ПРИМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛАМЕ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Савельев Валерий Михайлович
кандидат физ -мат. наук, доцент,
ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ им. Владимира Даля», г. Луганск, ЛНР
e-mail:svm59@mail.ru
Киричевский Ростислав Викторович
кандидат технических наук, доцент,
ГОУ ВО ЛНР «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск, ЛНР
e-mail: rost71@mail.ru
Скринникова Анна Владимировна
старший преподаватель,
ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ», г. Луганск, ЛНР
e-mail: ann3005@rambler.ru

Курс высшей математики для студентов ВУЗов строительных направлений подготовки во многом не удовлетворяет потребностей изучения технических дисциплин. Формальное включение в курс высшей математики новых разделов, при котором сохранялись бы прежние методы преподавания и последовательность изложения, может привести к еще большему, чем сейчас, недостатку времени на изучение всего этого курса. Поэтому необходим поиск наиболее рациональных методов изложения программного материала с целью высвобождения времени для более глубокого изучения курса.

В действующую программу курса не включено изучение коэффициентов Ламе, хотя они нужны при применении криволинейных координат. Коэффициенты (параметры) Ламе становятся полезными при исследовании свойств материалов (не только строительных), решении различных задач на деформации, колебания сплошных сред [1, 3-5], и любых других задач в криволинейных системах координат [2]. Это особенно важно знать студентам направлений подготовки 07.03.01 Архитектура, 08.03.01 Строительство и др.

В большинстве имеющихся учебных руководств для студентов формулы дифференциалов дуг, площадей и объемов в полярных, цилиндрических и сферических криволинейных координатах выводятся исходя из графического изображения объекта. Такой способ вывода отнимает много времени и часто из-за недостаточно удачно построенного чертежа оказывается не особенно убедительным.

Коэффициенты Ламе можно ввести следующим образом [1]. Если в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ задана векторная функция трех скалярных аргументов $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$, то при известных условиях эта функция осуществляет преобразование пространства к криволинейным координатам. Отметим, что строго говоря, в общем случае, номер криволинейной координаты нужно писать вверху. Координатной линией этой системы будет годограф радиуса-вектора $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$, когда u_2 и u_3 будут сохранять постоянные значения. Аналогично определяются и остальные координатные линии.

Если криволинейная система координат ортогональна, то коэффициенты Ламе H_i ($i = 1,2,3$) есть длины векторов-скоростей изменения радиуса-вектора $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, u_3)$ в направлении соответствующих криволинейных координат осей. Обозначая векторы-скорости $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}$ соответственно через $\mathbf{x}_i$ получим формулы для вычисления коэффициентов Ламе:

$$H_i = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}\right| = |\mathbf{x}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2}, (i = 1,2,3), \qquad (1)$$

где $x, y, z,$ – координаты радиуса-вектора $\mathbf{x}$ в системе координат $Oxyz$. Отметим также, что коэффициенты Ламе также называют параметрами Ламе.

Дифференциал длины дуги в направлении соответствующей криволинейной координатной оси будет равняться

$$ds_i = |d\mathbf{x}| = \left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i}\right| du_i, (i = 1,2,3). \qquad (2)$$

Посредством векторов $\mathbf{x}_i$ можно записать условия ортогональности криволинейной системы координат:

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = 0, \text{если } i \neq k,$$

или в координатной форме:

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_k} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial u_k} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial u_k} = 0, (i \neq k). \qquad (3)$$

Учитывая ортогональность криволинейной системы координат, можно записать выражения дифференциала площади в каждой координатной поверхности:

$$d\sigma = H_i H_k du_i du_k, \qquad (4)$$

и дифференциал объема

$$d\tau = H_1 H_2 H_3 du_1 du_2 du_3. \qquad (5)$$

В качестве примера получим выражения дифференциалов дуги, площади и объема для основных криволинейных координат систем.

Пример 1. Полярные координаты на плоскости определяются вектором $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Ортогональность системы проверяется по соотношению (3):

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi; \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi; \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi; \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi(-\rho\sin\varphi) + \sin\varphi \cdot \rho\cos\varphi = 0,$$

т. е. система ортогональна.

Коэффициенты Ламе в силу (1) равны:

$$H_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} = \rho, \rho \geq 0.$$

Дифференциалы дуг по направлению координатных осей согласно (2) будут равны:

$$ds_\rho = H_\rho d\rho = d\rho \text{ и } ds_\varphi = H_\varphi d\varphi = \rho d\varphi.$$

Дифференциал дуги в произвольном направлении

$$ds = \sqrt{(ds_\rho)^2 + (ds_\varphi)^2} = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi.$$

Дифференциал площади согласно (4) равен:

$$d\sigma = H_\varphi H_\rho d\varphi d\rho = \rho d\varphi d\rho.$$

Пример 2. Цилиндрические координаты определяются векторной функцией $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$.

Ортогональность системы проверяется, как и в примере 1 используя формулы (3). В данном примере $u_1 = \rho, u_2 = \varphi, u_3 = z$. Имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi; \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi; \frac{\partial x}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi; \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi; \frac{\partial y}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0; \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0; \frac{\partial z}{\partial z} = 1.$$

Производя соответствующие вычисления согласно выражения (1), получаем следующие коэффициенты Ламе:

$$H_\rho = 1;\ H_\varphi = \rho;\ \mathrm{H}_z = 1.$$

Дифференциалы длины дуги по направлению осей:

$$ds_\rho = d\rho;\ ds_\varphi = \rho d\varphi, ds_z = dz.$$

Дифференциал объема в цилиндрической системе координат будет

$$d\tau = H_\rho H_\varphi H_z d_\rho d\varphi dz = \rho d_\rho d_\varphi dz.$$

Пример 3. Функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)$ определяет сферические координаты.

В данном примере имеем следующие криволинейные координаты $u_1 = \rho, u_2 = \varphi, u_3 = \theta$. Далее находим соответствующие производные.

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi\sin\theta; \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\sin\theta; \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho\cos\theta;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi\sin\theta; \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi\sin\theta; \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\sin\varphi\cos\theta;$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\theta; \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0; \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta.$$

По формуле (3) убеждаемся, что криволинейная сферическая система ортогональна.

Производя соответствующие вычисления получаем следующие результаты в виде коэффициентов Ламе:

$$H_\rho = 1;\ H_\varphi = \rho\sin\theta, H_\theta = \rho\ (\rho \geq 0; \sin\theta \geq 0).$$

Дифференциалы длины по направлению осей:

$$ds_\rho = d\rho;\ ds_\varphi = \rho\sin\theta d\varphi;\ ds_\theta = \rho d\theta.$$

Дифференциал объема в сферических координатах

$$d\tau = H_\rho H_\varphi H_\theta d\rho d\varphi d\theta = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Таким образом, несмотря на то, что умение изобразить объемное тело в пространстве безусловно развивает абстрактно-логическое мышление, применение коэффициентов Ламе при рассчете дифференциалов дуг, площадей и объемов в полярных, цилиндрических и сферических криволинейных координатах позволяет обойтись без порой довольно сложных громоздких построений и может понадобится в дальнейшей трудовой деятельности уже бывших студентов.

Литература

1. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва : АСТ, 2020. – 704 с.

2. Дмитриенко Ю. И. Тензорное исчисление/ Ю. И. Дмитриенко. – Москва : Высшая школа, 2001.– 576 с.

3. Легкоступ В. В. Уравнения кинематики беспилотного летательного аппарата в эллиптической системе координат при наведении по разностно-дальномерной навигационной информации / В. В. Легкоступ, В. Э. Маркевич // Системный анализ и прикладная информатика. – 2021. – №1. – С. 12-21.

4. Мнухин Р. М. Прямые и обратные задачи при исследовании колебаний радиально-неоднородных цилиндрических областей : дис. … кандидата. физ.-мат. наук : 01.02.04 / Мнухин Роман Михайлович. – Ростов-на-Дону, 2021. – 182 с.

5. Сокольников И. С. Тензорный анализ : Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред / И. С. Сокольников. – Москва : КомКнига, 2010. – 334 с.