

# ПРОГРАММЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ, КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

*Черноусова Наталия Вячеславовна*  
*кандидат педагогических наук, доцент*

*e-mail: [chernousovi@mail.ru](mailto:chernousovi@mail.ru)*

*Ожигова Надежда Андреевна*

*Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина,*

*г. Елец, Россия*

*e-mail: [ozhig.n@gmail.com](mailto:ozhig.n@gmail.com)*

Задачи с параметром, входящие в единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике профильного уровня, являются для учащихся одними из сложнейших задач. В 2020 году лишь 2,2 % от экзаменуемых успешно справились с таким заданием [2]. Задания с параметром относятся к заданиям высокого уровня сложности, так как для их решения необходимо знать, умело использовать, комбинировать различные алгоритмы и методы решения задач, включая графические [2].

Рассмотрим одну из подобных задач.

**Задача 1:** «Найдите все положительные значения параметра  $a$ , при каждом из которых заданная система уравнений имеет не менее 12 решений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - 10) \cdot (9 - |xy|) = 0; \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases} \quad [1].$$

Данную систему удобно решать графически в плоскости  $xOy$ . Стоит отметить, что система симметрична относительно смены знака обеих переменных.

Рассмотрим решения каждого из уравнений системы.

Очевидно, что первое уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} |x| + |y| - 10 = 0, \\ 9 - |xy| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| = 10, \\ |xy| = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| = 10; \\ |y| = \frac{9}{|x|}. \end{cases}$$

Графическим решением первого уравнения является квадрат с вершинами в точках  $A(10; 0)$ ,  $B(0; 10)$ ,  $C(-10; 0)$  и  $D(0; -10)$ .

Графиком второго уравнения является объединение двух гипербол:

$$y = \frac{9}{x} \text{ и } y = -\frac{9}{x}.$$

Точки пересечения квадрата и гипербол имеют координаты:  $(-1; 9)$ ,  $(-9; 1)$ ,  $(-9; -1)$ ,  $(-1; -9)$ ,  $(1; -9)$  и  $(9; -1)$ .

На рисунке 1 приведено графическое решение первого уравнения системы уравнений из задачи 1, построенное с помощью динамической математической программы GeoGebra.

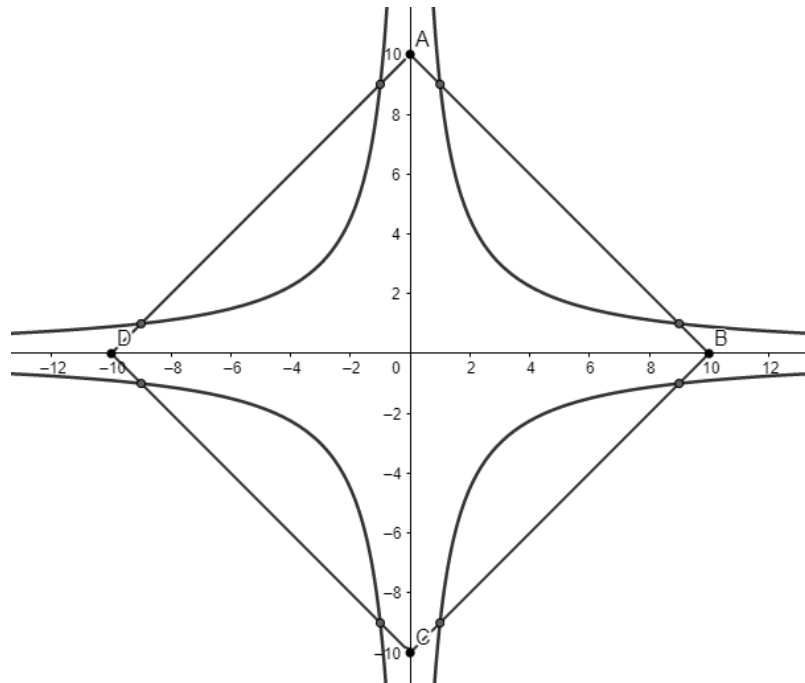


Рисунок 1 – Графическое решение уравнения  $(|x| + |y| - 10) \cdot (9 - |xy|) = 0$

Основные трудности у учащихся возникают именно при рассмотрении уравнений с параметром. У многих это связано с недостаточным уровнем сформированности знаний и умений для решения, с отсутствием понимания и видения задачи, а часть учеников даже не приступают к решению из-за психологического барьера: «параметр – это сложно», «нас не учили решать задания с параметром», «а что такое параметр?». Это только малый перечень ответов школьников, которые мы получили при проведении опроса.

Поэтому при подготовке школьников очень важно помочь осознанию казалась бы простой истины: параметр – это всего лишь неизвестное число, для решения задач с параметрами необходимо знать способы решения основных видов математических структур и условия-ограничения на них. Именно эти навыки и помогут избавиться от «страха перед параметром». Для этого, на наш взгляд, можно воспользоваться возможностями компьютерной геометрии. Именно она позволит наглядно представить суть задания и как говорят – увидеть решение.

Второе уравнение заданной системы уравнений  $x^2 + y^2 = a^2$  при  $a > 0$  (требование условия задания) задает семейство окружностей с

центром в начале координат и радиусом  $R = a$ . При конкретном значении параметра  $a_0$  решениями системы будут координаты точек пересечения окружности радиусом  $R = a_0$  с квадратом и ветвями гипербол.

Количество общих точек зависит от величины радиуса, т.е. от значения параметра  $a$ .

Рассмотрим возможные случаи:

1. если  $R < OE$ , общих точек нет, т.е. система не имеет решений;
2. если  $R = OE$ , то графики имеют 4 общие точки;
3. если  $OE < R < OF$ , то существует 8 общих точек;
4. если  $R = OF$ , то графики имеют 12 общих точек;
5. если  $OF < R < OK$ , то существует 16 общих точек;
6. если  $R = OK$ , то графики имеют 8 общих точек;
7. если  $OK < R < OB$ , то существует 16 общих точек;
8. если  $R = OB$ , то графики имеют 12 общих точек;
9. если  $R > OB$ , то графики имеют 4 общие точки.

На рисунке 2 приведено графическое решение системы уравнений из задачи 1, построенное с помощью динамической математической программы GeoGebra.

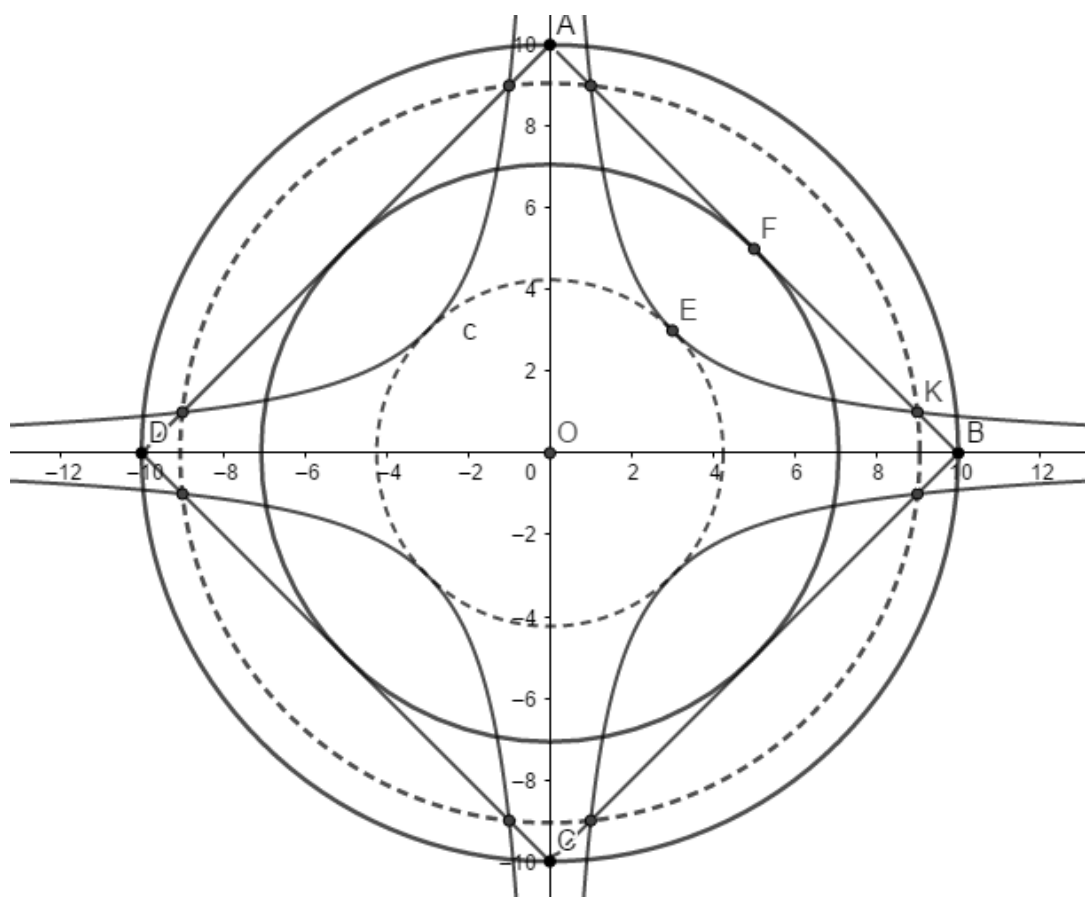


Рисунок 2 - Графическое решение системы уравнений

$$\begin{cases} (|x| + |y| - 10) \cdot (9 - |xy|) = 0; \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Таким образом, из всех возможных случаев условию задания подходят лишь случаи 4, 5, 7 и 8, и очевидны ограничения

$$a \in [OF; OK) \cup (OK; OB].$$

Значение  $R = OF$ , когда окружность касается сторон квадрата, можно найти из прямоугольного треугольника:

$$\Delta OFB: R = a_1 = OF = OB \cdot \sin 45^\circ = 5\sqrt{2}.$$

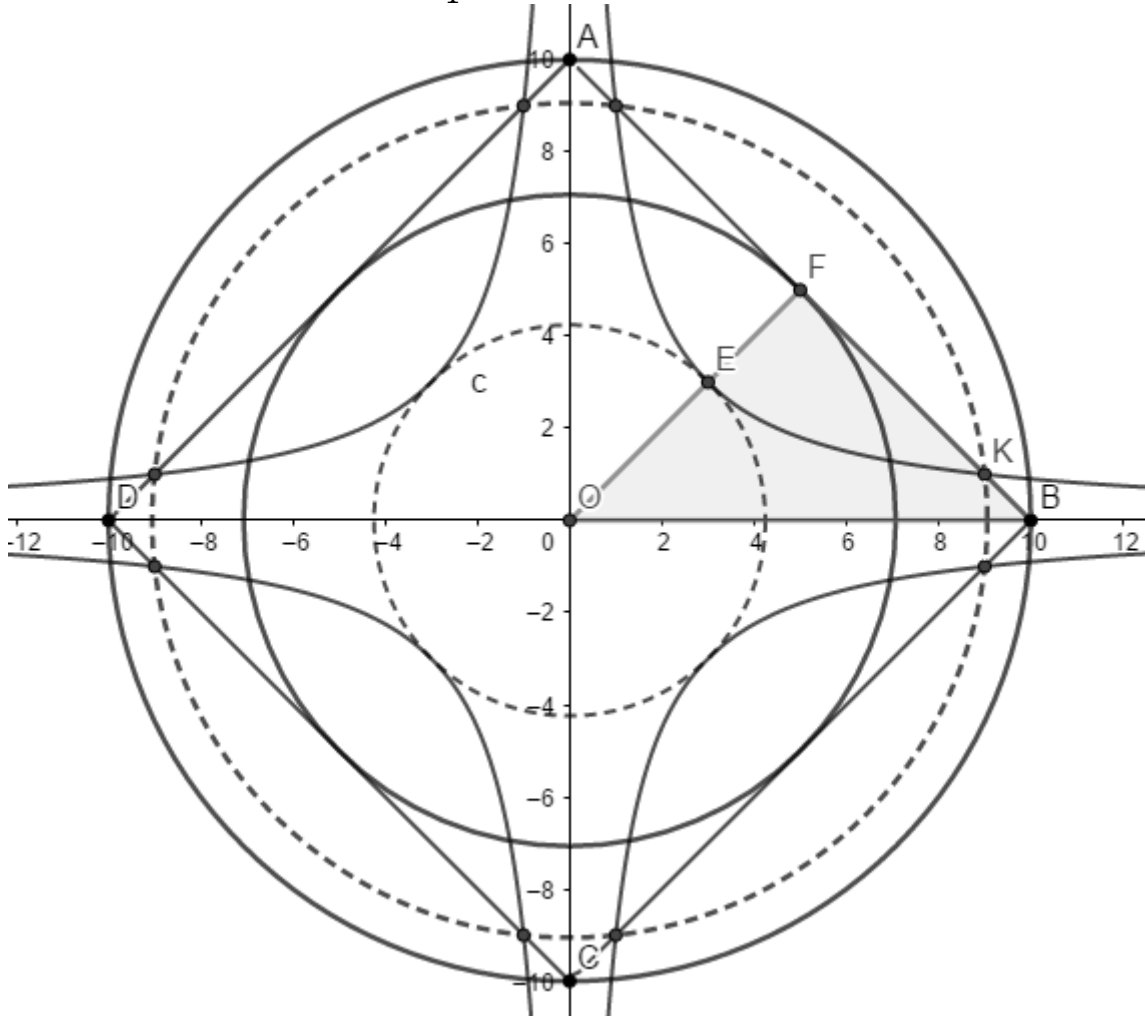


Рисунок 3 – Изображение  $\Delta OFB$  на графическом решении системы

$$\text{уравнений } \begin{cases} (|x| + |y| - 10) \cdot (9 - |xy|) = 0; \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Значение  $R = OK$  найдем из условия, что окружность проходит через точку  $K$ , точка пересечения квадрата и гиперболы (рисунок 3):

$$R = a_2 = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{81 + 1} = \sqrt{82}.$$

Значение  $R = OB$  найдем из условия, что окружность проходит через точку  $B$ :  $R = a_3 = 10$ .

Таким образом, система имеет не менее 12 решений при значении параметра

$$a \in [5\sqrt{2}; \sqrt{82}) \cup (\sqrt{82}; 10].$$

Конечно, многие приведенные выводы не так очевидны, и для их получения необходимо проводить специальную методическую и пропедевтическую работу с учащимися. Например, утверждение «Графическим решением первого уравнения является квадрат с вершинами в точках  $A(10; 0)$ ,  $B(0; 10)$ ,  $C(-10; 0)$  и  $D(0; -10)$ » не может быть просто «навязано» школьникам. Надо предварительно предложить им задания на построение графиков функций  $|x| + |y| = a$ . Только тогда вывод будет очевидным для учащихся. Этот опыт им нужен и важен, а значит на это следует обратить особое внимание.

Программы компьютерной математики позволяют учащимся не только научиться решать задачи с параметром, но и избавиться от психологического барьера перед ними. Наглядность и удобство, таких программ как GeoGebra, помогает учащимся в данных вопросах. Использование данных сервисов не заменяет «геометрии руки», а лишь совершенствует ее.

### **Литература**

1. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Яценко. – Москва: Издательство «Национальное образование», 2022. – 224 с.

2. Яценко, И.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2020 года по математике / И. В. Яценко, А. В. Семенов, И. Р. Высоцкий // Педагогические измерения. – 2020. – № 3. – С. 3-16.