ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ В РЕШЕНИИ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Аркадьева Ольга Владимировна
учитель по индивидуальному учебному плану
МБОУ «Средняя школа №12 города Макеевки»,
г. Донецк, ДНР
e-mail: o.arkadieva@mail.ru

Сегодня огромное значение как в естественно-научных, так и в гуманитарных дисциплинах отводится вероятностно-статистическим знаниям. Так, например, науки как физика, кибернетика, биология, лингвистика, химия, социология и многие другие не могут обойтись без вероятностно-статистических рассуждений и выводов. А это в свою очередь увеличивает темпы развития последних научных течений, базирующихся именно на вероятностных методах, таких как Принцип Дирихле [5].

Принцип Дирихле был сформулирован известным немецким математиком в 1834 году. Сегодня его применяют в комбинаторике, алгебре, геометрии. В переводе с немецкого языка он звучит как «принцип ящиков».

Ученый провел свои исследования с кроликами и контейнерами. Он продемонстрировал, что 5 кроликов можно разместить в 7 контейнеров. И по крайней мере в одном контейнере будет находиться $\frac{5}{7}$ от одного животного. Но поскольку животного так разделить нельзя, существуют некоторые другие правила, основанные на этом принципе. В своих работах В.С. Кузнецова [4], А.А. Андреев [1], П.Ф. Севрюков [6] приводят несколько формулировок принципа Дирихле. Эти формулировки применимы в школьном курсе математики: подготовки к олимпиадам, дополнительном математическом образовании.

Итак, принцип Дирихле – это утверждение, согласно которому в любой совокупности из «N» множеств, содержащих более «n» элементов, есть хотя бы одно множество, содержащее не менее двух элементов. Также существуют обобщенный и простой способ формулировки. Обобщенный принцип используют, когда требуется выявить несколько (три и более) объектов, обладающих некоторыми свойствами. Для того, чтобы объяснить обучающимся обобщенный способ формулировки воспользуемся эвристическим методом подстановки [7].

Сформулируем правило: если в n клетках сидит не менее kn+1 кроликов, то хотя бы в одной клетке кроликов не меньше k+1.

Пусть n – количество клеток; тогда n=10, а k=1. Мы хотим, чтобы в каждой клетке сидело по одному кролику. Но это не верно. Необходимо, чтобы в одной из клеток сидел еще один кролик. Теперь можно решить арифметический пример, подставив значения:

$$kn+1=1\cdot 10+1=11.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, если в формулу подставить заданные значения, то все клетки будут заняты 10 кроликами, и 11-го можно посадить в какую-нибудь клетку (в этой клетке не меньше k+1 кролик). В одной из клеток обязательно будет 2 кролика.

Зададим следующее значение k. Пусть k=2. Мы хотим, чтобы в каждом ящике было по два предмета. Задача может быть сформулирована так: У 10 учеников есть 21 карточка. Карточки разложены в ящики. Докажите, что у одного ученика может быть три карточки.

Можем рассуждать так: берем 10 ящиков, и раскладываем в них карточки. Сначала 10, потом еще 10. Получается, что мы разложили 20 карточек. Но у нас 21 карточка! Тогда по любому кому-то достанется третья карточка. Мы выяснили, если k=2, то во всех ящиках (кроме одного) две карточки.

Рассмотрим наиболее простой способ формулировки принципа Дирихле в задаче.

Задача «Птичка в клетке»: если в n клетках сидит не менее n+1 птичек (заменим персонаж), то хотя бы в одной из клеток сидит не менее двух птичек. Сформулируем задачу, подставив n=3: если у нас есть 3 клетки и 4 птички, то хотя бы в одной из клеток есть две птички.

Задачи на принцип Дирихле применимы в различных областях математического знания. Великий знаток математики и популяризатор научных идей Мартин Гарднер описал в своей книге «Есть идея!» [2] каким образом принцип «птичка в клетке» применим в решении логических и комбинаторных задач. Он пишет: «Предположим, что перед нами 4 клетки и на каждой из них укреплена карточка с названием одного из 4 предметов. Если три предмета попали в клетки со своими названиями, то четвертому предмету не остается ничего другого, как попасть в клетку, к которой прикреплена карточка с его названием. Таким образом, мы имеем дело лишь с одним вариантом: каждый из четырех предметов оказывается в своей клетке.» Для наглядности приведем пример *задачи «Карточки»:*

«У четырех учеников есть именные карточки. Сколькими способами можно перепутать карточку четвертого ученика, если трем ученикам достались их карточки?» Ответ: Ни одного способа.

Принцип Дирихле применяется по аналогии: если 3 ученика – это n, то n+1 – это способ достижения цели четвертого ученика. (Он обязательно получит свою карточку, если все варианты уже заняты) [3]. Как расположены единицы знаний в задачах «Птичка в клетке» и «Карточки» можно посмотреть на рисунке 1.

Рисунок 1 – Схематическое изображение единиц знаний в задачах «Карточки» и «Птичка в клетке»

Продолжим мысль М. Гарднера: «Во многих книгах по занимательной математике встречается следующая задача, в которой речь идет только о трех предметах. На столе расставлены три закрытые коробки. В одной из них находятся две монеты по 5 центов, в другой – 2 монеты по 10 центов и в третьей – одна пятицентовая и одна десятицентовая монета. На крышках коробок написано: 10 центов, 15 центов, 20 центов, но ни одна из надписей не соответствует содержимому коробки. Предположим, что из коробки с надписью «15 центов» извлекли одну монету и положили на стол перед коробкой. Можно ли взглянув на эту монету, сказать, какие монеты находятся в каждой из трех коробок?» [2, с. 35].

Решим задачу М. Гарднера. Попытаемся доказать, что задача решается путем применения принципа «птичка в клетке». Приведем описание эвристической беседы.

Нам предложены только 2 варианта монет и разложены по коробкам. Обратите внимание, когда вы выберете монету, помните, что надпись 15 центов не соответствует содержимому. Если вы вытащите монету, то можете ли вы сказать какая монета находится еще в коробке?

Предположим, вы вытащили 5 центов. На коробке написано «15» – это неправильно, значит в коробке не может быть 10. У нас только два варианта монет. Если 10 не может быть, то в коробке находится 5 центов. (Значит в коробке с надписью «15» находится только 10 центов).

Посмотрим на вторую коробку. Надпись «20» центов не соответствует действительности. Вытащим из коробки монету достоинством 10 центов (выбираем второй вариант по очереди, поскольку 5 мы уже вынимали). Вторая монета не может быть 10 центов, поскольку надпись «20» центов – это ЛОЖЬ. Тогда только 5 центов. (Значит во второй коробке с надписью «20» - 15 центов).

Мы рассмотрели варианты (5;5) (10;5), значит последний вариант (10;10) и на коробке ложная надпись «10». Догадаться можно сразу, ничего больше не решая («… и сразу «кролик» запрыгнул на свое место в какую-нибудь «клетку»).

Составим модель распределения истинной и ложной информации на коробках (табл. 1):

Таблица 1 – Таблица истинности для распределения монет в коробках

(5;*)	15 (ЛОЖЬ)	(5;5)	10 (ИСТИНА)
(10;*)	20 (ЛОЖЬ)	(10;5)	15 (ИСТИНА)
(10;10)	20 (ИСТИНА)	(*;*)	10(ЛОЖЬ)

Так какие монеты лежали в коробках?

На первой коробке (5;5) написано 15. На второй коробке (10;5) написано 20. На третьей коробке написано 10 (даже не нужно проверять содержимое). Ответ и так ясен - это третий вариант распределения монет по коробкам (10;10).

Сформулируем выводы к задаче: почему мы смогли догадаться, что написано на последней коробке с монетами? Почему мы узнали какие монеты содержатся в третьей коробке, даже не решая задачу до конца? Потому что два варианта (коробок) выпали, один остался.

Таким образом, принцип «птичка в клетке» применим не только для задач на принцип Дирихле в явном виде, но и для различных комбинаторных и логических задач. Можем привести аналогию: «И как по принципу Дирихле один оставшийся кролик обязательно запрыгнет на свое место в какую-нибудь «клетку», так и в наших логических задачах последний элемент «Коробка» или «Карточка» станет на свое место, даже если не решать задачу до конца.

Литература

1. Андреев А.А. Принцип Дирихле / А.А. Андреев, Г.Н. Горелов, А.И. Люлев и др. – Учебное издание. Серия А: Математика. Вып. 1. – Самара: Пифагор, 1997. – 21 с.

2. Гарднер М. Есть идея! Пер. с англ. / Перевод Данилова Ю.А. / М.Гарднер. – Москва: Мир, 1982. – 305 с.

3. Гетманова А.Д. Логика. Для педагогических учебных заведений / А.Д. Гетманова. – 5-е изд. Москва: «Добросвет», 2002. – 472 с.

4. Кузнецова В.С. Применения принципа Дирихле в решении некоторых видов логических задач в рамках школьного курса математики» / В.С. Кузнецова. – V Международный конкурс научно-исследовательских и творческих работ учащихся «Старт в науке». – [Электронный ресурс]: https://school-science.ru/5/7/35993

5. Лыкова К.Г. Мир случайностей и вероятностей, что он из себя представляет? / К.Г. Лыкова // Дидактика математики: проблемы и исследования: международный сборник научных работ. –2016. – Вып. 43. – С. 84-89.

6. Севрюков П.Ф. Принцип Дирихле / П.Ф. Севрюков. – Издательская группа «Основа» №1 (37), 2014. – С. 37-40.

7. Скафа Е.И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология. Монография / Е.И. Скафа. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2004. – 440 с.