

## ПОНЯТИЕ И ТИПОЛОГИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ИССЛЕДОВАНИЕ

*Кузнецова Ольга Александровна,  
Крылова Светлана Александровна  
Тольяттинский государственный университет, г. Тольятти,  
Российская Федерация  
e-mail: [oly--2009@yandex.ru](mailto:oly--2009@yandex.ru)*

Качество знаний обучающихся тесно связано с качеством их самостоятельной мыслительной деятельности. Необходимо научить обучающихся определять и выявлять новые для них свойства и признаки геометрических объектов, строить на основании изученного новые умозаключения, находить доказательство теорем и решать задачи. В связи с этим возникает необходимость формирования у учащихся не только навыков логического рассуждения, а также прочных навыков эвристического мышления. Этому способствует решение задач на исследование.

Цель данной работы определить понятие задачи на исследование и выделить типологию таких задач в школьном курсе геометрии, решение которых способствует формированию навыков эвристического мышления.

На основе анализа задачного материала учебников по геометрии [1-4] следует отметить, что большинство геометрических задач можно разделить на три основные группы: задачи на вычисление, задачи на построение, задачи на доказательство. Но существуют также задачи, которые нельзя отнести ни к одной из перечисленных групп – это задачи на исследование, при решении которых ученики сначала догадываются о некотором математическом факте, а затем, используя различные методы: аналогию, наблюдение, анализ, индукцию и другие, дают обоснование, что данный факт имеет место.

Итак, дадим определение: задача на исследование – это задача, при решении которой обучающиеся имеют возможность сделать посильное для них открытие при изучении математики. В геометрических задачах на исследование ученики выявляют различные свойства и признаки геометрических объектов.

Выделим 8 типов геометрических задач на исследование:

I. Задачи на сравнение. В задачах этого вида требуется сравнить величины геометрических объектов, например, длины отрезков, площади треугольников, величины углов и т.п. В этих задачах необходимо установить справедливость одного из соотношений:  $X > Y$ ,  $X < Y$ ,  $X = Y$ . Для геометрических объектов, для которых понятия «больше» и «меньше» не вводятся, доказывается одно из соотношений  $X = Y$  или  $X \neq Y$ .

Примеры задач. 1. «В прямоугольном треугольнике проведена медиана из прямого угла. Сравнить площади и периметры образовавшихся

треугольников» [6, с. 15]. 2. «Сравнить объемы равностороннего конуса и равностороннего цилиндра, если их полные поверхности равновелики» [7, с. 36].

II. Задачи на отыскание зависимостей между элементами геометрических объектов. Такие зависимости, как правило, выражаются в виде формул либо графически, но могут определяться с помощью ее словесного описания.

Примеры задача данного вида. 1. «В треугольнике  $ABC$  из вершины угла  $B$  проведена биссектриса  $BD$ , разбивающая противоположную сторону  $AC$  отрезки  $AD$  и  $DC$ . Найти зависимость между длиной  $BD$  и длинами  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$  и  $DC$ » [5, с. 22]. 2. «Какая должна быть зависимость между высотой и радиусом основания, чтобы боковая поверхность цилиндра была равновелика кругу, описанному около его осевого сечения?» [7, с. 33].

III. Задачи на определение взаимоположения геометрических объектов. В них требуется установить взаиморасположение геометрических объектов, например, пересекаются прямые или параллельны, или совпадают, принадлежит точка окружности, или находится внутри нее, или за окружностью.

Здесь в качестве примеров можно привести следующие задачи. 1. «Основания трапеции равны 2,4 м и 3 м. Внутри этой трапеции проведена между боковыми сторонами прямая, параллельная основаниям, которая равна 2,8 м. Одинаково ли удалена эта прямая от обоих оснований и если нет, то к какому основанию она ближе?» [6, с. 25]. 2. «В данном цилиндре проведена плоскость, параллельная основанию так, что площадь полученного сечения есть средняя пропорциональная между частями боковой поверхности цилиндра. Определить положение секущей плоскости, зная радиус основания  $R$  и высоту цилиндра  $H$ . Указать условие, при котором задача имеет смысл» [7, с. 33].

IV. Задачи на отыскание условий. В задачах данного вида требуется находить как необходимые, так и достаточные условия. Примеры: 1. «Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять трапеция, чтобы в нее можно было вписать и около нее можно было описать окружность?» [5, с. 97]. 2. Лучи, задающие направления ненулевых векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ , лежат соответственно на прямых  $a$  и  $b$ . При каком условии выполняется равенство  $(\widehat{a, b}) = 180^\circ - (\widehat{\vec{p}, \vec{q}})$ ?

V. Задачи на исследование существования геометрического объекта с указанными свойствами. В указанных задачах, в отличие от задач предыдущего вида, требуется найти геометрический объект (хотя бы один) с указанными свойствами.

Рассмотрим примеры задач. 1. Существует ли параллелограмм, у которого диагональ равна его стороне? 2. Существует ли выпуклая пирамида, у которой две несмежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

VI. Задачи на определение вида геометрического объекта. В таких задачах указан род геометрического объекта, а по требованиям задачи необходимо установить его вид.

Приведем примеры подобных задач. 1. «Каждая из сторон равностороннего треугольника продолжена:  $AB$  – за вершину  $B$ ,  $BC$  – за вершину  $C$ ,  $CA$  – за вершину  $A$ . На продолжениях отложены отрезки равной длины и концы их соединены между собой. Определить вид полученного треугольника» [6, с. 9]. 2. «Сколько диагональных сечений можно провести в пятиугольной призме через одно её ребро? На сколько частей эти плоскости делят данную призму? Какое тело представляет каждая из этих частей?» [7, с. 19].

VII. Задачи на нахождение геометрического места точек (ГМТ). В этих задачах, по сравнению с задачами предыдущего вида, не указывается род геометрического объекта, а его необходимо установить. Решение задач на отыскание ГМТ включает следующие этапы: 1) определение общих свойств нескольких точек, принадлежащих искомому ГМТ, выдвижение гипотезы о виде ГМТ; 2) обоснование гипотезы (доказательство или ее опровержение); 3) исследование изменений ГМТ в зависимости от изменения геометрических объектов, заданных в задаче.

Рассмотрим примеры задач на ГМТ. 1. «К данной окружности проведены касательные, на которых от точек касания отложены отрезки длиной  $a$ . Найти геометрическое место концов этих отрезков, не лежащих на данной окружности» [5, с. 38]. 2. «Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных параллельных плоскостей равна заданному отрезку  $d$ » [3, с. 103].

VIII. Задачи на исследование изменения геометрических объектов. В задачах данного вида необходимо выяснить как, при выполнении определенных в условии операций, меняется форма геометрического объекта, или его положение относительно других объектов, или изменяются измерения геометрических объектов.

Рассмотрим следующие примеры задач данного вида. 1. Как меняется длина хорды, проходящей через фиксированную точку окружности, если ее концы движутся по окружности. 2. Через диагональ основания куба провести произвольную плоскость. Вращая ее вокруг диагонали, как оси вращения, проследить, какие будут получаться фигуры в сечении поверхности куба этой плоскостью.

На основе анализа учебно-методической литературы [8-9], выделим основные этапы решения геометрических задач, которые помогут обучающимся в поиске решения задач на исследование.

I этап. Четкое понимание сущности задачи. Для этого необходимо: выяснить смысл терминов, встречающихся в тексте задачи, заменяя понятия их определениями; выделить данные и искомые задачи; сделать чертеж, удовлетворяющий условию задачи; произвести соответствующие записи с

применением идеограмм (символов); расчленив задачу на части; изменить формулировку задачи, придав ей наиболее удобную форму.

II этап. Составление плана решения. На данном этапе таких планов может быть несколько. Необходимо расчленив задачу на части, определить, выделены ли все данные и искомые на чертеже, искать идею решения путем эксперимента, построением дополнительных элементов, связанных с определениями понятий.

III этап. Выполнение намеченного плана. Для реализации данного этапа соблюдается следующее правило: употреблять точные формулировки определений и математических предложений, выяснять, нельзя ли упростить решение.

IV этап. Доказательство или обоснование решения. Этап включает соблюдение следующих условий: необходимо полностью использовать определение каждого понятия и данных задачи; каждое утверждение, высказанное в ходе решения, должно быть обосновано ссылкой на аксиомы или ранее доказанные свойства и признаки; должно быть полное соответствие чертежа выбранной теореме или признаку.

V этап. Исследование решения. Требуется установить множество допустимых значений параметров и искомых величин, определить число решений, выявить наиболее рациональный план решения, если он не единственный.

VI. Проверка. На данном этапе определяется, нет ли технических ошибок, описок, удовлетворяет ли решение всем требованиям задачи.

Задачи на исследование, как и другие математические задачи, можно использовать для закрепления и углубления теоретического материала, после изучения темы или раздела, для целенаправленности и облегчения усвоения теории перед ее изучением, для ознакомления с дополнительными вопросами, новыми методами и приемами. Учитель может сам переформулировать обычную задачу на вычисление, построение или доказательство так, чтобы она для обучающихся стала задачей на исследование.

### **Литература**

1. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. – 2-е изд. – Москва : Просвещение, 2014. – 383 с.
2. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. – 22-е изд. – Москва : Просвещение, 2013. – 255 с.
3. Геометрия. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углуб. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 6-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа, 2008. – 223 с.

4. Геометрия. 11 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углуб. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 2-е изд., испр. – Москва : Дрофа, 2004. – 368 с.
5. Зеленьяк О.П. Решение задач по планиметрии Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal / О.П. Зеленьяк. – Киев, Москва : ДиаСофтОП, ДМК Пресс, 2008. – 336 с.
6. Рыбкин Н.А. Сборник задач по геометрии. – Ч. 1 : Планиметрия : для 6-9 классов семилетней и средней школы / Н.А. Рыбкин – Москва : Учпедгиз, 1960. – 120 с.
7. Рыбкин Н.А. Сборник задач по геометрии. – Ч. 2 : Стереометрия : для 9-10 классов средней школы / Н.А. Рыбкин – 27-е изд. – Москва : Учпедгиз, 1960. – 88 с.
8. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательства в школе: Кн. для учителя / Г.И. Саранцев. – Москва : Просвещение, 2000. – 173 с.
9. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. Пер. с англ. / Д. Пойа – Москва, 1959. – 207 с.