НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ КОРНЯМИ

Трегуб Нина Леонидовна
МОУ «Гимназия № 70 г. Донецка»,
г. Донецк, ДНР
e-mail: nina.tregub@mail.ru

Как показывает опыт последних лет, введение вступительных экзаменов в виде государственной итоговой аттестации (ЕРЭ) в ДНР, единого государственного экзамена (ЕГЭ) в Российской Федерации унифицирует требования к знаниям абитуриентов и несколько сужает спектр знаний учащихся. При этом значительно снижается уровень преподавания математики, поскольку резко сокращается объем изучаемого материала, необходимого для благополучной сдачи соответствующего вступительного экзамена. Меняется мотивация как учащихся, так и учителей, что весьма негативно влияет на развитие интеллекта учащихся. Основная нагрузка по решению нестандартных задач и задач повышенной сложности переносится на элективные курсы и факультативы или на индивидуальные занятия с одаренными учащимися в процессе их подготовки к олимпиадам разных уровней. Что касается решения уравнений высших степеней, то даже в большинстве учебников для классов с углубленным изучением математики приводятся либо специфические виды уравнений, требующих соответствующие стандартные замены переменных либо методы решения уравнений с использованием схемы Горнера (или «деления уголком»), то есть решения уравнений с рациональными корнями. Поэтому в данной небольшой работе хотелось бы остановиться на специфических методах решении уравнений третьей и четвертой степеней, не имеющих рациональных корней: методе неопределенных коэффициентов решения уравнений четвертой степени, методе Кардано решения кубических уравнений и методе Феррари решения уравнений четвертой степени. Данный материал не выходит по своей сути за рамки средней школы. В то же время умение решать уравнения необходимо при решении задач разных видов, а также интересно само по себе. На мой взгляд, данная статья будет полезной как учителям, готовящим учащихся к олимпиадам разных уровней, так и самим учащимся, проявляющим интерес к изучению математики.

Метод неопределенных коэффициентов. Этот метод есть смысл использовать для уравнений четвертой степени с целыми коэффициентами, не имеющими рациональных корней. В этом случае исходный многочлен четвертой степени представляют в виде произведения двух квадратных трехчленов с неизвестными коэффициентами. Далее, раскрывая скобки в записанном произведении и приравнивая коэффициенты двух многочленов при одинаковых степенях, получаем систему уравнений в целых числах. Для решения задачи достаточно найти одно решение составленной системы.

Задание 1. Решить уравнение:

$$x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = 0.$$

Данное уравнение приведенное. Очевидно, что числа $-1; 1; -2; 2$ не являются корнями данного уравнения. (Проверьте!) Следовательно, рациональных корней данное уравнение не имеет. Представим данный многочлен в виде произведения квадратных трехчленов:

$$x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, получаем систему:

x^4 :	$1=1;$	(1)
x^3 :	$a + c = -10;$	(2)
x^2 :	$b + d + ac = 27;$	(3)
x^1 :	$ad + bc = -14;$	(4)
x^0 :	$bd = 2.$	(5)

Одним из решений в целых числах уравнения (5) будут значения $b = 1;\ d = 2.$ Из уравнений (2) и (4) получаем, что $a = -4;\ c = -6.$ Найденные числа удовлетворяют уравнению (3), следовательно,

$$x^4 - 10x^3 + 27x^2 - 14x + 2 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 6x + 2).$$

Решая уравнения $x^2 - 4x + 1 = 0$ и $x^2 - 6x + 2 = 0$, получаем, что корни исходного уравнения $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3};\ x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{7}.$

Этим же методом в частности можно решить, например, следующие уравнения: а) $x^4 - 12x^3 + 43x^2 - 42x + 6 = 0;$ б) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2 = 0.$

Метод Кардано. Решать кубические уравнения методом Кардано следует тогда, когда очевидно, что уравнение не имеет рациональных корней.

Обратим внимание, что любое полное приведенное уравнение третьей степени вида $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ легко приводится к виду

$$x^3 + px + q = 0. \tag{6}$$

(Для этого достаточно сделать подстановку $x = t - \frac{a_1}{3}$). Метод Кардано и есть метод решения уравнений такого вида, то есть приведенных неполных кубических уравнений, в которых отсутствует член с переменной в квадрате.

Для решения данного уравнения сделаем замену $x = u + v$. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0;$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0;$$

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \tag{7}$$

Положим $3uv + p = 0,$ то есть $uv = -\frac{p}{3}.$ В этом случае уравнение (7) приведется к виду $u^3 + v^3 + q = 0.$ Из равенства $uv = -\frac{p}{3}$ получаем, что $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}.$ Таким образом,

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q; \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27}. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, u^3 и v^3 – корни квадратного уравнения $z^2+qz-\dfrac{p^3}{27}=0.$ Найдя z_1 и z_2, получаем, что $z_1=u^3$, $z_2=v^3$, откуда $u=\sqrt[3]{z_1}$, $v=\sqrt[3]{z_2}$; $x=\sqrt[3]{z_1}+\sqrt[3]{z_2}$.

В общем случае так называемая *формула Кардано* для корня уравнения $x^3+px+q=0$ имеет вид: $x=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}.$ Но в данной статье мы не будем рассматривать случай отрицательного дискриминанта вспомогательного уравнения $z^2+qz-\dfrac{p^3}{27}=0,$ то есть случай, когда корни этого уравнения комплексные. Это тема для отдельного разговора.

Задание 2. Решить уравнение $x^3-6x-6=0.$

В соответствии с методом Кардано обозначим $x=u+v$. Тогда уравнение принимает вид: $(u+v)^3-6(u+v)-6=0;$

$$u^3+v^3+3uv(u+v)-6(u+v)-6=0;$$
$$u^3+v^3+(u+v)(3uv-6)-6=0.$$

Положим $3uv-6=0,$ откуда $uv=2;$ $u^3v^3=8;$ а $u^3+v^3-6=0,$ то есть $u^3+v^3=6.$ Из системы

$$\begin{cases} u^3+v^3=6, \\ u^3v^3=8 \end{cases}$$

получаем, что u^3 и v^3 — корни уравнения $z^2-6z+8=0;$ отсюда $u^3=4;$ $v^3=2;$ $u=\sqrt[3]{4};$ $v=\sqrt[3]{2}$, и тогда $x=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}.$

Задание 3. Решить уравнение $x^3-3x^2+2x-1=0.$

Приведем уравнение к стандартному виду для решения методом Кардано. Сделаем замену $x=t-\dfrac{a_1}{3}=t-\dfrac{-3}{3}=t+1.$ Тогда, подставив замену в исходное уравнение, получим уравнение $t^3-t-1=0.$ Корень этого уравнения $t=\sqrt[3]{\dfrac{9+\sqrt{69}}{18}}+\sqrt[3]{\dfrac{9-\sqrt{69}}{18}}.$ Отсюда $x=\sqrt[3]{\dfrac{9+\sqrt{69}}{18}}+\sqrt[3]{\dfrac{9-\sqrt{69}}{18}}+1.$

Методом Кардано, в частности, решаются такие уравнения:

а) $5x^3-15x+26=0;$ б) $6x^3-18x+17=0.$

Метод Феррари используется для решения уравнений четвертой степени, и так же, как и выше рассмотренные методы, используется в случае, когда уравнение не имеет рациональных корней.

Метод Феррари по сути дела представляет собой метод введения параметра. При помощи введенного параметра выделяются полные квадраты, а затем левая часть раскладывается на множители как разность квадратов. В процессе выделения полных квадратов решение исходного уравнения четвертой степени заменяется решением уравнения третьей степени относительно введенного параметра.

Рассмотрим метод Феррари на примерах.

Задание 4. Решить уравнение $x^4-4x^3+7x^2-2x-5=0.$

Рассмотрим $4x^3$ как удвоенное произведение: $4x^3=2\cdot 2x^2\cdot 2x.$ Введем параметр a и выделим полный квадрат как квадрат трехчлена $x^2-2x+a.$ Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\left(x^2-2x+a\right)^2+3x^2-2ax^2-a^2+4ax-2x-5=0;$$

$$\left(x^2-2x+a\right)^2-(2a-3)x^2+2(2a-1)x-a^2-5=0;$$

$$\left(x^2-2x+a\right)^2-\left((2a-3)x^2-2(2a-1)x+a^2+5\right)=0. \qquad (8)$$

Для того, чтобы левая часть полученного уравнения представляла собой разность квадратов, необходимо, чтобы квадратный трехчлен

$$(2a-3)x^2-2(2a-1)x+a^2+5$$

был полным квадратом, то есть его дискриминант должен быть равным нулю. Таким образом, $D_1=(2a-1)^2-(2a-3)\left(a^2+5\right)=0.$ Данное уравнение сведется к виду $2a^3-7a^2+14a-16=0.$ Единственный действительный корень данного уравнения $a=2.$ Подставив это значение в уравнение (8), получаем:

$$\left(x^2-2x+2\right)^2-(x-3)^2=0;$$

$$\left(x^2-2x+2+x-3\right)\left(x^2-2x+2-x+3\right)=0;$$

$$\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-3x+5\right)=0.$$

Таким образом, решением исходного уравнения будет $x_{1,2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$

NB. Данное уравнение также несложно решить методом неопределенных коэффициентов.

Задание 7. Решить уравнение $x^4-8x^3-16=0.$

$8x^3=2\cdot x^2\cdot 4x.$ Введем параметр a и выделим полный квадрат трехчлена $x^2-4x+a,$ тогда уравнение примет вид:

$$\left(x^2-4x+a\right)^2-16x^2-2ax^2-a^2+8ax-16=0;$$

$$\left(x^2-4x+a\right)^2-\left((16+2a)x^2-8ax+a^2+16\right)=0. \qquad (9)$$

Для того, чтобы представить левую часть уравнения как разность квадратовв, квадратный трехчлен $(16+2a)x^2-8ax+a^2+16$ необходимо сделать полным квадратом, поэтому его дискриминант должен стать равным нулю. Тогда $D_1=16a^2-(16+2a)\left(a^2+16\right)=0.$ После упрощения получаем уравнение $a^3+16a+128=0.$ Это уравнение имеет единственный действительный корень $a=-4.$ Подставим найденное значение параметра в уравнение (9):

$$\left(x^2-4x-4\right)^2-\left(8x^2+32x+32\right)=0;$$

$$\left(x^2-4x-4\right)^2-\left(2\sqrt{2}x+4\sqrt{2}\right)^2=0.$$

Разложим левую часть последнего уравнения как разность квадратов на множители:

$$\left(x^2-4x-4-2\sqrt{2}x-4\sqrt{2}\right)\left(x^2-4x-4+2\sqrt{2}x+4\sqrt{2}\right)=0;$$
$$\left(x^2-2\left(2+\sqrt{2}\right)x-4\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\left(x^2-2\left(2-\sqrt{2}\right)x-4\left(1-\sqrt{2}\right)\right)=0.$$

Данное уравнение распадается на два уравнения, решая которые получаем, что $x_{1,2}=2+\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}$.

Методом Феррари решаются, например, такие уравнения:

а) $x^4+4x-1=0$; б) $8x^4-8x^3+x-132=0$.

Следует заметить, что наиболее целесообразно использовать метод Феррари в случае, когда метод неопределенных коэффициентов не работает, то есть, когда многочлен четвертой степени нельзя разложить на произведение двух квадратных трехчленов с *целыми* коэффициентами.

Совершенно очевидно, что этими методами отнюдь не исчерпываются методы решения уравнений высших степеней. В то же время, надеюсь, данная статья заинтересует как учителей, так и учащихся, ранее не сталкивавшихся с приведенными методами решений уравнений.

Литература

1. Алфутова Н.Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. 3-е изд., испр. и доп. / Н.Б. Алфутова, А.В Устинов.– Москва : МЦНМО, 2009. – 336 с.
2. Галицкий М.Л. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбурд. – Москва : Просвещение, 1986. – 349 с.
3. Саушкін О.Ф. Рівняння вищих степенів, методи їх розв’язання та контрольні індивідуальні завдання. – Київ: КНЕУ, 1999.