphi}$.

Конкретизация задачи. Рассмотрим задачи, которые решаются методом сложения уравнений. То есть, это задачи, о которых ученики говорят, что «у них мало данных». Конкретизация некоторых условий помогает в решении этих задач.

Задача. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро l, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

Эвристическая схема к одному из подходов имеет такой вид:

1) решить вопрос о том, которую из неизвестных величин принять за основное неизвестное;

2) обозначить неизвестное через x и выразить все другие неизвестные величины, которые необходимы во время решения задачи, через обозначенное неизвестное;

3) опираясь на зависимость между неизвестными и известными величинами, составить уравнение.

Анализируя условие задачи, то есть «развивая» ее, ученик заметит, что решение задачи стало бы более легким, если были бы заданы или сторона треугольника в основании – a или высота пирамиды *H*. Далее ученики получают новые задачи.

Задача. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a, боковое ребро равно l и боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

Задача. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно l, боковая грань наклонена к плоскости основания под углом β, а высота – h. Найти объем пирамиды.

Конструирование задачи, обратной данной. Например. Ученик решает задачу.

Задача. В тетраэдре известна высота. Как найти длину его ребер?

С недостаточной определенностью содержания он составил и решил к ней обратную, обосновав независимость решения от рисунка.

Задача. Известна длина ребер тетраэдра. Найти его высоту, основание которой лежит в точке пересечения биссектрис основания.

Умение проводить «развитие задачи» помогает ученикам научиться самостоятельно конструировать новые задачи и, решая их, получать субъективно новые знания, то есть, стимулирует эвристическую деятельность, а также проявление и укрепление феномена познавательной самодеятельности.

В настоящее время интенсивно развивается новая область науки – автоматизация поискового конструирования, где разрабатываются эвристические и машинные методы поиска новых технических решений, создаются своего рода эвристические алгоритмы.

Идея разработки подобных приемов и алгоритмов принята нами для внедрения технологии создания новых задач учителям и учащимся.

Разумеется, речь не идет о буквальной аналогии приемов, а лишь о некотором сходстве.

Синтез задач. Морфологический метод. Речь идет о систематизированном переборе различных ситуаций и отношений, в которых могут находиться объекты, упоминаемые в условии задачи. Например.

Задача. Пусть объекты – функция и ее производная. Свойства, рассматриваемые согласно традиционной схеме исследования функций:

1) область определения (совпадает или не совпадает с данным множеством); 2) область значений…; 3) множество нулей…; 4) множество знакоопределенности…; 5) непрерывность; 6) периодичность; 7) наличие (отсутствие) экстремумов; 8) наличие (отсутствие) асимптот и др.

Поставьте в соответствие свойства функции и свойства ее производной.

Перебирая варианты связей между свойствами функции и ее производной можно получить достаточное количество новых задач.

1. Может ли функция, определенная всюду на оси, иметь производную только на множестве рациональных чисел?

2. Может ли множество нулей функции совпадать с множеством нулей ее производной? Быть шире? Быть уже?

3. Могут ли функция и ее производная иметь одинаковые точки экстремума?

4. Функция имеет наименьший период T. Может ли ее производная иметь наименьший период T/2? 2T?

5. Функция возрастает (в строгом смысле) на некотором интервале. Следует ли из этого, что ее производная положительна?

6. Функция дифференцируема в интервале I, имеет минимум в точке $a \in I$. Следует ли отсюда, что она убывает в некотором интервале $(a-\delta; a)$ и возрастает в интервале $(a; a+\delta)$?

7. Пусть график производной имеет асимптоту. Обязательно ли эта прямая является асимптотой графика функции?

8. Пусть функция положительна в некотором интервале. Обязательно ли положительна ее производная? Верно ли обратное утверждение?

9. Могут ли функция и ее производная иметь одинаковые интервалы монотонности? выпуклости? Всегда ли эти интервалы одинаковы?

10. Следует ли из наличия наклонной асимптоты у графика функции существование горизонтальной асимптоты у графика производной?

Описанная схема является модификацией «морфологической карты» (метода упорядоченного перебора) вариантов решения проблемы, предложенного в свое время швейцарским астрофизиком Цвики.

Метод «перевода». Новые задачи могут быть получены из известных переводом на язык физики, геометрии (физическая или геометрическая интерпретации), переводом с языка физики или иной дисциплины (моделирование). Обсуждение постановки задач такого типа чрезвычайно важно для развития интереса к прикладному математическому исследованию и навыков такого исследования. Иногда это позволяет найти более простой способ решения на модели. Например.

Задание 1. Если на некотором интервале производная положительна, то функция возрастает. Перевести этот результат на язык механики.

Обсуждение наталкивает учащихся и на доказательство данного утверждения на языке механики.

Если скорость положительна, то движение происходит в сторону возрастания абсциссы точки.

Задание 2. Пусть f(x) непрерывная функция на [a; b] и $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Тогда $f(x) \equiv 0$. Перевести этот результат на язык геометрии.

Оказывается, что с точки зрения геометрии результат становится очевидным: *если объем тела вращения равен нулю, то тело вращения сводиться к отрезку.*

Метод вариаций. Новые задачи можно получать, варьируя условие известной задачи. Для этого есть много возможностей, причем возможно организовать их систематический перебор. Не стремясь к полноте, перечислим некоторые вариации. Поставить обратную задачу. Например.
Исходная задача – решить квадратное уравнение. Обратная – найти все квадратные уравнения, имеющие данные корни.

Сформулировать обратную теорему. Рассмотрение обратных теорем – весьма традиционная методическая линия. Заметим, что целесообразно, наводя на это рассмотрение, позаботиться о том, чтобы некоторые из сформулированных утверждений оказались ложными. В противном случае будет складываться стереотипное представление об обращении теоремы как вариации, всегда приводящей к правильному результату. Например.

Задание 1. Как сформулировать теорему, обратную к теореме Пифагора? Обратную к теореме Виета?

Задание 2. Если производная положительна на некотором интервале, то функция возрастает. Верно ли обратное утверждение?

Задание 3. Известно, что непрерывная на отрезке функция ограничена. Верно ли обратное?

Поиск аналогий. Этот прием один из немногих, которые активно применяются в практике обучения математике. Использование его проиллюстрируем примерами.

Задание 1. Найти площадь треугольника по его сторонам – найти объем тетраэдра по длинам его ребер.

Задание 2. Найти диагональ прямоугольника по его сторонам – найти диагональ прямоугольного параллелепипеда по его ребрам.

Задание 3. Решить квадратное уравнение – решить кубическое уравнение.

Задание 4. Построить квадратный трехчлен по корням – построить полином, зная все его корни.

Итак, решение системы эвристических задач, а также использование в обучении решению задач технологии конструирования новых заданий позволяет сформировать у обучаемых *эвристические умения*:

– анализировать данную ситуацию с целью выявления существенного свойства; с целью установить полноту, непротиворечивость, независимость условия задачи или ее элементов;

– соотносить известные элементы задачи с неизвестными (данные с искомыми);

– распознавать известные или данные элементы в различных сочетаниях;

– сопоставлять данную задачу с известными задачами;

– выявлять скрытые свойства задачной ситуации;

– реорганизовывать известные элементы для их функционирования в новом качестве, новых сочетаниях;

– создавать новые комбинации известных понятий и фактов, относящихся к элементам данной задачи, соотнося их с ее условием и целью;

– конструировать простейшие математические модели данной задачной ситуации;

– отождествлять элементы задачи с элементами модели;

– выявлять детали, полезные с точки зрения общей структуры задачи или ведущей идеи поиска ее решения на основе эвристических приемов различного вида и особенно приема «анализа через синтез»;

– осуществлять мыслительный эксперимент, предвидеть его промежуточные и конечный результаты;

– индуктивно строить гипотезы, высказывать разумные догадки;

– расчленять данную задачу на подзадачи (последовательное решение которых приводит к решению основной), выявлять частные задачи (решение которых ведет к установлению элементов, важных для решения основной);

– ограничивать интуитивно индуктивный поиск;

– проверять выдвигаемые гипотезы дедуктивным путем, опровергать контрпримером;

– интерпретировать результаты работы над моделью данной задачной ситуации;

– кодировать язык ситуации в терминах модели и декодировать (в терминах ситуации) результаты, выраженные на языке модели.

Литература

1. Kurpayanidi K.I., Nishonov F.M. (2018). Construction of systems of mathematics problems. International Journal of Humanities and Natural Sciences, vol.10-1. Pp. 82-85. DOI: 10.24411/2500-1000-2018-10069

2. Ковалева ГИ. Теория и практика обучения будущих учителей математики конструированию систем задач: монография / Г.И. Ковалева. – Волгоград: Изд-во ВГПУ «Перемена», 2011. – 180 с.

3. Nishonov F.M., and ets. (2018) Some questions of design of tasks in mathematics. ISJ Theoretical & Applied Science, 09 (65): p.41-44. Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-09-65-7 Doi: https://dx.doi.org/10.15863/TAS

4. Система подготовки нового поколения учителей математики на основе проектно-эвристической деятельности / Е. И. Скафа, Е. Г. Евсеева, Ю. В. Абраменкова, И.В. Гончарова // Перспективы науки и образования. 2021. № 5 (53). С. 208-222. doi: 10.32744/pse.2021.5.14108.

5. Скафа Е.И. Методологический подход к пониманию роли эвристической задачи в математическом образовании школьников / Е.И. Скафа, М.В. Дрозд // Дидактика математики : проблемы и исследования : Междунар. сборн. науч. работ. – 2017. – Вып. 46. – С.15-20.