

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Нескородев Роман Николаевич

**МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
УПРУГОГО И ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
МНОГОСВЯЗНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ И
ГЕОМАССИВОВ**

01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»

Диссертация

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

Сторожев Валерий Иванович

доктор технических наук,

профессор

Донецк – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ В РАССМАТРИВАЕМОЙ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ И ЗАДАЧИ СОЗДАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПОДХОДОВ.....	19
1.1. Концепции исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных сред с учетом влияния вязкоупругости.....	19
1.2. Подходы к исследованию влияния фактора ползучести в анизотропных горных массивах с выработками.....	28
1.3. Подходы к исследованию напряженного состояния геомассивов около выработок с усложненными формами сечений.....	39
1.4. Концепции построения уточненных теорий изгиба упругих и вязкоупругих анизотропных плит с отверстиями.....	44
1.5. Выводы по разделу 1.....	54
РАЗДЕЛ 2. НОВЫЙ ЧИСЛЕННО АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД.....	55
2.1. Механическое поведение материалов при внезапно приложенных усилиях. Связь между напряжениями и деформациями.....	55
2.2. Решение вязкоупругих задач методом Вольтерра.....	62
2.2.1. Аналитическая форма задания ядер ползучести и релаксации.....	62
2.2.2. Метод Вольтерра.....	64
2.2.3. Изотропная среда.....	67
2.2.3.1. Представление напряжений и смещений плоской теории упругости в комплексных координатах.....	67
2.2.3.2. Решения для пластины с круговым отверстием.....	68
2.2.3.3. Решение для свободного контура.....	70
2.2.3.4. Решение для жестко подкрепленного контура.....	70

2.2.3.5. Расшифровка интегральных операторов.....	71
2.3. Ортотропные вязкоупругие среды. Упругие и реологические постоянные для некоторых материалов.....	73
2.4. Метод временных параметров уравнений закона Гука.....	79
2.4.1. Численное представление решений интегральных уравнений.....	81
2.4.2. Метод сглаживания и восполнения таблиц экспериментальных данных.....	82
2.4.3. Установление связи между интегральными операторами и функциями ползучести и релаксации.....	85
2.5. Новый подход к определению значений ядер ползучести и релаксации.....	88
2.6. Выводы по разделу 2.....	92
РАЗДЕЛ 3. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПОЛЗУЧЕСТИ.....	
3.1. Уравнения трехмерной теории упругости анизотропного тела.....	93
3.2. Обобщенное плоское напряженное состояние тонкой пластины.....	95
3.2.1. Основные соотношения.....	95
3.2.2. Перемещения и напряжения в пластине с отверстием.....	99
3.3. Граничные условия на контуре пластины.....	104
3.3.1. Незакрепленный контур.....	104
3.3.2. Жестко подкрепленный контур.....	105
3.4. Пластина с эллиптическим отверстием.....	105
3.5. Результаты численных исследований для вязкоупругих пластин.....	108
3.5.1. Изотропная пластинка со свободным круговым отверстием.....	109
3.5.2. Ортотропная пластинка со свободным эллиптическим отверстием.....	111
3.5.3. Изотропная пластинка с жестко подкрепленным эллиптическим отверстием.....	115

3.5.4. Ортотропная пластинка с жестко подкрепленным круговым отверстием.....	117
3.6. Выводы по разделу 3.....	119
РАЗДЕЛ 4. НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ ПОЛЗУЧЕСТИ В АНИЗОТРОПНЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКОЙ.....	
4.1. Выбор модели в механике горных пород с выработкой.....	121
4.2. Преобразование упругих постоянных при повороте координатных осей.....	126
4.3. Обобщенная плоская деформация для горного массива с горизонтальной выработкой.....	129
4.4. Перемещения и напряжения в массиве с выработкой.....	131
4.5. Перемещения и напряжения в сплошном анизотропном массиве от действия сил собственного веса.....	133
4.6. Граничные условия.....	137
4.6.1. Незакрепленная выработка.....	137
4.6.2. Жестко подкрепленная выработка.....	138
4.7. Массив с выработкой эллиптического сечения.....	139
4.7.1. Незакрепленная выработка.....	139
4.7.2. Жестко закрепленная выработка.....	140
4.8. Преобразование интегральных уравнений состояния вязкоупругих горных пород к временным уравнениям закона Гука...	141
4.9. Численные исследования вязкоупругого напряженного состояния вблизи выработки эллиптического сечения.....	151
4.9.1. Незакрепленная выработка.....	151
4.9.2. Жестко закрепленная выработка.....	157
4.10. Выводы по разделу 4.....	158

РАЗДЕЛ 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ГЕОМАССИВОВ ПРИ НАЛИЧИИ ВЫРАБОТОК С УСЛОЖНЕННЫМИ ФОРМАМИ СЕЧЕНИЙ.....	159
5.1. Горный массив с произвольно расположенными выработками эллиптического сечения.....	159
5.2. Построение границы выпуклой области произвольной формы.....	162
5.3. Характеристические функции областей.....	167
5.4. Решение упругой задачи для полости сложной формы.....	173
5.5. Результаты численных исследований.....	177
5.6. Выводы по разделу 5.....	184
РАЗДЕЛ 6. РАЗРАБОТКА НОВЫХ УТОЧНЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗГИБА АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ С ОТВЕРСТИЯМИ.....	185
6.1. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит.....	185
6.1.1. Основные соотношения уточненной теории изгиба изотропных плит.....	185
6.1.2. Построение общих решений дифференциальных уравнений теории пластин.....	188
6.1.3. Граничные условия на боковой поверхности.....	191
6.1.4. Представление решения для бесконечной плиты с эллиптической полостью.....	193
6.1.5. Результаты численных исследований.....	197
6.2. Модель изгиба трансверсально-изотропных плит.....	201
6.2.1. Основные соотношения уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит.....	201
6.2.2. Уравнение границы области.....	205
6.2.3. Решение метагармонического уравнения с малым параметром при старшей производной.....	206
6.2.4. Граничные условия на боковой поверхности.....	209

6.2.5. Численные исследования.....	210
6.3. Уточненная модель изгиба ортотропных плит.....	214
6.3.1. Основные соотношения уточненной теории изгиба ортотропных плит.....	214
6.3.2. Методика построения приближенного решения для разрешающего уравнения.....	217
6.3.3. Граничные условия на боковой поверхности.....	222
6.3.4. Численные исследования.....	223
6.4. Выводы по разделу 6.....	224
РАЗДЕЛ 7. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛИТ В РАМКАХ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ.....	225
7.1. Изгиб изотропных вязкоупругих плит.....	225
7.2. Изгиб трансверсально-изотропных вязкоупругих плит.....	228
7.3. Изгиб ортотропных вязкоупругих плит.....	232
7.4. Выводы по разделу 7.....	234
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	235
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	239
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	272

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Механика деформируемого твердого тела, как отрасль фундаментальных научных исследований и научная база важнейших приложений в проектном моделировании для самого широкого ряда промышленно-технологических отраслей – от строительства и машиностроения, до приборостроения и акустоэлектроники, имеет одним из обусловленных внутренней логикой и прикладными запросами приоритетных векторов развития создание новых эффективных теоретических компьютерно-математических методов для исследования усовершенствованных неклассических моделей объектов и процессов деформирования. К категории неклассических при этом относятся модели, предусматривающие учет специфических особенностей в описании физико-механических и геометрических свойств деформируемых тел и элементов конструкций, которые нивелировались в большинстве их используемых современных вариантов. Естественное усложнение математического описания неклассических моделей соответственно требует разработки новых модификаций математических методов их исследования. При выраженной тенденции к изучению все большего числа моделей деформирования на базе стандартизированных конечно-элементных методов, развитие аналитико-числовых подходов к исследованию неклассических моделей деформирования сохраняет чрезвычайно важное значение, поскольку для методов этого типа, помимо прочего, реализуется поэтапный контроль достоверности промежуточных и конечных результатов анализа, несопоставимо меньшими являются необходимые ресурсы вычислительных систем и времени реализации расчетных этапов, возможно их использование для верификации результатов применения других подходов и т.д.

В контексте представленных соображений, к числу разделов механики деформируемого твердого тела, для которых весьма актуальна разработка аналитико-числовых методов анализа неклассических моделей учета усложненных физико-механических и геометрических характеристик, относятся модели комплексного учета анизотропии свойств ползучести и влияния усложненной геометрии кон-

турных очертаний границ неоднородностей применительно к изучению эффектов формирования и взаимодействия полей концентрации напряжений в массивах податливых горных пород с туннельными цилиндрическими полостями-выработками неканонических поперечных сечений. Учет анизотропии вязкоупругого деформирования геоматериалов и модифицированный подход к описанию геометрии контуров сечений определяют неклассический характер данных моделей, для которых в исследованиях крайне затруднено применение существующих операторных методов учета реологических свойств горных пород и методов параметрического описания усложненной геометрии сечений на базе теории конформных отображений. Таким образом, решение фундаментальных и прикладных заданий по исследованию указанных неклассических моделей связано с актуальной научной проблемой разработки новых эффективных аналитико-числовых методов решения задач вязкоупругости для анизотропных деформируемых тел усложненной, в том числе многосвязной геометрии.

Еще один класс актуальных неклассических моделей деформирования тонкостенных конструктивных элементов представляют собой модели вязкоупругого изгиба анизотропных плит, направлением совершенствования которых для получения более адекватных оценок прочности и надежности подобных конструкций в сравнении с доминирующей в прикладных расчетах классической моделью Кирхгофа-Лява, является разновариантный учет деформаций поперечного сдвига. В этой связи, создание алгоритмов редукции соотношений деформирования вязкоупругих анизотропных плит, как тел пространственного строения, применительно к случаю плит малой толщины с неканонической формой срединной поверхности, а также разработка методов решения соответствующих типов краевых задач для конструкций данного вида также относится к ряду первоочередных современных заданий в развитии математических методов механики деформируемого твердого тела.

Таким образом, разработка новых аналитико-числовых методов изучения описываемого неклассическими моделями двумерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных элементов конструкций с криво-

линейными отверстиями и вязко-упругого состояния анизотропных массивов с системами выработок усложненного сечения, а также создание программных приложений для их компьютерной реализации и получение более адекватных качественных и количественных оценок влияния вязкоупругих свойств материалов в конструкциях и геомассивах, является актуальной научной проблемой, имеющей важное фундаментальное и прикладное значение и определяющей цели и задания данного диссертационного исследования.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Представленные в работе исследования связаны с тематикой конкурсных исследовательских проектов «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (МОН ДНР, № госрегистрации 0117D000071, 2017-2019 гг.); «Методы исследования линейных и нелинейных моделей статического и динамического деформирования анизотропных функционально-градиентных упругих тел» (МОН ДНР, № госрегистрации 0120D000014, 2020-2022 гг.). Основные результаты диссертационной работы включены в отчеты по указанным НИР.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является разработка комплекса специализированных аналитико-числовых методов для решения формулируемых в рамках неклассических моделей задач исследования двумерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных массивов и тонких анизотропных плит с отверстиями и полостями, а также выявление и систематизация установленных на основе их применения ведущих параметрических закономерностей влияния физико-механических и геометрических параметров моделей на характеристики деформирования классов изучаемых объектов.

Для достижения целей исследования подлежат решению следующие научные задания:

– разработка концепции создания аналитико-числового метода исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных дефор-

мируемых сред, не требующего построения аналитических представлений ядер ползучести и релаксации в специальной форме;

– построение численного алгоритма получения функций релаксации по известным значениям функций ползучести (и наоборот) без использования аналитических приемов аппроксимации экспериментальных данных;

– разработка алгоритма сглаживания и восполнения таблиц экспериментальных данных, на основе которых строятся уравнения состояния для рассматриваемых моделей с имеющими явную зависимость от времени коэффициентами;

– апробация разработанного метода при решении задач обобщенного плоского напряженного состояния для изотропных и анизотропных бесконечных пластин, ослабленных эллиптическими отверстиями со свободными либо жестко закрепленными контурами;

– разработка метода преобразования интегральных уравнений состояния модели линейно-вязкоупругого деформирования анизотропного массива горных пород к определяющим соотношениям в форме обобщенного закона Гука с параметрическими зависимостями деформационных характеристик материала от времени;

– разработка алгоритма построения замкнутых граничных кривых сложных конфигураций как совокупностей участков в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей;

– осуществление численных исследований для рассматриваемых моделей с целью установления характерных закономерностей изменения напряженно-деформированного состояния геомассивов вблизи горизонтальных горных выработок с усложненными формами сечений в зависимости от времени их эксплуатации и физико-механических свойств вмещающих пород;

– получение уравнений неклассических моделей деформирования тонких вязкоупругих анизотропных плит на основе алгоритмов редукции соотношений деформирования вязкоупругих анизотропных плит пространственной геометрии применительно к случаю плит малой толщины;

- разработка алгоритма построения аналитических решений для уравнений неклассической уточненной теории изгиба изотропных и трансверсально-изотропных плит, учитывающей деформации поперечного сдвига;
- разработка алгоритмов получения и численно-аналитического решения двумерного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка неклассической уточненной теории изгиба ортотропных плит;
- осуществление численных исследований для неклассических уточненных моделей изгиба изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных вязкоупругих плит;
- обобщение и систематизация полученных новых данных о закономерностях напряженно-деформированного состояния вязкоупругих анизотропных геомассивов и изгибаемых вязкоупругих анизотропных тонких плит с отверстиями и полостями в зависимости от параметров их усложнённой геометрии, меры анизотропии и временных интервалов приложения нагрузок.

Объектом исследования является напряженно-деформированное состояние конструктивных элементов и геомассивов из анизотропных вязкоупругих материалов.

Предметом исследования является разработка, апробация и систематизация результатов применения аналитико-числовых методов исследования неклассических моделей двумерного деформирования анизотропных вязкоупругих горных массивов и тонкостенных конструктивных элементов с полостями и отверстиями усложненной геометрии.

Методы исследования. Разрабатываемые и реализуемые в диссертационной работе специализированные методы базируются на теоретических положениях линейной теории упругости анизотропного тела, теории линейного вязкоупругого деформирования, на использовании аппарата теории функций обобщенных комплексных переменных, положениях алгебры дробно-рациональных функций, матричной алгебры, алгебры логики, теории R-функций. При разработке алгоритмов численной реализации предложенных методов используются дискретный метод наименьших квадратов, метод малого параметра, теория разложения функций в

ряды Лорана с использованием конформных отображений, а также теория специальных функций. Программные приложения для реализации методов созданы в среде специализированного языка разработки Matlab.

На защиту выносятся следующие научные положения реализованного исследования:

1. Разработанные в диссертации новые методы решения линейных задач вязкоупругого деформирования, в рамках которых не требуется построения аналитических представлений ядер релаксации и ползучести, уравнения состояния для рассматриваемых моделей имеют форму определяющих соотношений обобщенного закона Гука с имеющими явную зависимость от времени коэффициентами, а взаимное определение функции релаксации и ползучести осуществляется на основе численного алгоритма по известным экспериментальным данным о значениях взаимоопределяемых функций без использования их аналитической аппроксимации с применением предлагаемой методики восполнения таблиц экспериментальных реологических параметров и на базе учета гипотезы об упругой сжимаемости материала, позволяют эффективно исследовать открытый ранее для численно-аналитического изучения широкий круг важнейших в фундаментальном аспекте и для приложений в проектно-технологическом моделировании неклассических задач расчета прочности и надежности конструкций и сооружений.

2. Предложенный и апробированный в работе метод описания замкнутых граничных кривых для расчетных областей сложных конфигураций в моделях деформирования вязкоупругих тел и элементов конструкций, как совокупностей фрагментов в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей, создает качественно новые возможности для эффективного учета в теоретических и прикладных численно-аналитических исследованиях влияния особенностей усложненной, в том числе многосвязной геометрии конструкций и сооружений, на результирующие показатели мгновенной и длительной эксплуатационной прочности моделируемых объектов.

3. Предложенная в диссертации новая версия неклассической уточненной модели изгибного деформирования вязкоупругих изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит с отверстиями при учете деформаций поперечного сдвига, основывающаяся на алгоритме редукции соотношений деформирования вязкоупругих плит пространственной геометрии применительно к случаю их малой толщины, а также разработанный метод ее численно-аналитического исследования, включающий процедуру построения и численно-аналитического решения дифференциального уравнения шестого порядка уточненной теории изгиба ортотропных плит, наряду с вкладом в математическую теорию деформирования тонкостенных конструкций с усложнёнными физико-механическим и геометрическими свойствами являются практически значимыми инструментами получения более адекватных характеристик мгновенной и длительной прочности плоских конструктивных элементов из анизотропных композиционных материалов при действии изгибающих усилий.

4. Количественные и качественные закономерности деформационных процессов, установленные и обобщенные по результатам изучения представленных в диссертации неклассических моделей с применением предложенных аналитико-числовых методов, дают основание для заключений о принципиальной роли учета в исследованных прикладных моделях соответствующих комплексов усложненных физико-механических и геометрических свойств, а также об эффективных возможностях разработанных методов для получения описаний мгновенных и параметрически изменяющихся во времени распределений полей механических напряжений в вязкоупругих анизотропных многосвязных объектах, более адекватных инженерной практике и частным результатам анализа не упрощаемых гипотезами пространственных версий рассматриваемых моделей.

Научная новизна полученных результатов.

1. С применением аппарата алгебры резольвентных операторов и матричной алгебры впервые разработан численно-аналитический метод обращения операторов определяющих уравнений деформирования анизотропных вязкоупругих сред без использования аналитических представлений ядер ползучести и релаксации.

2. Впервые построена численно-аналитическая методика исследования задач вязкоупругости для анизотропных сред, которая для произвольных моментов времени сводится к применению алгоритмов той же структуры, которые используются при решении задач теории упругости анизотропного деформируемого тела без учета реологических эффектов.

3. Впервые применительно к исследованию эффектов ползучести и релаксации в задачах деформирования анизотропных массивов горных пород предложен метод преобразования интегральных уравнений состояния к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени.

4. Впервые на основе применения разработанных методов и с учетом различных гипотез об упругой сжимаемости либо несжимаемости рассматриваемых материалов реализованы исследования обобщенного плоского напряженного состояния бесконечных ортотропных вязкоупругих пластин с эллиптическим свободным или жестко закрепленным отверстием.

5. Впервые применительно к исследованию процессов двумерного деформирования тел с локализованными неоднородностями гладких очертаний предложен новый теоретический аналитико-числовой алгоритм построения замкнутых граничных кривых сложных конфигураций как совокупностей участков в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей.

6. Предложен новый теоретический аналитико-числовой алгоритм редукции системы пространственных соотношений теории упругости, описывающих изгибное деформирование изотропных и трансверсально-изотропных пластин, применительно к пластинам малой толщины с получением комплекса разрешающих соотношений новой уточненной теории изгиба ослабленных отверстиями пластин указанного типа в виде системы двумерных дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка, а также описан соответствующий способ удовлетворения краевым условиям на границах отверстий.

7. Впервые предложен теоретический алгоритм аналитико-числовой редукции системы пространственных соотношений теории упругости, описывающих изгибное деформирование ортотропных пластин, с переходом к новой уточненной теории изгиба тонких ортотропных пластин с отверстиями, содержащей разрешающее соотношение в виде двумерного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, а также разработан соответствующий аналитико-числовой метод его решения и удовлетворения соответствующим краевым условиям на границах отверстий.

8. Впервые осуществлены разработка и применение аналитико-числового метода определения в уточненной постановке вязкоупругого напряженного состояния изгибаемых изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин с эллиптическим отверстием.

9. С применением комплекса предложенных методов впервые выявлен и описан ряд специфических эффектов изменения напряженно-деформированного состояния геомассивов вблизи горных выработок с усложненными формами поперечных сечений в зависимости от времени их эксплуатации и физико-механических свойств вмещающих пород.

10. Впервые обобщены и систематизированы новые данные о закономерностях напряженно-деформированного состояния изгибаемых вязкоупругих пластин с отверстиями в зависимости от их геометрических характеристик, вида и степени анизотропии, а также периода приложения нагрузок.

Достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы подтверждается строгостью постановок рассматриваемых задач в рамках математически обоснованных апробированных моделей теории линейной вязко упругости и механики анизотропного деформируемого твердого тела; использованием при теоретическом исследовании рассматриваемых неклассических моделей верифицированных математических методов, включая аппарат теории функций обобщенных комплексных переменных, алгебру дробно-рациональных функций, матричную алгебры, алгебру логики, теорию R-функций; использованием в процессе численных исследований апробированных вычислительных алгоритмов

дискретного метода наименьших квадратов, метода малого параметра, теории разложений функций в ряды Лорана с использованием конформных отображений, теории специальных функций; проверкой и согласованностью найденных разработанными методами результатов и данными сопоставления отдельных частных результатов диссертационной работы с опубликованными результатами исследований других авторов, полученными альтернативными методами.

Теоретическая значимость результатов работы заключается в разработке новых эффективных численно-аналитических методов исследования параметрических временных характеристик вязкоупругого напряженного состояния анизотропных сред с туннельными полостями и отверстиями усложненных очертаний, базирующихся на концепции обращения определяющих уравнений анизотропной наследственной среды, а также в получении нового варианта соотношений уточненной теории изгиба тонких трансверсально-изотропных и ортотропных упругих и вязкоупругих пластин, и разработке методов решения краевых задач теории изгиба в рамках рассматриваемой неклассической модели.

Практическая значимость работы заключается в непосредственной применимости разработанных методов и алгоритмов их компьютерной численной реализации в проектно-прогножном моделировании процессов длительного деформирования анизотропных элементов конструкций и сооружений из армированных композиционных материалов, деформирования массивов из податливых горных пород с туннельными выработками усложненной формы сечения; при получении проектных оценок мгновенной и длительной прочности подверженных воздействиям изгибающих усилий плит и пластин из вязкоупругих полимерных, композиционных и армированных материалов с технологическими отверстиями, вырезами и вставками, применяемыми в конструкциях строительных сооружений машин и приборов.

Материалы представленных в диссертационной работе исследований использованы в учебном процессе ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» по дисциплине магистерского цикла «Математические модели геомеханики» для студентов направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информа-

тика» (справка о внедрении № 870/01-27/6.1.0 от 29.08.2022 г., подписана проректором ГОУ ВПО ДонНУ, д. пед. н., проф. Е.И. Скафой).

Апробация результатов работы. Основные положения полученных результатов диссертации доложены и обсуждены на научных конференциях различного уровня, в том числе на: XIV Международной научной школе им. академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках». (Крым, Алушта, 20 – 26 сентября 2004 г.); IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения И.И. Воровича (г. Ростов-на Дону, 11 – 15 октября 2005 г.); XVI Международной научной школы им. академика С.А. Христиановича «Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках» (Крым, Алушта, 18 – 24 сентября 2006 г.); VI Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (Мелекино, 8 – 11 июня 2010 г.); XV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 4 – 7 декабря 2011 г.); VII Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (Мелекино, 11 – 14 июня 2013 г.); VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 14 – 18 октября 2013 г.); I Международной научной конференции «Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности» (Донецк, 16 – 18 мая 2016 г.); XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 7 – 10 ноября 2016 г.); III Международной научной конференции «Донецкие чтения 2018. Образование, наука и вызовы современности» (Донецк, 25 октября 2018 г.); IV Международной научной конференции «Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» (Донецк, 31 октября 2019 г.); XX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной 100-летию академика И.И. Воровича (г. Ростов-на-Дону, 18 – 21 июня 2020 г.); V Международной научной конференции «Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и

вызовы современности” (Донецк, 17 – 18 ноября 2020 г.); VI Международной научной конференции “Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности” (Донецк, 26 – 27 октября 2021 г.).

Материалы диссертационной работы представлены и обсуждены на профильных научных семинарах в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет», ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет», ГУ «Институт прикладной математики и механики», ГУ «Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела».

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 44 научных работах. Среди публикаций 25 статей в реферируемых периодических изданиях, включенных в перечень ВАК ДНР, в числе которых 7 статей в изданиях, включенных в Международные наукометрические базы Scopus, MathSciNet, Zentralblatt, а также 19 публикаций в других изданиях, включая материалы и тезисы Международных научных конференций.

Личный вклад автора. Основные новые теоретические и численные результаты исследований, включая разработку программных приложений, получены автором самостоятельно. В публикациях [143, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 209, 258, 274, 275, 276] соавторам А.С. Космодамианскому, В.П. Шевченко, Н.М. Нескородеву и В.И. Сторожеву принадлежат участие в постановках задач и в обсуждении полученных результатов. В работе [66] соавтору А.А. Жабоедову принадлежит участие в разработке программного приложения для осуществления численных экспериментов на базе предложенных методов, а также участие в обработке и систематизации результатов численного анализа.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, семи разделов, заключения с основными выводами и результатами, списка литературы из 311 источников и приложения. Работа содержит 45 рисунков и 26 таблиц, изложена на 271 странице, из которых 238 страниц занимает основное содержание.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР МЕТОДОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЙ В РАСМАТРИВАЕМОЙ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ И ЗАДАЧИ СОЗДАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПОДХОДОВ

1.1. Концепции исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных сред с учетом влияния вязкоупругости

Механические свойства наследственно-упругих материалов, к которым можно отнести многие горные породы, пластмассы, металлы и сплавы, а также полимерные и композитные материалы на полимерной основе, при длительном нагружении в значительной степени зависят от времени. В условиях эксплуатации элементы конструкций из таких материалов подвергаются постоянным или меняющимся во времени режимам нагружения, в результате действия которых происходит перераспределение напряжений и деформаций заметно изменяющее картину распределения напряжений и деформаций по сравнению с упругим случаем. Уточнение перераспределения напряжений и деформаций может быть полезным при оценке долговечности и несущей способности элементов конструкций. Часто возникает необходимость по результатам испытаний на ползучесть оценить релаксацию, или наоборот.

При решении задач линейной теории вязкоупругости анизотропных материалов, как правило, пользуются двумя методами. Одним из них является метод Лапласа-Карсона. Применяя преобразование Лапласа к системе уравнений и граничных условий задачи вязкоупругости, для изображений получают уравнения классической теории упругости. После решения этой задачи уже в окончательном результате переходят от изображений к оригиналам. Основная трудность такого подхода состоит в сложности выполнения операции обратного преобразования Лапласа. Указанный метод применялся в работах [29, 74, 129, 145, 229].

Другим является метод, основанный на принципе наследственности, который был сформулирован Л. Больцманом [286] и получил математическое развитие в работах В. Вольтерра [310, 311]. Он состоит в следующем. Пусть некоторый процесс определяется воздействием, то есть заданием некоторой функции $s(\tau)$, $\tau \in [0, t]$. Реакция тела определяется некоторой функцией $e(t)$. Величина функции $e(t)$ в момент времени t определяется не только значением воздействия в момент t , но и всей историей изменения функции $s(\tau)$ в указанном промежутке времени. Говорят, что $e(t)$ есть функционал от $s(\tau)$ и записывают его символически так $e = F_0^t(s)$. Функционал F называется линейным, если [160]

$$F(s_1 + s_2) = F(s_1) + F(s_2), \quad F(cs) = cF(s), \quad \text{где } c - \text{константа.}$$

При рассмотрении одноосного напряженного состояния линейная связь между напряжениями и деформациями в теории упругости $\sigma = E\varepsilon$ – есть закон Гука, а линейная связь $\sigma = \eta d\varepsilon / dt$ между напряжениями и деформациями в теории движения вязкой ньютоновской жидкости – есть закон вязкости Ньютона. Тело, описываемое с помощью линейного функционала, который обобщает эти модели, называют вязкоупругим. Достаточно общее выражение линейного функционала будет следующее

$$e(t) = s(t) + \lambda \int_0^t P(t, \tau) s(\tau) d\tau, \quad \sigma = s(t=0), \quad \varepsilon = e(t=0). \quad (1.1)$$

Функция $P(t, \tau)$ называется ядром наследственности или ползучести. В теории Вольтерра, используются ядра разностного типа $P(t, \tau) = P(t - \tau)$. Это следует из требования инвариантности относительно изменения начала отсчета времени. Далее вместо записи (1.1) используется сокращенная запись линейного функционала

$$e = (1 + \lambda P^*)s. \quad (1.2)$$

Умножение оператора P^* на функцию $s(t)$ означает вычисление интеграла

$$P^* s(t) = \int_0^t P(t-\tau) s(\tau) d\tau.$$

Решая уравнение (1.2) относительно s так, как если бы это было алгебраическое уравнение, получается

$$s = \frac{1}{(1 + \lambda P^*)} e = [1 - \lambda R^*(\lambda)] e, \quad R^*(\lambda) = P^* / (1 + \lambda P^*). \quad (1.3)$$

Оператор P^* называется порождающим оператором. Линейный оператор $R^*(\lambda)$ считается резольвентным, порождаемым оператором P^* , если выполняется равенство (1.3). Известно [240, 243], что если ядро принадлежит к резольвентному типу, то его резольвента также будет резольвентным ядром.

Операторы Вольтерра с резольвентными ядрами, обладают некоторой алгеброй, основные свойства которой приведены ниже.

Свойство 1. (Теорема умножения) Для любых регулярных точек x и y имеют место равенства

$$P^*(x) \cdot P^*(y) = [P^*(x) - P^*(y)] / (x - y), \quad x \neq y. \quad (1.4)$$

Свойство 2. Для любого резольвентного оператора $P^*(\beta)$ имеет место формула обращения

$$[1 - \lambda P^*(\beta)]^{-1} = 1 + \lambda R^*(\beta + \lambda). \quad (1.5)$$

Оператор $\bar{R}_\lambda = 1 + \lambda R^*(\beta + \lambda)$ называется обратным для оператора $\bar{P}_\lambda = 1 - \lambda P^*(\beta)$, а оператор $R^*(\beta + \lambda)$ – резольвентным для $P^*(\beta)$. Резольвентный оператор образован из функций того же класса, что и $P^*(\beta)$ сдвигом по параметру.

Свойство 3. (Теорема о степенях) Возведение в степень резольвентного

оператора равносильно дифференцированию по параметру

$$\left[P^*(x) \right]^n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} P^*(x). \quad (1.6).$$

Здесь приведены основные соотношения алгебры резольвентных операторов. Существуют и другие свойства резольвентных операторов. Они изложены в работах [53, 240, 242, 246].

В работе V. Volterra [310] отмечено, что при решении задач линейной теории вязкоупругости (наследственной упругости) операции, связанные с решением дифференциальных уравнений теории упругости, и операции интегрирования по времени, связанные с вычислением операторов Вольтерра, могут выполняться в произвольном порядке. Отсюда вытекает следующее правило, которое называют принципом Вольтерра.

Для решения задач вязкоупругости необходимо построить решение задачи линейной теории упругости и в окончательном результате заменить упругие постоянные операторами, расшифровав полученные комбинации операторов или функции от операторов.

В развитие данного метода значительный вклад внесли Н.Х. Арутюнян [15], Д. Бленд [25], В.Г. Громов [53], А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря [76, 232], М.А. Колтунов [129], Р. Кристенсен [145], Ю.Н. Работнов [240, 242], Г.Н. Савин [253], J. Ferry [289], их ученики и последователи. При использовании принципа Вольтерра большое значение имеет аналитическая форма задания ядер ползучести или релаксации. Экспериментально найденные значения этих ядер задаются дискретным набором величин, соответствующим некоторым фиксированным значениям времени. По этим экспериментальным значениям различными методами строят аналитические аппроксимации ядер в специальной форме. К настоящему времени проанализировано большое количество функций, которые могут быть использованы в качестве ядер наследственности. В качестве таких функций чаще всего рассматриваются степенные и экспоненциальные функции, а также различные комбинации этих функций [50, 129, 162, 240, 249]. Наиболее

распространенным и гибким при описании вязкоупругих свойств реальных материалов, представляется ядро в виде дробно-экспоненциальной функции Ю.Н. Работнова. В работе [239] им впервые был построен класс резольвентных операторов $\mathcal{E}_\alpha^*(\beta)$, порождаемых ядром Абеля

$$P^* = I_\alpha^*, \quad I_\alpha = (t - \tau)^\alpha / \Gamma(1 + \alpha), \quad \Gamma(1 + \alpha) - \text{гамма функция.} \quad (1.7)$$

Эти операторы определены следующим образом

$$\frac{1}{1 - \beta I_\alpha^*} = 1 + \mathcal{E}_\alpha^*(\beta). \quad (1.8)$$

Явное выражение для ядра оператора $\mathcal{E}_\alpha^*(\beta)$ имеет вид

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta; t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{\alpha + n(1 + \alpha)}}{\Gamma[(n + 1)(1 + \alpha)]}, \quad (1.9)$$

Ряд (1.9) сходится для всех значений аргумента $t - \tau$ при любом $\beta < 0$, если $-1 < \alpha < \infty$.

Эти функции были названы дробно-экспоненциальными. Они являются наиболее гибким инструментом при описании вязкоупругих свойств реальных материалов. Операторы с ядрами, сконструированными из \mathcal{E} -функций, обладают алгеброй приведенной соотношениями (1.4) – (1.6). Кроме того, для оператора $\mathcal{E}_\alpha^*(\beta)$ легко построить резольвенту. Из соотношения (1.5) следует, что резольвентой оператора $\mathcal{E}_\alpha^*(\beta)$ будет оператор $\mathcal{E}_\alpha^*(\beta + \lambda)$.

Свойства этих функций делает возможным явное построение резольвенты по заданному ядру. Общий подход, логические структуры, экспериментальная и численная реализация процедур, необходимых для определения механических характеристик в линейной теории вязкоупругости подробно обсуждаются в работах [74, 129, 145, 240]. В работах [45, 46] предложена методика определения параметров наследственных ядер в нелинейной модели вязкоупругости.

Однако стремление точнее описывать вязкоупругие свойства реальных тел приводит к операторам с ядром более сложной природы [52, 128]. Часто для таких операторов построение резольвенты наталкивается на непреодолимые трудности [128], и тем более остается открытым вопрос о решении граничных задач на их основе.

Непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно-деформированного состояния анизотропных сред является весьма затруднительным. Это связано с тем, что существует лишь незначительное число задач теории упругости, для которых известна явная зависимость от упругих постоянных, если использовать упругое решение в обычной форме. В общем случае это решение может содержать иррациональные или трансцендентные функции от упругих постоянных. Это делает невозможным непосредственное использование алгебры резольвентных операторов к расшифровке соответствующих операторов. Поэтому для решения упругих задач применяются различные приближенные методы, идея которых состоит в поиске решения, когда его зависимость от упругих постоянных устанавливается в явном виде. Это позволяет применять к такому решению принцип Вольтерра. В качестве специальной формы упругого решения предлагаются степенные ряды [70, 242].

Как правило, степенные ряды, в которые раскладываются иррациональные и трансцендентные функции, сходятся медленно [70, 242]. Поэтому для получения достаточно точного решения нужно сохранять большое число членов ряда. Это приводит к громоздким вычислениям и потере точности. Чтобы обойти проблему вычисления суммы ряда, в работах [110, 111, 112, 113, 114, 233, 234, 296] предлагается использование цепных дробей, которые обеспечивают быстро сходящийся процесс последовательных приближений. В работе [115] выполнен обзор, посвященный теоретическим и экспериментальным исследованиям процессов деформирования и длительного разрушения вязкоупругих тел вследствие медленного докритического развития трещин.

Широкое применение нашло использование рядов по малому параметру. Этот параметр выбран в виде разности между коэффициентом Пуассона и его

мгновенно упругим значением. В этом случае задача сводится к рекуррентной последовательности граничных условий для определения комплексных потенциалов и к последующей расшифровке временных операторов. Этим методом решено множество задач для изотропных и анизотропных многосвязных сред с отверстиями и трещинами [71, 72, 73, 81, 82, 83, 85, 87, 88, 89, 92, 93, 101, 124, 281, 282, 283].

Одним из наиболее распространенных и успешно применяемых при построении решений задач вязкоупругости на основе принципа Вольтерра является метод аппроксимаций А.А. Ильюшина, изложенный в работах [76, 232]. Его идея состоит в точном представлении или аппроксимации соответствующего упругого решения дробно-рациональными функциями от упругих констант, вид которых позволяет точно, либо с помощью достаточно простых экспериментов, «расшифровать» получающиеся функции вязкоупругих операторов. Возможности построения аппроксимаций в виде степенных рядов по методу Ильюшина обсуждались в [75, 170]. При этом основное препятствие состоит в необходимости расшифровки степеней операторов. Оценки погрешности метода аппроксимаций имеются в работах [123, 167, 232]. К числу достоинств метода аппроксимаций можно отнести возможность его использования в численных решениях, полученных на основе метода конечных элементов.

Широкое применение для решения краевых задач линейной наследственной упругости получили различные варианты метода переменных модулей упругости [5, 13, 63, 120, 277, 306]. Согласно этому методу влияние времени учитывается путем замены деформационных характеристик вязкоупругого материала временными функциями. В работе [121] один из вариантов метода переменных модулей использован для прогнозирования свойств стеклопластика с вязкоупругим связующим, характеризующимся двумя независимыми операторами. В задачах механики горных пород [63] использован метод переменных модулей, предложенный в работе [13].

Предложенный в работах [164, 165] приближенный метод квазиконстантных операторов основан на принципе Вольтерра. Возможность его применения и оценка

точности производится через некоторые малые безразмерные параметры, называемые показателями квазиконстантности. Использование свойств квазиконстантности вязкоупругих операторов позволяет достаточно просто построить приближенное решение краевой задачи вязкоупругости анизотропного тела [166]. При этом не требуется аппроксимации ядер вязкоупругих операторов функциями специального вида (например, слабо сингулярными резольвентными ядрами), а достаточно наличия измеренных функций ползучести или релаксации или их аппроксимаций любыми подходящими для этой цели функциями. Примеры использования метода квазиконстантных операторов для анализа вязкоупругого поведения конструкций освещены в работах [1, 51, 262, 263].

Метод конечных сумм является распространенным численным методом решения краевых задач нелинейной вязкоупругости. Он совмещает в себе идею последовательного рассмотрения системы уравнений вязкоупругости в конечном множестве фиксированных точек на оси времени с идеей приближенной замены наследственных интегралов конечными суммами (квadrатурными формулами). При его реализации на каждом шаге по времени решается краевая задача линейной теории упругости для анизотропного неоднородного тела с тензором упругих констант и некоторым начальным полем напряжений, найденным в предшествующих шагах. В качестве решения в начальный момент времени принимается решение задачи теории упругости, соответствующей вязкоупругой задаче. К недостаткам этого метода следует отнести большие требования к вычислительным ресурсам, которые обусловлены необходимостью проведения вычислений с очень большим числом шагов и необходимостью хранить в памяти компьютера информацию о состоянии деформируемого тела во все предшествующие моменты времени. При этом неизбежно накопление погрешностей вычислений, связанных с величиной шагов по времени и с выбором аппроксимации наследственных интегралов конечными суммами.

В различной реализации метод пошагового интегрирования рассматривался в работах [16, 17, 18, 29, 69, 232, 285].

В работе [257] при помощи метода конечных элементов представлено решение задачи определения изменения во времени концентрации напряжений в теле с круговым отверстием в вязкоупругой ортотропной пластине.

Работа [280] посвящена анализу научных исследований, выполненных за последние 10 лет и касающихся приложений дробного исчисления в моделях линейной вязкоупругости, используемых в динамических задачах механики деформируемого твердого тела. Дан краткий исторический обзор, отражающий вклад советских механиков в развитие наследственной механики.

Несмотря на многообразие используемых подходов к решению задач линейной вязкоупругости в рамках операторного метода Вольтерра, к настоящему времени нельзя утверждать о наличии универсального, точного, экономичного и эффективного алгоритма.

В работах В.Г. Громова [53] и Победри Б.Е. [232] показано, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким либо их специальным видом и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Это обстоятельство положено в основу предлагаемого в данной диссертационной работе нового подхода к анализу вязкоупругого деформирования анизотропных сред. Указанное свойство резольвентных операторов делает возможным реализацию решений граничных задач теории вязкоупругости во времени проводить алгебраическими методами. Решение может быть осуществлено с использованием произвольных исходных операторов и выражено через значения воздействия этих операторов на единицу, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных.

В работах [187, 188, 274, 276] предложен новый подход к решению таких задач. Предлагаемый подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Метод основан на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды. Численное определение резольвент интегральных уравнений предполагает работу с табличными данными, заданными на достаточно густой сетке. Поэтому в [192, 193] предлагается способ сглаживания и восполнения

таблицы экспериментальных данных. На основе таких таблиц строятся матрицы уравнений состояния, элементы которых имеют явную зависимость от времени. Эти соотношения получены на основе алгебры резольвентных операторов Вольтерра, которые не связаны с каким-либо специальным видом ядер. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени приводится к тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости. Концепция предложенного подхода изложена в разделе 2 данной диссертации. В разделе 3 предложенный метод апробирован на решении задач об обобщенном плоском напряженном состоянии изотропной и анизотропной бесконечной пластины, ослабленной эллиптическим отверстием со свободным или жестко закрепленным контуром. Полученные результаты сопоставлены с результатами, полученными другими авторами.

1.2. Подходы к исследованию влияния фактора ползучести в анизотропных горных массивах с выработками

Массив горных пород представляет собой неоднородную среду, состоящую из слоев с различными деформационными и прочностными свойствами. Кроме того, каждый из слоев имеет дефекты, часто образующие ориентированные системы (сланцеватость, трещиноватость и др.), которые проявляются как факторы анизотропии деформационных и прочностных свойств. Природные ослабления прочности влияют на процессы деформирования и разрушения пород. При проходке горных выработок существующее в массиве пород напряженное состояние меняется, что приводит к деформированию пород, а в некоторых местах к их разрушению, на характер которого влияют существующие дефекты, при этом деформируются и разрушаются элементы горных выработок. Для принятия надежных и экономичных мер защиты выработок необходимо знать, как природные ориентированные ослабления влияют на процессы разрушения окружающих пород. Для оценки условий поддержания выработок в основном используют решения задач для упругих массивов. При упругом анализе

решающими факторами служат напряжения вокруг выработки и критерий прочности. При более детальном анализе учитывают время эксплуатации выработки.

История развития геомеханики, или механики горных пород охватывает период с начала прошлого века и до настоящего времени. В 1907 году была опубликована монография М.М. Протодяконова «Давление горных пород на рудничную крепь», которая явилась первой теоретической работой по механике горных пород. В ней была изложена гипотеза образования свода естественного равновесия над горными выработками, выдвинутая им на основе оригинальных и наглядных экспериментов на моделях. В основу теории свода М.М. Протодяконова [238] положен тезис о том, что горные породы из-за множества микро и макродефектов (трещины различного уровня), ослабляющих их структуру или разбивающих на отдельные куски, не являются сплошными телами. Следовательно, к ним могут быть применены законы сыпучих тел с некоторой поправкой, которая учитывает силы сцепления между отдельными кусками и частицами. М.М. Протодяконов предложил учитывать эти силы путем введения коэффициента крепости. Согласно этой теории в кровле горизонтальной выработки формируется свод давления параболического очертания, который своим весом воздействует на постоянную крепь. В теории также предполагается, что пролет свода давления равен ширине выработки, а в ее боках залегают прочные породы, на которые опирается свод.

К методам наблюдений на простых моделях относятся также опыты А. Леона, Ф. Левинсона-Лессинга, Г. Шпаккелера, Ф.А. Белаенко и др. [273].

Наиболее удобным для исследования проявлений горного давления является метод моделирования на эквивалентных материалах, предложенный Г.Н. Кузнецовым в 1936 г. [147, 148]. Основные принципы этого метода сводятся к замене в модели естественных горных пород искусственными материалами с физико-механическими свойствами, которые, в соответствии с принятым масштабом моделирования, находятся в определенных соотношениях с физико-механическими свойствами натуральных горных пород.

Одним из преимуществ метода моделирования на эквивалентных материалах является возможность измерения показателей, отражающих напряженно-деформированного состояния массива в интересующих областях, которые в натуральных условиях осуществить практически невозможно ввиду труднодоступности участков массива.

С целью моделирования объемных сил, обусловленных весом вмещающих пород, используется метод центробежного моделирования, разработанный и практически развитый Г.И. Покровским [235]. Метод центробежного моделирования заключается в замене гравитационных сил инерционными, создаваемыми в модели в результате ее вращения в каретке центрифуги. Метод позволяет моделировать объемное напряженно-деформированное состояние пород вокруг выработок как в упругой области, так и за ее пределами.

Модель объекта, выполненную в заданном геометрическом масштабе, помещают в центрифугу и путем равномерного вращения нагружают объемными инерционными силами, придавая тем самым породам модели некоторый фиктивный объемный вес. Это позволяет в ряде случаев для изготовления модели использовать материал, одинаковый по своим физико-механическим свойствам с материалом природы, что создает определенные преимущества перед методом эквивалентных материалов. Вместе с тем данный метод имеет и ряд недостатков. Один из них – отсутствие однородности механического силового поля. Кроме того, с удалением от центра тяжести модели в ту или иную сторону по ее высоте изменяется радиус вращения, соответственно, изменяется и масштаб моделирования. Указанные обстоятельства и технические возможности ограничивают предельные размеры моделей по высоте, а, следовательно, и возможные глубины моделируемой толщи пород. Поэтому указанный метод чаще всего применяется в комплексе с другими методами моделирования: методом эквивалентных материалов и оптико-поляризационным.

Весьма ценным методом, позволяющим получать важные относительные количественные характеристики неоднородных напряженных состояний элементов сложных механических систем, является также оптический метод

исследования напряженного состояния вокруг подземных выработок, начало которому было положено Ф. Левинсоном-Лессингом [152]. Поляризационно-оптический, или просто оптический, метод основан на свойстве большинства прозрачных изотропных материалов (целлулоид, бакелит, фенолит и др.), называемых оптически чувствительными, при приложении механических нагрузок приобретать оптическую анизотропию и проявлять способность двойного лучепреломления. Последнее заключается в том, что луч света, проходя через прозрачную кристаллическую среду, разлагается на две взаимно перпендикулярные плоскополяризованные составляющие, которые распространяются внутри среды с различной скоростью. Проведенные опыты показали, что наибольшее сжимающее напряжение (при одноосном начальном напряженном состоянии) возникает по боковым сторонам полости и что оно достигает, примерно, тройного значения по отношению к сжимающему напряжению в ненарушенном массиве; наименьшие напряжения возникают при овальном и подковообразном сечениях, вытянутых в направлении действующих сил. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений в горном массиве позволил решить широкий круг задач [58, 260, 261].

При решении задач механики горных пород, наряду с применением описанных выше различных методов, используют также и их комбинации, например, принципа центробежного моделирования и принципа поляризационно-оптического метода, либо метода эквивалентных материалов и центробежного моделирования. Часто используют в сочетании оптический метод и метод эквивалентных материалов. Например, оптическим методом наиболее детально изучают распределение напряжений в зоне опорного давления, а методом эквивалентных материалов для тех же условий исследуют развитие деформаций толщи с разрывом сплошности и механизм взаимодействия сдвигающихся пород с крепью. Более подробную информацию о методах моделирования можно почерпнуть в монографиях И.В. Баклашова [23], Р.Э. Дашко [60], И.Д. Насонова и В.И. Ресина [172].

Методы натуральных измерений обеспечивают получение решений, справедливых для конкретных горно-геологических условий проведения экспериментов. Использование методов физического моделирования позволяет получить решения, охватывающие более широкий класс условий при большей степени схематизации объектов природы. Однако перечисленные методы исследования не позволяют определить концентрацию напряжений на поверхности выработок различного сечения в зависимости от глубины залегания, параметров анизотропии горного массива и длительности эксплуатации выработок. Поскольку исследования проводились на образцах пород и моделирующих стендах с эквивалентными материалами, то нет уверенности в том, что результаты исследований отвечают действительности. Поэтому остается актуальной задача изучения влияния основных факторов на характер перераспределения напряжений с учетом особенностей, которые проявляются при проведении выработок. Обзор современных методов экспериментальных исследований процессов деформирования, разрушения и фильтрации в горных породах приведен в работе [117].

Использование аналитических методов позволяет получить описание исследуемых явлений в наиболее общей математической форме. В зависимости от механических свойств массива пород и характера, протекающих в них процессов, используются различные модели, которые в совокупности охватывают многообразие массивов пород и изучаемых явлений. Наиболее распространенными являются следующие модели массива горных пород: упругие (линейно-деформируемые), пластические, реологические.

Упругая модель применяется наиболее часто и является основной моделью горных пород. Впервые упругая изотропная модель была использована для описания состояния массива горных пород А.Н. Динником, Г.Н. Савиным, А.Б. Моргаевским [61, 62]. В рамках данной модели получено решение задачи о распределении напряжений вокруг выработки кругового сечения в весомом массиве горных пород. Позднее в работе Д.И. Шермана [278] на основе комплексных потенциалов Колосова-Мусхелешвили [171] было получено

решение задачи для весомой полуплоскости с круговыми отверстиями. Напряженное состояние изотропного горного массива вокруг выработок некругового сечения методами теории упругости рассматривались в работах [122, 248, 279]. В работе [30] изложены основы теории и методы расчета крепей горных выработок обделок тоннелей и других подземных сооружений на прочность и устойчивость при различных видах нагрузок и воздействий. Краткий обзор методик аналитических исследований распределения напряжений в забоях разных форм при проведении горных выработок дан в работе [228].

Как показано многочисленными исследованиями горные породы обладают способностью деформироваться во времени без увеличения напряжений, вызванных объемными или поверхностными силами. Они обнаруживают свойства ползучести. В монографии Ж.С. Ержанова [63] на основе лабораторного и натурального изучения реологических свойств горных пород изложена теория ползучести изотропных горных пород и ее приложения к определению напряженно-деформированного состояния различных подземных сооружений. Результаты над образцами донбасских горных пород, проведенных при атмосферном давлении и нормальной температуре, свелись к следующему.

1. Горные породы под действием нагрузок, не превышающих 70% разрушающих, четко обнаруживают свойства ползучести. Величины деформаций ползучести ко времени ее стабилизации достигают 150 – 370% упругих (мгновенных) деформаций; продолжительность ползучести алевролита и аргиллита составляет до 600, песчаника – до 860 часов, ползучесть известняка стабилизируется в течение 40 – 50 часов. Эта ползучесть близка к линейной.

2. Процесс ползучести горных пород целесообразно рассматривать на основе общего закона линейного деформирования материалов, определяемого уравнением состояния теории наследственности Вольтерра

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \int_0^t L(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau \right]. \quad (1.10)$$

Здесь E – модуль упругости, ядро наследственности (ползучести)

$$L(t, \tau) = \delta(t - \tau)^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1, [c^{\alpha-1}]). \quad (1.11)$$

В соответствии с принципом Вольтерра задачи теории линейной наследственной ползучести решаются как задачи идеальной теории упругости с заменой упругих постоянных соответствующими временными интегральными операторами

$$\bar{E} = E(1 - E^*), \quad \bar{\nu} = \nu(1 + \nu^*), \quad \bar{G} = G(1 - G^*) \quad (1.12)$$

с операторами ползучести

$$E^* f = \int_0^t M_E(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad \nu^* f = \int_0^t M_\nu(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad G^* f = \int_0^t M_G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

т.е. рассмотрением операторных уравнений закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{\bar{E}} \left[\sigma_x - \bar{\nu} (\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{1}{\bar{G}} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{\bar{E}} \left[\sigma_y - \bar{\nu} (\sigma_z + \sigma_x) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{1}{\bar{G}} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{\bar{E}} \left[\sigma_z - \bar{\nu} (\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= \frac{1}{\bar{G}} \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

При известном из опыта ядре ползучести $M_\nu(t, \tau) = L(t, \tau)$ ядро $M_E(t, \tau)$ находится из предположения об отсутствии объемного последействия

$$\frac{1 - 2\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{1 - 2\nu}{E}, \quad (1.14)$$

а ядро $M_G(t, \tau)$ – из операторного представления известного соотношения

$$\bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1 + \bar{\nu})}. \quad (1.15)$$

Решение конкретных задач механики подземных сооружений, основанных на уравнениях (1.13) при соответствующих начальных и граничных условиях, удобно провести операторным методом при помощи дробно-экспоненциальных

функций Ю.Н. Работнова (1.9). Тогда легко определяются числовые значения временных операторов E_t, ν_t, G_t .

Методом переменных модулей [13, 306] вместо интегральных операторов $\bar{E}, \bar{\nu}$ можно пользоваться временными функциями E_t, ν_t . Обозначив функцию ползучести

$$\Phi = \delta t^{1-\alpha} (1-\alpha)^{-1},$$

из уравнения (1.10), условия (1.15) и связи (1.14) последовательно можно получить

$$E_t = \frac{E}{1+\Phi}, \quad \nu_t = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-2\nu}{1+\Phi} \right), \quad G_t = G \frac{2(1+\nu)}{2(1+\nu)+3\Phi}.$$

При постановке задачи о расчете подземных сооружений нетронутый горный массив рассматривается как находящееся под действием собственного веса сплошное упруго-наследственное однородное изотропное нижнее полупространство, напряженное состояние которого таково, что

$$\sigma_1 = -\gamma H, \quad \sigma_2 = -\lambda \gamma H, \quad (1.16)$$

где σ_1, σ_2 – вертикальное и горизонтальное сжимающие напряжения, γ, H – объемный вес и глубина рассматриваемой точки массива, λ – коэффициент бокового давления, который задается согласно измеренным данным в естественном залегании пород, либо по гипотезе А.Н. Динника $\lambda = \nu / (1-\nu)$ [61], либо как гидростатическое давление $\lambda = 1$, либо как тектоническое (горизонтальное напряжение, превосходящее величину вертикального напряжения) давление $\lambda > 1$.

В случае рассмотрения горизонтальной выработки достаточно глубокого заложения (глубина H в 5 – 6 раз превышает наибольший размер поперечного сечения выработки) массив моделируется невесомым плоским полем, находящимся в состоянии плоской деформации с граничными условиями на бесконечности (1.16). Для решения задач применялся метод Н.И. Мусхелишвили

[171] с использованием двух аналитических функций $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, которые складывались из основных $\varphi^0(\zeta)$, $\psi^0(\zeta)$ (соответствующих известному напряженному состоянию нетронутого массива) и дополнительных $\varphi^*(\zeta, t)$, $\psi^*(\zeta, t)$ (вызванных образованием выработки и проявлением ползучести пород в окрестности выработки) функций напряжений.

Напряжения вокруг незакрепленных выработок с течением времени не меняются (не релаксируют), ползучесть пород сказывается только на перемещениях. Начальные упругие перемещения распределены неравномерно и иногда неоднородно: боковые точки контура могут смещаться в сторону массива. Перемещения, обусловленные ползучестью, однородны и независимо от вида породы направлены внутрь выработки, но их величина и характер распределения существенно зависят от вида породы. Горные породы слабо сопротивляются растягивающим усилиям, и наличие их в кровле имеет решающее значение для ее прочности.

Горные породы по своей структуре анизотропны. Свойства анизотропии пород в большей степени проявляются в массиве, усиленном наличием сланцеватости, слоистости, напластования, ориентированной трещиноватостью и вообще системной дефектностью. Породный массив из плоскопараллельных слоев, наклоненных под одним и тем же углом φ к горизонту, рассматривается в целом и в пределах каждого слоя как простейшее анизотропное тело – трансверсально-изотропное (транстропное) тело с плоскостью изотропии, отражающей плоскость слоев.

В горной механике линия пересечения наклонной плоскости напластования пород (плоскости изотропии) с горизонтальной плоскостью называется линией простирания напластования пород. Горизонтальные горные выработки, пройденные вдоль линии простирания пород, называются штреками, а пройденные вкrest линии простирания – квершлагами. Горизонтальные

выработки, занимающие промежуточные положения между штреками и квершлагами, называются диагональными выработками.

История привлечения анизотропных моделей к решению задач горной механики начинается с работы Г.Н. Савина [251]. С.Г. Лехницкий для описания напряжённо-деформированного состояния в окрестности протяженной одиночной выработки эллиптического сечения применил модель упругой анизотропной среды [155, 157]. В работах А.С. Космодамианского исследовано напряженное состояние анизотропного массива горных пород, ослабленного взаимовлияющими выработками эллиптического [130] либо квадратного поперечного сечений [132]. В монографиях [136, 137] предложены методы решения задач плоской теории упругости для многосвязных сред, которые могут быть использованы при аналитических исследованиях в механике горных пород. Многочисленные исследования напряженного состояния анизотропной полуплоскости с эллиптическими отверстиями, упругими ядрами или кольцами выполнены в работах С.А. Калоерова [77, 78, 79]. В монографии [236] изложены аналитические, численно-аналитические и экспериментальные методы определения напряженно-деформированного состояния породного массива вокруг горных выработок, методы снижения концентрации напряжений для обеспечения устойчивости горных выработок и кровли в очистных забоях.

Систематические исследования напряженного состояния разноориентированных подземных сооружений в трансропном массиве с наибольшим учетом влияющих факторов начаты с выходом монографии [64], последующих статей [3, 4] и продолжаются до сих пор. Штреки, квершлаг и диагональные выработки рассматриваются в условиях обобщенной плоской деформации, являющейся задачей пространственного типа, когда поперечные сечения выработки одинаково искривлены. Это требует привлечения трех аналитических функций $\Phi_j(z_j)$ обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$ ($j = 1, 2, 3$). Здесь μ_j – комплексные параметры обобщенной плоской деформации, которые характеризуют степень упругой анизотропии пород и

входят в решение задачи для произвольно ориентированной выработки. По величине отклонения этих параметров от мнимой единицы можно судить о различии свойств анизотропного и изотропного породных массивов. Это положение указывает на то, что в отличие от изотропного в анизотропном массиве напряжения вокруг незакрепленной выработки зависят от упругих постоянных, вследствие чего при учете ползучести пород они изменяются с течением времени.

Экспериментальные данные об упругой анизотропии и параметрах ползучести немногочисленны. Всего имеются два комплекта полных данных для мелкослоистых образцов [250, 256]. В первом из них опыты на ползучесть проведены под углом 45° к плоскости слоистости, во втором – в трех направлениях – вдоль, поперек и под 45° к плоскости слоистости. На основании имеющихся опытов на ползучесть слоистых материалов в работе [5] высказана гипотеза об изотропной ползучести горных пород по разным направлениям. Однако, подобные ограничения являются существенными, поскольку многие горные породы, и особенно осадочные, обладают значительной анизотропией [146] и, как показали экспериментальные исследования на глубоких шахтах Донбасса контур подземного сооружения (выработки) смещается и разрушается неравномерно [70]. Максимальные перемещения наблюдались перпендикулярно напластованию пород (плоскости изотропии), причем величина их в 2-5 раз превосходит смещения по напластованию.

В связи с этим является актуальной задача об определении (с учетом ползучести горных пород) величин перемещений и напряжений на контуре подземного сооружения, находящегося в анизотропном массиве. В работе [70] изучаются перемещения на контуре эллиптической выработки, находящейся в трансверсально-изотропном массиве, с учетом ползучести горных пород. Исследования проведены при условии, когда влияние фактора времени (ползучести) проявляются при сжатии под углом $\pi / 4$ к плоскости изотропии.

Это приводит к учету только модуля сдвига \bar{G}_2 . В работе [43] аналогичная задача рассмотрена для жестко закрепленной эллиптической выработки.

Из обзора следует, что в настоящее время проведены многочисленные экспериментальные и натурные исследования и построены численно-аналитические решения многих задач механики горных пород, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния массива. В то же время следует отметить, что методы их численной реализации разработаны недостаточно. Это касается исследования влияния эффектов ползучести на напряженное состояние анизотропных горных пород вблизи, как свободных, так и жестко закрепленных горизонтальных выработок. В обзорной статье [117] указано, что на данный момент отсутствуют универсальные модели ползучести горных пород.

В работах [199, 200, 201, 202, 209] предложена методика преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости для случая деформации анизотропного массива горных пород к временным уравнениям закона Р. Гука. Предложенный подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Построены кривые ползучести и релаксации для алевролита и песчаника. Полученные экспериментальные данные использованы для нахождения всех элементов временной матрицы коэффициентов деформации. Концепция этой методики и полученные результаты на ее основе изложены в разделе 4 данной диссертационной работы.

1.3. Подходы к исследованию напряженного состояния геомассивов около выработок с усложненными формами сечений

В практике горного дела и строительства подземных сооружений широкое распространение получили, наряду с круговым и эллиптическим, многие другие формы поперечных контуров горизонтальных выработок. Это разнообразие контуров вызвано как способами проходки, так и характером пересекаемых выработкой горных пород, интенсивностью и направленностью проявлений

горного давления. В условиях активного проявления вертикального горного давления для обеспечения устойчивости горной выработки нередко верхней части контура ее поперечного сечения придают сводообразную или подковообразную форму [63].

Форма поперечного сечения выработки определяется исходя из ряда факторов: физические свойства горных пород, назначение и срок службы выработки, материал крепи, положение выработки в пространстве, размеры ее поперечного сечения, величина и направление горного давления и др. В зависимости от указанных факторов горные выработки имеют различные формы поперечного сечения: арочную, трапециевидную, прямоугольную, круглую, эллиптическую, полигональную, несимметричную. Например, плоское сечение подготовительной выработки арочной формы, сопрягающейся с выработанным пространством лавы, представляет собой плоскость, ослабленную вырезом достаточно сложной формы (рис. 1.1).



Рис. 1.1

При бетонной или каменной крепи форма поперечного сечения выработки может быть сводчатая, круглая или эллиптическая. При металлической крепи – любая, при сборной железобетонной крепи выработка может принимать форму поперечного сечения: прямоугольную, трапециевидную, полигональную или с криволинейным очертанием выработки. Наличие горного давления со стороны почвы вызывает необходимость придавать выработке криволинейные замкнутые

очертания – в виде обратного свода или овала. При всестороннем горном давлении выработке, как правило, придают круглую форму.

Рассматривая формы поперечного сечения горизонтальных выработок, следует отметить, что основные формы их – сводчатая и трапециевидная (прямоугольная). Сводчатая форма наиболее благоприятна с точки зрения ее устойчивости, рационального использования крепи, ее несущей способности и перераспределения воспринимающих ею нагрузок. Трапециевидная (прямоугольная) форма позволяет при прочных породах кровли использовать их несущую способность, проще обеспечивать поддержание сопряжения выработки с очистным забоем, более эффективно использовать крепи усиления на сопряжении в виде обычных гидравлических, деревянных и других стоек.

Для исследования напряженного состояние горного массива вокруг подобных выработок используются как численные, так и численно-аналитические методы.

Среди численных методов особую популярность приобрел метод конечных элементов (МКЭ) [266]. Интенсивное развитие этого метода и применение в практике инженерных расчетов стало возможным с развитием и доступностью вычислительной техники. В последние два десятилетия благодаря применению МКЭ существенно расширился класс задач, решаемых в механике горных пород [20, 21, 22, 26, 149].

В настоящее время быстро развивается перспективный метод численного решения задач механики – метод граничных элементов (МГЭ). Главное в идейной стороне МГЭ – использование фундаментальных свойств решений дифференциальных уравнений в частных производных и установление зависимости между значениями этих решений внутри рассматриваемой области и их значениями на границе. МГЭ быстро завоевывает популярность, превосходя по возможностям МКЭ благодаря сокращению на единицу размерности задачи. В работе [144] методом граничных элементов рассмотрена задача о двух прямоугольных выработках в окрестности нарушения. Породный массив является изотропным и линейно-упругим. Приведен анализ напряженного состояния.

Точное решение двумерных задач с отверстием или полостью известно только для случая, когда граничный контур является эллиптическим или круговым. Это связано с тем, что функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура является наиболее простой. Если форма отверстия мало отличается от кругового или эллиптического, то для такого контура в работе [157] предложен приближенный метод, позволяющий свести рассмотрение этой задачи к ряду задач для кругового или эллиптического контура. С помощью этого метода в работе [131] представлены результаты исследований для ортотропных массивов с полостями прямоугольного и треугольного сечений. Однако представленные результаты не могли быть использованы на практике, так как в то время ни для одной анизотропной горной породы не имелось полных данных обо всех упругих постоянных, необходимых для проведения теоретических расчетов. Поэтому в качестве иллюстраций этих исследований приводятся результаты вычислений и графики напряжений, у которых все постоянные известны, но которые, не имеют ничего общего с горными породами (авиационная фанера, древесина, СВАН и др.). Другой приближенный метод, основанный на построении отображающих функций внешности единичного круга на внешность контуров в дополнительных областях и установлении зависимостей между соответствующими точками при аффинном и конформном преобразованиях, предложен в статье А.С. Космодамианского [133]. Этим методом А.С. Космодамианским и его учениками решен ряд задач для многосвязных областей с криволинейными границами [137].

В работах [80, 142] решения плоских задач теории упругости анизотропного тела для областей с криволинейными отверстиями приведены к решениям аналогичных задач для областей с системой произвольно расположенных эллиптических отверстий и прямолинейных разрезов и при удовлетворении граничным условиям применен дискретный метод наименьших квадратов. Удовлетворяя граничным условиям на контурах полостей составляется некоторый функционал невязок и его минимизация приводит к системе линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля определителем. С использованием

методики, изложенной в работах [80, 142], получены результаты, описывающие напряженное состояние вблизи выработки сводчатого сечения с разгрузочными трещинами, находящейся на большой глубине под действием собственного веса [236].

В статьях [140, 176] предложен приближенный метод решения задач для пластины с отверстиями произвольной формы, основанный на аппроксимации границы области эллиптическими контурами. Однако, недостатком методик, предложенных в этих работах, является невозможность определения компонент напряженного состояния вблизи мест стыкования контуров.

Для устранения этого недостатка в статье [190] предложен метод построения гладких выпуклых макроконтуров произвольной конфигурации с задаваемой кривизной в любой их точке. Этот метод основан на аппроксимации граничных контуров сечений выработок криволинейными элементами, в качестве которых выбираются дуги окружностей с гладким соединением. В дополнительных областях круговым контурам будут соответствовать эллиптические. В работе [191] предложен алгоритм, позволяющий строить границы областей сложной конфигурации на основе двух базовых контуров: макроконтура и эллиптического контура. С его применением, рассматривая пересечения нескольких областей, ограниченных макроконтурами, а также некоторого необходимого количества эллиптических областей, на основе введения характеристических уравнений, можно получить области любой заданной конфигурации, в том числе с невыпуклыми контурами.

В работе [258] с использованием перечисленных методик [190, 191] впервые исследуется вязкоупругое напряженно-деформированное состояние анизотропных массивов горных пород с выработками усложненных форм сечений.

Предложенная методика и результаты исследований изложены в разделе 5.

1.4. Концепции построения уточненных теорий изгиба упругих и вязкоупругих анизотропных плит с отверстиями

Первые исследования проблемы изгиба плит появились более двухсот пятидесяти лет назад. Основные этапы ее развития описаны в известных работах [295, 304, 308, 309].

С именем Кирхгоффа связано завершение теории изгиба и малых поперечных колебаний тонких упругих пластин. В отличие от своих предшественников Кирхгофф располагал законом Гука для пространственного напряженного состояния и поэтому смог корректно записать выражения для нормальных и касательных напряжений в плоскости пластины, после того как он предельно четко и ясно сформулировал в работах 1848-1850 гг. [297] две основные гипотезы теории пластин:

1) Гипотеза плоских недеформируемых нормалей, согласно которой нормаль к срединной плоскости пластины до деформации остается перпендикулярной к срединной поверхности пластины в течение всего процесса деформирования и элемент нормали в пределах толщины не деформируется (не сжимается и не растягивается).

2) Считается, что поперечные нормальные напряжения существенно меньше нормальных напряжений, расположенных в плоскости пластины, и поэтому ими можно пренебречь.

Кирхгофф вывел вариационное уравнение для пластины, дающее возможность вывода как дифференциального уравнения, так и граничных условий задачи. Используя такой подход, он получил уравнение Жермен-Лагранжа

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{или} \quad \Delta \Delta w = \frac{q}{D}, \quad (1.17)$$

где w – прогиб срединной плоскости пластины; q – поперечная внешняя нагрузка; Δ – оператор Лапласа; $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ – цилиндрическая

жесткость; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина пластины.

Общее решение этого уравнения дает возможность удовлетворить лишь двум граничным условиям вместо трех. Введение обобщенной перерезывающей силы позволило заменить три граничных условия двумя и корректно ставить краевые задачи для основного уравнения изгиба плит. Прикладная теория Кирхгоффа признана классической. Она достаточно верно описывает деформацию изгиба тонких плит и служит основой при расчете на прочность пластин, работающих на изгиб. Для большого класса задач это подтверждено результатами расчетов, полученными на основе трехмерной теории изгиба плит [138].

Большой вклад в развитие теории изгиба тонких плит и оболочек внесли учёные С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, И.Г. Бубнов, В.З. Власов, А.С. Вольмир, И.И. Ворович, К.З. Галимов, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, А.Н. Гузь, А.А. Ильюшин, Т. Карман, Н.А. Кильчевский, М.А. Колтунов, А.Н. Крылов, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, В.В. Новожилов, И.Ф. Образцов, П.М. Огибалов, С.П. Тимошенко, В.И. Феодосьев, А. Фёппль и другие.

Особенно успешно теория изгиба тонких плит стала развиваться благодаря трудам Г.В. Колосова и Н.И. Мусхелишвили, привлечшим к решению таких задач аппарат функций комплексных переменных. Этим методом было решено множество задач. В частности, большое количество задач изгиба изотропных плит с криволинейными отверстиями различной формы приведено в монографии Г.Н. Савина [252]. А.С. Космодамианским и его учениками разработан ряд эффективных приближённых методов решения задач об упругом равновесии многосвязных изотропных плит с опёртыми или жёстко защемлёнными краями [135].

Изучение проблем, возникающих при обобщении прикладной теории изгиба на случай изгиба анизотропных плит, начато в работах Буссенеска Ж.В. [287], Геринга Ф.Д. [290] и Губера М.Т. [292 – 294]. Однако, фундаментальные результаты с привлечением функций комплексного переменного были получены в 30-е годы XX века Лехницким С. Г. [153]. Им была построена общая теория

изгиба анизотропных плит, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости. Были введены комплексные потенциалы теории изгиба анизотропных плит, с их помощью получены выражения для основных характеристик, граничные условия для определения этих функций, впервые решена задача об изгибе плиты с эллиптическим отверстием.

Для многосвязных анизотропных плит некоторые подходы к решению задач получены в работах А.С. Космодамианского [137], В.В. Меглинского [169]. В дальнейшем были получены общие представления комплексных потенциалов для любых конечных и бесконечных многосвязных областей, учитывающие действие произвольных распределенных усилий и моментов на контурах плиты, сосредоточенных сил во внутренних точках, распределенных усилий $q(x, y)$ по основанию плиты, а также моментов в бесконечно удаленной точке [98, 102].

Интерес к развитию различных вариантов уточненных теорий значительно возрос в середине XX столетия. Это объясняется не теоретической необходимостью, а практической потребностью. Такая потребность вызвана в связи с расширением области применимости тонкостенных конструкций в инженерной практике, усложнением условий их работы, созданием и применением новых композитных материалов.

Необходимость учета характерных особенностей композитных материалов, пространственного распределения напряжений в элементах конструкций способствовала интенсивному развитию различных вариантов в построении прикладных и более точных теорий и решению на их основе ряда конкретных задач. Чтобы придать имеющимся исследованиям упорядоченность И.И. Ворович [36] и А.Л. Гольденвейзер [47] предложили классифицировать их по направлениям развития. Первое из них базируется на применении трехмерных уравнений теории упругости, и было развито в работах И.И. Воровича, А.С. Космодамианского и их учеников. Второе связано с привлечением обогащенных моделей, менее жестких, чем классические. К ним относятся теории

С.А. Амбарцумяна [11, 12], Г.В. Койтера [298], П. Нагди [299], Е. Рейсснера [300, 302, 303], теория типа С.П. Тимошенко [307] и др.

В первом направлении широкое развитие получили асимптотические методы сведения пространственных задач к двумерным задачам, с помощью которых решения трехмерных задач отыскиваются в виде некоторых разложений по безразмерным параметрам (чаще всего зависящим от толщины), асимптотическим в некоторой области их изменения. Эти методы предложены в работах И.И. Воровича и его учеников [6, 8, 37, 39, 40], для многосвязной области – в работах А.С. Космодамианского и его учеников [9, 134, 138, 158]. Анализ и классификация этих методов даны в обзорных статьях И.И. Воровича [36, 41], А.К. Галиньша [42], А.Н. Гузя и Ю.Н. Немиша [56], Н.А. Кильчевского [119], А.С. Космодамианского [139], Ю.Н. Немиша и И.Ю. Хомы [175], Ю.А. Устинова и М.А. Шленева [265], В.А. Шалдырвана [271]. Асимптотический метод распространен и на случай трансверсально-изотропных плит [264].

Во втором направлении – теории уточненных теорий первые попытки были начаты в 40-х годах прошлого столетия в работах Н.А. Кильчевского [118]. Работы Е. Рейсснера [300, 301, 302] стимулировали интерес к этой проблеме. В монографии [227] систематизированы результаты, полученные Б.Л. Пелехом и его коллегами в области теории и разработки методов расчета концентрации напряжений возле отверстий, вырезов, включений, трещин при изгибе трансверсально-изотропных плит. Базовой для этой монографии является сдвиговая модель С.П. Тимошенко, позволяющая учесть сдвиговую податливость, характерную для большинства композиционных материалов.

Задача определения напряженного состояния изгибаемой трансверсально изотропной плиты, ослабленной отверстием, сводится согласно теориям, учитывающим деформации поперечного сдвига [2, 11, 227, 307], к нахождению решения уравнений

$$D\Delta\Delta w = q - \varepsilon\Delta q, \quad \Delta\psi - k^2\psi = 0, \quad (1.18)$$

удовлетворяющего на контуре отверстия условиям:

для свободного отверстия

$$\begin{aligned} (M_x + M_x^0)n_1^2 + 2(H_{xy} + H_{xy}^0)n_1n_2 + (M_y + M_y^0)n_2^2 &= 0, \\ (M_y - M_x + M_y^0 - M_x^0)n_1n_2 + (H_{xy} + H_{xy}^0)(n_1^2 - n_2^2) &= 0, \\ (Q_x + Q_x^0)n_1 + (Q_y + Q_y^0)n_2 &= 0; \end{aligned} \quad (1.19)$$

для отверстия, в которое впаивают абсолютно жесткое ядро

$$w^0 + w = 0, \quad \gamma_x + \gamma_x^0 = 0, \quad \gamma_y + \gamma_y^0 = 0. \quad (1.20)$$

В формулах (1.18) – (1.20) введены обозначения: $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$; w – прогиб плиты; q – внешняя нормальная нагрузка; ψ – функция углов поворота; $\varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)} \frac{E}{G'}$ – параметр сдвиговой податливости; $k^2 = 6k'(1+\nu)h^{-2} \frac{G'}{E}$; $2h$ – толщина пластинки; E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона в срединной плоскости (плоскости изотропии); G' и k' – модуль и коэффициент сдвига; M_x^0 , M_y^0 , H_{xy}^0 , Q_x^0 , Q_y^0 – компоненты моментов и усилий, характеризующих напряженное состояние сплошной (не ослабленной отверстием) пластины, которым соответствуют разрешающие функции: прогибов w^0 и углов поворота γ_x^0 , γ_y^0 ; M_x , M_y , H_{xy} , Q_x , Q_y – дополнительные компоненты моментов и усилий, обусловленные наличием отверстия, которым соответствуют функции прогиба w и углов поворотов γ_x , γ_y ; n_1 , n_2 – направляющие косинусы нормали контура отверстия.

Углы поворота, моменты и усилия выражаются через разрешающие функции w и ψ следующим образом

$$\gamma_x = -\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \gamma_y = -\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right], \\
H_{xy} &= -D(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \Delta \psi \right) \right], \\
Q_x &= -\Lambda' \left[\frac{\partial}{\partial x} (G-w) - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right], \quad Q_y = -\Lambda' \left[\frac{\partial}{\partial y} (G-w) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right],
\end{aligned} \tag{1.22}$$

где $G = w + \varepsilon \Delta w + \frac{\varepsilon^2}{D} q$, $\Lambda' = 2k'G'h$.

В рамках теории типа С.П. Тимошенко решение задачи (1.18) – (1.20) для круговых отверстий найдено в работах [220, 221]. В работе [222] дано обобщение исследованных задач для трансверсально изотропного материала. Соответствующая (1.18) – (1.20) задача, когда в отверстие впаина упругая шайба из другого материала, рассмотрена в статье [223].

В работе [220] впервые в рамках таких решений отмечено несоответствие порядка касательных напряжений $\tau_{\theta z}$ на контуре отверстия, определяемых с помощью теории Кирхгофа и уточненных подходов. Эти напряжения имеют порядок h^{-2} (в теории Кирхгофа – h^{-1}), т.е. порядок главных изгибных напряжений σ_θ . Аналогичный результат получили И.И. Ворович и О.К. Аксентян [7, 38], а также А.В. Колос [125], исходя из общих позиций трехмерной теории упругости.

Увеличение порядка касательных напряжений на контуре отверстия может иметь существенное значение при расчете прочности стеклопластиковых пластинок с отверстиями, так как при этом их низкая сдвиговая жесткость приводит в ряде случаев к разрушению (расслоению) из-за превышения предела прочности на срез [259].

В работе [222] в случае изгиба и кручения трансверсально изотропной плиты со свободной полостью доказано, что для всей области изменения параметров R/h и E/G' , характеризующих размеры отверстия и податливость пластинки на сдвиг, справедливо неравенство

$$k_* \leq k \leq \frac{3(\text{изгиб})}{4(\text{кручение})} \quad (1.23)$$

Здесь k – коэффициент концентрации напряжений, а звездочкой отмечена величина, получающаяся при решении задач в рамках теории Кирхгофа.

Таким образом, найденные значения коэффициентов концентрации находятся в границах между решениями соответствующих задач изгиба и плоских задач в их классических постановках. При этом под соответствующими задачами изгиба и плоской теории упругости понимается: цилиндрический изгиб – одноосное растяжение, кручение – сдвиг.

Основная трудность задачи (1.18) – (1.20) по сравнению с соответствующей задачей классической теории Кирхгофа состоит в необходимости решения уравнения Гельмгольца, в котором переменные разделяются для полярной и эллиптической систем координат [116]. В связи с этим для односвязной области решение системы (1.18) в рядах можно получить лишь для кругового и эллиптического отверстий. Решение для эллиптического отверстия в эллиптической системе координат выписывается в функциях Матье [161], которые необходимо раскладывать по тригонометрическим функциям, что приводит к появлению бесконечных систем алгебраических уравнений. В статьях [173, 174] для исследования напряженного состояния вблизи криволинейного отверстия использован приближенный способ, основанный на методе возмущения формы границы в форме, предложенной А.Н. Гузем [54].

В работах [224, 225] задача изгиба изотропной и трансверсально изотропной плиты, ослабленной конечным числом произвольно расположенных криволинейных отверстий, сведена к бесконечным системам алгебраических уравнений. Доказана квазирегулярность и единственность решения этих систем.

Обзор работ, посвященных исследованию концентрации напряжений около отверстий в пластинах и оболочках с учетом явлений, обусловленных деформациями поперечного сдвига, приведен в статье [254]. Следует также отметить работы, посвященные развитию уточненных теорий и исследованиям концентрации напряжений около отверстий в рамках этих теорий [14, 27, 28, 35, 57, 125, 126, 127, 151, 163, 226, 230, 231, 237, 264, 267, 268, 270].

В конце прошлого столетия на страницах журнала “Известия АН. Механика твердого тела” имела место дискуссия, посвященная истории и современным концепциям теории изгиба тонких пластин [10, 31, 32, 33, 48, 49, 59, 67, 68]. В процессе дискуссии высказывались и опровергались критические замечания в отношении прикладной теории изгиба пластин. Работа [34] посвящена обоснованию теории, которую предлагается считать современной формой классической теории пластин. Основная идея такого предложения заключается в совмещении теории Кирхгофа [297], которая сейчас считается классической теорией пластин, с теорией Рейсснера [300, 301] и Генки [291], которые квалифицируются как уточненные теории, учитывающие деформации поперечного сдвига. В работе формулируется система физических гипотез, выводится система уравнений теории пластин, имеющая шестой порядок, записываются типовые формы граничных условий и формулируются соответствующие краевые задачи. Для вывода уравнений теории пластин вводятся следующие две известные гипотезы:

1. Элемент нормали к срединной плоскости пластины (нормальный элемент) при изгибе пластины не изменяет своей длины и остается прямолинейным.
2. Нормальное напряжение σ_z мало по сравнению с напряжениями σ_x и σ_y .

Эти гипотезы отличаются от гипотез Кирхгофа тем, что не требуют ортогональности нормального элемента пластины к ее изогнутой срединной плоскости. При этом нормальный элемент приобретает три независимые степени свободы, соответствующие перемещению $w(x, y)$ и углам поворота $\theta_x(x, y)$ и

$\theta_y(x, y)$. В результате, поле перемещений пластины совпадает с аппроксимацией Генки [291]

$$u_x = z\theta_x(x, y), \quad u_y = z\theta_y(x, y), \quad u_z = w(x, y). \quad (1.24)$$

Представляя углы поворота нормального элемента изотропной пластины в виде

$$\theta_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (1.25)$$

для определения функций φ и ψ получается система уравнений шестого порядка

$$D\Delta\Delta\varphi = q, \quad \Delta\psi - k^2\psi = 0, \quad (1.26)$$

где $D = 2\bar{E}h^3 / 3$, $k^2 = \frac{2C}{D(1-\nu)}$, $C = Gh$, а прогиб w находится по формуле

$$w = \varphi - \frac{D}{C}\Delta\varphi. \quad (1.27)$$

Если не учитывать деформацию поперечного сдвига и принять $C \rightarrow \infty$, то из второго уравнения (1.26) следует $\psi = 0$, равенство (1.27) дает $\varphi = w$, а первое уравнение (1.26) переходит в уравнение теории Кирхгофа.

В заключении к статье [34] делается вывод, что теория Кирхгофа не может более претендовать на роль классической теории пластин. Такой теорией предлагается признать теорию, приводящую к уравнениям шестого порядка (не обязательно построенную так, как предложено выше).

В работе [197] для изотропной плиты, а в работах [194, 196, 275] для трансверсально-изотропной получены системы дифференциальных уравнений шестого порядка, позволяющие удовлетворить всем трем граничным условиям на боковой поверхности, имеющим место в теории изгиба плит. Предложена методика интегрирования полученных систем, проведены численные исследования для цилиндрического изгиба бесконечной плиты, ослабленной эллиптической полостью.

Разрешающие дифференциальные уравнения уточненной теории изгиба ортотропных плит разными подходами получены многими авторами [11, 55, 269]. Эти уравнения характерны тем, что в отличие от изотропного и трансверсально-изотропного случаев не разделяются на два независимых уравнения типа (1.26). Однако, эти уравнения включают в себя два типа решения – медленно изменяющееся, которое определяет основное состояние пластины, и быстро изменяющееся решение, соответствующее краевому эффекту. Наличие быстро изменяющегося по координатам решения вызывает большие трудности при реализации численных методов расчета. Для преодоления этих трудностей целесообразно выделить в явном виде решение, соответствующее краевому эффекту. Для этого можно воспользоваться асимптотическим методом [305]. Существование быстро изменяющегося решения для тонких плит связано с наличием в этом уравнении малого параметра при старших производных. В статьях [195, 205] в условиях указанных выше гипотез получено дифференциальное уравнение шестого порядка теории изгиба ортотропных плит и при помощи метода малого параметра предложен способ разделения этого уравнения на два уравнения четвертого и второго порядков. Решение полученных уравнений основано на использовании функций обобщенных комплексных переменных.

Изгиб вязкоупругих плит изучался только в рамках прикладной теории, используя метод малого параметра с привлечением комплексных потенциалов [72, 73]. В работе [253] рассмотрен изгиб треугольной плиты с круговым отверстием. Для многосвязных изотропных плит с отверстиями и включениями задачи вязкоупругого изгиба исследованы в статьях [84, 86, 90, 91, 93, 94, 95]. В работах [99, 100, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108] разработан метод решения задач линейной вязкоупругости, позволяющий решать задачи изгиба для многосвязных анизотропных плит с контурами произвольной конфигурации и их взаимного расположения. Работа [255] посвящена численному моделированию задач изгиба и колебаний вязкоупругих пластин сложной формы при различных моделях вязкости.

Что же касается задач теории изгиба вязкоупругих плит с полостями в уточненной постановке, то до сих пор такие исследования полностью отсутствуют.

1.5. Выводы по разделу 1

На основании анализа обзора работ по тематике диссертационной работы дана характеристика актуальности проблем исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных сред с учетом влияния вязкоупругости, рассмотрены подходы к исследованию влияния фактора ползучести в горных массивах с выработками, в том числе с усложненными формами сечений. Приведен анализ и характеристика концепций построения прикладных и уточненных теорий изгиба упругих и вязкоупругих плит с отверстиями. Показано, что при наличии многочисленных исследований по выше перечисленным аспектам имеет место развитие методик исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных тонкостенных конструкций с отверстиями и геомассивов с горизонтальными протяженными выработками.

РАЗДЕЛ 2

**НОВЫЙ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД
ИССЛЕДОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД**

2.1. Механическое поведение материалов при внезапно приложенных усилиях. Связь между напряжениями и деформациями

Упругий материал, будучи подвергнут внезапному нагружению, в дальнейшем остающимся постоянным, мгновенно претерпевает деформации, которые потом остаются неизменными. При внезапном приложении касательного напряжения к ньютоновской вязкой жидкости возникает стационарное течение. Существуют материалы, у которых внезапно приложенное и поддерживаемое неизменным напряженное состояние вызывает мгновенную деформацию, вслед за которой следует процесс течения. Этот процесс с возрастанием времени может быть ограниченным или неограниченным. Материал, который ведет себя подобным образом, называют вязкоупругим. Он проявляет одновременно свойство упругости и ползучести. Такое поведение не описывается ни упругой, ни вязкой моделями, а сочетает в себе черты обеих.

Теория вязкоупругих материалов высокоразвита и доступна для широкого применения. Достаточно полное изложение различных возможных вариантов вязкоупругих соотношений напряжения-деформации для изотермических процессов нагружения анизотропных тел приведено в книгах [76, 145, 232, 240]. Наиболее общая линейная форма таких соотношений представляется в виде [76, 232]:

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^t \mathbf{\Gamma}(t, \tau) \mathbf{e}(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{s} = s_{ij}$, $\mathbf{e} = e_{kl}$ – тензоры напряжений и деформаций, $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_{ijkl}$ – тензор чет-

вертого порядка, компоненты которого называются функциями релаксации материала. Они характеризуют вязкоупругий материал так же, как их аналоги – модули упругости – упругий. Установлено [76], что функции релаксации являются положительными монотонно убывающими функциями времени.

Иную форму вязкоупругих соотношений напряжения – деформации можно записать, поменяв в соотношениях (2.1) ролями деформации и напряжения

$$e(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t, \tau) s(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Здесь компоненты тензора $\mathbf{K} = K_{ijkl}$ называются функциями ползучести материала. Они характеризуют механические свойства вязкоупругого материала, как и их упругие аналоги – коэффициенты деформации – свойства упругого материала. Функции ползучести являются положительными монотонно возрастающими функциями времени [76].

Компоненты тензоров $\mathbf{K}(t, \tau)$ и $\mathbf{\Gamma}(t, \tau)$ отличны от нуля только в интервале $0 \leq \tau \leq t$. Они в большинстве случаев оказывают более сильное влияние на величины $e(t)$ и $s(t)$ для времен τ , близких к t , и это влияние затухает по мере удаления τ от момента t . Если это затухание настолько велико, что «материал ничего не помнит», то $\mathbf{K}(t, \tau)$ и $\mathbf{\Gamma}(t, \tau)$ можно интерпретировать как δ -функцию Дирака $\delta(t - \tau)$, которую можно определить как функцию со следующими свойствами [76, 145]:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \tau, \\ \infty & \text{при } t = \tau; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1.$$

Важное свойство δ -функции состоит в том, что если $f(t)$ является непрерывной функцией t , то имеет место равенство

$$\int_a^b f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \begin{cases} f(t), & \text{если } a < t < b, \\ 0, & \text{если } t < a, t > b. \end{cases} \quad (2.3)$$

Свойства δ -функции можно согласовать с единичной ступенчатой функцией Хевисайда $h(t)$, которая определяется условиями

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ее можно представить, как показано на рисунке 2.1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. В соответствии с рисунком 2.1, $h(t)$ определяется так [145]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ t / \varepsilon & \text{при } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 1 & \text{при } t \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.5)$$

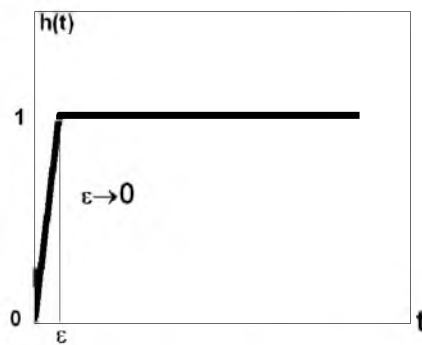


Рис. 2.1.

Из (2.5) видно, что $\delta(t - \tau) = \frac{dh(t - \tau)}{d(t - \tau)}$, где производная берется перед предельным переходом $\varepsilon \rightarrow 0$, а функция $h(t - \tau)$ сдвигает разрыв вправо или влево в зависимости от знака τ .

Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что функции ползучести и релаксации взаимосвязаны. Для нахождения этой связи необходимо подставить выражение (2.1) в (2.2). В результате получается [76]

$$e(t) = \int_0^t \left\{ \int_0^\tau K(t, \tau) \Gamma(\tau, \tau_1) e(\tau_1) d\tau_1 \right\} d\tau = \int_0^t \left\{ \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \Gamma(\tau, \tau_1) d\tau \right\} e(\tau_1) d\tau_1. \quad (2.6)$$

С другой стороны, по свойству δ -функции (2.3) получается

$$e(t) = \int_0^t e(\tau_1) \delta(t - \tau_1) d\tau_1. \quad (2.7)$$

Сравнивая (2.6) и (2.7), можно заключить, что ядра \mathbf{K} и \mathbf{G} должны быть связаны следующим соотношением

$$\int_{\tau_1}^t \mathbf{K}(t - \tau) \mathbf{G}(\tau - \tau_1) d\tau = \delta(t - \tau_1). \quad (2.8)$$

Из выражения (2.8) видно, что по крайней мере одно из ядер должно иметь сингулярную составляющую, чтобы интеграл от произведения двух ядер дал сингулярность в виде δ -функции. Тип δ особенностей ядер \mathbf{K} и \mathbf{G} в (2.1) и (2.2) является фундаментальным свойством мгновенной реакции тела (при больших скоростях напряжений и деформаций). Вязкоупругие тела обычно предполагаются мгновенно упругими, т.е. при очень больших скоростях нагружения или деформации ведут себя как идеально упругие. Закон Гука получается из (2.1) и (2.2) в предположении, что

$$\mathbf{K}(t, \tau) = \mathbf{K}^0 \delta(t - \tau), \quad \mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{G}^0 \delta(t - \tau),$$

где \mathbf{K}^0 и \mathbf{G}^0 – тензоры константы.

Выделяя сингулярную часть ядер релаксации и ползучести, получается [76]:

$$\mathbf{G}(t, \tau) = \mathbf{G}^0 \delta(t - \tau) + \tilde{\mathbf{G}}(t, \tau), \quad \mathbf{K}(t, \tau) = \mathbf{K}^0 \delta(t - \tau) + \tilde{\mathbf{K}}(t, \tau), \quad (2.9)$$

где \mathbf{G}^0 и \mathbf{K}^0 – тензоры модулей упругости и податливости соответственно, а $\tilde{\mathbf{G}}(t, \tau)$ и $\tilde{\mathbf{K}}(t, \tau)$ – регулярные части тензоров ядер релаксации и ползучести.

Считается, что свойства материала не зависят от начала отсчета времени. Тогда ядра $\tilde{\mathbf{G}}(t, \tau)$ и $\tilde{\mathbf{K}}(t, \tau)$ являются функциями разностного типа

$$\tilde{\mathbf{G}}(t, \tau) = \tilde{\mathbf{G}}(t - \tau), \quad \tilde{\mathbf{K}}(t, \tau) = \tilde{\mathbf{K}}(t - \tau).$$

Вводятся обозначения

$$\tilde{\Gamma}(t-\tau) = \frac{d\mathbf{R}(t-\tau)}{d(t-\tau)}, \quad \tilde{\mathbf{K}}(t-\tau) = \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)}, \quad (2.10)$$

и принимаются дополнительные условия

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{\Gamma}^0, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{K}^0,$$

где \mathbf{R} и \mathbf{P} регулярные части тензоров функций релаксации и ползучести.

Подстановка представлений (2.9) с учетом соотношений (2.10) в уравнения (2.1) и (2.2) дает зависимости

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(0) \mathbf{e}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{R}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{e}(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(0) \mathbf{s}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(t-\tau)}{d(t-\tau)} \mathbf{s}(\tau) d\tau. \quad (2.12)$$

Имеют место другие формы зависимостей между напряжениями и деформациями. Заменой переменных, уравнения (2.11) и (2.12) можно привести к виду

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(0) \mathbf{e}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{R}(\tau)}{d\tau} \mathbf{e}(t-\tau) d\tau, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{P}(0) \mathbf{s}(t) + \int_0^t \frac{d\mathbf{P}(\tau)}{d\tau} \mathbf{s}(t-\tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Интегрирование уравнений (2.11) и (2.12) по частям дает

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^t \mathbf{R}(t-\tau) \frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{e}(t) = \int_0^t \mathbf{P}(t-\tau) \frac{d\mathbf{s}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.16)$$

Следует отметить, что зависимости между напряжениями и деформациями здесь были получены, основываясь на гипотезе о существовании памяти, предположении о гладкости и на теоремах представления линейных функционалов в раз-

личных функциональных пространствах. При этом не потребовалось прибегать к физической интуиции, или к каким либо модельным представлениям [145].

Для удобства дальнейшей работы с соотношениями (2.11) – (2.16) осуществляется переход от тензорной формы записи к матрично-векторной. Для этого вводятся вектор-столбцы деформаций и напряжений с шестью элементами. Между компонентами векторов и тензоров устанавливается связь

$$\mathbf{e}^* = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6]^T = [e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{23} = 2e_{32}, 2e_{13} = 2e_{31}, 2e_{12} = 2e_{21}]^T,$$

$$\mathbf{s}^* = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]^T = [s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{23} = s_{32}, s_{13} = s_{31}, s_{12} = s_{21}]^T.$$

На основе компонент тензоров $\mathbf{K} = K_{ijkl}$ и $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_{ijkl}$ формируются матрицы $\mathbf{K}^* = K_{mn}^*$ и $\mathbf{\Gamma}^* = \Gamma_{mn}^*$ размером 6×6 . Это осуществляется заменой пары индексов ij или kp одним индексом m или n в соответствии со схемой [19]

$$\begin{array}{cccccc} ij, & kp=11 & 22 & 33 & 23,32 & 13,31 & 12,21 \\ m, & n=1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Кроме того, имеет место следующая связь между величинами K_{ijkl} и K_{mn}^*

$$K_{ik}^* = K_{iikk}, \quad K_{mk}^* = 2K_{ijkk} \quad (i \neq j),$$

$$K_{in}^* = 2K_{iikp} \quad (k \neq p), \quad K_{mn}^* = 4K_{ijkp} \quad (i \neq j, k \neq p).$$

Это оказалось возможным, поскольку между компонентами тензора K_{ijkl} существуют зависимости

$$K_{ijkp} = K_{jikp} = K_{jipk} = K_{ijpk} = K_{kpij}.$$

Аналогичные результаты получаются и для величин Γ_{ijkl} и Γ_{mn}^* .

Далее в соотношениях (2.11) – (2.16) тензоры \mathbf{s} , \mathbf{e} , \mathbf{R} и \mathbf{P} заменяются векторами \mathbf{s}^* , \mathbf{e}^* и матрицами \mathbf{R}^* и \mathbf{P}^* . В последующих выкладках в качестве уравнений состояния среды будут использованы представления в форме (2.11)– (2.16),

где вместо тензоров используются векторы и матрицы. При этом, звездочки, которыми помечены символы этих величин, при дальнейшем изложении опущены.

Матрично-векторная форма соотношений (2.11) – (2.12) также может быть представлена в виде

$$s_m(t) = A_{mn} e_n(t) + \int_0^t \frac{dR_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_n(\tau) d\tau \quad (n, m = \overline{1,6}),$$

$$e_m(t) = a_{mn} s_n(t) + \int_0^t \frac{dP_{mn}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_n(\tau) d\tau \quad (n, m = \overline{1,6}),$$
(2.17)

где используется суммирование по повторяющимся индексам.

Аналогичный вид в матрично-векторной форме имеют представления (2.13) – (2.16).

В соотношениях (2.17) принято $\mathbf{R}(t) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{P}(t) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{p}(t)$, где $\mathbf{R}(0) = \mathbf{A} = A_{mn}$ – матрица модулей упругости, а $\mathbf{P}(0) = \mathbf{a} = a_{mn}$ – матрица коэффициентов деформации; $\mathbf{r}(t) = r_{mn}(t)$, $\mathbf{p}(t) = p_{mn}(t)$ – матрицы функции релаксации и ползучести. Под произведением $\mathbf{A} \otimes \mathbf{r}(t)$ матриц одинаковой размерности понимается матрица, компоненты которой получаются как обычные произведения одноименных компонент перемножаемых матриц.

Закон Гука для упругой задачи получается из (2.11) и (2.12) в предположении, что $t = 0$. В компактной форме он представляется так:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma},$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_i = s_i(0)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_k = e_k(0)$ – векторы напряжений и деформаций в момент времени $t = 0$.

Мгновенные значения функций ползучести $\mathbf{P}(t=0) = \mathbf{a}$, релаксации $\mathbf{R}(t=0) = \mathbf{A}$, напряжений $\mathbf{s}(t=0) = \boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\mathbf{e}(t=0) = \boldsymbol{\varepsilon}$ показывают, что функции времени наделяются начальными значениями, являющимися решением упругой задачи.

Соотношения между модулями упругости и коэффициентами деформации в теории упругости имеют вид $A^{-1} = a$. Соответствующие соотношения между функциями ползучести и релаксации неверны. Однако, имеют место соотношения [145]

$$P(0) = [R(0)]^{-1}, \quad P(\infty) = [R(\infty)]^{-1} \quad (2.18)$$

для мгновенных и длительных модулей упругости и коэффициентов деформации.

2.2. Решение вязкоупругих задач методом Вольтерра

2.2.1. Аналитическая форма задания ядер ползучести и релаксации. При использовании метода преобразования Лапласа или принципа Вольтерра к решению задач вязкоупругости большое значение имеет аналитическая форма задания ядер ползучести и релаксации. Экспериментально найденные значения этих ядер задаются дискретным набором величин, соответствующим некоторым фиксированным временам, чаще всего через равные промежутки времени. По этим экспериментальным значениям, различными методами строятся аналитические аппроксимации ядер в специальной форме. Одной из таких форм является класс функций построенных Ю.Н. Работновым. Эти функции являются резольвентами ядра Абеля вида [240]

$$I_{\alpha}(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)}. \quad (2.19)$$

Здесь $\Gamma(1 + \alpha)$ – гамма функция; $-1 < \alpha < 0$.

Оператор I_{α}^* с ядром (2.19) называется оператором Абеля

$$I_{\alpha}^* \cdot 1 = \int_0^t I_{\alpha}(t - \tau) \cdot 1 d\tau = \frac{t^{1+\alpha}}{(1 + \alpha)\Gamma(1 + \alpha)}.$$

Для операторов Абеля справедлива теорема умножения

$$I_{\alpha}^{*} \cdot I_{\beta}^{*} = I_{\alpha+\beta+1}^{*}. \quad (2.20)$$

При помощи следующего разложения определяется оператор $\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta)$

$$\frac{1}{1 - \beta I_{\alpha}^{*}} = 1 + \beta \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta) = 1 + \beta I_{\alpha}^{*} + \beta^2 I_{\alpha}^{*2} + \beta^3 I_{\alpha}^{*3} + \dots$$

Здесь, ядро оператора $\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta)$, есть резольвента ядра I_{α}

$$\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta) = I_{\alpha}^{*} + \beta I_{\alpha}^{*2} + \beta^2 I_{\alpha}^{*3} + \dots$$

С помощью формулы (2.20) получается разложение для ядра оператора $\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha}(\beta) &= I_{\alpha}(t - \tau) + \beta I_{2\alpha+1}(t - \tau) + \beta^2 I_{3\alpha+2}(t - \tau) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{\alpha+n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ряд (2.21) сходится для всех значений аргумента $t - \tau$ при любом β , если $-1 < \alpha < \infty$ [240].

Эти функции были названы дробно-экспоненциальными. Операторы с ядрами, сконструированными из \mathcal{E} -функций, обладают алгеброй резольвентных операторов (1.4) – (1.6):

$$1. \quad \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(x) \cdot \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(y) = \left[\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(x) - \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(y) \right] / (x - y), \quad x \neq y. \quad (2.22)$$

Это соотношение выражает собой теорему умножения для операторов \mathcal{E}_{α}^{*} .

$$2. \quad \frac{1}{1 - \lambda \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta)} = 1 + \lambda \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta + \lambda) \quad (2.23)$$

Оператор $\bar{R}_{\lambda} = 1 + \lambda \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta + \lambda)$ называется обратным для оператора $\bar{P}_{\lambda} = 1 - \lambda \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta)$, а оператор $\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta + \lambda)$ – резольвентным для $\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta)$. Резольвентный оператор образован из функций того же класса, что и $\mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\beta)$ сдвигом по па-

раметру.

$$3. \mathcal{E}_\alpha^{*n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \mathcal{E}_\alpha^*(x). \quad (2.24)$$

Здесь приведены основные соотношения алгебры. Существуют и другие свойства операторов \mathcal{E}_α^* . Они приведены в работе [240].

При рассмотрении задач вязкоупругости методом Вольтерра, приведенные функции являются наиболее гибким инструментом при описании вязкоупругих свойств реальных материалов. Свойства (2.22) – (2.24) этих функций будут использованы далее при расшифровке операторов, которые составлены из комбинаций известных операторов.

2.2.2. Метод Вольтерра. При решении статических задач наследственной теории упругости для пространственного случая анизотропной среды, уравнения линейно упругих соотношений напряжения – деформации (закон Гука) сохраняют свою форму, только упругие постоянные заменяются операторами. Например, соотношения (2.1) или (2.2) в этом случае лучше записать в форме

$$s_i = \bar{A}_{ij} e_j \quad \text{или} \quad e_i = \bar{a}_{ij} s_j \quad (i, j = \overline{1,6}), \quad (2.25)$$

где

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} (1 - r_{ij}^*), \quad \bar{a}_{ij} = a_{ij} (1 + p_{ij}^*), \quad s_i(t=0) = \sigma_i, \quad e_i(t=0) = \varepsilon_i. \quad (2.26)$$

Операторы (2.26) построены на основе представлений (2.17). Каждый из временных операторов (2.26) состоит из двух элементов: упругой постоянной матрицы A_{ij} или a_{ij} , а также интегрального оператора $A_{ij} r_{ij}^*$ или $a_{ij} p_{ij}^*$ с ядрами

наследственности $\frac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ или $\frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$, где

$$r_{ij}^* e_j(t) = - \int_0^t \frac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_j(\tau) d\tau, \quad p_{ij}^* s_j(t) = \int_0^t \frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_j(\tau) d\tau. \quad (2.27)$$

Под умножением оператора на некоторую функцию понимается вычисление интеграла, стоящего в правой части соотношений (2.27).

Умножение в (2.25) на \bar{A}_{ij} и \bar{a}_{ij} – это операция интегрирования по времени, тогда как решение задачи теории упругости связано с интегрированием по координатам. Эти операции переставимы. Поэтому, задачу вязкоупругости можно решать как задачу обычной теории упругости и лишь в окончательном результате заменить упругие компоненты матриц A_{ij} и a_{ij} операторами от этих компонент матриц \bar{A}_{ij} и \bar{a}_{ij} , которые определены соотношениями (2.26). Этот прием называется принципом Вольтерра, поскольку он был сформулирован именно этим автором [310, 311]. Принцип Вольтерра позволяет получать простые решения задач вязкоупругости, когда решение задач обычной теории упругости записывается как произведение упругих постоянных на функции от координат.

При рассмотрении оператора $\bar{a}_{ij} = a_{ij} (1 + p_{ij}^*)$ ядро ползучести для $p_{ij}^* s_j(t)$ представляется в виде дробно экспоненциальной функции

$$\frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} = \lambda_{ij}^p \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^p}(-\beta_{ij}^p; t-\tau),$$

где функция $\mathcal{E}_{\alpha}(-\beta; t-\tau)$ определена соотношением (2.21).

Далее для упрощения записи формул там, где это не является необходимым, индексы ij и p у величин λ , α и β опущены. В приложениях аргумент β операторов \mathcal{E}_{α} – отрицателен. Поэтому в формулу (2.21) вводится аргумент $-\beta$, и считается, что $\beta > 0$. Тогда (2.21) примет вид

$$\mathcal{E}_{\alpha}(-\beta; t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - \beta \frac{(t-\tau)^{1+2\alpha}}{\Gamma[2(1+\alpha)]} + \beta^2 \frac{(t-\tau)^{2+3\alpha}}{\Gamma[3(1+\alpha)]} - \dots \quad (2.28)$$

Рассматриваемый интегральный оператор станет таким

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij} \left[1 + \lambda_{ij}^p \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^p}^*(-\beta_{ij}^p) \right]. \quad (2.29)$$

Представляет интерес получения приближенных выражений для функций $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta)$ получающихся в результате действия \mathcal{E} -операторов на некоторые простейшие функции. Рассмотрение задач установившейся ползучести осуществляется при нагрузках, постоянных во времени. Если нагрузки постоянны, то при решении конкретных задач напряжения $s(\tau)$ в (2.27) принимаются зависимыми от верхнего предела. Оператор (2.27) представляется в виде произведения $p_{ij}^* \cdot 1$ или $\lambda_{ij}^p \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^p}^*(-\beta_{ij}^p) \cdot 1$ на напряжение $s_j(t)$. Очевидно, в этом случае достаточно вычислить выражение [240]

$$\lambda \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1 = \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta; t-\tau) \cdot 1 d\tau.$$

Вычисляя интеграл с учетом представления (2.28) получается

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1 = \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta; t-\tau) \cdot 1 d\tau = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\eta}{\varphi(1)} - \frac{\eta^2}{\varphi(2)} + \frac{\eta^3}{\varphi(3)} - \dots \right],$$

где $\varphi(n) = n(1+\alpha)\Gamma[n(1+\alpha)]$, $\eta = \beta t^{1+\alpha}$.

Отсюда

$$\beta \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) = 1 - \left[1 - \frac{\eta}{\varphi(1)} + \frac{\eta^2}{\varphi(2)} - \frac{\eta^3}{\varphi(3)} + \dots \right] = 1 - E_{1+\alpha}(-\eta).$$

Здесь введена функция Миттаг-Леффлера $E_{1+\alpha}(-\eta)$ [240].

Исследования показали, что вычисление функции $E_{1+\alpha}(-\eta)$ для больших значений аргумента η вызывает трудности, связанные с плохой сходимостью ряда. Поэтому, для вычисления функции $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta)$ была предложена формула, использующая аппроксимацию [240]

$$E_{1+\alpha}(-\eta) \approx e^{-\eta^\omega}, \quad \omega = (1+\alpha)^{1+\alpha}. \quad (2.30)$$

Тогда вычисление функции $\lambda \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1$ можно осуществлять, используя соотношения

$$\lambda \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1 = \lambda [1 - E_{1+\alpha}(-\eta)] / \beta \approx \lambda [1 - e^{-\eta\omega}] / \beta.$$

Следует отметить, что в настоящее время разработаны программы, позволяющие вычислять функцию $E_{1+\alpha}(-\eta)$ для любых значений аргумента, что снимает необходимость аппроксимации (2.30).

2.2.3. Изотропная среда. В настоящем пункте представлены основные соотношения для напряжений и перемещений через функции комплексных переменных плоской теории упругости. Дано решение задачи, когда среда ослаблена круговым отверстием в условиях двустороннего растяжения или сдвига. В этом случае имеет место точное решение задачи. Это дает возможность найти решение задачи вязкоупругости методом Вольтерра. Полученное решение будет использовано как тестовое при решении этой задачи другим методом.

2.2.3.1. Представление напряжений и смещений плоской теории упругости в комплексных координатах. В системе координат Oxy имеют место представления для напряжений и перемещений через функции комплексных переменных [171]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\varphi'(z), \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],$$

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z).$$

В полярной системе координат

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\operatorname{Re}\varphi'(z), \quad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]\sigma^2, \tag{2.31}$$

$$2G(u_r + iu_\theta) = [\kappa\varphi(z) - z\varphi'(z) - \bar{\psi}(z)] / \sigma.$$

Здесь введены обозначения:

$$z = x + iy = r\sigma, \quad \bar{z} = x - iy = r / \sigma, \quad \sigma = \cos(\theta) + i\sin(\theta);$$

$\kappa = 3 - 4\nu$ – для случая плоской деформации,

$\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ – для обобщенного плоского напряженного состояния пластины.

Из соотношений (2.31) находятся

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \operatorname{Re} \left[2\varphi' + (\bar{z}\varphi'' + \psi') \sigma^2 \right], \quad \sigma_r = \operatorname{Re} \left[2\varphi' - (\bar{z}\varphi'' + \psi') \sigma^2 \right], \\ \tau_{r\theta} &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} (\bar{z}\varphi'' + \psi') \sigma^2 \right];\end{aligned}\tag{2.32}$$

$$u_r = \frac{1}{2G} \operatorname{Re} \left[(\kappa\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi}) / \sigma \right], \quad u_\theta = \frac{1}{2G} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{i} (\kappa\varphi - z\bar{\varphi}' - \bar{\psi}) / \sigma \right].\tag{2.33}$$

Последующие выкладки проводятся для обобщенного плоского напряженного состояния пластины.

2.2.3.2. Решения для пластины с круговым отверстием. Рассматривается решение задачи для пластины, ослабленной круговым отверстием радиуса R , когда на бесконечности заданы усилия

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = q, \quad \tau_{xy}^0 = t.$$

Функции, определяющие напряжения и перемещения в области без отверстия, представляются в форме

$$\varphi_0 = az, \quad \psi_0 = (b + it)z, \quad a = (q + p) / 4, \quad b = (q - p) / 2.\tag{2.34}$$

Функции, определяющие влияние отверстия, представляются в виде

$$\varphi_{00} = a_1 / z, \quad \psi_{00} = b_1 / z + b_3 / z^3.\tag{2.35}$$

Подстановка (2.34) и (2.35) в представления (2.32) и (2.33) дает: напряжения и перемещения в сплошной среде

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^0 &= 2a + b \cos(2\theta) - t \sin(2\theta), \quad \sigma_r^0 = 2a - b \cos(2\theta) + t \sin(2\theta), \\ \tau_{r\theta}^0 &= b \sin(2\theta) + t \cos(2\theta),\end{aligned}\tag{2.36}$$

$$u_r^0 = \frac{r}{2G} \left[a(\kappa - 1) - b \cos(2\theta) + t \sin(2\theta) \right], \quad u_\theta^0 = \frac{r}{2G} \left[b \sin(2\theta) + t \cos(2\theta) \right];$$

напряжения и перемещения, отражающие влияние контура

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta}^{00} &= -\frac{b_1}{r^2} - \frac{3b_{3r}}{r^4} \cos(2\theta) - \frac{3b_{3i}}{r^4} \sin(2\theta), \\
 \sigma_r^{00} &= \frac{b_1}{r^2} - \left(\frac{4a_{1r}}{r^2} - \frac{3b_{3r}}{r^4} \right) \cos(2\theta) - \left(\frac{4a_{1i}}{r^2} - \frac{3b_{3i}}{r^4} \right) \sin(2\theta), \\
 \tau_{r\theta}^{00} &= \left(\frac{3b_{3r}}{r^4} - \frac{2a_{1r}}{r^2} \right) \sin(2\theta) - \left(\frac{3b_{3i}}{r^4} - \frac{2a_{1i}}{r^2} \right) \cos(2\theta), \\
 u_r^{00} &= \frac{1}{2G} \left[-\frac{b_1}{r} + \left(\frac{a_{1r}(\kappa+1)}{r} - \frac{b_{3r}}{r^3} \right) \cos(2\theta) + \left(\frac{a_{1i}(\kappa+1)}{r} - \frac{b_{3i}}{r^3} \right) \sin(2\theta) \right], \\
 u_{\theta}^{00} &= -\frac{1}{2G} \left[\left(\frac{a_{1r}(\kappa-1)}{r} + \frac{b_{3r}}{r^3} \right) \sin(2\theta) - \left(\frac{a_{1i}(\kappa-1)}{r} + \frac{b_{3i}}{r^3} \right) \cos(2\theta) \right].
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Здесь принято $a_1 = a_{1r} + i a_{1i}$, $b_3 = b_{3r} + i b_{3i}$, $b_1 = b_{1r}$.

Примечание. При решении задач вязкоупругости, упругие постоянные, входящие в соотношения (2.36) могут заменяться временными операторами, а могут рассматриваться как постоянные величины, как это делается в работе [63]. Упругие постоянные, входящие в соотношения (2.37), всегда заменяются временными операторами. В настоящей работе будут рассмотрены случаи, когда упругие постоянные всегда заменяются временными операторами, а также, когда упругие постоянные соотношений (2.36) временными операторами не заменяются. Упругие постоянные, переходящие во временные операторы, обозначаются черточками сверху.

Функции, определяющие плоское напряженно - деформированное состояние среды с круговым отверстием представляются в виде суммы

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{00} = az + a_1 / z, \quad \psi = \psi_0 + \psi_{00} = (b + it)z + b_1 / z + b_3 / z^3.$$

Соответствующим образом представляются напряжения и перемещения

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta} &= \sigma_{\theta}^0 + \sigma_{\theta}^{00}, \quad \sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^{00}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}^{00}, \\
 u_r &= u_r^0 + u_r^{00}, \quad u_{\theta} = u_{\theta}^0 + u_{\theta}^{00}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

В процессе решения граничных задач, приведенных в настоящем разделе, возникает необходимость определения реологических параметров некоторых операторов, экспериментальные данные которых либо отсутствуют, либо эти операторы являются комбинацией уже известных операторов. При расшифровке таких операторов используются свойства (2.22) – (2.24).

2.2.3.3. Решение для свободного контура. Из граничных условий на контуре неподкрепленного отверстия

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = R,$$

находятся коэффициенты разложений функций (2.35). Они будут такими

$$a_{1r} = -bR^2, \quad b_1 = -2aR^2, \quad b_{3r} = -bR^4, \quad a_{1i} = tR^2, \quad b_{3i} = tR^4. \quad (2.39)$$

Из соотношений (2.39) видно, что коэффициенты функций (2.35) от упругих постоянных не зависят. Тогда и напряжения, определенные соотношениями (2.36) и (2.37), от упругих постоянных также не зависят и во времени не меняются. В представления для перемещений входят величины $1/G$ и κ/G . Операторы, соответствующие этим величинам будут определены ниже.

2.2.3.4. Решение для жестко подкрепленного контура. Если контур отверстия жестко подкреплен, то из граничных условий

$$u_r = u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = R, \quad (2.40)$$

находятся коэффициенты разложений функций (2.35). Они будут такими

$$\begin{aligned} a_{1r} &= \frac{\bar{G}}{\bar{\kappa}G} bR^2, \quad b_1 = \frac{\bar{G}}{G} aR^2 (\bar{\kappa} - 1), \quad b_{3r} = \frac{\bar{G}}{\bar{\kappa}G} bR^4, \\ a_{1i} &= -\frac{\bar{G}}{G\bar{\kappa}} tR^2, \quad b_{3i} = -\frac{\bar{G}}{G\bar{\kappa}} tR^4. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Приведенные формулы соответствуют случаю, когда в соотношениях (2.36) упругие постоянные не меняются во времени. В противном случае представления для коэффициентов разложений примут вид

$$a_{1r} = \frac{bR^2}{\bar{\kappa}}, \quad b_1 = aR^2 (\bar{\kappa} - 1), \quad b_{3r} = \frac{bR^4}{\bar{\kappa}}, \quad a_{1i} = -\frac{tR^2}{\bar{\kappa}}, \quad b_{3i} = -\frac{tR^4}{\bar{\kappa}}. \quad (2.42)$$

Из соотношений (2.41) и (2.42) видно, что коэффициенты функций (2.35) зависят от упругих постоянных. Этот факт свидетельствует об изменении в этом случае во времени как перемещений, так и напряжений. При этом, кроме приведенных выше, возникают и другие комбинации упругих постоянных: $1/k$, G/k , $1/(Gk)$. Приведем расшифровку операторов, соответствующих приведенным величинам.

2.2.3.5. Расшифровка интегральных операторов. Применение принципа Вольтерра к решению задач вязкоупругости сводит проблему построения решения к расшифровке интегральных операторов, которые получаются из соответствующей упругой задачи формальной заменой механических характеристик интегральными операторами.

Экспериментальное определение операторов связано с большими трудностями. Поэтому опытные данные, которые можно найти в литературе, как правило, не содержат полной информации о значениях параметров. Для уменьшения числа операторов, находящихся из опытов, при решении конкретных задач для изотропных материалов применяют различные упрощения [109, 240, 253].

В некоторых случаях можно приближенно положить $\bar{\nu} = \nu$, так как введение операторов $\bar{\nu}$ значительно усложняет задачу, не внося существенного уточнения в ее решение.

Другим упрощением является предположение о несжимаемости материала. В этом случае полагают $\bar{\nu} = \nu = 0.5$ [109].

Во многих работах используется гипотеза об упруго сжимаемом материале. Согласно этому предположению оператор объемного сжатия $\bar{K} = K$ должен быть постоянным. Отсюда следуют простые зависимости между реологическими величинами [240]

$$\frac{1 - 2\bar{\nu}}{\bar{E}} = \frac{1 - 2\nu}{E} = const. \quad (2.43)$$

Соотношение (2.43) позволяет определить величину $\bar{\nu}$ по известному значению оператора \bar{E} и наоборот.

В работе [247] были получены опытные данные об изменении коэффициента Пуассона во времени в алюминиевых и медных образцах. На основании этих данных построены кривые ползучести для коэффициента Пуассона

$$\bar{\nu} \cdot 1 = \nu \left[1 + \lambda_\nu \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_\nu) \cdot 1 \right]. \quad (2.44)$$

Значения величин ν , α , λ_ν и β_ν для указанных материалов будут приведены ниже.

Приведенные в работе [247] опытные данные не содержат информации для определения операторов \bar{E} или \bar{G} . Используя равенства (2.43), соотношения алгебры операторов (2.22) – (2.24), а также известные зависимости $\bar{k} = (3 - \bar{\nu}) / (1 + \bar{\nu})$ и $\bar{G} = \bar{E} / 2 / (1 + \bar{\nu})$, последовательно находятся

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E \left[1 - \lambda_e \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_e) \right], \quad \frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_e \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_e) \right], \\ \lambda_e &= 2\nu\lambda_\nu / (1 - 2\nu), \quad \beta_e = \beta_\nu - \lambda_e, \\ \bar{G} &= G \left[1 - \lambda_g \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_g) \right], \quad \frac{1}{\bar{G}} = \frac{1}{G} \left[1 + \lambda_g \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_e) \right], \\ \lambda_g &= \frac{3\lambda_\nu\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}, \quad \beta_g = \beta_\nu + \frac{\lambda_\nu\nu}{1 + \nu}, \\ \bar{k} &= k \left[1 - \lambda_k \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_g) \right], \quad \frac{1}{\bar{k}} = \frac{1}{k} \left[1 + \lambda_k \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_k) \right], \\ \lambda_k &= \frac{4\lambda_\nu\nu}{(3 - \nu)(1 + \nu)}, \quad \beta_k = \beta_g - \lambda_k, \\ \frac{\bar{k}}{\bar{G}} &= \frac{k}{G} \left[1 + \lambda_{kg} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_e) \right], \quad \frac{\bar{G}}{\bar{k}} = \frac{G}{k} \left[1 - \lambda_{kg} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_{kg}) \right], \\ \lambda_{kg} &= \frac{5\lambda_\nu\nu}{(3 - \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \beta_{kg} = \beta_e + \lambda_{kg}, \\ \frac{1}{\bar{Gk}} &= \frac{1}{Gk} \left[1 + \lambda_{gk} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_k) - \lambda_{ge} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_e) \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\lambda_{gk} = \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k - \lambda_g}, \quad \lambda_{ge} = \frac{\lambda_g^2}{\lambda_k - \lambda_g}.$$

Реологические постоянные приведенных операторов выразились через известные величины ν , α , λ_ν и β_ν , найденные в результате эксперимента.

2.3. Ортотропные вязкоупругие среды. Упругие и реологические постоянные для некоторых материалов

Уравнения закона Гука для ортотропного тела, записанные через технические постоянные, имеют вид [157]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_3, & \varepsilon_4 &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_4, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_3, & \varepsilon_5 &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_5, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_2 + \frac{1}{E_3} \sigma_3, & \varepsilon_6 &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_6. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – модули Юнга для растяжения (сжатия) вдоль главных направлений упругости; ν_{12} – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении оси Oy при растяжении в направлении оси Ox ; ν_{21} – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении оси Ox при растяжении в направлении оси Oy и т. д.; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига, характеризующие изменения углов между главными направлениями, осями Ox и Oy , Ox и Oz , Oy и Oz .

Между модулями Юнга и коэффициентами Пуассона в силу симметрии уравнений (2.46) существуют зависимости

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}. \quad (2.47)$$

Основные соотношения линейной теории вязкоупругости имеют ту же форму, что и в линейной теории упругости, с той разницей, что упругие постоянные E_i , ν_{ik} , G_{ik} уравнений закона Гука (2.46) заменяются линейными интегральными операторами \bar{E}_i , $\bar{\nu}_{ik}$, \bar{G}_{ik} (именно эти операторы определяются из экспериментов на ползучесть или релаксацию)

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{1}{\bar{E}_1} s_1 - \frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} s_2 - \frac{\bar{\nu}_{31}}{\bar{E}_3} s_3, & e_4 &= \frac{1}{\bar{G}_{23}} s_4, \\
 e_2 &= -\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} s_1 + \frac{1}{\bar{E}_2} s_2 - \frac{\bar{\nu}_{32}}{\bar{E}_3} s_3, & e_5 &= \frac{1}{\bar{G}_{13}} s_5, \\
 e_3 &= -\frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_1} s_1 - \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_2} s_2 + \frac{1}{\bar{E}_3} s_3, & e_6 &= \frac{1}{\bar{G}_{12}} s_6, \\
 e_i(t=0) &= \varepsilon_i, & s_i(t=0) &= \sigma_i.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

При этом, соотношения между различными упругими операторами записываются так же, как и соотношения между упругими постоянными [240]. Например, соотношения вида (2.47) имеют место и для операторов

$$\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} = \frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2}, \quad \frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_1} = \frac{\bar{\nu}_{31}}{\bar{E}_3}, \quad \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_2} = \frac{\bar{\nu}_{32}}{\bar{E}_3}. \tag{2.49}$$

В п.п. 2.2.3.5. было отмечено, что в случае рассмотрения изотропных сред, для уменьшения числа параметров, находящихся из экспериментов, при решении конкретных задач применяются различные упрощения.

При решении граничных задач анизотропной теории вязкоупругости также прибегают к различным упрощающим предположениям относительно реологического поведения материала. Опытные данные по ползучести армированных пластиков, которые позволили бы определить все операторы, входящие в уравнения (2.48), в литературе отсутствуют. В особенности это относится к определению

операторных коэффициентов Пуассона $\bar{\nu}_{ik}$. Поэтому можно приближенно положить $\bar{\nu}_{ik} = \nu_{ik} = const$.

В настоящей работе, для ортотропного материала, принимаются допущения, аналогичные принятым предположениям для изотропного материала [240]. Для этого вводятся величины

$$K_1 = E_1 / (1 - \nu_{12} - \nu_{13}), \quad K_2 = E_2 / (1 - \nu_{21} - \nu_{23}), \quad K_3 = E_3 / (1 - \nu_{31} - \nu_{32}),$$

которые являются объемными модулями упругости при одноосном деформировании в направлении осей Ox , Oy и Oz соответственно. Объемные модули упругости K_1 , K_2 и K_3 составляют величину обратную модулю объемной деформации при гидростатическом давлении [19]

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3}. \quad (2.50)$$

Упругие постоянные, входящие в представление (2.50), для однородного анизотропного тела удовлетворяют условию [157]

$$\frac{1}{K} = \frac{1 - 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1 - 2\nu_{23}}{E_2} + \frac{1 - 2\nu_{31}}{E_3} \geq 0. \quad (2.51)$$

Знак равенства имеет место для абсолютно несжимаемого тела.

Следуя Ю.Н Работнову [240], требуется, чтобы оператор, соответствующий величине (2.51) был постоянным. Это значит, что

$$\frac{1}{\bar{K}} = \frac{1}{K} = const. \quad (2.52)$$

Считая объемную деформацию упругой, приведенные ниже слагаемые представления (2.52) полагаются постоянными

$$\frac{1 - 2\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} + \frac{1 - 2\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_2} + \frac{1 - 2\bar{\nu}_{31}}{\bar{E}_3} = \frac{1 - 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1 - 2\nu_{23}}{E_2} + \frac{1 - 2\nu_{31}}{E_3}. \quad (2.53)$$

Условия (2.53) дают постоянство соотношению $\frac{1}{\bar{K}} = \frac{1}{K}$, а из условия (2.51) следует, что анизотропное тело в условиях ползучести находится в упругом состоянии. В случае изотропного материала условия (2.53) переходят в (2.43). Соотношения (2.53) позволяют определить величины $\bar{\nu}_{ik}$ по известным значениям операторов \bar{E}_i и наоборот.

Уравнения закона Гука (2.46) для ортотропной пластинки через технические постоянные, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2, & \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2, \\ \varepsilon_6 &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_6, & \frac{\nu_{21}}{E_2} &= \frac{\nu_{12}}{E_1}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Уравнения состояния линейной теории вязкоупругости имеют вид (2.54), где упругие постоянные заменяются операторами

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{s_1}{\bar{E}_1} - \frac{\bar{\nu}_{21}s_2}{\bar{E}_2}, & e_2 &= -\frac{\bar{\nu}_{12}s_1}{\bar{E}_1} + \frac{s_2}{\bar{E}_2}, & e_6 &= \frac{s_6}{\bar{G}_{12}}, \\ e_i(t=0) &= \varepsilon_i, & s_i(t=0) &= \sigma_i. \end{aligned}$$

В работе [241] приведены результаты экспериментов по ползучести армированного пластика стеклотекстолит ТС 8/3-250. Точное измерение поперечной деформации встречает технические трудности. Поэтому определить операторный коэффициент Пуассона не удастся [242]. Измерялась только продольная деформация. Операторы $1/\bar{E}_i$ хорошо аппроксимировались с помощью дробно-экспоненциальных операторов

$$\frac{1}{\bar{E}_i} = \frac{1}{E_i} \left[1 + \lambda_i \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_i) \right], \quad (2.55)$$

где интегральные операторы $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_i)$ содержат ядро Работнова [242].

Что касается оператора Пуассона, его принято считать постоянным, равным его мгновенному значению.

Измерение продольной деформации образца под углом $\pi/4$ к основным направлениям дает возможность определить модуль Юнга E_{45} и оператор

$$\frac{1}{\bar{E}_{45}} = \frac{1}{E_{45}^0} \left[1 + \lambda_{45} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_{45}) \right],$$

где $E_{45}^0 = 16.66 \times 10^3$ МПа, $\lambda_{45} = 0.26 \text{ час}^{-(1+\alpha)}$, $\beta_{45} = \beta_1 = \beta_2 = 0.32 \text{ час}^{-(1+\alpha)}$, $\alpha = -0.8$.

Это дает возможность определить модуль сдвига G_{12} по формуле [19]

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1-\nu_{12}}{E_1} - \frac{1-\nu_{21}}{E_2},$$

и оператор

$$\frac{1}{\bar{G}_{12}} = \frac{4}{\bar{E}_{45}} - \frac{1-\nu_{12}}{\bar{E}_1} - \frac{1-\nu_{21}}{\bar{E}_2} = \frac{1}{G_{12}} \left[1 + \lambda_6 \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_6) \right], \quad (2.56)$$

где

$$\lambda_6 = \frac{4E_1E_2\lambda_{45} - (1-\nu_{12})E_2E_{45}\lambda_1 - (1-\nu_{21})E_1E_{45}\lambda_2}{4E_1E_2 - (1-\nu_{12})E_2E_{45} - (1-\nu_{21})E_1E_{45}}, \quad \beta_6 = \beta_{45}.$$

Далее приводятся упругие и реологические характеристики некоторых материалов, которые будут использованы при проведении численных исследований.

Материал 1 – Стеклотекстолит ТС 8/3-250 [241]

$$\begin{aligned} E_1 &= 21.56 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_1 = 0.085 \text{ ч}^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_1 = 0.32 \text{ ч}^{-(1+\alpha)}, \\ E_2 &= 29.498 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_2 = 0.0485 \text{ ч}^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_2 = 0.32 \text{ ч}^{-(1+\alpha)}, \\ G_{12} &= 5.802 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_6 = 0.3341 \text{ ч}^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_6 = 0.32 \text{ ч}^{-(1+\alpha)}, \\ \nu_{12} &= 0.145, \quad \nu_{21} = 0.184, \quad \lambda_{12} = \beta_{12} = \lambda_{21} = \beta_{21} = 0, \quad \alpha = -0.8. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Исходные операторы имеют вид (2.55), (2.56) и

$$\bar{\nu}_{12} = \nu_{12} \left[1 + \lambda_{12} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_{12}) \right], \quad \bar{\nu}_{21} = \nu_{21} \left[1 + \lambda_{21} \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_{21}) \right].$$

Материал 2 – Полимерный композитный материал на основе эпоксидно-го связующего [112]

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 23.0 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_1 = 0.0323 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_1 = 0.1570 c^{-(1+\alpha)}, \\
 E_2 &= 16.0 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_2 = 0.1295 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_2 = 0.2745 c^{-(1+\alpha)}, \\
 G_{12} &= 3.08 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_6 = 0.0717 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_6 = 0.0276 c^{-(1+\alpha)}, \\
 \nu_{12} &= 0.11, \quad \nu_{21} = 0.0765, \quad \lambda_{12} = \beta_{12} = \lambda_{21} = \beta_{21} = 0, \quad \alpha = -0.846.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Материал 3 – Полимерный композитный материал на основе полиэтиленового связующего [112]

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 19.7 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_1 = 0.0180 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_1 = 0.0928 c^{-(1+\alpha)}, \\
 E_2 &= 11.7 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_2 = 0.0608 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_2 = 0.1283 c^{-(1+\alpha)}, \\
 G_{12} &= 0.637 \times 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_6 = 0.1398 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_6 = 0.0407 c^{-(1+\alpha)}, \\
 \nu_{12} &= 0.14, \quad \nu_{21} = 0.0831, \quad \lambda_{12} = \beta_{12} = \lambda_{21} = \beta_{21} = 0, \quad \alpha = -0.717.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Для изотропного материала

$$E_1 = E_2 = E, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \quad G_{12} = G = E / 2 / (1 + \nu).$$

Материал 4 – Алюминий

$$\begin{aligned}
 E &= 7.1 \times 10^4 \text{ МПа}, \quad G = 2.84 \times 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.25, \\
 \alpha &= -0.5, \quad \lambda_\nu = 6.15 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_\nu = 6.65 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Материал 5 – Медь

$$\begin{aligned}
 E &= 12.3 \times 10^4 \text{ МПа}, \quad G = 4.92 \times 10^4 \text{ МПа}, \quad \nu = 0.25, \\
 \alpha &= -0.5, \quad \lambda_\nu = 6.65 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_\nu = 9.2 \times 10^{-3} c^{-(1+\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Модули Юнга E для изотропных материалов взяты из работы [150], а коэффициент Пуассона и реологические характеристики α , λ_ν и β_ν из работ [247, 253]. Соответствующие операторы даны соотношениями (2.44) и (2.45).

Для ортотропных материалов, представленных соотношениями (2.57) и (2.58), было предложено положить $\bar{\nu}_{ik} = \nu_{ik} = const$. Однако, используя представления (2.53), операторы $\bar{\nu}_{ik}$ можно определить через \bar{E}_i . Так, например, полагая $\nu_{13}/E_1 = \nu_{23}/E_2 = \nu_{12}/E_1$ [96], $\bar{\nu}_{12}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{12} &= \frac{\nu_{12}}{E_1} \bar{E}_1 + \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{1}{\bar{E}_2} - \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) \bar{E}_1 \right] = \\ &= \nu_{12} \left[1 + \lambda_{12} \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_{12}) + \lambda'_{12} \mathfrak{A}_\alpha^*(-\beta_2) \right],\end{aligned}\quad (2.62)$$

где $\lambda_{12} = \frac{\lambda_1}{4\nu_{12}} \left(1 - 4\nu_{12} - \frac{E_1 \lambda_2}{E_2 (\beta_2 - \beta_1 - \lambda_1)} \right)$,

$$\lambda'_{12} = \frac{E_1 \lambda_2}{4\nu_{12} E_2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\beta_2 - \beta_1 - \lambda_1} \right), \quad \beta_{12} = \beta_1 + \lambda_1.$$

Операторы (2.45) и (2.62) могут восполнить недостающие данные для представленных выше материалов.

2.4. Метод временных параметров уравнений закона Гука

В подразделе 1.1 было указано на то, что непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно-деформированного состояния анизотропных сред является весьма затруднительным, поскольку упругое решение таких задач содержит иррациональные или трансцендентные функции от упругих постоянных. Это делает невозможным непосредственное использование алгебры резольвентных операторов к расшифровке соответствующих операторов. Поэтому для решения задач вязкоупругости необходимо строить различные приближенные методы.

В этом подразделе предлагается метод решения задач теории вязкоупругости, основанный на использовании временных параметров уравнений закона Гука, полученных из уравнений состояния (2.11) – (2.16).

Для установления связи между интегральными операторами (2.26) и функциями ползучести и релаксации рассматривается способ определения этих функций.

В опыте на ползучесть мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными напряжения [76, 145]

$$s(t) = \sigma h(t), \quad (2.63)$$

где $h(t)$ – функция Хевисайда (2.4),

$\sigma = s_k(t=0) = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6]^T$ – вектор-столбец напряжений констант.

Интегрирование уравнения (2.12) в этом случае дает

$$e(t) = P(t) \sigma. \quad (2.64)$$

По формуле (2.64) определяются значения функции $P(t)$ по величине измеренной деформации во времени. Уравнение (2.15) с учетом (2.64) станет таким

$$\sigma = \int_0^t R(t-\tau) \frac{dP(\tau)}{d\tau} \sigma d\tau. \quad (2.65)$$

Приравнивая выражения при напряжениях σ , находятся соотношения между функциями ползучести $P(t)$ и релаксации $R(t)$

$$I = \int_0^t R(t-\tau) \frac{dP(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.66)$$

где I – единичная матрица.

Из уравнения (2.66) находится функция релаксации $R(t)$, соответствующая функции $P(t)$, найденной из эксперимента на ползучесть.

В опыте на релаксацию мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными деформации [76, 145]

$$e(t) = \varepsilon h(t), \quad (2.67)$$

где $\varepsilon = e_k(t=0) = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6]^T$ – вектор-столбец деформаций констант.

Интегрирование уравнения (2.11) в этом случае дает

$$s(t) = R(t) \varepsilon. \quad (2.68)$$

По формуле (2.68) определяются значения функции $R(t)$ по величине измеренных напряжений во времени. Уравнение (2.16) с учетом (2.68) станет таким

$$\varepsilon = \int_0^t P(t-\tau) \frac{dR(\tau)}{d\tau} \varepsilon d\tau. \quad (2.69)$$

Приравнявая выражения при деформациях ε , находятся соотношения между функциями релаксации $R(t)$ и ползучести $P(t)$

$$I = \int_0^t P(t-\tau) \frac{dR(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (2.70)$$

Из уравнения (2.70) находится функция ползучести $P(t)$, соответствующая функции $R(t)$, найденной из опыта на релаксацию.

2.4.1. Численное представление решений интегральных уравнений. Решение уравнения (2.66) можно получить численным методом. В этом случае нет необходимости использования аналитической аппроксимации экспериментальных значений функции $P(t)$. Пусть временной отрезок $[0, t]$ разбит на N равных интервалов длиной h точками, соответствующими временам $t_0 = 0, t_1 = h, \dots, t_i = ih, \dots, t_N = t$, и пусть P_0, P_1, \dots, P_N – экспериментально найденные значения функции ползучести $P(t)$ в этих точках. Тогда соотношение (2.66) в точках сетки можно приближенно записать в следующем виде

$$I = \sum_{i=0}^n R_{n-i} (P_i - P_{i-1}), \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (2.71)$$

где $P_i = P(t_i)$, $R_{n-i} = R(t_n - t_i)$ – значения функций в точке $\tau = t_i$.

При этом значение $P_{i-1} = P(t_{i-1})$ при отрицательном значении индекса равно нулю. Из (2.71) с учетом изложенного, получается

$$R_n = \left(I - \sum_{i=1}^n R_{n-i} (P_i - P_{i-1}) \right) A \quad (n = 0, 1, \dots, N). \quad (2.72)$$

С помощью представлений (2.72) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находятся функции релаксации.

Решение уравнения (2.70) осуществляется аналогичным образом. В результате получается

$$P_n = \left(I - \sum_{i=1}^n P_{n-i} (R_i - R_{i-1}) \right) a \quad (n = 0, 1, \dots, N). \quad (2.73)$$

Из полученного соотношения по заданным функциям релаксации в точках сетки находятся функции ползучести.

Таким образом, соотношения (2.72) и (2.73) полностью решают задачу обращения уравнений (2.11) или (2.12).

Следует отметить, что при использовании формул (2.72) или (2.73) для увеличения точности вычислений необходимо осуществить математическую обработку табличных данных, то есть провести сглаживание кривой и увеличить число точек N разбиения отрезка $[0, t]$.

2.4.2. Метод сглаживания и восполнения таблиц экспериментальных данных. Функции ползучести $P(t)$ или релаксации $R(t)$ строятся на основании табличных данных, которые определяются при проведении эксперимента. Таблица экспериментальных данных может содержать погрешности измерений, которые обусловлены различными причинами, в том числе связанными с длительностью интервалов замеров изменения деформаций или напряжений. Поэтому данные таблицы должны подлежать определенной математической обработке. Эта задача тесно связана с задачей сглаживания и восполнения, когда по заданным точкам измерения (t_k, ε_k) необходимо провести гладкую кривую $w(t)$ при минимальной погрешности. При этом в качестве функции $w(t)$ выбирают выражение, которое соответствует ожидаемому поведению рассматриваемого физического

процесса. Установлено, что функции ползучести $\varepsilon_k = P(t_k)$ должны быть монотонно возрастающими, а функции релаксации $\sigma_k = R(t_k)$ – монотонно убывающими функциями времени [76, 145]. Если уровень нагрузок меньше предела прочности материала, то развитие деформаций практически полностью прекращается при достижении определенного времени. В этом случае имеет место затухающий процесс, а представление для функции $w(t)$ следует выбирать в виде ряда, содержащего затухающую экспоненциальную функцию, т.е.:

$$w(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^m a_k t^{\alpha k} \right) e^{-\beta t^\alpha}. \quad (2.74)$$

В представлении (2.74) подлежат определению величины α , β и a_k , а процесс аппроксимации носит название – нелинейное приближение.

Пусть на отрезке $[0, t]$ задана дискретная сетка значений временной переменной t : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. В узлах сетки даны экспериментально полученные значения функции $\varepsilon(t)$: $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \varepsilon(t)$. Необходимо осуществить вычисление величин α , β и a_k так, чтобы функция (2.74) сглаживала кривую, заданную таблицей и, используя эту функцию, провести восполнение таблицы.

Алгоритм сглаживания таблицы исходных экспериментальных данных основан на использовании дискретного метода наименьших квадратов. Для этого требуется, чтобы искомая сглаживающая функция минимизировала функционал

$$\Phi(a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha, \beta) = \sum_{p=0}^n [w(t_p) - \varepsilon_p]^2. \quad (2.75)$$

Приравнявая производные по коэффициентам a_k нулю, получается система линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов. Эта система решается при варьировании величин α и β для достижения выполнения условия (2.75). После поиска постоянных α , β и a_k определена функция, позво-

ляющая осуществить гладкое восполнение сеточных значений в любой точке отрезка $[0, t]$.

В качестве примера проведена обработка данных эксперимента, приведенного в работе [241] для стеклотекстолита ТС8/3-250. Опыты выполнены при постоянной нагрузке. Рассмотрен случай, когда уровень нагрузки равен 0,3 от предела прочности σ_p материала для наиболее показательного направления ($\theta = 45^\circ$) к основе ткани. Испытания проводились до практически полного прекращения развития деформаций. Данные работы [241] для указанного случая, отнесенные к величине ε_0 , приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

t , час	0	12	24	48	120	240	360	504
$\varepsilon_k / \varepsilon_0$	1,000	1,200	1,271	1,336	1,432	1,542	1,632	1,684
t , час	624	744	864	1008	1128	1248	1320	1400
$\varepsilon_k / \varepsilon_0$	1,736	1,755	1,774	1,826	1,832	1,838	1,839	1,839

Для параметра $m = 4$ функция наилучшего приближения (2.74) получена при таких параметрах:

$$\alpha = 0,476; \quad \beta = 0,068; \quad a = [0,1503; 0,0005; 0,0003; 0].$$

На рисунке 2.2, а) кружочками отмечены данные таблицы 2.1, а сплошной линией дана кривая функции ползучести (2.74). На рисунке 2.2, б) приведена кривая релаксации, соответствующая кривой рисунка 2.2 а) и вычисленная по формулам (2.72). Точность вычислений контролировалась перерасчетом по формулам (2.73). Вычисленные значения таблицы сравнивались со значениями исходной таблицы P_k поточечно. В результате максимальная по абсолютному значению погрешность имела порядок 10^{-15} .

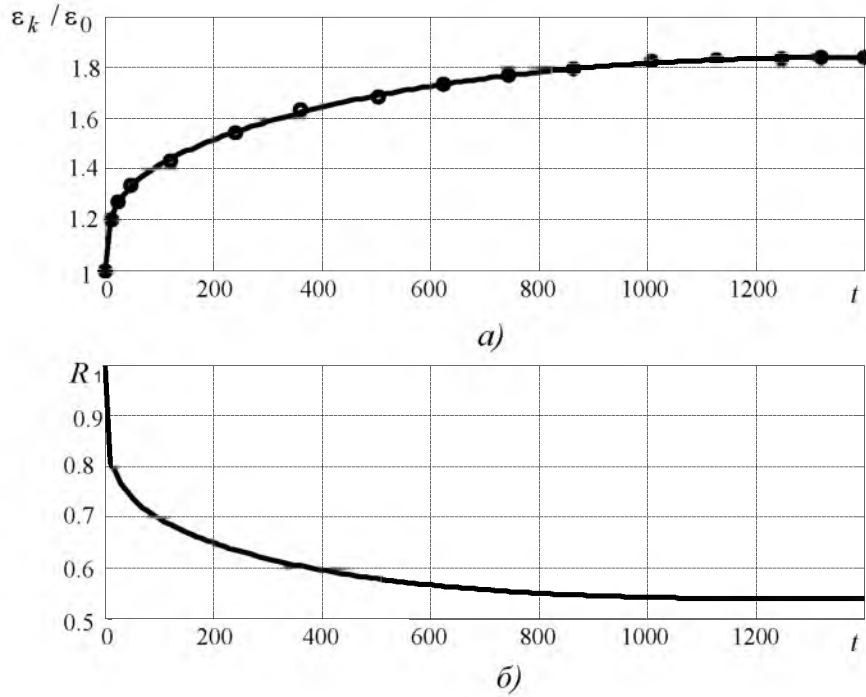


Рис. 2.2

2.4.3. Установление связи между интегральными операторами и функциями ползучести и релаксации. Матричные уравнения (2.64) и (2.68) можно записать в форме

$$e_i = P_{ij}(t) s_j \quad \text{или} \quad s_i = R_{ij}(t) e_j \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad (2.76)$$

где $P_{ij} = a_{ij} p_{ij}(t)$, $R_{ij} = A_{ij} r_{ij}(t)$.

Для случая когда из эксперимента на ползучесть определена матрица функций ползучести $P_{ij}(t)$ необходимо взять представление $e_i = \bar{a}_{ij} s_j = a_{ij} (1 + p_{ij}^*) s_j$ из (2.25) и сравнить его с соответствующим соотношением представления (2.76). В результате, с учетом (2.29) получается

$$p_{ij}(t) = 1 + p_{ij}^* = 1 + \lambda_{ij}^p \mathfrak{E}_{\alpha_{ij}^p}^* (-\beta_{ij}^p). \quad (2.77)$$

Соотношения (2.77) позволяют, путем аппроксимации, по заданным функциям ползучести $p_{ij}(t)$, определить значения интегральных операторов

$\lambda_{ij}^p \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^p}^* (-\beta_{ij}^p)$. Временная матрица уравнений закона Гука в момент времени $t = t_n$ определяются соотношениями

$$\mathbf{P}_n = \bar{a}_{ij} = a_{ij} \left[1 + \lambda_{ij}^p \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^p}^* (-\beta_{ij}^p) \right]. \quad (2.78)$$

Матрица $\bar{A}_{ij} = \mathbf{R}_n$ находится по формуле (2.72).

Далее рассмотрим случай, когда из эксперимента на релаксацию определена матрица функций релаксации $R_{ij}(t)$. В этом случае необходимо взять представление $s_i = \bar{A}_{ij} e_j = A_{ij} (1 - r_{ij}^*) e_j$ из (2.25) и сравнить его с соответствующим соотношением представления (2.76). В результате имеем

$$r_{ij}(t) = 1 - r_{ij}^* = 1 - \lambda_{ij}^r \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^r}^* (-\beta_{ij}^r). \quad (2.79)$$

Соотношения (2.79) позволяют, путем аппроксимации, по заданным функциям релаксации $r_{ij}(t)$, определить значения интегральных операторов $\lambda_{ij}^r \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^r}^* (-\beta_{ij}^r)$. Временная матрица уравнений закона Гука в момент времени $t = t_n$ определяются соотношениями

$$\mathbf{R}_n = \bar{A}_{ij} = A_{ij} \left[1 - \lambda_{ij}^r \mathcal{E}_{\alpha_{ij}^r}^* (-\beta_{ij}^r) \right]. \quad (2.80)$$

Матрица $\bar{a}_{ij} = \mathbf{P}_n$ находится по формуле (2.73).

Дальнейшее решение задач теории вязкоупругости в любой момент времени ничем не отличается от решения задач теории упругости.

Как правило, опыты на ползучесть и релаксацию осуществляются при одноосном растяжении, сжатии, изгибе или сдвиге. Они являются базовыми экспериментами, которые необходимы для определения ядер ползучести и релаксации вязкоупругих материалов. В одномерном случае при одноосном усилии s_j соотношение (2.12) распадается на элементы

$$e_i = a_{ij} (1 + p_{ij}^*) s_j, \quad (i = \overline{1,6}) \quad (2.81)$$

где a_{ij} – мгновенные коэффициенты деформации, соответствующие элементам упругого закона Гука; $p_{ij}^* s_j(t)$ – интегральный оператор Вольтерра I рода

$$p_{ij}^* s_j(t) = \int_0^t \frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_j(\tau) d\tau. \quad (2.82)$$

Пусть p_{ij}^* интегральный оператор Вольтерра, а $\frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ его ядро. Если λ – регулярная точка [160], то оператор $(1 + \lambda p_{ij}^*)^{-1} = 1 - \lambda r_{ij}^*(-\lambda)$, называется обратным или резольвентой, а оператор $r_{ij}^*(-\lambda)$ – резольвентным для p_{ij}^* . Ядро этого оператора $\frac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ называется резольвентой ядра $\frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$. В данном случае функцию $\frac{dp_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ называют ядром ползучести, а $\frac{dr_{ij}(t-\tau)}{d(t-\tau)}$ – ядром релаксации.

Интегральные операторы вязкоупругости являются взаимно резольвентными. Это следует из однозначной взаимнообратимости уравнений состояния (2.11) и (2.12).

Уравнения (2.81) являются интегральными уравнениями Вольтерра II рода. Решения уравнений (2.81) можно представить в форме

$$s_j(t) = a_{ij}^{-1} (1 - r_{ij}^*) e_i(t) \quad (a_{ij} \neq 0). \quad (2.83)$$

Здесь r_{ij}^* – резольвентный оператор Вольтерра.

2.5. Новый подход к определению значений ядер ползучести и релаксации

Необходимо отметить, что аппроксимация экспериментально найденной кривой ползучести является источником дополнительных погрешностей. Так, ядро вида $\lambda \mathcal{E}_\alpha(-\beta; t - \tau)$ имеет произвол, содержащий всего три константы λ , α и β . Это обстоятельство не всегда позволяет построить функцию, хорошо описывающую экспериментально найденные величины на достаточно большом временном интервале. Результаты аппроксимации, приведенные в работе [44], показали, что погрешность в отдельных случаях достигала тридцати процентов. Поэтому, точное описание вязко упругих свойств реальных тел должно приводить к операторам с ядром более сложной природы. Для таких операторов построение резольвенты в аналитической форме наталкивается на непреодолимые трудности. В работах Громова В. Г. [53] и Победри Б.Е. [232] показано, что построение алгебры операторов Вольтерра не связано с каким либо их специальным видом и может быть осуществлено для любых резольвентных операторов. Это обстоятельство делает возможным реализацию решений граничных задач теории вязкоупругости во времени проводить алгебраическими методами. Решение может быть осуществлено с использованием произвольных исходных операторов и выражено через значения этих операторов, заданных непосредственно таблицей экспериментальных данных.

В работах [187, 188, 274, 276] предложен новый подход к решению таких задач. Предлагаемый подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Метод основан на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды. Соответствующие решения представлены соотношениями (2.72) и (2.73). Численное определение резольвент интегральных уравнений предполагает работу с табличными данными, заданными на достаточно густой сетке. Поэтому в п. 2.4.2. предлагается способ сглаживания и восполнения таблицы экспериментальных данных. На ос-

нове таких таблиц строятся матрицы уравнений состояния, элементы которых имеют явную зависимость от времени. Эти соотношения получены на основе алгебры резольвентных операторов Вольтерра, которые не связаны с каким-либо специальным видом ядер. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени приводится к тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости.

В этом подразделе предлагается метод, не требующий аналитического задания ядер ползучести и релаксации.

Из факта взаимной резольвентности интегральных операторов вязкоупругости и свойств (1.4) – (1.6) следует, что при решении граничных задач вязкоупругости нет необходимости строить конкретный вид резольвентных операторов и изучать их свойства. Процедура построения решения связана с алгебраическими свойствами операторов и может быть осуществлена независимо от их вида. Решение выражается через значения резольвентного оператора. Необходимо показать, что реализация решений граничных задач вязкоупругости может быть осуществлена, без каких либо конкретных аналитических заданий исходных операторов.

В п. 2.4.3. установлена связь между интегральными операторами Работнова и функциями ползучести и релаксации. В настоящем подразделе показан другой способ, не связанный с введением операторов специального вида.

Возможности расшифровки произвольных операторов рассмотрены на примере, приведенном в п.п. 2.2.3.5. Если не вводить функций Работнова, то кривые ползучести для коэффициента Пуассона (2.44) можно записать в форме

$$\bar{\nu} \cdot 1 = \nu \left(1 + p_{\nu}^* \cdot 1 \right) = \nu p_{\nu}(t), \quad (2.84)$$

где $p_{\nu}(t)$ – функция ползучести, найденная в результате эксперимента.

Отсюда находятся значения действия оператора на единицу

$$p_{\nu}^* \cdot 1 = p_{\nu}(t) - 1. \quad (2.85)$$

Такой же результат получается из соотношения (2.77) если принять для индексов ij обозначение ν .

Из зависимостей (2.43) находится

$$\bar{E} \cdot 1 = E \left(1 - \lambda_E p_\nu^* \cdot 1 \right) = E r_E(t), \quad \lambda_E = 2\nu / (1 - 2\nu). \quad (2.86)$$

Здесь функция релаксации $r_E(t)$ для модуля Юнга определилась через функцию ползучести $p_\nu(t)$ для коэффициента Пуассона посредством формулы (2.85).

В соответствии с алгеброй операторов (1.4) – (1.6) определяется оператор, обратный оператору (2.86)

$$\frac{1}{\bar{E}} \cdot 1 = \frac{1}{E} \left[1 + \lambda_E p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1 \right] = \frac{1}{E} p_E(t). \quad (2.87)$$

Функция ползучести $p_E(t)$, соответствующая функции релаксации $r_E(t)$ находится из соотношения (2.73), которое в одномерном случае будет таким

$$p_E(t_n) = 1 - \sum_{k=1}^n p_E(t_{n-k}) \left[r_E(t_k) - r_E(t_{k-1}) \right] \quad (n = 0, 1, \dots, N). \quad (2.88)$$

Значения действия оператора $p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1$ находится из соотношения (2.87)

$$p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1 = \left[p_E(t) - 1 \right] / \lambda_E. \quad (2.89)$$

Алгоритм определения значений действия на единицу последующих операторов приведен ниже без подробных комментариев.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \cdot 1 &= \frac{\nu}{E} \left[1 + \frac{1}{1-2\nu} p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1 \right] = \frac{\nu}{E} \left[1 + \frac{1}{1-2\nu} (p_E(t) - 1) / \lambda_E \right], \\ \frac{1}{\bar{G}} \cdot 1 &= \frac{1}{G} \left[1 + \lambda_G p_\nu^*(\lambda_E) \cdot 1 \right] = \frac{1}{G} p_G(t), \quad \lambda_G = \lambda_E + \nu / (1 + \nu), \\ \bar{G} \cdot 1 &= G \left(1 - \lambda_G p_\nu^*(\beta_G) \cdot 1 \right) = G r_G(t), \quad \beta_G = \lambda_E - \lambda_G, \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$r_G(t_n) = 1 - \sum_{k=1}^n r_G(t_{n-k}) \left[p_G(t_k) - p_G(t_{k-1}) \right] \quad (n = 0, 1, \dots, N),$$

$$p_\nu^*(\beta_G) \cdot 1 = \left[1 - r_G(t) \right] / \lambda_G;$$

$$\bar{k} \cdot 1 = k(1 - \lambda_k p_v^*(\beta_G) \cdot 1) = k r_k(t), \quad \lambda_k = 4\nu / (1 + \nu) / (3 - \nu),$$

$$\frac{1}{\bar{k}} \cdot 1 = \frac{1}{k} [1 + \lambda_k p_v^*(\beta_k) \cdot 1] = \frac{1}{k} p_k(t), \quad \beta_k = \beta_G + \lambda_k,$$

(2.91)

$$p_k(t_n) = 1 - \sum_{i=1}^n p_k(t_{n-i}) [r_k(t_i) - r_k(t_{i-1})] \quad (n = 0, 1, \dots, N),$$

$$p_v^*(\beta_k) \cdot 1 = -[1 - p_k(t)] / \lambda_k;$$

$$\frac{\bar{k}}{\bar{G}} \cdot 1 = \frac{k}{G} [1 + \lambda_{kG} p_v^*(\lambda_E) \cdot 1] = \frac{k}{G} p_{kG}(t), \quad \lambda_{kG} = \lambda_G - \lambda_k,$$

$$\frac{\bar{G}}{\bar{k}} \cdot 1 = \frac{G}{k} [1 - \lambda_{kG} p_v^*(\beta_{Gk}) \cdot 1] = \frac{G}{k} r_{kG}(t), \quad \beta_{Gk} = \lambda_E - \lambda_{kG},$$

(2.92)

$$r_{kG}(t_n) = 1 - \sum_{k=1}^n r_{kG}(t_{n-k}) [p_{kG}(t_k) - p_{kG}(t_{k-1})] \quad (n = 0, 1, \dots, N),$$

$$p_v^*(\beta_{kG}) \cdot 1 = [1 - r_{kG}(t)] / \lambda_{kG}.$$

Соотношения (2.84) – (2.92) связывают значения действий интегральных операторов $p_v^*(\dots) \cdot 1$ с функциями ползучести и релаксации $p_{\dots}(t)$ и $r_{\dots}(t)$, заданными таблично.

Таким образом, решение граничных задач вязкоупругости сводится к решению задач теории упругости в произвольный момент времени. При этом уравнения закона Гука заменяются уравнениями состояния (2.11), (2.12), которые в результате интегрирования принимают вид (2.64) и (2.68), соответственно. Следует отметить, что уравнения состояния (2.64) необходимо использовать в том случае, когда на границе тела заданы нагрузки, а уравнения (2.68) – когда заданы перемещения или деформации. В следующем разделе будет рассмотрена апробация предложенного метода на примере решения граничных задач в условиях обобщенного плоского напряженного состояния тонкой анизотропной пластины.

2.6. Выводы по разделу 2

В данном разделе предложен новый численно-аналитический метод исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния анизотропных сред. Предлагаемый подход не требует построения аналитического представления ядер ползучести и релаксации в специальной форме. Метод основан на численном определении резольвент интегральных уравнений состояния среды. Численное определение резольвент интегральных уравнений предполагает работу с табличными данными, заданными на достаточно густой сетке. Для этого предлагается способ сглаживания и восполнения таблицы экспериментальных данных. На основе таких таблиц строятся матрицы уравнений состояния, элементы которых имеют явную зависимость от времени. Эти соотношения получены на основе алгебры резольвентных операторов Вольтерра, которые не связаны с каким-либо специальным видом ядер. Решение задач вязкоупругости в произвольный момент времени приводится к тем же алгоритмам, которые используются в теории упругости.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [187, 188, 189, 192, 193, 198, 274, 276].

РАЗДЕЛ 3

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПОЗУЧЕСТИ

В этом разделе приведена полная система трехмерных уравнений статической теории упругости анизотропной среды. Решение для случая обобщенного плоского напряженного состояния тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием использовано для исследования задач вязкоупругости.

3.1. Уравнения трехмерной теории упругости анизотропного тела

Рассматривается однородное упругое тело, обладающее анизотропией общего вида и отнесенное к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Наиболее общая форма линейно-упругих соотношений напряжения – деформации (закон Гука) имеет вид [157]

$$\sigma = A \varepsilon \quad \text{или} \quad \varepsilon = a \sigma, \quad a = A^{-1}. \quad (3.1)$$

Здесь $A = A_{ij}$, $a = a_{ij}$ – матрицы модулей упругости и коэффициентов деформации. Для представления уравнений закона Гука в компактной форме, введены эквивалентные обозначения компонент векторов напряжений и деформаций

$$\sigma = \left[\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \sigma_{x_3}, \sigma_{x_2x_3}, \sigma_{x_1x_3}, \sigma_{x_1x_2} \right]^T = \left[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6 \right]^T, \\ \varepsilon = \left[\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \varepsilon_{x_3}, \gamma_{x_2x_3}, \gamma_{x_1x_3}, \gamma_{x_1x_2} \right]^T = \left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6 \right]^T. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1) можно записать также в виде

$$\sigma_i = A_{ij} \varepsilon_j \quad \text{или} \quad \varepsilon_i = a_{ij} \sigma_j \quad (i, j = \overline{1,6}), \quad (3.3)$$

где используется суммирование по повторяющимся индексам.

Приведенные уравнения закона Гука вместе с уравнениями равновесия

$$\begin{aligned}
\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 + \partial_3\sigma_5 + X &= 0, \\
\partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 + \partial_3\sigma_4 + Y &= 0, \\
\partial_1\sigma_5 + \partial_2\sigma_4 + \partial_3\sigma_3 + Z &= 0
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

и уравнениями связи между составляющими деформации и перемещений

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_2 = \partial_2 u_2, \quad \varepsilon_3 = \partial_3 u_3, \quad \varepsilon_4 = \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2, \\
\varepsilon_5 &= \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1, \quad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

образуют полную систему дифференциально-алгебраических соотношений, описывающих упругие процессы в анизотропных средах. В соотношениях (3.4) и (3.5) введены обозначения: $\partial_i = \partial / \partial x_i$ ($i = \overline{1,3}$); X, Y, Z – проекции объемных сил, отнесенных к единице объема, на направления координатных осей; u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений на оси координат.

Наличие алгебраических соотношений между искомыми функциями позволяет упростить систему дифференциальных уравнений, которую нужно решать в конкретной задаче. Действительно, если, например, найдены компоненты вектора смещений u_1, u_2, u_3 , то путем дифференцирования по формулам (3.5) можно найти деформации. Напряжения затем находятся алгебраическим путем из уравнений (3.3).

Уравнения (3.3) – (3.5) можно преобразовать, если выбрать в качестве неизвестных функций вектор упругих перемещений $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$. Для этого значения напряжений из (3.3), с учетом соотношений (3.5), подставляются в уравнения равновесия (3.4). В результате получается систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 + X &= 0, \\
L_{21}u_1 + L_{22}u_2 + L_{23}u_3 + Y &= 0, \\
L_{31}u_1 + L_{32}u_2 + L_{33}u_3 + Z &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{11} &= A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2 + 2(A_{15}\partial_1 + A_{56}\partial_2)\partial_3 + A_{55}\partial_3^2, \\
L_{22} &= A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2 + 2(A_{46}\partial_1 + A_{42}\partial_2)\partial_3 + A_{44}\partial_3^2, \\
L_{33} &= A_{55}\partial_1^2 + 2A_{45}\partial_1\partial_2 + A_{44}\partial_2^2 + 2(A_{53}\partial_1 + A_{43}\partial_2)\partial_3 + A_{33}\partial_3^2, \\
L_{12} &= L_{21} = A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{62}\partial_2^2 + \\
&\quad + [(A_{14} + A_{56})\partial_1 + (A_{52} + A_{46})\partial_2]\partial_3 + A_{54}\partial_3^2, \\
L_{13} &= L_{31} = A_{15}\partial_1^2 + (A_{14} + A_{65})\partial_1\partial_2 + A_{64}\partial_2^2 + \\
&\quad + [(A_{13} + A_{55})\partial_1 + (A_{63} + A_{54})\partial_2]\partial_3 + A_{53}\partial_3^2, \\
L_{23} &= L_{32} = A_{65}\partial_1^2 + (A_{64} + A_{25})\partial_1\partial_2 + A_{24}\partial_2^2 + \\
&\quad + [(A_{45} + A_{63})\partial_1 + (A_{23} + A_{44})\partial_2]\partial_3 + A_{43}\partial_3^2.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Дифференциальные уравнения (3.6) с операторами (3.7) описывают поведение упругой среды в самом общем случае анизотропии.

3.2. Обобщенное плоское напряженное состояние тонкой пластины

3.2.1. Основные соотношения. Рассматривается упругое равновесие анизотропной пластины толщиной $2h$. Декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ расположена так, что срединная плоскость пластины совпадает с плоскостью Ox_1x_2 , а ось Ox_3 перпендикулярна к срединной плоскости. Внешние усилия приложены к боковым поверхностям. На свободных от нагружения плоских гранях граничные условия имеют вид

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h.$$

Задачу об упругом равновесии пластины можно разделить на две задачи, в зависимости от того какая приложена к ней нагрузка, симметричная или косо-

симметричная относительно ее срединной плоскости. При симметричной деформации получается задача растяжения-сжатия, а при кососимметричной – задача изгиба [138, 159]. Такое разделение дает возможность изучать каждую задачу в отдельности.

В данном разделе рассматривается задача растяжения-сжатия. Предполагается, что усилия, приложенные к краю, действуют в плоскостях, параллельных срединной плоскости, распределены симметрично относительно ее и не меняются по толщине. Из соображений симметрии следует, что в этом случае перемещения u_1 , u_2 и напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_6 – будут четными по переменной x_3 , а u_3 , σ_4 , σ_5 – нечетными. Вводятся в рассмотрение средние по толщине значения перемещений, деформаций и напряжений, которые определяются как интегралы от соответствующих величин, взятые по толщине и деленные на толщину пластины:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \mathbf{u} \, dx_3 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h [u_1, u_2, u_3] \, dx_3 = [u_1^*, u_2^*, 0], \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \boldsymbol{\varepsilon} \, dx_3 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6] \, dx_3 = [\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \varepsilon_3^*, 0, 0, \varepsilon_6^*], \\ \boldsymbol{\sigma}^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \boldsymbol{\sigma} \, dx_3 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6] \, dx_3 = [\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*, 0, 0, \sigma_6^*]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Напряженное состояние пластины в этом случае называют обобщенным плоским напряженным состоянием [154]. Срединная плоскость при деформации не искривляется, остается плоской. При обобщенном плоском напряженном состоянии пластины напряжения σ_3^* , σ_4^* и σ_5^* полагаются равными нулю [154].

Первое, второе и шестое уравнения (3.3) представимы в виде

$$\begin{aligned} \sigma_i &= (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2 + A_{i5}\partial_3)u_1 + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2 + A_{i4}\partial_3)u_2 + \\ &\quad + (A_{i5}\partial_1 + A_{i4}\partial_2 + A_{i3}\partial_3)u_3. \end{aligned}$$

Для средних по толщине пластинки напряжений, с учетом соотношений (3.8)

получается

$$\sigma_i^* = (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2) u_1^* + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2) u_2^* + A_{i3} \varepsilon_3^*. \quad (3.9)$$

Выражения для напряжений σ_3^* , σ_4^* и σ_5^* запишутся так

$$\sigma_3^* = (A_{31}\partial_1 + A_{36}\partial_2) u_1^* + (A_{36}\partial_1 + A_{32}\partial_2) u_2^* + A_{33} \varepsilon_3^* = 0; \quad (3.10)$$

$$\sigma_4^* = (A_{41}\partial_1 + A_{46}\partial_2) u_1^* + (A_{46}\partial_1 + A_{42}\partial_2) u_2^* + A_{43} \varepsilon_3^* = 0,$$

$$\sigma_5^* = (A_{51}\partial_1 + A_{56}\partial_2) u_1^* + (A_{56}\partial_1 + A_{52}\partial_2) u_2^* + A_{53} \varepsilon_3^* = 0. \quad (3.11)$$

Для удовлетворения условиям (3.11), полагается

$$A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{51} = A_{52} = A_{53} = A_{56} = A_{46} = 0.$$

Матрица A_{ij} станет такой

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & A_{36} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует пластине с плоскостью упругой симметрии [154]. Таким образом, обобщенное плоское напряженное состояние может быть реализовано для пластин, изготовленных из изотропных, трансотропных, ортотропных и имеющих плоскость упругой симметрии материалов.

Из уравнения (3.10) находится

$$\varepsilon_3^* = - \left[\frac{A_{31}}{A_{33}} \varepsilon_1^* + \frac{A_{32}}{A_{33}} \varepsilon_2^* + \frac{A_{36}}{A_{33}} \varepsilon_6^* \right]. \quad (3.12)$$

Тогда напряжения (3.9) примут вид

$$\sigma_i^* = (B_{i1}\partial_1 + B_{i6}\partial_2) u_1^* + (B_{i6}\partial_1 + B_{i2}\partial_2) u_2^* = B_{i1}\varepsilon_1^* + B_{i2}\varepsilon_2^* + B_{i6}\varepsilon_6^*,$$

где

$$B_{i1} = A_{i1} - \frac{A_{i3}A_{31}}{A_{33}}, \quad B_{i2} = A_{i2} - \frac{A_{i3}A_{32}}{A_{33}}, \quad B_{i6} = A_{i6} - \frac{A_{i3}A_{36}}{A_{33}}.$$

С учетом того, что напряжения $\sigma_3^* = \sigma_4^* = \sigma_5^* = 0$ и деформации $\varepsilon_4^* = \varepsilon_5^* = 0$, уравнения закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния пластины можно записать так

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1}. \quad (3.13)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6]^T, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что здесь и далее при компонентах средних перемещений, напряжений и деформаций звездочки опущены.

Уравнения (3.13) можно записать также в виде

$$\sigma_i = B_{i1}\varepsilon_1 + B_{i2}\varepsilon_2 + B_{i6}\varepsilon_6 \quad (i = 1, 2, 6), \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_i = a_{i1}\sigma_1 + a_{i2}\sigma_2 + a_{i6}\sigma_6 \quad (i = 1, 2, 6). \quad (3.15)$$

Компонента ε_3^* определена соотношением (3.12), или эквивалентной ему формулой

$$\varepsilon_3^* = a_{31}\sigma_1^* + a_{32}\sigma_2^* + a_{36}\sigma_6^*. \quad (3.16)$$

Для доказательства эквивалентности представлений (3.16) и (3.12) необходимо подставить (3.15) в (3.12) и сравнить правые части полученного соотношения и формулы (3.16). В результате получится

$$a_{3i} = - \left[\frac{A_{31}}{A_{33}} a_{1i} + \frac{A_{32}}{A_{33}} a_{2i} + \frac{A_{36}}{A_{33}} a_{6i} \right] \quad (i = 1, 2, 6).$$

Из соотношения $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{I}$ вычисляются элементы E_{3i} единичной матрицы \mathbf{I}

$$E_{3i} = A_{31}a_{1i} + A_{32}a_{2i} + A_{33}a_{3i} + A_{36}a_{6i} = 0 \quad (i = 1, 2, 6).$$

Отсюда $a_{3i} = -(A_{31}a_{1i} + A_{32}a_{2i} + A_{36}a_{6i}) / A_{33}$, что и требовалось доказать.

Уравнения равновесия (3.4) без учета объемных сил и соотношения (3.5) для средних напряжений, перемещений и деформаций имеют вид

$$\partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_6 = 0, \quad \partial_1\sigma_6 + \partial_2\sigma_2 = 0; \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_1 = \partial_1u_1, \quad \varepsilon_2 = \partial_2u_2, \quad \varepsilon_6 = \partial_1u_2 + \partial_2u_1. \quad (3.18)$$

После подстановки представлений для напряжений (3.14) в уравнения (3.17), с учетом соотношений (3.18), получается система дифференциальных уравнений относительно функций перемещений

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 = 0, \quad L_{21}u_1 + L_{22}u_2 = 0, \quad (3.19)$$

где

$$L_{11} = B_{11}\partial_1^2 + 2B_{16}\partial_1\partial_2 + B_{66}\partial_2^2, \quad L_{22} = B_{66}\partial_1^2 + 2B_{26}\partial_1\partial_2 + B_{22}\partial_2^2,$$

$$L_{12} = L_{21} = B_{16}\partial_1^2 + (B_{12} + B_{66})\partial_1\partial_2 + B_{26}\partial_2^2. \quad (3.20)$$

3.2.2. Перемещения и напряжения в пластине с отверстием. Рассматривается решение задачи для неограниченной пластины, ослабленной отверстием, когда на бесконечности заданы усилия

$$\sigma_1^0 = p, \quad \sigma_2^0 = q, \quad \sigma_6^0 = l. \quad (3.21)$$

Из соотношений (3.15) и (3.17) находятся функции, определяющие перемещения и деформации в области без отверстий. Они представляются в форме

$$u_1^0 = \varepsilon_1^0 x_1 + \frac{\varepsilon_6^0}{2} x_2, \quad u_2^0 = \frac{\varepsilon_6^0}{2} x_1 + \varepsilon_2^0 x_2, \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_1^0 = a_{11}p + a_{12}q + a_{16}l, \quad \varepsilon_2^0 = a_{21}p + a_{22}q + a_{26}l, \quad \varepsilon_6^0 = a_{61}p + a_{62}q + a_{66}l.$$

Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет появления в пластине отверстий, описывается функциями $u_k^{00}(x_1, x_2)$, являющимися результа-

том интегрирования однородной системы (3.19). Для интегрирования этой системы удовлетворим второе уравнение системы, представив решение для функций перемещений в виде

$$u_1^{00} = L_{22}F, \quad u_2^{00} = -L_{21}F. \quad (3.23)$$

Функция $F(x_1, x_2)$ находится из первого уравнению системы (3.19), которое приводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21})F = 0. \quad (3.24)$$

Общее решение этого уравнения ищется в форме $F(x_1, x_2) = F(x_1 + \mu x_2)$ и зависит от корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3.24)

$$l_{11}(\mu)l_{22}(\mu) - l_{12}(\mu)l_{21}(\mu) = 0. \quad (3.25)$$

Величины l_{ik} получены из операторов (3.20) заменой операций дифференцирования ∂_1 и ∂_2 величинами 1 и μ соответственно.

Исходя из энергетических соображений, С.Г. Лехницкий доказал, что для всякого идеально упругого тела уравнение (3.25) не может иметь вещественных корней [157]. Нетрудно видеть, что левая часть уравнения (3.25) является полиномом четвертого порядка и его решение дает четыре комплексно – сопряженных корня

$$\mu_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad \bar{\mu}_j = \alpha_j - i\beta_j \quad (j = \overline{1, 2}).$$

После нахождения этих корней уравнение (3.24) можно записать в виде

$$\Delta_1 \Delta_2 F = 0, \quad (3.26)$$

где введены операторы

$$\Delta_j = \mu_j \bar{\mu}_j \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - (\mu_j + \bar{\mu}_j) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (3.27)$$

Если параметры μ_j различны, то общим решением уравнения (3.26) является представление

$$F = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (3.28)$$

где функции φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_j \varphi_j = 0 \quad (j = \overline{1,2}). \quad (3.29)$$

Общим действительным решением уравнения (3.29) будет выражение

$$\varphi_j = F_j(z_j) + \overline{F_j(z_j)}. \quad (3.30)$$

Здесь $F_j(z_j)$ – произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$.

Функция (3.28) с учетом решения (3.30) принимает вид

$$F = 2\operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \quad (3.31)$$

В случае изотропного тела модули упругости B_{ik} , отличные от нуля, имеют вид

$$B_{11} = B_{22} = E / (1 - \nu^2), \quad B_{12} = E\nu / (1 - \nu^2), \quad B_{66} = E / (1 + \nu) / 2,$$

где E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона.

Характеристическое уравнение (3.25), в этом случае принимает вид $1 + 2\mu^2 + \mu^4 = 0$, и имеет двукратные корни i и $-i$. Тогда операторы (3.27) уравнения (3.24) будут такими

$$\Delta_j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad (3.32)$$

а общее действительное решение представляется в форме [171]

$$F = 2\operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad z = x_1 + ix_2. \quad (3.33)$$

В такой же форме запишется уравнение и в случае попарно равных комплексных параметров $\mu_1 = \mu_2 = \alpha + i\beta$ [154]. Произведя аффинное преобразование $x_* = x_1 + \alpha x_2$, $y_* = \beta x_2$ придем к комплексной переменной $z = z_1 = z_2 = x_* + iy_*$. Этот вариант можно включить в дальнейшее рассмотрение как случай, представляющий собой полную аналогию изотропного тела.

Решение (3.33), для кратных корней, по форме отличается от общего решения (3.31), которое отвечает случаю общей анизотропии, когда корни μ_j различны. Это обстоятельство не позволяет производить численные исследования задач для изотропных и анизотропных тел по одним и тем же алгоритмам.

Далее предлагается привести решение задач для изотропного тела к задаче для анизотропного тела. Для этого в операторы (3.32) вводятся дополнительные слагаемые так, чтобы они приняли вид

$$\Delta_1 = (1 + \varepsilon)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_2 = (1 - \varepsilon)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

где ε – малый параметр.

Тогда бигармонический оператор превращается в обобщенный бигармонический. Корни характеристического уравнения μ_j теперь не являются кратными и имеют вид

$$\mu_1 = (1 + \varepsilon)i, \quad \mu_2 = (1 - \varepsilon)i, \quad \bar{\mu}_1 = -(1 + \varepsilon)i, \quad \bar{\mu}_2 = -(1 - \varepsilon)i,$$

а функция (3.33) запишется в форме (3.31).

В работе [141] показано, что метод замены бигармонического уравнения указанным обобщенным бигармоническим позволяет построить приближение для напряжений с точностью порядка ε^2 . Эта оценка подтверждается и данными численных исследований.

Представления (3.23) с учетом операторов (3.20) и найденного решения (3.31) можно записать в форме

$$u_k^{00} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 R_{kj} \Phi_j(z_j). \quad (3.34)$$

Здесь приняты обозначения: $\Phi_j(z_j) = d^2 F_j / dz_j^2$, $R_{kj} = R_{kj}^* / \Lambda_j(\mu_j)$,

$$R_{1j}^* = l_{22}(\mu_j) = B_{66} + 2B_{26}\mu_j + B_{22}\mu_j^2,$$

$$R_{2j}^* = -l_{21}(\mu_j) = -\left[B_{16} + (B_{12} + B_{66})\mu_j + B_{26}\mu_j^2 \right].$$

Значения величин $\Lambda_j(\mu_j)$ будут определены ниже.

В соответствии с решением (3.34), представления для напряжений (3.14) можно записать так:

$$\sigma_i^{00} = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 P_{ij} \Phi'_j(z_j) \quad (i=1,2,6). \quad (3.35)$$

Здесь введены обозначения

$$\Phi'_j = d\Phi_j / dz_j, \quad P_{ij} = P_{ij}^* / \Lambda_j,$$

$$P_{ij}^* = \left[B_{i1} R_{1j}^* + B_{i6} R_{2j}^* + \mu_j (B_{i2} R_{2j}^* + B_{i6} R_{1j}^*) \right].$$

Из уравнений равновесия (3.17) следует, что между величинами P_{ij} существуют следующие зависимости: $P_{1j} + P_{6j} \mu_j = 0$, $P_{6j} + P_{2j} \mu_j = 0$.

Если величины $\Lambda_j(\mu_j)$ выбрать в форме

$$\Lambda_1 = P_{21}^*, \quad \Lambda_2 = P_{22}^*,$$

то выражения для напряжений (3.35) можно записать в виде:

$$\sigma_1^{00} = 2 \operatorname{Re} \left(\mu_1^2 \Phi'_1 + \mu_2^2 \Phi'_2 \right),$$

$$\sigma_2^{00} = 2 \operatorname{Re} (\Phi'_1 + \Phi'_2), \quad (3.36)$$

$$\sigma_6^{00} = -2 \operatorname{Re} (\mu_1 \Phi'_1 + \mu_2 \Phi'_2).$$

Смещения и напряжения, отражающие влияние отверстий, выразились через

две функции обобщенных комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$. Плоскость Ox_1x_2 , в которой определены эти функции, будем называть областью S .

Функции $\Phi_j(z_j)$ должны быть такими, чтобы определенные ими в анизотропной среде напряжения и перемещения были однозначными функциями координат x_1 и x_2 , непрерывными вплоть до ее контуров. При этом на бесконечности они равны нулю.

Функции $\Phi_j(z_j)$ можно рассматривать как функции обычных комплексных переменных $z_j = x_j + i y_j$, где

$$x_j = x_1 + \alpha_j x_2, \quad y_j = \beta_j x_2, \quad \mu_j = \alpha_j + i \beta_j. \quad (3.37)$$

При этом комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)$ должны быть определены не в области S , а в областях S_j ($j = \overline{1,2}$), полученных из области S путем аффинных преобразований (3.37) [154].

3.3. Граничные условия на контуре пластины

3.3.1. Незакрепленный контур. Для исследования напряженного состояния пластины с неподкрепленным отверстием нужно определить функции $\Phi_j(z_j)$ из граничных условий на контуре отверстия [154]:

$$n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 = 0, \quad n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 = 0. \quad (3.38)$$

Здесь $\sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma_i^{00}$, где σ_i^0 – напряжения в сплошной пластине (3.21), а σ_i^{00} – компоненты напряжений (3.35) или (3.36), которые учитывают влияние отверстий; $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$, n – внешняя нормаль к контуру.

Подставляя в условия (3.38) значения для σ_i^{00} и σ_i^0 , после несложных преобразований можно получить граничные условия для нахождения функций $\Phi_j(z_j)$:

$$2\operatorname{Re}[\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2] = lx - py + c_1, \quad 2\operatorname{Re}[\Phi_1 + \Phi_2] = ly - qx + c_2. \quad (3.39)$$

3.3.2. Жестко подкрепленный контур. При жестко подкрепленном отверстии на его боковой поверхности нужно положить равными нулю перемещения [154]

$$u_k = 0 \quad (k = \overline{1,2}). \quad (3.40)$$

Здесь $u_k = u_k^0 + u_k^{00}$, где u_k^0 – перемещения (3.22), а u_k^{00} – проекции перемещений (3.34), которые учитывают влияние отверстий.

Из условий (3.40) получаются граничные условия для функций $\Phi_j(z_j)$:

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 R_{kj} \Phi_j(z_j) = -u_k^0. \quad (k = \overline{1,2}). \quad (3.41)$$

3.4. Пластина с эллиптическим отверстием

Рассматривается пластина, которая ослаблена отверстием эллиптического сечения с полуосями a и b . Уравнение контура в параметрической форме имеет вид

$$x_1 = a \cos \theta, \quad x_2 = b \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

После введения новой переменной

$$\sigma = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

уравнение контура $t = x_1 + i x_2$ запишется в форме

$$t = R\sigma + m/\sigma, \quad R = (a+b)/2, \quad m = (a-b)/2. \quad (3.42)$$

Уравнение эллиптического контура в комплексной форме (3.42) дает возможность записать функцию, отображающую внешность единичного круга на внешность эллиптического контура

$$z = R\zeta + \frac{m}{\zeta}, \quad \zeta = r\sigma, \quad r \geq 1.$$

Для определения напряженного состояния пластины вблизи отверстия необходимо из соответствующих граничных условий определить функции $\Phi_j(z_j)$, через которые находятся напряжения и перемещения.

Функции $\Phi_j(z_j)$ определены в областях S_j , которые получаются из заданной области S аффинными преобразованиями (3.37). При этом эллиптическому контуру L в областях S_j соответствуют эллипсы L_j , получающиеся из L растяжением (сжатием) области S и ее поворотом относительно осей. На рисунке 3.1 показано, как получается область S_j из области S .

Уравнение контура L_j в области S_j запишется так

$$t_j = x_1 + \mu_j x_2 = R_j \sigma + m_j / \sigma, \quad (3.43)$$

$$R_j = (a - i\mu_j b) / 2, \quad m_j = (a + i\mu_j b) / 2.$$

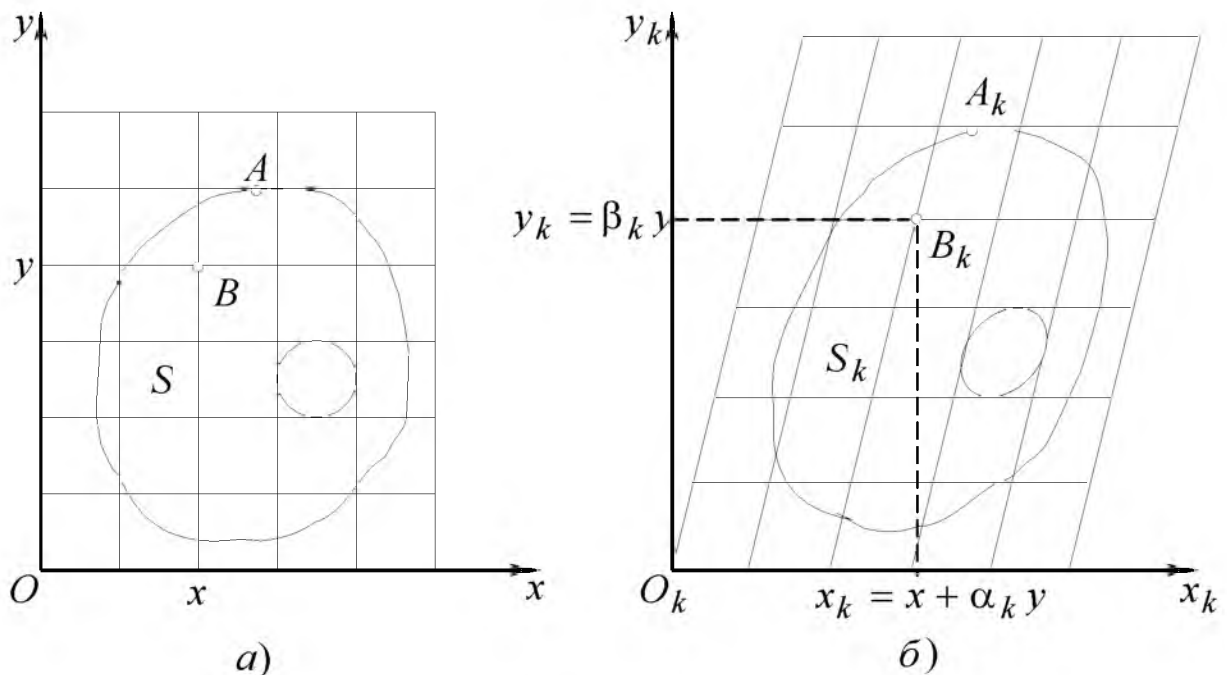


Рис. 3.1

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура в области S_j , на основании формулы (3.43) принимает следующий вид

$$z_j = R_j \zeta_j + m_j / \zeta_j, \quad \zeta_j = r_j \sigma, \quad r_j \geq 1 \quad (3.44)$$

Сравнение соотношений (3.42) и (3.43) показывает, что на контуре единичного круга имеет место равенство $\zeta_j = \zeta = \sigma$. Это означает, что точки t_j эллиптических контуров в областях S_j , находящиеся в аффинном соответствии (3.37), при конформном отображении (3.44) на единичном круге попадают в точку σ . Это обстоятельство дает возможность для кругового или эллиптического контура получить точное решение задачи. Построение решений для анизотропных сред с криволинейным контуром, отличающимся от кругового или эллиптического, имеет определенные трудности, связанные с тем, что на контуре единичного круга величины ζ_j будут разными для разных величин j [137].

Функцию $\Phi_j(z_j)$ можно представить в виде ряда

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{kj}}{\zeta_j^k}, \quad (3.45)$$

где переменная ζ_j связана с z_j зависимостями (3.44).

Следует отметить, что при заданных усилиях (3.21) в представлениях (3.45) отличными от нуля будут коэффициенты при значении индекса $k=1$, и разложение (3.45) примет вид $\Phi_j(z_j) = a_j / \zeta_j$.

Незакрепленный контур. Учитывая, что на контуре единичного круга переменная $\zeta_j = \sigma_j = \sigma$, при помощи метода рядов из условий (3.39) получается система алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_j :

$$\begin{aligned} \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 &= (la - pbi) / 2, \\ a_1 + a_2 &= (lbi - qa) / 2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Жестко подкрепленный контур. Из граничных условий (3.41) методом рядов находится система алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_j :

$$\begin{aligned}
 R_{11}a_1 + R_{12}a_2 &= -\left(a\varepsilon_1^0 + ib\varepsilon_6^0 / 2\right) / 2, \\
 R_{21}a_1 + R_{22}a_2 &= -\left(a\varepsilon_6^0 / 2 + ib\varepsilon_2^0\right) / 2.
 \end{aligned}
 \tag{3.47}$$

После определения коэффициентов a_1 и a_2 из системы (3.46) или (3.47) напряжения и перемещения находятся по формулам

$$\sigma_i = \sigma_i^{00} + \sigma_i^0 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad u_k = u_k^{00} + u_k^0, \quad (k = \overline{1, 2}),$$

где величины σ_i^0 , σ_i^{00} , u_k^0 и u_k^{00} определяются соотношениями (3.21), (3.36), (3.22) и (3.34) соответственно.

При этом производная от функции (3.45), при $k = 1$, определяется соотношением

$$\Phi'_j(z_j) = -\frac{a_j}{R_j \zeta_j^2 - m_j}. \tag{3.48}$$

3.5. Результаты численных исследований для вязкоупругих пластин

Апробация методики, предложенной в разделе 2, проводилась для бесконечной тонкой пластинки с одним круговым или эллиптическим отверстием. Отверстие считалось либо свободным от загрузения, либо жестко подкрепленным. Пластинка вдали от отверстия подвержена усилиям $\sigma_1^0 = p$, $\sigma_2^0 = q$ или $\sigma_6^0 = l$. Расчеты проводились для изотропной (Материал 4) и ортотропной (Материал 2) пластин.

Напряженно-деформированное состояние ортотропной пластинки в любой момент времени определялось при помощи аппарата функций обобщенных комплексных переменных. В случае изотропного материала использовались алгоритмы, разработанные для анизотропных сред [141], и полученные результаты сравнивались с точным решением, полученным методом Вольтерра.

При проведении численных экспериментов в качестве кривой ползучести для коэффициента Пуассона $\bar{\nu}$ (2.84) выбиралось приближение с помощью функции $\lambda \mathcal{E}_\alpha(-\beta; t - \tau)$. Для формирования экспериментальных данных в случае ортотропного материала использовались формулы (2.78).

Представляя напряжения и перемещения в виде суммы напряжений и перемещений в сплошной пластинке, растягиваемой на бесконечности, и напряжений и перемещений, учитывающих влияние отверстия, исследования проводились в условиях одного из двух следующих предположений:

I) Напряжения и перемещения в сплошной пластинке не меняются со временем, а во времени могут меняться только компоненты, учитывающие влияние отверстия;

II) Во времени изменяются все компоненты напряжений и перемещений.

Ниже представлены некоторые результаты.

3.5.1. Изотропная пластинка со свободным круговым отверстием. Как известно, в этом случае напряжения не зависят от времени, а изменяются только перемещения. В таблице 3.1 приведены значения перемещений u_r и u_θ в характерных точках кругового отверстия в различные моменты времени для случая растяжения пластинки на бесконечности усилиями q вдоль оси Ox_2 . Левый столбец для каждого момента времени соответствует предположению I), а правый – предположению II). Результаты, полученные методом Вольтерра и по предложенной методике полностью совпали.

На рисунке 3.2 представлены графики значений максимальных перемещений u_r , возникающих в точке A , в зависимости от времени t . Пунктирная линия соответствует перемещениям, рассчитанным в условиях предположения I), сплошная – в условиях предположения II).

Перемещения	t , час									
	0		100		500		1000		5000	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
$\frac{u_r \cdot G}{(pR)} \Big _{\theta=0}$	-0.4	-0.4	-1.053	-1.706	-1.538	-2.675	-1.773	-3.1453	-2.262	-4.124
$\frac{u_r \cdot G}{(pR)} \Big _{\theta=\frac{\pi}{2}}$	1.2	1.2	3.812	5.117	5.750	8.025	6.691	9.436	8.649	12.373
$\frac{u_\theta \cdot G}{(pR)} \Big _{\theta=\frac{\pi}{2}}$	0.8	0.8	2.432	3.412	3.644	5.350	4.232	6.291	5.455	8.249

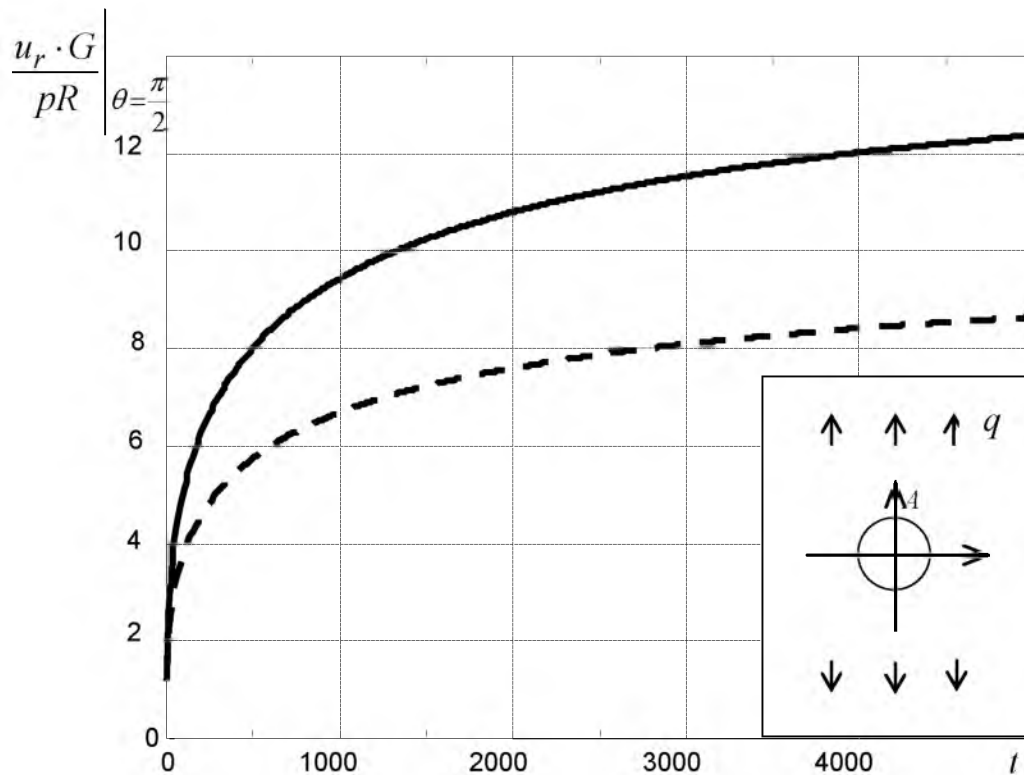


Рис. 3.2

Из таблицы 3.1 и рисунка 3.2 видно, что учет ползучести материала пластинки вдали от отверстия приводит к существенному увеличению значений перемещений вблизи ее контура.

3.5.2. Ортогруппная пластинка со свободным эллиптическим отверстием.

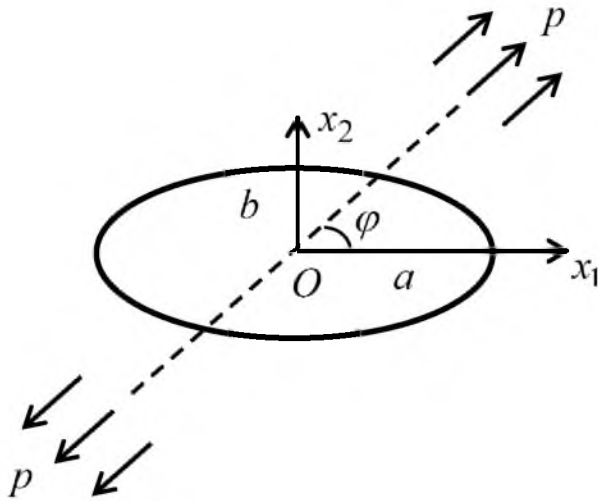


Рис. 3.3

Результаты, полученные для ортогруппной пластинки, изготовленной из композитного материала на основе эпоксидного связующего (материал 2) с упругими и реологическими параметрами (2.58) сравнивались с результатами, полученными в работе [234] для тонкой бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием, свободным от нагружения. Пластинка растягивалась на бесконечности усилиями

$\sigma_1^0 = p \cos^2 \varphi$, $\sigma_2^0 = p \sin^2 \varphi$, $\sigma_6^0 = p \sin \varphi \cos \varphi$, где φ – угол между направлением растягивающих усилий интенсивности p и положительным направлением оси Ox_1 (рис. 3.3). Соотношение полуосей эллипса $a/b = 2$.

Как было указано в подразделе 2.3 исследования для ортогруппных материалов можно проводить при различных изменениях свойств проявления вязкоупругости. Представляют интерес следующие случаи:

1) учет во времени только сдвиговых усилий \bar{G}_{12} , т.е. $\bar{E}_1 = E_1$, $\bar{E}_2 = E_2$, $\bar{\nu}_{ij} = \nu_{ij}$ ($i, j = 1, 2$);

2) учет постоянства во времени $\bar{\nu}_{ij}/\bar{E}_i = \nu_{ij}/E_i$ ($i, j = 1, 2$);

3) использование условия упругой сжимаемости, когда, считается, что объемный модуль упругости является величиной постоянной, т.е. $1/\bar{K} = 1/K$. Для обобщенного плоского напряженного состояния тонкой пластинки это условие имеет вид

$$\frac{1 - 2\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} + \frac{1 - 2\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} = \frac{1 - 2\nu_{12}}{E_1} + \frac{1 - 2\nu_{21}}{E_2},$$

откуда получаются соотношения

$$\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \left(1 + \frac{\lambda_1}{4\nu_{12}} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_1) + \frac{E_1\lambda_2}{4\nu_{12}E_2} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_2) \right),$$

$$\frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_2} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \left(1 + \frac{E_2\lambda_1}{4\nu_{21}E_1} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_1) + \frac{\lambda_2}{4\nu_{21}} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_2) \right).$$

На рисунках 3.4 и 3.5 представлены графики изменения напряжений σ_θ / p в характерных точках эллиптического контура (для $\theta = 0$ – рисунок 3.4 и для $\theta = \pi/2$ – рисунок 3.5) при $\varphi = 0^0$. Штриховая линия соответствует случаю 1; сплошная линия соответствует случаю 2, где точками отмечены значения напряжений из работы [234]; штрих-пунктирная линия соответствует случаю учета гипотезы упругой сжимаемости (на рисунке 3.4 совпала со сплошной линией).

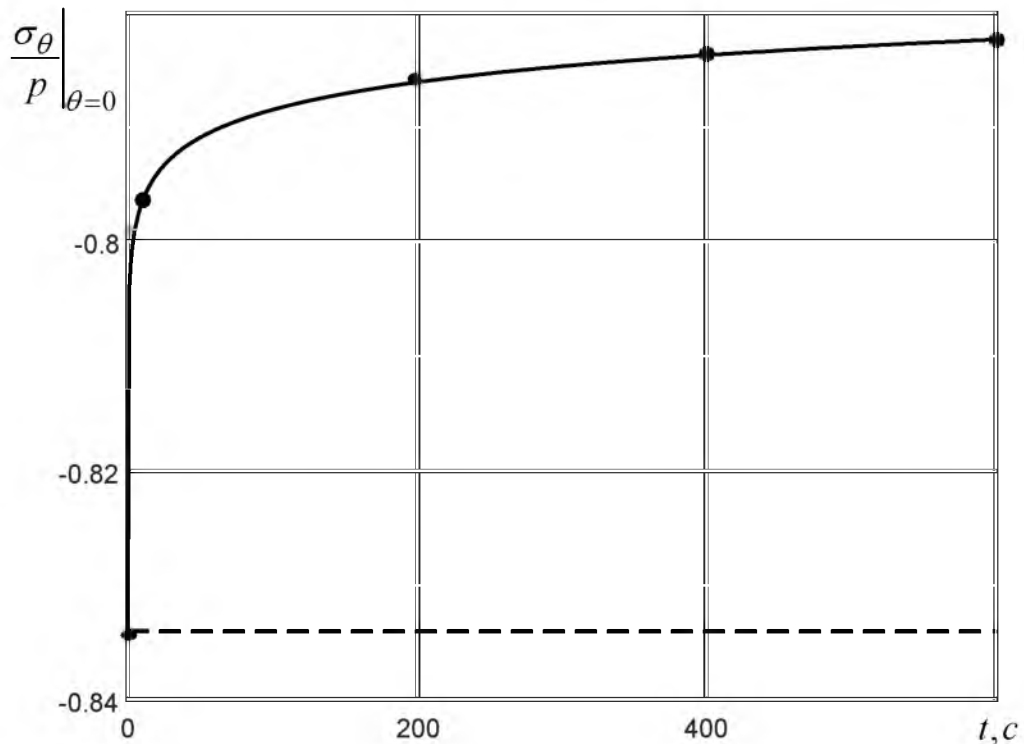


Рис. 3.4

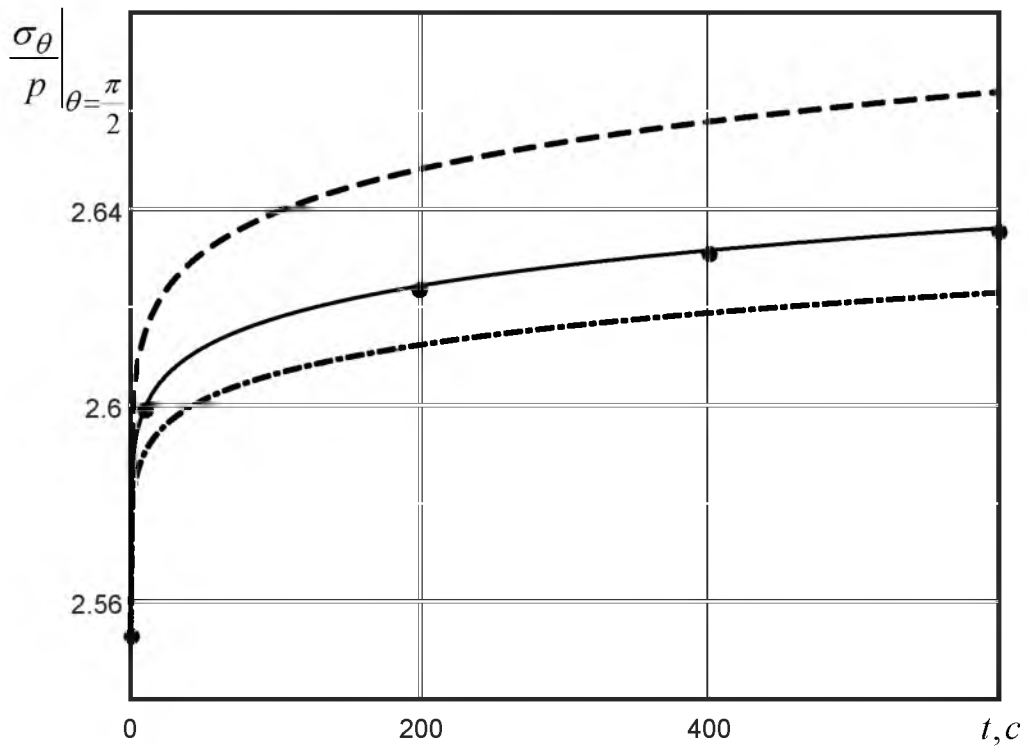


Рис. 3.5

На рисунках 3.6 и 3.7 представлены аналогичные результаты исследований для случая растяжения пластинки на бесконечности при $\varphi = \pi / 4$.

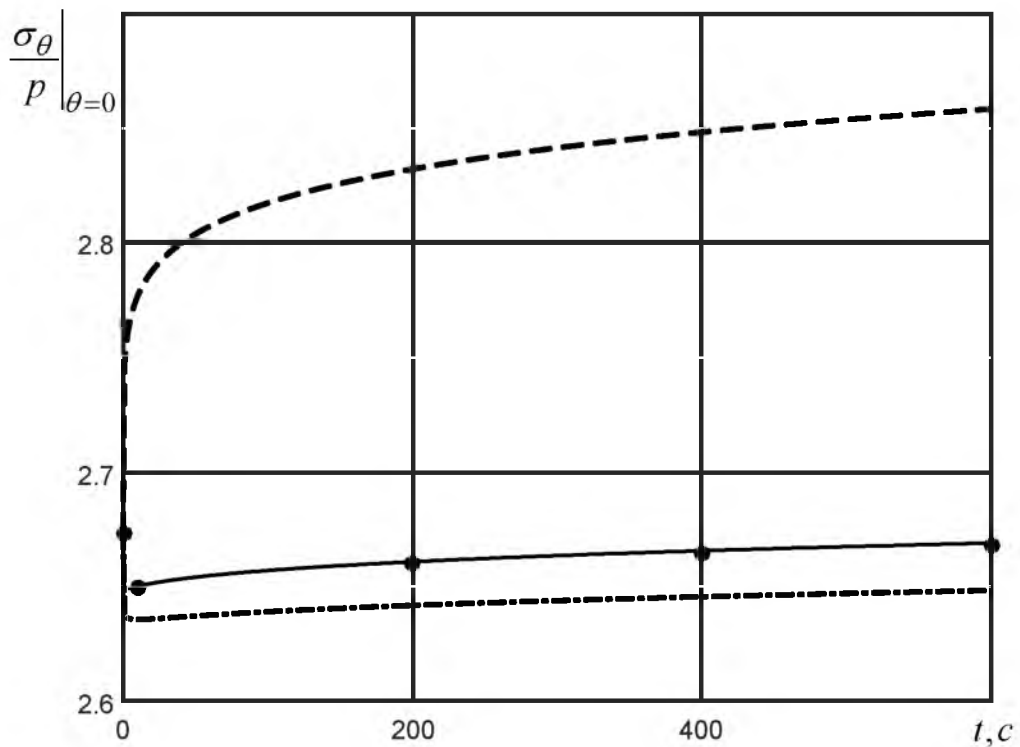


Рис. 3.6

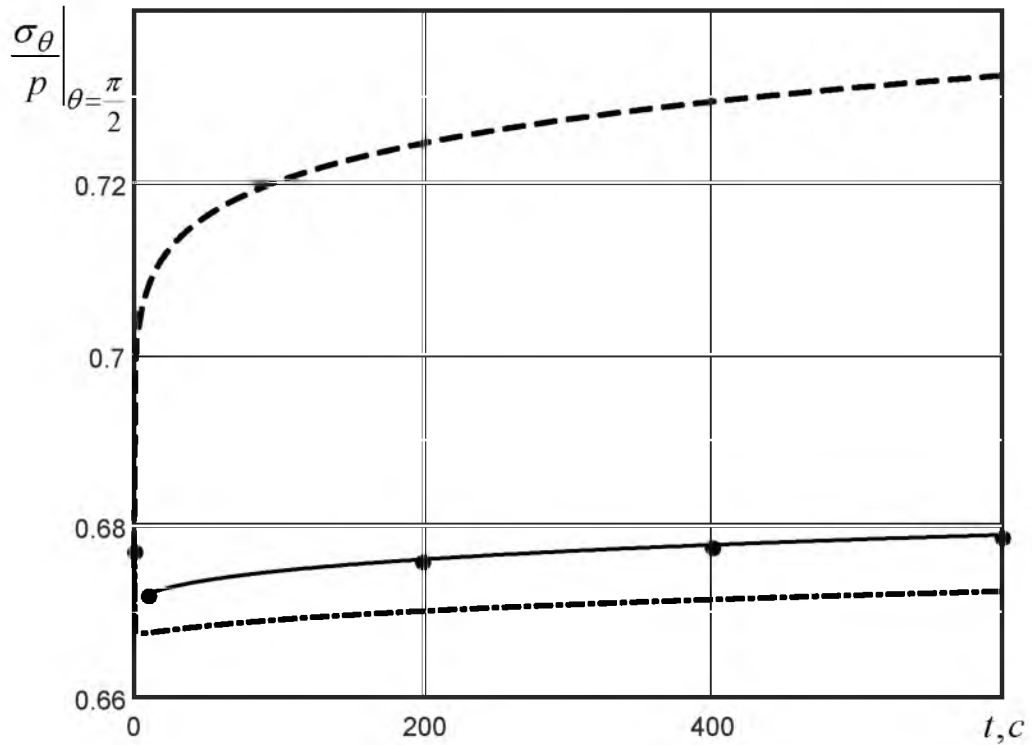


Рис. 3.7

Для сравнения в таблице 3.2 приведены значения напряжений σ_θ / p в некоторых точках контура эллиптического отверстия для углов, приложенной на бесконечности нагрузки $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi / 4$, в условиях гипотезы 2.

Таблица 3.2

t, c	φ , град.	σ_θ / p			$\sigma_\theta / p, [234]$		
		$\theta = 0^0$	$\theta = 45^0$	$\theta = 90^0$	$\theta = 0^0$	$\theta = 45^0$	$\theta = 90^0$
0	0	-0.8341	0.9706	2.5529	-0.8341	0.9706	2.5529
	45	2.6733	-1.2027	0.6770	2.6733	-1.2027	0.6769
10	0	-0.7965	0.9431	2.5997	-0.7964	0.9614	2.5991
	45	2.6500	-1.2148	0.6721	2.6492	-1.2048	0.6718
200	0	-0.7861	0.9289	2.6244	-0.7860	0.9570	2.6236
	45	2.6607	-1.2191	0.6761	2.6597	-1.2036	0.6757
400	0	-0.7837	0.9448	2.6316	-0.7876	0.9558	2.6308
	45	2.6655	-1.2202	0.6778	2.6645	-1.2032	0.6773
600	0	-0.7823	0.9222	2.6361	-0.7823	0.9550	2.6353
	45	2.6688	-1.2209	0.6790	2.6678	-1.2028	0.6785

Как видно из рисунков 3.4 – 3.7 и таблицы 3.2 результаты, полученные по методике, предложенной в данной диссертационной работе, хорошо согласуются с уже известными результатами.

Вместе с тем, следует отметить, что различные предположения о свойствах изменения вязкоупругого поведения материала оказывают существенное влияние на концентрацию напряжений вблизи отверстия.

3.5.3. Изотропная пластинка с жестко подкрепленным эллиптическим отверстием. Рассмотрим изотропную пластину с жестким эллиптическим включением в случае ее растяжения вдоль оси Ox_1 на бесконечности усилиями $\sigma_1^0 = p$. На рисунке 3.8 представлены графики изменения максимальных нормальных напряжений σ_n / p , возникающих в точке $\theta = 0^\circ$ пластинки из алюминия с жестким эллиптическим включением в зависимости от времени для различных отношений полуосей $c = b/a$. Как видно из рисунка максимальные напряжения уменьшаются (релаксируют) со временем. При уменьшении полуосей эллипса вдоль оси Ox_2 происходит увеличение концентрации упруго-мгновенных напряжений σ_n в точке $\theta = 0^\circ$, но с течением времени возникшая концентрация существенно снижается. Например, для $c = 0.5$ стационарное значение почти в два раза меньше упругого. Исследования также показали, что напряжения σ_θ , возникающие на контуре сая отверстия с жестким включением качественно меняются с течением времени. На рисунке 3.9 показаны эпюры распределения напряжений σ_θ / p для пластинки с круговым жестким включением. Сплошная линия соответствует упругому решению ($t = 0$), пунктирная – моменту времени $t = 10$ ч, штрих-пунктирная – $t = 100$ ч и штриховая – $t = 300$ ч. Представленные результаты были получены в условиях предположения I и опубликованы в работах [187, 274]. Более естественным с физической точки зрения является проведение исследований для растяжения пластинки в условиях предположения II. Ниже представлены эти результаты и проведено сравнение с данными, полученными по теории Вольтерра.

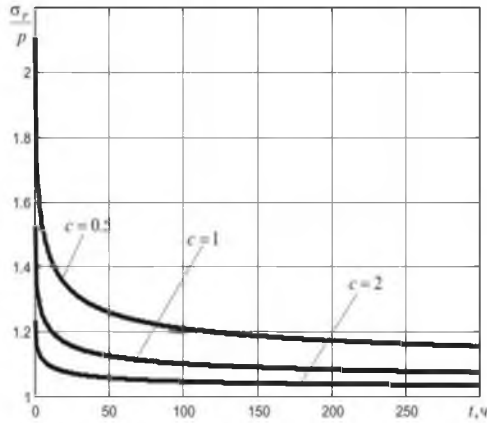


Рис. 3.8

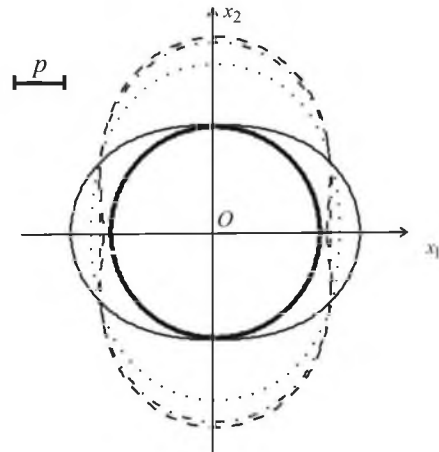


Рис. 3.9

В таблице 3.3 приведены значения напряжений σ_n/p и σ_θ/p в характерных точках сая кругового отверстия при растяжении пластинки усилиями $\sigma_1^0 = p$. Следует также заметить, что при проведении численных экспериментов многие исследователи для вычисления значений дробно-рациональной функции Ю.Н. Работнова (2.28) используют приближенную формулу (2.30), которая аппроксимирует функцию Миттаг-Леффлера [240]. Для сравнения данных, полученных по двум разным формулам, в таблице 3.3 присутствуют столбцы с обозначениями “mlf” и “exp”, отражающие получение результатов по двум разным формулам для точного решения. Столбец “МВП” соответствует результатам, полученным по методу временных параметров.

Таблица 3.3

t, час	$\theta = 0$						$\theta = \pi / 2$					
	σ_n / p			σ_θ / p			σ_n / p			σ_θ / p		
	МВП	mlf	exp	МВП	mlf	exp	МВП	mlf	exp	МВП	mlf	exp
0	1.5273	1.5273	1.5273	0.3818	0.3818	0.3818	0.0727	0.0727	0.0727	0.0182	0.0182	0.0182
50	1.4738	1.4757	1.4702	0.6643	0.6457	0.6630	-0.0953	-0.0850	-0.0964	-0.0429	-0.0365	-0.0367
100	1.4723	1.4738	1.4685	0.6779	0.6625	0.6874	-0.1028	-0.0944	-0.1095	-0.0474	-0.0419	-0.0465
200	1.4713	1.4724	1.4685	0.6866	0.6751	0.7007	-0.1076	-0.1013	-0.1161	-0.0502	-0.0462	-0.0531
300	1.4709	1.4718	1.4688	0.6901	0.6808	0.7043	-0.1096	-0.1045	-0.1178	-0.0514	-0.0481	-0.0553
400	1.4707	1.4715	1.4689	0.6921	0.6842	0.7057	-0.1107	-0.1064	-0.1184	-0.0521	-0.0493	-0.0562
∞	1.4697	1.4698	1.4692	0.7017	0.7005	0.7070	-0.1160	-0.1153	-0.1189	-0.0554	-0.0550	-0.0572

Из таблицы 3.3 видно, что максимальные напряжения σ_n , которые возникают в точке, соответствующей $\theta = 0$ со временем уменьшаются, а максимальные напряжения σ_θ , возникающие в той же точке, со временем увеличиваются, при этом существенного перераспределения напряжений по контуру отверстия не происходит, как это получилось в условиях предположения I. Результаты, полученные по методу временных параметров хорошо согласуются с результатами, полученными по методу Вольтерра.

3.5.4. Ортоотропная пластинка с жестко подкрепленным круговым отверстием.

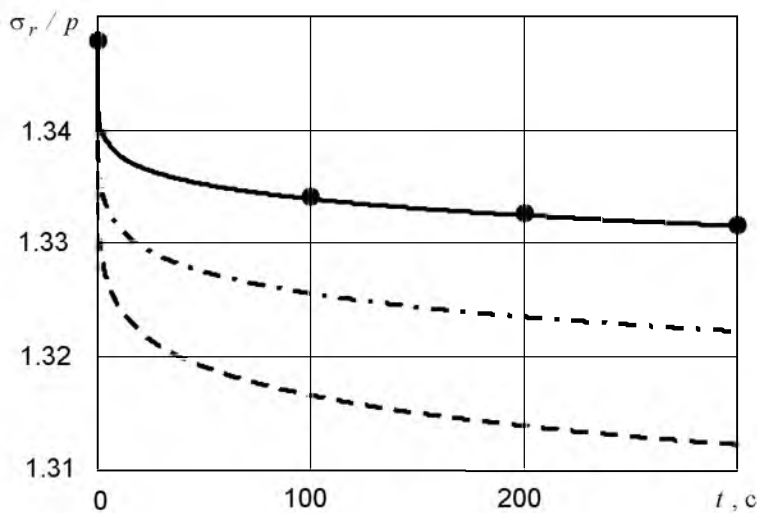


Рис. 3.10

В работах [187, 274] представлены результаты, полученные в рамках предположения (I). На рисунке 3.10 показаны изменения максимальных напряжений σ_r / p , возникающих в точке кругового отверстия, соответствующей $\theta = 0^0$ при растяжении пластинки усилиями p в направлении оси Ox_1

($\varphi = 0^0$). Сплошная линия соответствует расчету в условиях предположения (II), штриховая – в условиях предположения (I), штрих-пунктирная линия соответствует упрощенной постановке, когда $\bar{E}_1 = E_1$, $\bar{E}_2 = E_2$ (в этом случае результаты для предположений (I) и (II) совпали). Точками указаны значения напряжений, опубликованные в работе [233].

В таблице 3.4 приведены значения напряжений σ_r / p , возникающие в точках контура, соответствующих $\theta = 0$ и $\theta = \pi / 2$ для разных моментов времени. Для сравнения, в столбце “[233]” приведены значения напряжений, полученные по методу цепных дробей.

Таблица 3.4

t, c	σ_r / p			
	$\theta = 0$		$\theta = \pi / 2$	
	МВП	[233]	МВП	[233]
0	1.3472	1.3479	0.0720	0.0530
100	1.3339	1.3341	0.0692	0.0458
200	1.3325	1.3327	0.0688	0.0452
300	1.3316	1.3317	0.0685	0.0448

Исследования для представленного случая нагружения тонкой пластинки с жестко подкрепленным круговым отверстием в рамках предположения II были также проведены для более длительного изменения времени $t \leq 1000$ ч. На следующих рисунках представлены графики изменения напряжений σ_r / p в точках $\theta = 0$ (рис. 3.11) и $\theta = \pi / 2$ (рис. 3.12). Штриховая линия соответствует случаю 1 (когда во времени меняется только модуль сдвига \bar{G}_{12}); сплошная линия – случаю 2 (когда $\bar{v}_{ij} / \bar{E}_i = v_{ij} / E_i$); штрих-пунктирная – случаю 3 (учитываются изменения во времени $\bar{E}_i, \bar{v}_{ij}, \bar{G}_{12}$). Точками отмечены данные работы [97].

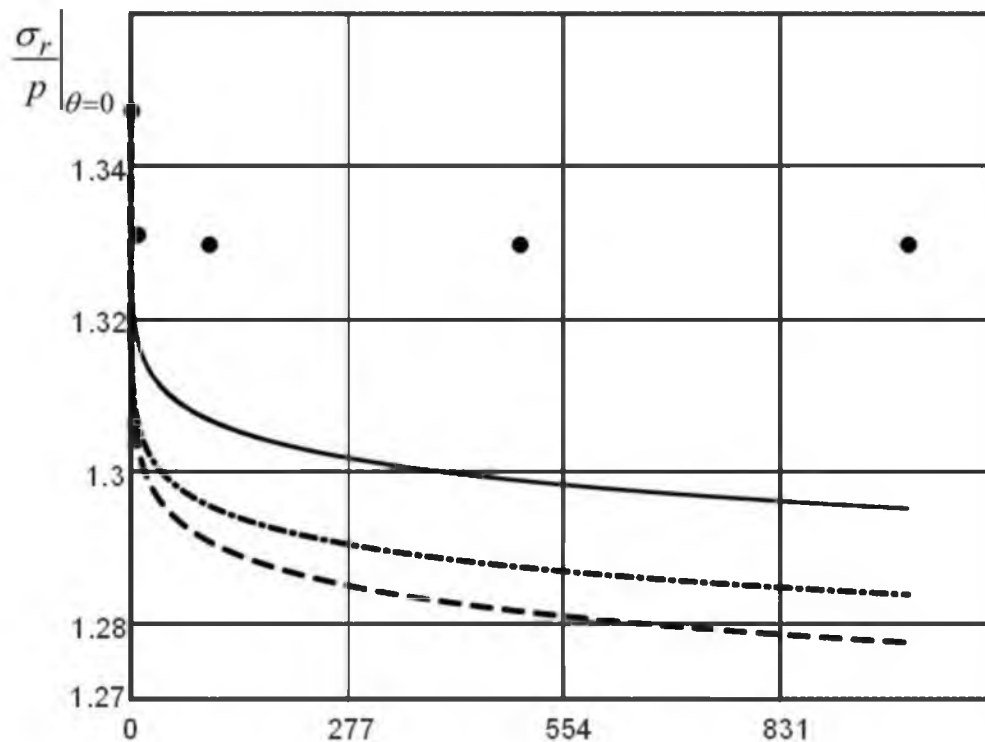


Рис. 3.11

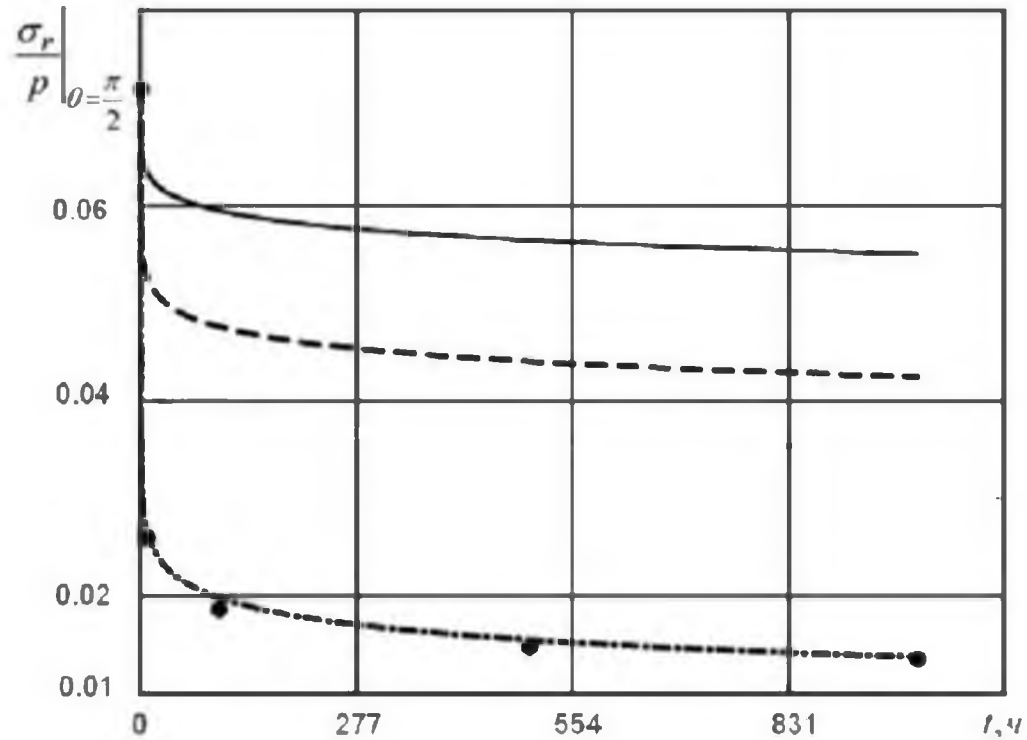


Рис. 3.12

Как видно из рисунков, результаты качественно неплохо согласуются между собой.

3.6. Выводы по разделу 3

В разделе приведена полная система трехмерных уравнений статической теории упругости анизотропной среды, использующая перемещения в качестве неизвестных функций. Решение для случая обобщенного плоского напряженного состояния тонкой анизотропной пластины с эллиптическим отверстием использовано для решения задач вязкоупругости. Проведено сравнение результатов предложенного метода временных параметров с известными результатами, полученными по другим методикам. Результаты для изотропной пластинки полностью совпали с результатами, полученными по методу Вольтерра.

Из представленных графиков можно заключить, что различные варианты учета зависимостей изменения вязкоупругих характеристик ортотропного материала существенно влияют на характер распределения концентрации напряжений в разных точках отверстия, как свободного, так и жестко подкрепленного отверстий.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [187, 188, 189, 192, 193, 198, 274, 276].

РАЗДЕЛ 4

**НОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ ПОЛЗУЧЕСТИ
В АНИЗОТРОПНЫХ ГОРНЫХ ПОРОДАХ
С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКОЙ**

4.1. Выбор модели в механике горных пород с выработкой

Горный массив в виде полупространства относится к прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. Начало системы находится на глубине H , ось Ox_2 направлена вертикально вверх, а плоскость Ox_1x_3 совмещена с горизонтальной плоскостью, параллельной плоскости, ограничивающей полупространство.

Считается, что свойства горных пород различны в разных направлениях и для описания их поведения используется модель упругого анизотропного тела. Предполагается линейная связь между напряжениями и деформациями, выраженная обобщенным законом Гука [157]:

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^6 a_{ik} \sigma_k \quad \text{или} \quad \sigma_i = \sum_{k=1}^6 A_{ik} \varepsilon_k \quad (i = \overline{1, 6}), \quad (4.1)$$

где a_{ik} – коэффициенты деформации, а A_{ik} – модули упругости.

Для компактной записи уравнений закона Гука в форме (4.1) использованы обозначения (3.2).

Формулы (4.1), выражающие закон Гука для анизотропного тела, можно записать приемом сокращенной (тензорной) записи. Для этого вводятся двойные цифровые индексы у напряжений и деформаций

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23} = \sigma_{32}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \text{для} \quad \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6;$$

$$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}, 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \quad \text{для} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6.$$

Тогда первое уравнение закона Гука (4.1) примет вид [19]

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijkp} \sigma_{kp} \quad (i, j, k, p = 1, 2, 3). \quad (4.2)$$

Предполагается, что в формуле (4.2) суммирование проводится по индексам, встречающимся дважды в правой части формулы, т.е. по k и p .

Для вычисления всех деформаций анизотропного материала в общем случае потребуется 81 значение упругих постоянных c_{ijkp} , образующих тензор четвертого ранга. Между этими постоянными существуют зависимости [19]

$$c_{ijkp} = c_{jikp} = c_{jipk} = c_{ijpk} = c_{kpij}, \quad (4.3)$$

что уменьшает число различных констант до 21.

С учетом равенств (4.3) уравнения (4.2) запишутся в форме [19]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & 2c_{1123} & 2c_{1113} & 2c_{1112} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & 2c_{2223} & 2c_{2213} & 2c_{2212} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & 2c_{3323} & 2c_{3313} & 2c_{3312} \\ 2c_{2311} & 2c_{2322} & 2c_{2333} & 4c_{2323} & 4c_{2313} & 4c_{2312} \\ 2c_{1311} & 2c_{1322} & 2c_{1333} & 4c_{1323} & 4c_{1313} & 4c_{1312} \\ 2c_{1211} & 2c_{1222} & 2c_{1233} & 4c_{1223} & 4c_{1213} & 4c_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Сравнение соотношений (4.4) и первого уравнения закона Гука (4.1) указывает на правило перехода от одной формы записи к другой. Это осуществляется заменой пары индексов ij или kp одним индексом m или n в соответствии со схемой

$$\begin{array}{cccccc} ij, & kp=11 & 22 & 33 & 23,32 & 13,31 & 12,21 \\ m, & n = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Кроме того, это сравнение позволяет найти связь между величинами c_{ijkp} и a_{mn}

$$\begin{aligned} c_{iikk} &= a_{ik}, & 2c_{ijkk} &= a_{mk} \quad (i \neq j), \\ 2c_{iikp} &= a_{in} \quad (k \neq p), \\ 4c_{ijkp} &= a_{mn} \quad (i \neq j, k \neq p). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В дальнейшем, соотношения тензорной формы записи, как более удобные, будут использованы для преобразования упругих постоянных при повороте координатных осей.

Следует отметить, что чаще всего в литературе [23, 30] исследуются два частных случая:

1) все направления, проходящие через каждую точку массива, эквивалентны в отношении деформационных свойств; тогда можно рассматривать модель изотропного массива;

2) через каждую точку породного массива проходит плоскость изотропии, в которой все направления являются эквивалентными в отношении деформационных свойств и массив будет трансверсально изотропным.

Далее рассматривается модель массива горных пород, который является трансверсально-изотропной средой. Такая среда может служить моделью слоистого массива осадочного происхождения с плоскостями изотропии, параллельными слоям. В предположении, что толщина слоя по крайней мере на порядок меньше характерного поперечного размера горной выработки, модель допускает ее эффективное использование при исследовании напряженно-деформированного состояния горных выработок [65].

Вводится прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxz совпала с плоскостью $ABCD$ (рис. 4.1). Если ось Oz направить нормально к плоскости изотропии, то уравнения закона Гука примут вид:

$$\varepsilon_i^1 = \sum_{k=1}^6 C_{ik} \sigma_k^1. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_{11} = C_{22} = 1/E_1, \quad C_{12} = C_{21} = -\nu_1/E_1, \quad C_{33} = 1/E_2, \\ C_{44} = C_{55} = 1/G_2, \quad C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = -\nu_2/E_2, \\ C_{i4} = C_{4i} = C_{5i} = C_{i5} = C_{i6} = C_{6i} = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \\ C_{45} = C_{54} = C_{46} = C_{64} = C_{56} = C_{65} = 0, \quad C_{66} = 1/G_1 = 2(1 + \nu_1)/E_1, \end{aligned} \quad (4.7)$$

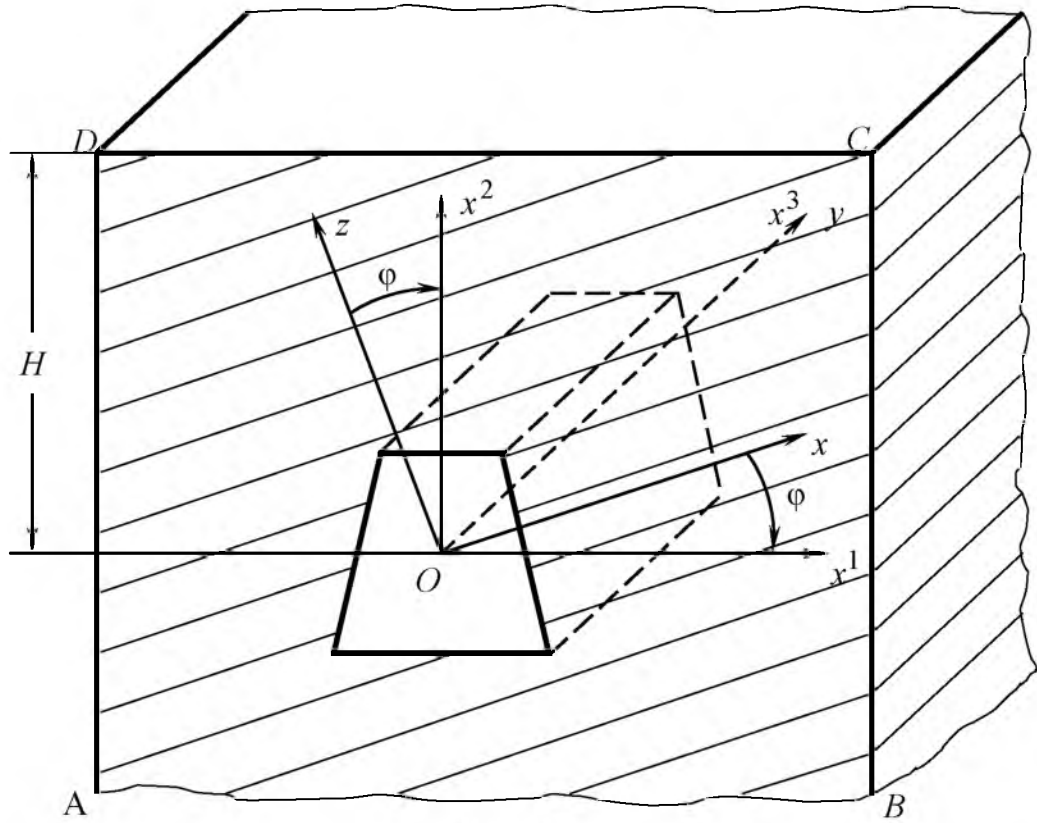


Рис. 4.1

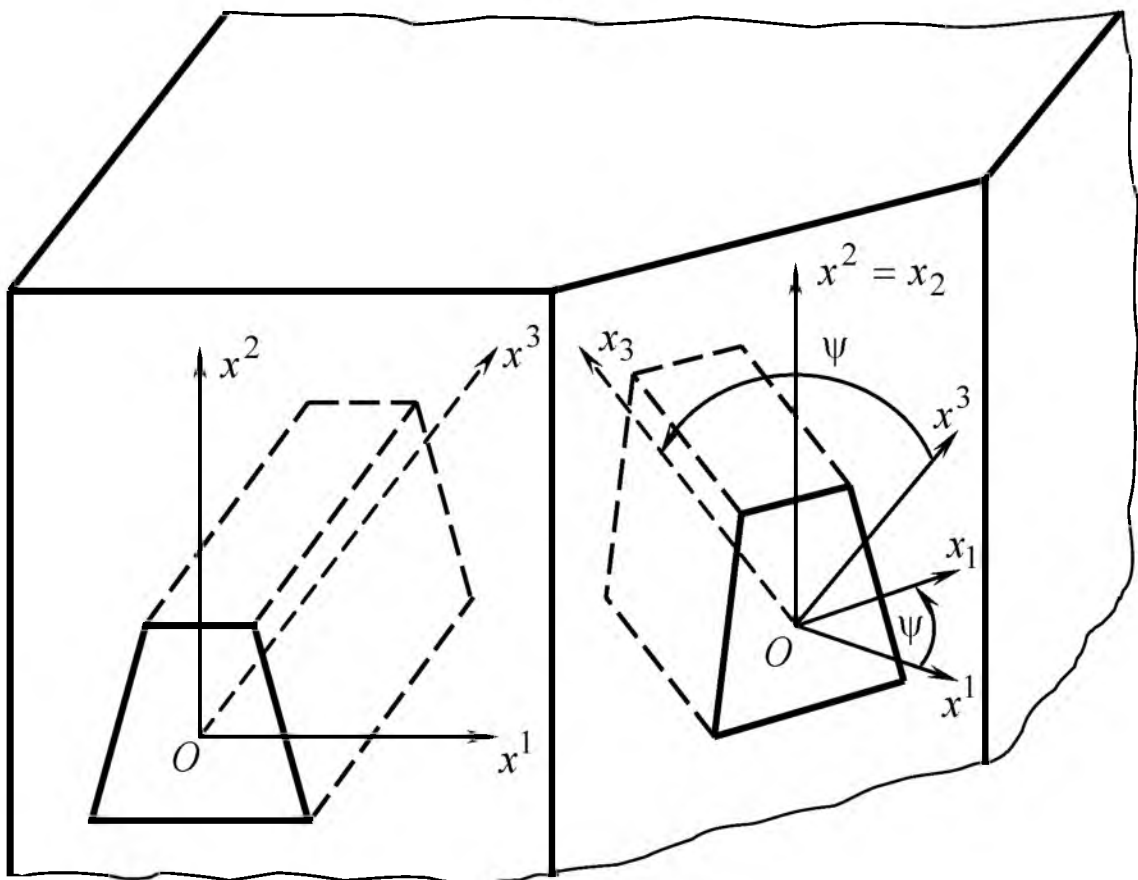


Рис. 4.2

E_1, E_2 – модули Юнга для растяжения - сжатия в направлении плоскости изотропии и нормальном к ней;

ν_1 – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости, а ν_2 – при растяжении в направлении нормальном к плоскости изотропии;

G_1, G_2 – модули сдвига для плоскости изотропии и нормальной к ней.

Величины $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_2$ определяются экспериментально путем одноосного сжатия породных образцов параллельно и перпендикулярно слоистости.

Введем величину $E = 10^9 \times 9.81 \text{ Па} = 10^3 \times 9.81 \text{ МПа}$. Тогда значения величин E_1, E_2, G_2 можно представить через безразмерные величины e_1, e_2, g_2 по формулам

$$E_1 = e_1 E, \quad E_2 = e_2 E, \quad G_2 = g_2 E. \quad (4.8)$$

В таблице 4.1 приведены значения упругих постоянных, а также плотности ρ для образцов некоторых пород [30, 65].

Уравнения закона Гука (4.6) при учете соотношений (4.8) можно записать так:

$$E \varepsilon_i^1 = \sum_{k=1}^6 C_{ik}^1 \sigma_k^1 \quad \text{или} \quad E \varepsilon_{ij}^1 = c_{ijkp}^1 \sigma_{kp}^1. \quad (4.9)$$

Здесь величины C_{ik}^1 безразмерны и получаются из соотношений (4.7) путем замены в них модулей E_1, E_2, G_2 значениями e_1, e_2, g_2 , а постоянные c_{ijkp}^1 связаны с C_{ik}^1 формулами вида (4.5).

Таблица 4.1

	Порода	$e_1 = E_1 / E$	$e_2 = E_2 / E$	$g_2 = G_2 / E$	ν_1	ν_2	ρ , кг/м ³
1	Алевролит1	0.620	0.620	0.258	0.200	0.200	2700
2	Алевролит2	1.074	0.523	0.120	0.413	0.198	2700
3	Песчаник1	2.950	2.950	1.272	0.160	0.160	2500
4	Песчаник2	2.987	3.411	0.215	0.134	0.150	2500

Предполагается, что на глубине H пройдена протяженная горизонтальная выработка произвольного поперечного сечения (рис. 4.1) в направлении плоскости изотропии (оси Oy). Систему координат удобнее связать с одной из выработок, что приводит к необходимости перейти к некоторой промежуточной системе $Ox^1x^2x^3$ поворотом вокруг оси Oy на угол φ . Если выработка пройдена под углом ψ к плоскости изотропии, то необходимо ввести систему координат $Ox_1x_2x_3$ (рис. 4.2). Она получается из системы координат $Ox^1x^2x^3$ поворотом на угол ψ вокруг оси Ox^2 . Возникает необходимость уравнения закона Гука, заданные в системе $Oxyz$ записать в системе $Ox_1x_2x_3$.

4.2. Преобразование упругих постоянных при повороте координатных осей

Для решения задачи о напряженном состоянии горного массива с горизонтальной выработкой произвольного поперечного сечения, пройденной на глубине H в направлении плоскости изотропии вводится новая прямоугольная система координат $Ox^1x^2x^3$, у которой ось Ox^3 совпадает с осью Oy . Эта система координат получается из введенной ранее путем поворота на угол φ вокруг оси Ox^3 . Этот угол характеризует наклон плоскости изотропии к горизонту (рис. 4.1). Косинусы углов p_{ki} между осями ранее введенной и новой системами координат представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

	x	y	z
x^1	$p_{11} = \cos(x, x^1) = \cos \varphi$	$p_{12} = \cos(y, x^1) = 0$	$p_{13} = \cos(z, x^1) = -\sin \varphi$
x^2	$p_{21} = \cos(x, x^2) = \sin \varphi$	$p_{22} = \cos(y, x^2) = 0$	$p_{23} = \cos(z, x^2) = \cos \varphi$
x^3	$p_{31} = \cos(x, x^3) = 0$	$p_{32} = \cos(y, x^3) = 1$	$p_{33} = \cos(z, x^3) = 0$

Напряжения σ_{ij}^1 в ранее введенной системе координат связаны с напряжениями σ_{kp}^* в новой системе координат соотношениями вида [157]

$$\sigma_{ij}^1 = p_{ki} p_{pj} \sigma_{kp}^*. \quad (4.10)$$

В новой системе координат уравнения закона Гука запишутся так:

$$E \varepsilon_{ij}^* = c_{ijkp}^* \sigma_{kp}^*. \quad (4.11)$$

Для определения коэффициентов c_{ijkp}^* используется выражение для упругого потенциала в ранее введенной и новой системах координат [19]:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^*. \quad (4.12)$$

Из равенства (4.12) при учете уравнений (4.9), (4.10) и (4.11) получается соотношение

$$\frac{1}{2} c_{ijkp}^* \sigma_{ij}^* \sigma_{kp}^* = \frac{1}{2E} c_{mnsr}^1 p_{im} p_{jn} p_{ks} p_{pr} \sigma_{ij}^* \sigma_{kp}^*,$$

из которого находятся искомые коэффициенты

$$c_{ijkp}^* = c_{mnsr}^1 p_{im} p_{jn} p_{ks} p_{pr}. \quad (4.13)$$

Уравнения закона Гука в форме (4.11) в системе координат $Ox^1x^2x^3$ могут быть использованы при определении напряженного состояния массива в окрестности выработки, продольная ось которой лежит в плоскости изотропии.

Если ось выработки направлена под произвольным углом к плоскости изотропии, т.е. к оси Ox^3 (рис. 4.2), то нужно определить упругие постоянные массива в новой системе координат $Ox_1x_2x_3$, повернутой вокруг вертикальной оси Ox^2 относительно системы $Ox^1x^2x^3$ на угол ψ . Косинусы углов между осями этих координатных систем приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3

	x^1	x^2	x^3
x_1	$k_{11} = \cos(x^1, x_1) = \cos\psi$	$k_{12} = \cos(x^2, x_1) = 0$	$k_{13} = \cos(x^3, x_1) = \sin\psi$
x_2	$k_{21} = \cos(x^1, x_2) = 0$	$k_{22} = \cos(x^2, x_2) = 1$	$k_{23} = \cos(x^3, x_2) = 0$
x_3	$k_{31} = \cos(x^1, x_3) = -\sin\psi$	$k_{32} = \cos(x^2, x_3) = 0$	$k_{33} = \cos(x^3, x_3) = \cos\psi$

В системе координат $Ox_1x_2x_3$ уравнения закона Гука примут вид:

$$E \varepsilon_{ij} = c_{ijkp} \sigma_{kp}. \quad (4.14)$$

Коэффициенты c_{ijkp} , входящие в уравнения (4.14), определяются способом, аналогичным приведенному выше. Окончательный результат запишется так:

$$c_{ijkp} = c_{mnsr}^* k_{im} k_{jn} k_{ks} k_{pr}.$$

Величины c_{mnsr}^* здесь определяются соотношениями (4.13), а значения коэффициентов k_{im} определены в таблице 4.3.

Найденные коэффициенты c_{ijkp} позволяют записать уравнения закона Гука в системе координат $Ox_1x_2x_3$ в форме

$$E \varepsilon_i = \sum_{k=1}^6 b_{ik} \sigma_k \quad (i = \overline{1,6}). \quad (4.15)$$

Коэффициенты b_{ik} здесь связаны с c_{ijkp} соотношениями вида (4.5). Если обернуть матрицу коэффициентов b_{ik} , то получаются уравнения закона Гука в форме

$$\sigma_i = E \sum_{k=1}^6 B_{ik} \varepsilon_k. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.15) и (4.16) совпадают с уравнениями (4.1) при $b_{ik} / E = a_{ik}$, $B_{ik} E = A_{ik}$.

Далее, при исследовании напряженного состояния массива около выработок, уравнения закона Гука будут использованы в форме (4.1) или (4.15), (4.16).

4.3. Обобщенная плоская деформация для горного массива с горизонтальной выработкой

Если выработка, пройденная в породном массиве, является протяженной в направлении оси Ox_3 , то на некотором расстоянии от ее краев все поперечные сечения находятся в одинаковых условиях, т.е. напряжения и перемещения в каждом сечении не меняются вдоль оси Ox_3 и зависят только от двух координат x_1 и x_2 .

В изотропном теле, или анизотропном, у которого в каждой точке существует плоскость упругой симметрии, нормальная к образующей, поперечные сечения остаются плоскими и деформация является плоской. Если же плоскости упругой симметрии имеются, но среди них нет параллельных плоскости Ox_1x_2 , и тем более в общем случае анизотропии, деформация не будет плоской. Поперечные сечения будут искривляться, но все одинаково. Таковую деформацию, в отличие от чисто плоской, принято называть обобщенной плоской, так как нельзя удовлетворить всем уравнениям теории упругости,

приняв $u_3 = 0$ [157]. В этом случае компоненты перемещения u_i зависят только от двух пространственных координат x_1 и x_2

$$u_i = u_i(x_1, x_2) \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Поэтому формулы (3.5) примут вид

$$\varepsilon_1 = \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_2 = \partial_2 u_2, \quad \varepsilon_3 = 0,$$

$$\varepsilon_4 = \partial_2 u_3, \quad \varepsilon_5 = \partial_1 u_3, \quad \varepsilon_6 = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1.$$

Факторы, влияющие на формирование напряженного состояния горных массивов целесообразно разделить следующим образом:

- ◆ действующие постоянно и повсеместно – гравитационное поле, температурное поле, физико-механические свойства и другие;
- ◆ действующие временно и локально – сейсмические волны, тектонические, газодинамические, гидродинамические и другие процессы в массивах.

В диссертационной работе рассмотрены силы гравитации или силы тяжести горных пород.

При рассмотрении гравитационной (объемной) силы тяжести в принятой системе координат (ось Ox_2 направлена вертикально вверх) объемные силы принимают вид [253]: $X = Z = 0$; $Y = -\gamma$, где $\gamma = \rho g$, g – ускорение силы тяжести, а ρ – плотность, которая считается постоянной величиной. Тогда уравнения равновесия (3.4) и (3.6) примут вид

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_6 &= 0, \quad \partial_1 \sigma_6 + \partial_2 \sigma_2 = \gamma, \\ \partial_1 \sigma_5 + \partial_2 \sigma_4 &= 0; \end{aligned} \quad (4.17)$$

или

$$\begin{aligned} L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 &= 0, \\ L_{21}u_1 + L_{22}u_2 + L_{23}u_3 &= \gamma, \\ L_{31}u_1 + L_{32}u_2 + L_{33}u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Операторы L_{ik} в уравнениях (4.18) даны соотношениями (3.7), если в последних положить производную ∂_3 равной нулю.

Напряженное состояние горного массива представляется состоящим из двух составляющих:

- 1) начального поля смещений и напряжений, которое существует в нетронутом массиве;
- 2) поля смещений и напряжений, которое формируется за счет появления выработок.

4.4. Перемещения и напряжения в массиве с выработкой

Поле перемещений и напряжений, которое формируется за счет появления в массиве выработки, описывается функциями $u_k^*(x_1, x_2)$, являющимися результатом интегрирования однородной системы (4.18). Функции u_k^* представляются в форме

$$u_k^*(x_1, x_2) = R_k \Phi(x_1 + \mu x_2). \quad (4.19)$$

Здесь R_k – подлежащие определению постоянные, а $\Phi(x_1 + \mu x_2)$ – произвольная функция линейной формы $z = x_1 + \mu x_2$.

После подстановки представлений (4.19) в однородные уравнения (4.18) получается алгебраическая система уравнений для нахождения величин R_k :

$$\sum_{k=1}^3 l_{ik} R_k = 0 \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (4.20)$$

Величины l_{ik} получены из операторов (3.7) заменой операций дифференцирования ∂_1 , ∂_2 и ∂_3 величинами 1, μ и 0 соответственно.

Для решения однородной системы уравнений (4.20) нужно положить равным нулю ее определитель:

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.21)$$

Исходя из энергетических соображений, С. Г. Лехницкий доказал, что уравнение (4.21) не может иметь вещественных корней [157].

Решение уравнения (4.21) дает шесть комплексно-сопряженных корней $\mu_j, \overline{\mu_j}$ ($j = \overline{1,3}$). Предполагая, что среди корней μ_j нет кратных, решение (4.19) запишется в виде суперпозиции функций

$$u_k^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{kj} \Phi_j(x_1 + \mu_j x_2). \quad (4.22)$$

Из однородной системы уравнений (4.20) находятся $R_{kj} = R_{kj}^* / \Delta_j(\mu_j)$:

$$R_{11}^* = (l_{22}l_{33} - l_{23}l_{32}), \quad R_{21}^* = (l_{31}l_{23} - l_{21}l_{33}), \quad R_{31}^* = (l_{21}l_{32} - l_{31}l_{22}), \quad l_{ik} = l_{ik}(\mu_1);$$

$$R_{12}^* = (l_{32}l_{13} - l_{12}l_{33}), \quad R_{22}^* = (l_{11}l_{33} - l_{13}l_{31}), \quad R_{32}^* = (l_{13}l_{12} - l_{32}l_{11}), \quad l_{ik} = l_{ik}(\mu_2);$$

$$R_{13}^* = (l_{12}l_{23} - l_{13}l_{22}), \quad R_{23}^* = (l_{21}l_{13} - l_{23}l_{11}), \quad R_{33}^* = (l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21}), \quad l_{ik} = l_{ik}(\mu_3).$$

Величины $\Delta_j(\mu_j)$ являются произвольными и их значения будут определены ниже.

В соответствии с решением (4.22), представление для напряжений (4.1) можно записать так:

$$\sigma_i^* = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 P_{ij} \Phi_j'(z_j). \quad (4.23)$$

Здесь введены обозначения

$$z_j = x_1 + \mu_j x_2, \quad \Phi_j' = d\Phi_j / dz_j, \quad P_{ij} = P_{ij}^* / \Delta_j,$$

$$P_{ij}^* = \left[A_{i1} R_{1j}^* + A_{i5} R_{3j}^* + A_{i6} R_{2j}^* + \mu_j \left(A_{i2} R_{2j}^* + A_{i4} R_{3j}^* + A_{i6} R_{1j}^* \right) \right].$$

Из уравнений равновесия следует, что между величинами P_{ij} существуют следующие зависимости:

$$P_{1j} + P_{6j} \mu_j = 0, \quad P_{6j} + P_{2j} \mu_j = 0, \quad P_{5j} + P_{4j} \mu_j = 0.$$

Если величины $\Delta_j(\mu_j)$ выбрать в форме

$$\Delta_1 = P_{21}^*, \quad \Delta_2 = P_{22}^*, \quad \Delta_3 = P_{43}^*,$$

то выражения для напряжений (4.23) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= 2\operatorname{Re}\left[\mu_1^2 \Phi_1' + \mu_2^2 \Phi_2' + \mu_3^2 \lambda_3 \Phi_3'\right], \quad \sigma_2^* = 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1' + \Phi_2' + \lambda_3 \Phi_3'\right], \\ \sigma_6^* &= -2\operatorname{Re}\left[\mu_1 \Phi_1' + \mu_2 \Phi_2' + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3'\right], \quad \sigma_3^* = 2\operatorname{Re}\left[P_{31} \Phi_1' + P_{32} \Phi_2' + P_{33} \Phi_3'\right], \\ \sigma_4^* &= 2\operatorname{Re}\left[\lambda_1 \Phi_1' + \lambda_2 \Phi_2' + \Phi_3'\right], \quad \sigma_5^* = -2\operatorname{Re}\left[\lambda_1 \mu_1 \Phi_1' + \lambda_2 \mu_2 \Phi_2' + \mu_3 \Phi_3'\right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $\lambda_1 = P_{41}$, $\lambda_2 = P_{42}$, $\lambda_3 = P_{23}$.

Перемещения и напряжения, которые формируются за счет появления выработок, выражаются через три функции $\Phi_j(z_j)$ обобщенных комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$, которые определены в областях S_j ($j = \overline{1,3}$), полученных из области S путем аффинных преобразований (3.37).

Таким образом, плоскую задачу для анизотропного тела можно рассматривать как задачу определения в областях S_j функций $\Phi_j(z_j)$, удовлетворяющих определенным граничным условиям.

4.5. Перемещения и напряжения в сплошном анизотропном массиве от действия сил собственного веса

При прохождении подземных выработок собственный вес горных пород является одним из факторов, вызывающим концентрацию напряжений около них.

Для определения компонент напряженно-деформированного состояния в нетронутом массиве под действием гравитационных сил считается, что массив в направлении осей Ox_1 и Ox_3 является бесконечным. Если дневная поверхность горизонтальна, а толща представлена однородными по плотности породами, т.е. $\rho = const$, то его можно рассматривать как тяжелое упругое анизотропное полупространство, свободное от напряжений при $x_2 = H$. Отсутствие границ массива в направлении осей Ox_1 и Ox_3 накладывает ограничения на компоненты напряжений и перемещений. Они не должны зависеть от этих координат. Поэтому

$$u_i^0 = u_i^0(x_2) \quad (i = \overline{1,3}), \quad \sigma_k^0 = \sigma_k^0(x_2) \quad (k = \overline{1,6}). \quad (4.25)$$

Для определения компонент напряжений и перемещений в нетронутом массиве необходимо проинтегрировать уравнения равновесия (4.17) и уравнения закона Гука в форме (4.15) при условии на границе полупространства

$$\sigma_2^0 = \sigma_4^0 = \sigma_6^0 = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = H. \quad (4.26)$$

Уравнения (4.17) с учетом зависимостей (4.25) примут вид

$$\partial_2 \sigma_6^0 = 0, \quad \partial_2 \sigma_2^0 = \gamma, \quad \partial_2 \sigma_4^0 = 0.$$

Интегрирование этих уравнений, с учетом условий (4.26) дает

$$\sigma_4^0 = \sigma_6^0 = 0, \quad \sigma_2^0 = \gamma(x_2 - H). \quad (4.27)$$

Первое, третье и пятое уравнения закона Гука (4.15) дает систему для определения напряжений $\sigma_1^0, \sigma_3^0, \sigma_5^0$

$$a_{i1}\sigma_1^0 + a_{i3}\sigma_3^0 + a_{i5}\sigma_5^0 = -a_{i2}\sigma_2^0 \quad (i = 1,3,5). \quad (4.28)$$

Решением системы уравнений (4.28) являются представления

$$\sigma_1^0 = \tau_1 \sigma_2^0, \quad \sigma_3^0 = \tau_3 \sigma_2^0, \quad \sigma_5^0 = \tau_5 \sigma_2^0,$$

где

$$\tau_1 = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & a_{33} & a_{35} \\ a_{52} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix} / \Delta, \quad \tau_3 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{vmatrix} / \Delta,$$

$$\tau_5 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \\ a_{51} & a_{53} & a_{52} \end{vmatrix} / \Delta, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} \end{vmatrix}. \quad (4.29)$$

Окончательные выражения для напряжений можно записать в форме

$$\sigma_k^0 = -\tau_k \gamma H (1 - x_2 / H). \quad (4.30)$$

Здесь введены обозначения, соответствующие напряжениям (4.27):

$$\tau_4 = \tau_6 = 0, \quad \tau_2 = 1.$$

Выражения для перемещений находятся после интегрирования второго, четвертого и шестого уравнений закона Гука (4.15):

$$u_i^0 = -\alpha_i \gamma H \left(x_2 - \frac{x_2^2}{2H} \right) + c_i, \quad (4.31)$$

где

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^6 a_{6k} \tau_k, \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^6 a_{2k} \tau_k, \quad \alpha_3 = \sum_{k=1}^6 a_{4k} \tau_k, \quad (4.32)$$

c_i – произвольные постоянные, характеризующие жесткое смещение тела как целого.

Найденные решения (4.30) и (4.31) для случая общей анизотропии содержат в себе решения для изотропного и трансверсально-изотропного полупространств, полученные А.Н. Динником [61] и С.Г.Лехницким [157] в соответствии с гипотезой об учете в массиве только вертикальных перемещений.

Действительно, в случае трансверсально-изотропной среды в соотношениях (4.29) и (4.32) следует положить

$$a_{15} = a_{25} = a_{35} = 0, \quad a_{11} = a_{33}, \quad a_{12} = a_{23}.$$

Тогда перемещения и напряжения запишутся в форме

$$\begin{aligned}
 u_1^0 = u_3^0 = 0, \quad u_2^0 &= \frac{a_{22}(a_{11} + a_{13}) - 2a_{12}^2}{a_{11} + a_{13}} \gamma \left(x_2^2 / 2 - Hx_2 \right), \\
 \sigma_1^0 = \sigma_3^0 &= -\frac{a_{12}}{a_{11} + a_{13}} \gamma (x_2 - H), \\
 \sigma_2^0 &= \gamma (x_2 - H), \quad \sigma_4^0 = \sigma_5^0 = \sigma_6^0 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Последние соотношения с учетом направления координатных осей совпадают с приведенными в работе [157]. Если положить в выражениях (4.33) величины $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{13}$, то получатся формулы для изотропной среды, которые были предложены А.Н. Динником.

Таким образом, нагрузка от гравитационных сил реализует в протяженной выработке плоскую или обобщенную плоскую деформацию.

Следует отметить, что существует гипотеза о возможности гидростатического закона распределения напряжений в толще горных пород [60]. В формировании напряженного состояния горных пород под действием их собственного веса существенную роль играют механические свойства пород, и прежде всего возможность их трансформации во времени при длительном действии напряжений. Влияние фактора времени на напряженное состояние толщи пород проявляется в том, что все горные породы обладают свойством ползучести, интенсивность которой зависит от действующих напряжений. За время, порядок которого сопоставим со временем геологических эпох, горные породы деформируются, значения нормальных компонентов напряжений сближаются по величине, а касательные постепенно исчезают, т.е. напряженное состояние соответствует гидростатическому закону распределения напряжений. В этом случае в формулах (4.30) следует положить $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$, а $\tau_4 = \tau_5 = \tau_6 = 0$.

Примечание. Система уравнений (4.28) позволяет рассматривать все возможные случаи действия напряжений от гравитационных сил: от безраспорного ($\sigma_1^0 = \sigma_3^0 = \sigma_5^0 = 0$), до гидростатического ($\sigma_1^0 = \sigma_3^0 = \sigma_2^0, \sigma_5^0 = 0$).

Для этого достаточно трансформировать упругие постоянные по следующей схеме:

- ◆ для безраспорного действия напряжений достаточно выполнения условий $a_{12} = a_{32} = a_{52} = 0$;
- ◆ для гидростатического действия напряжений достаточно выполнения условий

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0, \quad a_{31} + a_{32} + a_{33} = 0, \quad a_{51} + a_{52} + a_{53} = 0.$$

4.6. Граничные условия

4.6.1. Незакрепленная выработка. Для определения напряженного состояния горного массива с неподкрепленной выработкой за счет сил гравитации нужно удовлетворить граничным условиям на контуре выработки:

$$\begin{aligned} n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_6 &= 0, & n_1 \sigma_6 + n_2 \sigma_2 &= 0, \\ n_1 \sigma_5 + n_2 \sigma_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Здесь $\sigma_k = \sigma_k^0 + \sigma_k^*$, где σ_k^0 – напряжения от сил гравитации (4.30), а σ_k^* – компоненты напряжений, которые учитывают влияние выработки на напряженное состояние массива (4.23) или (4.24); $n_1 = \cos(n, x_1)$, $n_2 = \cos(n, x_2)$, n – внешняя нормаль к контуру.

После подстановки в условия (4.34) выражений для σ_k^* и σ_k^0 из соотношений (4.24) и (4.30) после несложных преобразований получаются граничные условия для нахождения функций $\Phi_j(z_j)$:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[a_1 \mu_1 \Phi_1' + a_2 \mu_2 \Phi_2' + a_3 \mu_3 \lambda_3 \Phi_3'] &= P_1, \\ 2\operatorname{Re}[a_1 \Phi_1' + a_2 \Phi_2' + a_3 \lambda_3 \Phi_3'] &= P_2, \\ 2\operatorname{Re}[a_1 \lambda_1 \Phi_1' + a_2 \lambda_2 \Phi_2' + a_3 \Phi_3'] &= P_3, \end{aligned} \tag{4.35}$$

где $a_j = n_1 \mu_j - n_2$, $P_1 = (\tau_1 n_1 + \tau_6 n_2) \gamma H (1 - x_2 / H)$,

$$P_2 = -(\tau_6 n_1 + \tau_2 n_2) \gamma H (1 - x_2 / H), \quad P_3 = -(\tau_5 n_1 + \tau_4 n_2) \gamma H (1 - x_2 / H).$$

Граничные условия (4.35) можно проинтегрировать, принимая во внимание, что при параметрическом задании контура [137]

$$n_1 = \cos(n, x_1) = dx_2 / ds, \quad n_2 = \cos(n, x_2) = -dx_1 / ds, \quad ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}.$$

Тогда, с учетом того, что

$$a_j = n_1 \mu_j - n_2 = dz_j / ds, \quad \Phi'_j = d\Phi_j / dz_j,$$

получается

$$2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \mu_3 \lambda_3 \Phi_3] = \gamma H \left[\tau_1 x_2 - \tau_6 x_1 - \frac{\tau_1 x_2^2}{H} + \frac{\tau_6}{H} \int_0^s x_2 dx_1 \right] + c_1,$$

$$2 \operatorname{Re}[\Phi_1 + \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3] = -\gamma H \left[\tau_6 x_2 - \tau_2 x_1 - \frac{\tau_6 x_2^2}{H} + \frac{\tau_2}{H} \int_0^s x_2 dx_1 \right] + c_2, \quad (4.36)$$

$$2 \operatorname{Re}[\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \Phi_3] = -\gamma H \left[\tau_5 x_2 - \tau_4 x_1 - \frac{\tau_5 x_2^2}{H} + \frac{\tau_4}{H} \int_0^s x_2 dx_1 \right] + c_3.$$

4.6.2. Жестко подкрепленная выработка. При жестко подкрепленной выработке на ее боковой поверхности нужно положить равными нулю перемещения

$$u_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}). \quad (4.37)$$

Здесь $u_i = u_i^0 + u_i^*$, где u_i^0 – перемещения от сил гравитации (4.31), а u_i^* – проекции перемещений (4.22), которые учитывают влияние выработки.

Из условий (4.37) получаются граничные условия для функций $\Phi_j(z_j)$:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{ij} \Phi_j(z_j) = \alpha_i \gamma x_2 H (1 - x_2 / 2 / H) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (4.38)$$

Таким образом, задача о напряженно - деформированном состоянии массива в окрестности выработки сводится к определению комплексных потенциалов $\Phi_j(z_j)$ из граничных условий (4.35) или (4.36), если выработка свободна. При жестком подкреплении функции $\Phi_j(z_j)$ определяются из условий (4.38).

Следует отметить, что если выработка пройдены на большой глубине, то величина x_2/H в окрестности малых значений координаты x_2 будет мала по сравнению с единицей. Это дает возможность при определении функций $\Phi_j(z_j)$ в правых частях граничных условий (4.35), (4.36) и (4.38), величинами, содержащими множитель x_2/H пренебрегать.

4.7. Массив с выработкой эллиптического сечения

В качестве примера рассматривается горный массив, в котором пройдена выработка эллиптического сечения с полуосями a и b . Функции $\Phi_j(z_j)$ представлены в виде ряда (3.45).

4.7.1. Незакрепленная выработка. Учитывая, что на контуре единичного круга переменная $\zeta_j = \sigma_j = \sigma$, методом рядов из условий (4.36) получается система алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения (3.45):

$$\begin{aligned} \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \mu_3 \lambda_3 a_{13} &= \left(-\sigma_1^0 b i + \sigma_6^0 a \right) / 2 = \gamma H (\tau_1 b i - \tau_6 a) / 2, \\ a_{11} + a_{12} + \lambda_3 a_{13} &= \left(-\sigma_2^0 a + \sigma_6^0 b i \right) / 2 = \gamma H (\tau_2 a - \tau_6 b i) / 2, \\ \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + a_{13} &= \left(\sigma_5^0 b i - \sigma_4^0 a \right) / 2 = \gamma H (\tau_4 a - \tau_5 b i) / 2, \\ a_{k1} = a_{k2} = a_{k3} &= 0 \quad \text{для } k \geq 2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

После определения коэффициентов $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{12}$, $a_3 = a_{13}$ из системы (4.39), по формулам (4.23) или (4.24) находится второе поле напряжений σ_i^* ,

которое в совокупности с первым σ_i^0 (4.30) определяет напряженное состояние горного массива вблизи выработки эллиптического сечения. При этом, производная от функции (3.45) определяется соотношением (3.48).

Напряжения, действующие на контуре или вблизи контура выработки на площадках, касательных и нормальных к нему вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \sigma_1 n_1^2 + 2\sigma_6 n_1 n_2 + \sigma_2 n_2^2, & \sigma_{tt} &= \sigma_1 n_2^2 - 2\sigma_6 n_1 n_2 + \sigma_2 n_1^2, \\ \sigma_{nt} &= (\sigma_2 - \sigma_1) n_1 n_2 + \sigma_6 (n_1^2 - n_2^2), & & (4.40) \\ \sigma_{nx_3} &= \sigma_5 n_1 + \sigma_4 n_2, & \sigma_{tx_3} &= \sigma_5 n_2 - \sigma_4 n_1, & \sigma_i &= \sigma_i^* + \sigma_i^0.\end{aligned}$$

4.7.2. Жестко закрепленная выработка. Методом рядов из граничных условий (4.38) получается система алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения (3.45):

$$\begin{aligned}R_{11}a_1 + R_{12}a_2 + R_{13}a_3 &= \alpha_1 b i \gamma H / 2, \\ R_{21}a_1 + R_{22}a_2 + R_{23}a_3 &= \alpha_2 b i \gamma H / 2, & (4.41) \\ R_{31}a_1 + R_{32}a_2 + R_{33}a_3 &= \alpha_3 b i \gamma H / 2, \\ a_{k1} = a_{k2} = a_{k3} &= 0, \quad \text{для } k \geq 2, \quad a_{1j} = a_j.\end{aligned}$$

Далее напряжения и перемещения находятся по формулам

$$\sigma_i = \sigma_i^* + \sigma_i^0 \quad (i = \overline{1, 6}), \quad u_k = u_k^* + u_k^0 \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (4.42)$$

где величины σ_i^* , σ_i^0 , u_k^* и u_k^0 определяются соотношениями (4.23), (4.30), (4.22) и (4.31) соответственно.

4.8. Преобразование интегральных уравнений состояния вязкоупругих горных пород к временным уравнениям закона Гука

При рассмотрении вязкоупругого напряженного состояния уравнения закона Гука (4.1) следует заменить интегральными уравнениями состояния вида (2.76), которые в развернутом виде имеют вид

$$e_i(t) = a_{ik} s_k(t) + \int_0^t \frac{dP_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_k(\tau) d\tau; \quad (4.43)$$

$$s_i(t) = A_{ik} e_k(t) + \int_0^t \frac{dR_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_k(\tau) d\tau \quad (i, k = \overline{1,6}). \quad (4.44)$$

Для $e_i(t)$ и $s_i(t)$ здесь использованы обозначения, введенные в подразделе 2.4. Матрицы функций ползучести и релаксации представляются в форме

$$\mathbf{P}(t) = P_{ik}(t) = a_{ik} p_{ik}(t), \quad \mathbf{R}(t) = R_{ik}(t) = A_{ik} r_{ik}(t). \quad (4.45)$$

Соотношения (4.43) и (4.44) можно представить в форме

$$e_i = \bar{a}_{ik} \cdot s_k, \quad \bar{a}_{ik} = a_{ik} (1 + p_{ik}^*) \quad (i, k = \overline{1,6}); \quad (4.46)$$

$$s_i = \bar{A}_{ik} \cdot e_k, \quad \bar{A}_{ik} = A_{ik} (1 - r_{ik}^*) \quad (i, k = \overline{1,6}). \quad (4.47)$$

Каждый из временных операторов \bar{a}_{ik} или \bar{A}_{ik} состоит из двух элементов: упругой постоянной матрицы a_{ik} или A_{ik} , а также интегрального оператора $a_{ik} p_{ik}^*$ или $A_{ik} r_{ik}^*$, где

$$p_{ik}^* \cdot s_k(t) = \int_0^t \frac{dp_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} s_k(\tau) d\tau, \quad (4.48)$$

$$r_{ik}^* \cdot e_k(t) = - \int_0^t \frac{dr_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} e_k(\tau) d\tau. \quad (4.49)$$

При нахождении операторов $\bar{a}_{ik} = a_{ik} (1 + p_{ik}^*)$ представляет интерес получения значений произведений $p_{ik}^* \cdot s_k(t)$. Рассмотрение задач установившейся ползучести осуществляется при нагрузках, постоянных во времени. Если нагрузки постоянны, то напряжения $s_k(\tau)$ в (4.48) можно принять зависимыми от верхнего предела и вынести из под знака интеграла. Тогда из (4.48) можно получить

$$p_{ik}^* \cdot 1 = \int_0^t \frac{dp_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau = p_{ik}(t) - 1. \quad (4.50)$$

В опытах на релаксацию мгновенно прикладываются и поддерживаются постоянными деформации. Полагая их зависимыми от верхнего предела и вынося из под знака интеграла в уравнении (4.49) получают представления для значений произведения операторов r_{ik}^* на единицу

$$r_{ik}^* \cdot 1 = -\int_0^t \frac{dr_{ik}(t-\tau)}{d(t-\tau)} d\tau = 1 - r_{ik}(t). \quad (4.51)$$

Значения функций ползучести $p_{ik}(t)$ и релаксации $r_{ik}(t)$ находятся из экспериментов. Значения действия операторов $p_{ik}^*(t)$ и $r_{ik}^*(t)$ на единицу определяются через функции ползучести и релаксации по формулам (4.50) и (4.51). Это дает возможность строить матрицы упругих коэффициентов уравнений состояния (4.46) – (4.47)

$$\bar{a}_{ik} \cdot 1 = a_{ik} (1 + p_{ik}^* \cdot 1) = a_{ik} p_{ik}(t), \quad (4.52)$$

$$\bar{A}_{ik} \cdot 1 = A_{ik} (1 - r_{ik}^* \cdot 1) = A_{ik} r_{ik}(t). \quad (4.53)$$

Уравнения состояния (4.46) – (4.47) имеют форму обычных уравнений закона Гука. Компоненты матриц упругих коэффициентов $\bar{a}_{ik} \cdot 1$ и $\bar{A}_{ik} \cdot 1$ вычисляются по формулам (4.52) и (4.53) и зависят от времени. Поэтому систему уравнений (4.17),

(3.5), (4.46), (4.47) с граничными условиями (4.34) или (4.37) следует рассматривать как систему теории упругости, зависящей от времени. Решение этой системы можно осуществлять в любой задаваемый момент времени t .

Экспериментально найденные величины $p_{ik}(t)$ и $r_{ik}(t)$ позволяют формировать матрицы $P(t)$ и $R(t)$ по формулам (4.45). Элементы этих матриц задаются таблично, дискретным набором значений, соответствующих некоторым фиксированным временам. При использовании таких данных в вычислениях, для обеспечения точности расчетов, необходимо осуществить математическую обработку табличных данных. Такая обработка включает в себя сглаживание кривых ползучести или релаксации и восполнение табличных данных путем увеличения числа точек разбиения временного отрезка $[0, t]$. Эти вопросы рассмотрены в п.п. 2.4.2.

Получение опытных данных из экспериментов по ползучести и релаксации, которые позволили бы определить все величины, входящие в правые части соотношений (4.52) и (4.53), наталкивается на значительные математические и технические трудности. Поэтому в литературе полный набор таких данных отсутствует. Это приводит к необходимости прибегать к различным допущениям для уменьшения числа параметров, определяющихся из экспериментов. При решении конкретных задач применяются различные упрощающие предположения относительно реологического поведения материала. Остановимся на некоторых из них.

1. Матрицы $P(t)$ и $R(t)$ связаны между собой соотношениями (2.72) и (2.73). С помощью представлений (2.72) по экспериментально полученным значениям функции ползучести в точках сетки находим функции релаксации, а с помощью (2.73) – наоборот. Таким образом, соотношения (2.72) и (2.73) полностью решают задачу обращения уравнений (4.43) или (4.44). С другой стороны, соотношения (2.72) и (2.73) позволяют вдвое сократить число функций, определяемых из эксперимента.

2. Полагая в операторах (4.50) – (4.53) $t=0$ и $t \rightarrow \infty$ можно получить матрицы мгновенных и длительных коэффициентов упругости. Эти матрицы симметричны, то есть $\bar{a}_{ik}(0) = \bar{a}_{ki}(0)$, $\bar{a}_{ik}(\infty) = \bar{a}_{ki}(\infty)$, $\bar{A}_{ik}(0) = \bar{A}_{ki}(0)$, $\bar{A}_{ik}(\infty) = \bar{A}_{ki}(\infty)$ [243]. Симметрия операторных модулей для других значений времени не выполняется. Однако, в большинстве приложений и в данной работе симметрия матрицы операторных модулей и податливостей постулируется для всех значений времени [243]. Из соотношений (4.45), (4.52) и (4.53) следует, что в этом случае симметричными будут и матрицы $P(t)$ и $R(t)$. Симметрия этих матриц показывает, что должны выполняться равенства $P_{ik} = P_{ki}$, $R_{ik} = R_{ki}$. Отсюда следует, что количество параметров, определяемых из эксперимента, значительно уменьшилось.

3. В случае изотропного материала часто используется допущение об упруго сжимаемом материале. Это позволяет по заданному интегральному оператору \bar{V} определять оператор \bar{E} и наоборот [240]. Для ортотропного материала это допущение приводит к соотношению (2.53). Возможны и другие предположения [110].

Далее после перехода в соотношениях (4.6) от упругих постоянных C_{ik} к операторам вида $\bar{C}_{ik} = C_{ik} (1 + p_{ik}^*)$, с учетом свойств резольвентных операторов, рассматривается задача определения интегральных операторов p_{ik}^* . В работе [63] приведены результаты экспериментов на ползучесть для образцов различных изотропных горных пород. Экспериментам были подвергнуты образцы наиболее распространенных видов донбасских горных пород: алевролит, аргиллит, песчаник и известняк. В результате опытов установлено, что горные породы под воздействием нагрузок, не превосходящих 70% разрушающих, обнаруживают свойства ползучести. Величины деформаций ползучести ко времени ее стабилизации достигают 150–370% упругих деформаций. Продолжительность ползучести алевролита и аргиллита составляет до 600 час., песчаника – до 860, а известняка – 50 час. Процесс ползучести горных пород подчиняется общему

закону линейного деформирования, определяемого уравнениями состояния теории наследственности Вольтерра. Из элементов C_{ik} матрицы (4.6) формируются временные операторы \bar{C}_{ik} в форме (4.46), т. е. $\bar{C}_{ik} = C_{ik} \left[1 + p_{ik}^*(\delta_{ik}) \right]$, где δ_{ik} – регулярная точка [53].

Предполагается, что из опыта получена кривая ползучести для величины

$$\bar{C}_{11} \cdot 1 = \bar{C}_{22} \cdot 1 = \frac{1}{\bar{E}_1} \cdot 1 = \frac{1}{E_1} \left[1 + p_{11}^*(\delta_{11}) \cdot 1 \right] = \frac{1}{E_1} p_{E1}(t). \quad (4.54)$$

Здесь $p_{E1}(t)$ – таблично заданная кривая ползучести для значений произведения $1/\bar{E}_1 \cdot 1$, полученная из эксперимента.

Из соотношения (4.54) находятся значения произведения интегрального оператора

$$p_{11}^*(\delta_{11}) \cdot 1 = p_{E1}(t) - 1. \quad (4.55)$$

Аналогичным образом из соотношения

$$\bar{\nu}_1 \cdot 1 = \nu_1 \left[1 + p_{\nu 1}^*(\delta_{\nu 1}) \cdot 1 \right] = \nu_1 p_{\nu 1}(t) \quad (4.56)$$

определяются значения действия интегрального оператора $p_{\nu 1}^*(\delta_{\nu 1}) \cdot 1$ по заданной кривой ползучести $p_{\nu 1}(t)$

$$p_{\nu 1}^*(\delta_{\nu 1}) \cdot 1 = p_{\nu 1}(t) - 1. \quad (4.57)$$

Оператор $\bar{C}_{12} = \bar{C}_{21} = -\bar{\nu}_1 / \bar{E}_1$ определяется путем использования представлений (4.54), (4.56), свойств операторов с произвольными ядрами и представляется в форме

$$\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} = \frac{\nu_1}{E_1} \left[1 + \lambda_{11} p_{11}^*(\delta_{11}) + \lambda_{\nu 1} p_{\nu 1}^*(\delta_{\nu 1}) \right], \quad (4.58)$$

$$\lambda_{11} = 1 + 1/(\delta_{11} - \delta_{\nu 1}), \quad \lambda_{\nu 1} = 1 - 1/(\delta_{11} - \delta_{\nu 1}).$$

Значения произведения оператора (4.58) на единицу получаются путем замены в правой части интегральных операторов их значениями по формулам (4.55) и (4.57).

При решении граничных задач анизотропной теории вязкоупругости возникают трудности, связанные с экспериментальным определением реологических параметров материалов. Опытные данные, которые имеются в литературе, не содержат полной информации о величинах, необходимых для решения задач вязкоупругости. Поэтому используются различные допущения относительно реологических параметров. Например, если экспериментальные значения величины $\bar{\nu}_1$ не известны, то они могут быть определены согласно предположению, что оператор объемного сжатия является постоянной величиной. Это означает, что имеют место соотношение (2.53). Считая, $(1 - 2\bar{\nu}_1) / \bar{E}_1 = (1 - 2\nu_1) / E_1$, можно найти

$$\bar{C}_{12} \cdot 1 = \bar{C}_{21} \cdot 1 = \frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} \cdot 1 = \frac{\nu_1}{E_1} \left[1 + \frac{1}{2\nu_1} (p_{E1}(t) - 1) \right]. \quad (4.59)$$

Приравнивая между собой вторые и третьи слагаемые, соответственно, в левой и правой частях соотношений (2.53) можно получить

$$\frac{1}{\bar{E}_1} - \frac{2\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_1} - \frac{2\nu_2}{E_2}, \quad \frac{1}{\bar{E}_2} - \frac{2\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_2} - \frac{2\nu_2}{E_2}. \quad (4.60)$$

Из уравнений (4.60) можно найти

$$\frac{\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} \cdot 1 = \frac{\nu_2}{E_2} \left[1 + \frac{E_2}{2E_1\nu_2} (p_{E1} - 1) \right], \quad \frac{1}{\bar{E}_2} \cdot 1 = \frac{1}{E_2} \left[1 + \frac{E_2}{E_1} (p_{E1} - 1) \right]. \quad (4.61)$$

Значения произведения оператора \bar{C}_{66} на единицу определяются через известные операторы по формуле

$$\bar{C}_{66} \cdot 1 = 2 \left(\frac{1}{\bar{E}_1} \cdot 1 + \frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} \cdot 1 \right). \quad (4.62)$$

Для модуля сдвига G_2 справедлива следующая формула [19]

$$\frac{1}{G_2} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1-2\nu_2}{E_2} - \frac{1}{E_1}, \quad (4.63)$$

где E_{45} – значение модуля Юнга при сжатии породного образца в направлении, составляющем угол 45° к плоскости изотропии.

Если считать, что значения $\frac{1}{\bar{E}_{45}} \cdot 1 = \frac{1}{E_{45}} p_{E45}(t)$ также известны из опыта, то учитывая второе соотношение (4.60), получаются выражения для значений действия операторов

$$\bar{C}_{44} \cdot 1 = \bar{C}_{55} \cdot 1 = \frac{1}{\bar{G}_2} \cdot 1 = \frac{4}{E_{45}} p_{E45}(t) - \frac{1-2\nu_2}{E_2} - \frac{1}{E_1} p_{E1}(t). \quad (4.64)$$

Таким образом, получены значения произведения интегральных операторов на единицу для компонент матрицы (4.6). Дальнейшее преобразование матрицы \bar{C}_{ik} осуществляется при переходе к другим системам координат, поворотом на угол φ , а затем на угол ψ . В результате получается матрица операторных функций $P(t) = \bar{a}_{ik} \cdot 1$. После определения матрицы ползучести $P(t)$ матрицу релаксации $R(t)$ построим путем использования соотношений (2.72).

Как видно, в предложенной методике не ставится вопрос о выборе ядер ползучести или релаксации для реальных материалов, обладающих ползучестью. На основе свойств резольвентных операторов для интегральных уравнений с ядрами произвольного вида предложен метод получения решения задач вязкоупругости путем использования непосредственно экспериментальных данных, заданных таблично. Предварительно табличные данные подвергаются сглаживанию и восполнению.

Сведения о полном комплекте упругих и реологических характеристик горных пород, как трансварсально-изотропного тела, весьма малочисленны. Основная причина – отсутствие опытных данных об операторном модуле \bar{G}_2 . На отсутствие упругого модуля G_2 обращали внимание А.С. Космодамианский [131] и С.Г. Лехницкий [156]. М.И. Розовский и А.Н. Зорин [70], используя решение

для упругой задачи [155] определили перемещения точек контура эллиптической выработки с учетом линейной ползучести материала. При этом авторы предположили, что влияние ползучести существенно проявляется лишь под углом 45° к плоскости залегания слоев. Это предположение основывалось на многочисленные экспериментальные исследования реологических свойств анизотропных стеклопластиков. Таким образом, принималось, что все упругие постоянные, кроме E_{45} , остаются без изменения. Подобное распространение свойств стеклопластиков на горные породы, по мнению авторов работы [64], требует обоснования. В связи с этим, предлагается следующая модель вязкоупругого анизотропного слоистого материала горных пород.

В работе [63] приведены результаты экспериментов по ползучести некоторых образцов изотропных горных пород. Измерялась только продольная деформация. Значения действия оператора $1/\bar{E}_1 \cdot 1$ аппроксимировались с помощью соотношения

$$\frac{1}{\bar{E}_1} \cdot 1 = \frac{1}{E_1} \left[1 + \frac{\delta}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right], \quad (4.65)$$

где значения реологических величин δ и α для материалов алевролит1 (A1) и песчаник1 (П1) приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4

Материал	$\delta, (\text{сек})^{\alpha-1}$	α	$e_1 = E_1 / (9.81 \times 10^3 \text{ МПа})$	ν_1	$\rho, \text{кг} / \text{м}^3$
A1	0.0094	0.726	0.62	0.2	2700
П1	0.0021	0.670	2.95	0.16	2500

Операторный коэффициент Пуассона $\bar{\nu}_1$ не определялся. Поэтому матричные элементы $\bar{C}_{12} \cdot 1 = \bar{C}_{21} \cdot 1$ следует определять из представления (4.59). Значения элементов $\bar{C}_{66} \cdot 1 = 1/\bar{G}_1 \cdot 1$ определяются из соотношения (4.62). Поскольку для

изотропного материала имеют место равенства $\nu_1 = \nu_2$, $E_1 = E_2$, то матрица уравнений состояния изотропного материала сформирована.

Горные породы по своей структуре анизотропны. В пределах точности измерений для образцов транслопных пород не установлены различия параметров ползучести по разным направлениям [5]. В данной работе при проведении расчетов для транслопных пород используются реологические постоянные, полученные для изотропных материалов. В качестве таких пород приняты алевролит и песчаник транслопные [65]:

алевролит2 (A2)

$$e_1 = 1.074, \quad e_2 = 0.523, \quad g_2 = 0.120, \quad \rho = 2700,$$

$$\nu_1 = 0.413, \quad \nu_2 = 0.198, \quad \delta = 0.0094, \quad \alpha = 0.726;$$

песчаник2 (П2)

$$e_1 = 2.987, \quad e_2 = 3.411, \quad g_2 = 0.215, \quad \rho = 2500,$$

$$\nu_1 = 0.134, \quad \nu_2 = 0.150, \quad \delta = 0.0021, \quad \alpha = 0.670.$$

На рисунке 4.3 приведены кривые ползучести: кривая 1 – для материала (A2); кривая 2 – для материала (П2). Эти экспериментальные кривые построены по формуле (4.65). Соответствующие кривые релаксации – 3 для материала A2 и 4 – для материала П2 – построены путем использования соотношений (2.72). Из рисунка 4.3 видно, что в начальные моменты времени процесс ползучести для материала A2 происходит быстрее, чем для материала П2. Полученные экспериментальные кривые могут быть использованы для нахождения элементов временной матрицы уравнений состояния по формулам (4.65), (4.59), (4.61), (4.62).

На рисунке 4.4 представлены кривые изменения во времени всех элементов матрицы уравнений состояния для материала A2, отнесенные к $9.8 \times 10^3 \text{ МПа}$.

Кривые для $\bar{\nu}_1 / \bar{E}_1 \cdot 1$ и $\bar{\nu}_2 / \bar{E}_2 \cdot 1$ на рисунке 4.4 совпали. Видно, что наибольшее изменение получает кривая ползучести для элементов матрицы состояния $1 / \bar{G}_1 \cdot 1$.

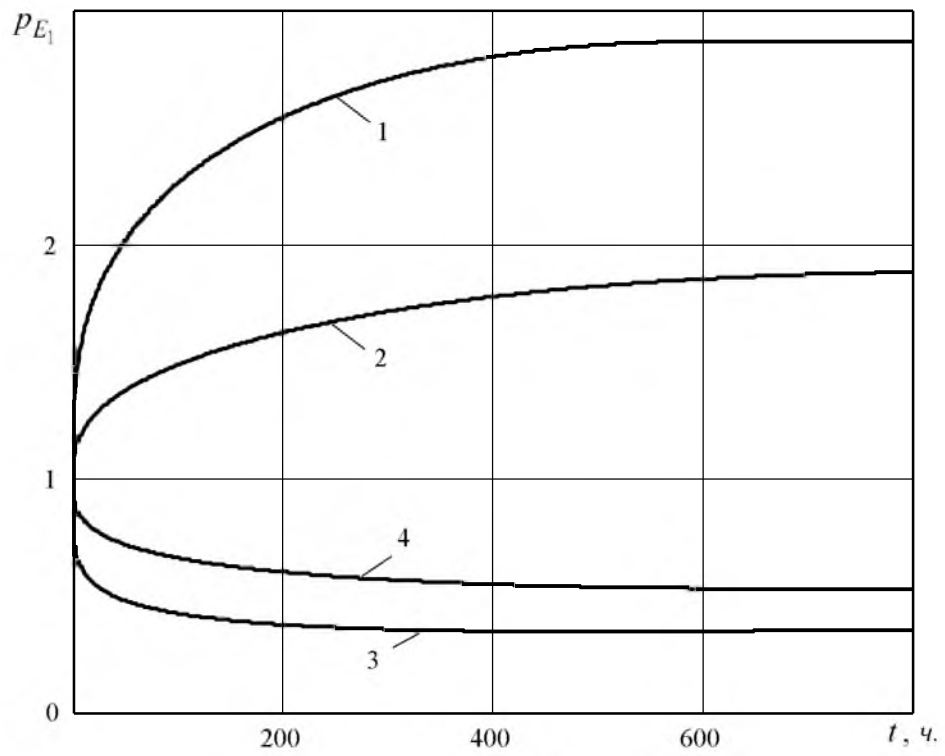


Рис. 4.3

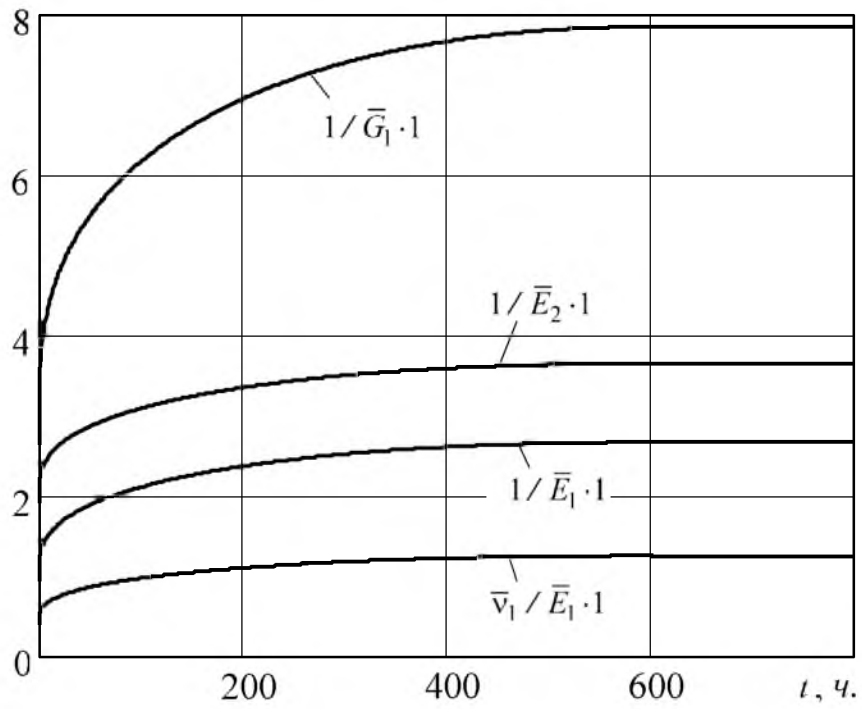


Рис. 4.4

Для определения операторных коэффициентов \bar{C}_{44} и \bar{C}_{55} использовались опытные данные работы [70]. В этой работе для материала А2 коэффициент $1/\bar{E}_{45}$ представлен в виде

$$\frac{1}{\bar{E}_{45}} = \frac{1}{E_{45}} \left(1 + \lambda \mathcal{E}_{\alpha}^*(-\beta) \right),$$

где $E_{45} = 0.383E$, $\lambda = 6.0246 \text{ см}^{-(1+\alpha)}$, $\beta = 0.087 \text{ см}^{-(1+\alpha)}$, $\alpha = -0.7$.

4.9. Численные исследования вязкоупругого напряженного состояния вблизи выработки эллиптического сечения

4.9.1. Незакрепленная выработка. Проведены численные исследования распределения напряжений и перемещений в зависимости от соотношения полуосей эллиптического сечения выработки, материала горных пород и времени действия нагрузок. Расчеты выполнены для изотропных и трансропных горных пород алевролит и песчаник, упругие и реологические постоянные которых приведены выше. При вычислениях считалось, что выработка находится на глубине $H = 1000$ м. Для изотропных материалов, а также для трансропных в случае, когда $\varphi = \psi = 0$ (плоскость изотропии параллельна дневной поверхности) в таблице 4.5 приведены значения напряжений $s_{\theta} / (\gamma H)$ и нормальных перемещений u_n [м] в тех точках контура сечения выработки, в которых они образуют наибольшую концентрацию. Для напряжений s_{θ} это точки контура, соответствующие $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а для перемещений u_n – $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. Вычисления проводились для начального момента времени $t = 0$, соответствующего упругому состоянию, и для времени установившейся стабилизации процесса ползучести t_{st} . Для алевролита $t_{st} = 600$ часов, для песчаника – $t_{st} = 860$.

Как видно из таблицы 4.5 для изотропных материалов (А1 и П1), напряженное состояние не изменяется с течением времени, что подтверждается

теорией, изложенной в работе [63]. Однако, процесс ползучести имеет место для перемещений. Относительное увеличение максимальных значений напряжений u_n составило – для породы А1 около 100%, для П1 около 50%. Для изотропных материалов в кровле и почве наблюдаются зоны положительных напряжений. Вблизи круговой выработки (транстропный массив П2) со временем эти напряжения увеличиваются более чем на 70%. Исследования также показали, что увеличение размера вертикальной полуоси эллиптической выработки приводит к уменьшению концентрации положительных напряжений в кровле и почве, а с его дальнейшим увеличением вообще, к переходу в зону сжимающих напряжений.

Таблица 4.5

Материал	$t, \text{ час}$	$a = 2 \text{ м}, b = 1.5 \text{ м}$		$a = 2 \text{ м}, b = 2 \text{ м}$		$a = 1.5 \text{ м}, b = 2 \text{ м}$	
		$s_\theta / (\gamma H)$	$u_n / \text{м}$	$s_\theta / (\gamma H)$	$u_n / \text{м}$	$s_\theta / (\gamma H)$	$u_n / \text{м}$
А1	0	-3.417	-0.0198	-2.75	-0.0213	-2.25	-0.0174
	600	-3.417	-0.0432	-2.75	-0.0446	-2.25	-0.0348
П1	0	-3.4762	-0.0043	-2.809	-0.0046	-2.3095	-0.0038
	860	-3.4762	-0.0067	-2.809	-0.007	-2.3095	-0.0056
А2	0	-3.656	-0.0241	-2.877	-0.0253	-2.4391	-0.0202
	600	-2.803	-0.0307	-2.21	-0.0318	-1.7708	-0.0250
П2	0	-6.4909	-0.007	-5.078	-0.007	-4.0176	-0.0058
	860	-5.0385	-0.0092	-3.989	-0.0095	-3.2028	-0.0074

На рисунках 4.5 и 4.6 показаны эпюры распределения напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ в начальный момент времени (сплошная линия) и в момент времени $t = t_{st}$ (штриховая линия) для транстропного материала А2 в случаях, когда $a = 1.5 \text{ м}$, $b = 2 \text{ м}$ (рис. 4.5) и $a = 2 \text{ м}$, $b = 1.5 \text{ м}$ (рис. 4.6).

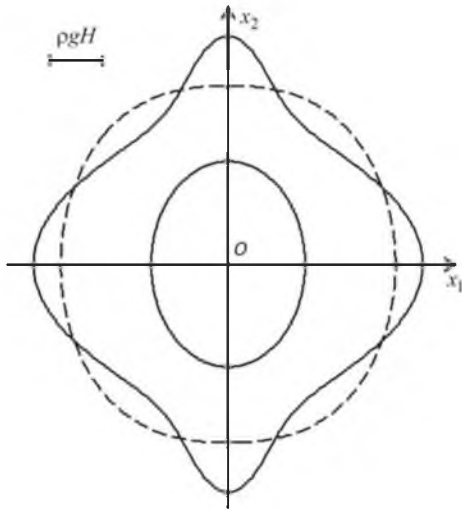


Рис. 4.5

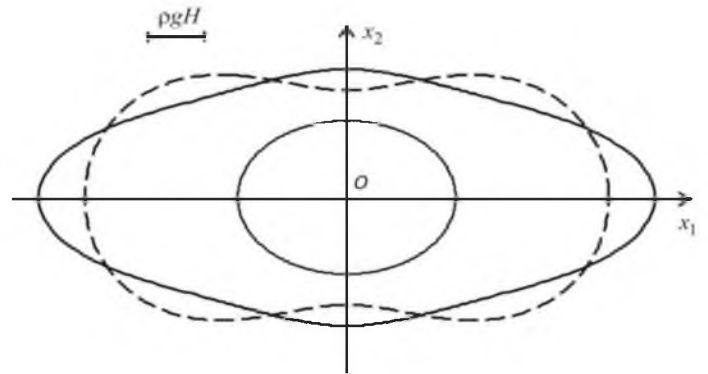


Рис. 4.6

Для материалов П2 и А2 на рисунках 4.7 и 4.8 представлены эпюры напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ на контуре кругового сечения выработки для случая $\varphi = \pi / 6$, $\psi = 0$. Сплошная линия соответствует моменту времени $t = 0$, штриховая – $t = t_{st}$. В таблице 4.6 даны значения напряжений, вызывающих концентрацию и соответствующие углы точек контура, где они возникают для указанных материалов.

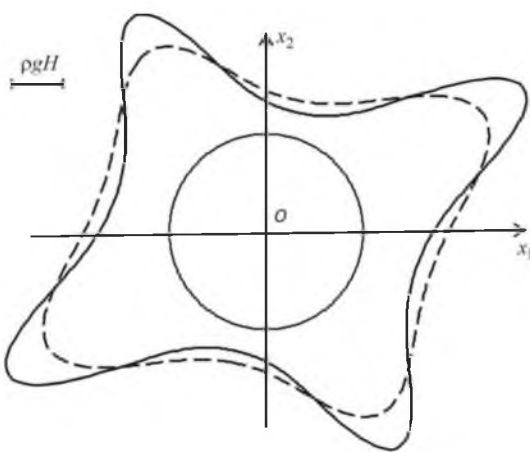


Рис. 4.7

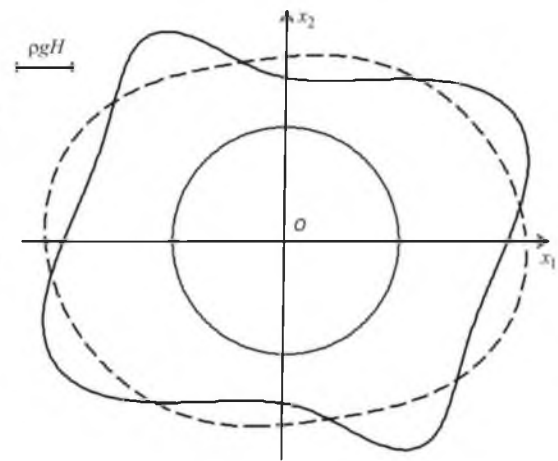


Рис. 4.8

Таблица 4.6

Материал	t , час	θ , град.	$s_{\theta} / (\gamma H)$
алевролит2	0	27^0	-2.6243
	600	172^0	-2.2712
песчаник2	0	29^0	-4.0752
	860	29^0	-3.0867

Представленные результаты для анизотропных пород были получены в предположении, что $\bar{G}_2 = G_2$. В работе [70] при исследовании эффектов ползучести вблизи выработки для трансверсально-изотропного массива считалось, что во времени изменяется только операторный модуль \bar{G}_2 , а остальные остаются константами. В этой же работе представлены результаты инструментальных наблюдений за смещением контура круговой выработки радиуса 1.85 м, проведенной на глубине $H = 770$ м в горной породе алевролит2. На 200-ые сутки величины смещений кровли перпендикулярно напластованию (плоскости изотропии) составили 13.5 см, а боков 5.5 см, причем смещения контура носят явно затухающий характер.

Для сравнения были проведены исследования смещений контура для аналогичной выработки при различных случаях учета операторных коэффициентов уравнений состояния:

- А) без учета сдвиговой ползучести, когда $\bar{G}_2 = G_2$;
- Б) учет только сдвиговой ползучести \bar{G}_2 , когда $\bar{E}_i = E_i$, $\bar{\nu}_i = \nu_i$;
- В) учет всех параметров \bar{E}_i , $\bar{\nu}_i$, \bar{G}_2 .

В таблице 4.7 приведены значения нормальных контурных смещений в точках кровли и почвы ($\theta = \pm\pi / 2$) и в боках ($\theta = 0 = \pi$).

Учет операторных коэффициентов	$u_n _{\theta=0}, \text{ см}$		$u_n _{\theta=\pi/2}, \text{ см}$	
	$t = 0$	$t = 200 \text{ сут}$	$t = 0$	$t = 200 \text{ сут}$
А)	-0.45	-1.10	-1.80	-2.56
Б)	-0.45	-3.03	-1.80	-7.42
В)	-0.45	-6.20	-1.80	-11.02

Как видно, результаты полученные при учете всех операторных параметров в наибольшей степени соответствуют экспериментальным данным. Таким образом, предложенная методика расчета позволяет по имеющимся испытаниям образцов горных пород, вмещающих подземную выработку, предсказать величины смещения его контура.

Учет различных вариантов существенно влияют также и на изменения напряженного состояния вблизи контура выработки. На рисунке 4.9 приведены эпюры напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ на контуре круговой выработки: сплошная линия соответствует упругому состоянию, штриховая – случаю А), штрих-пунктирная – случаю В).

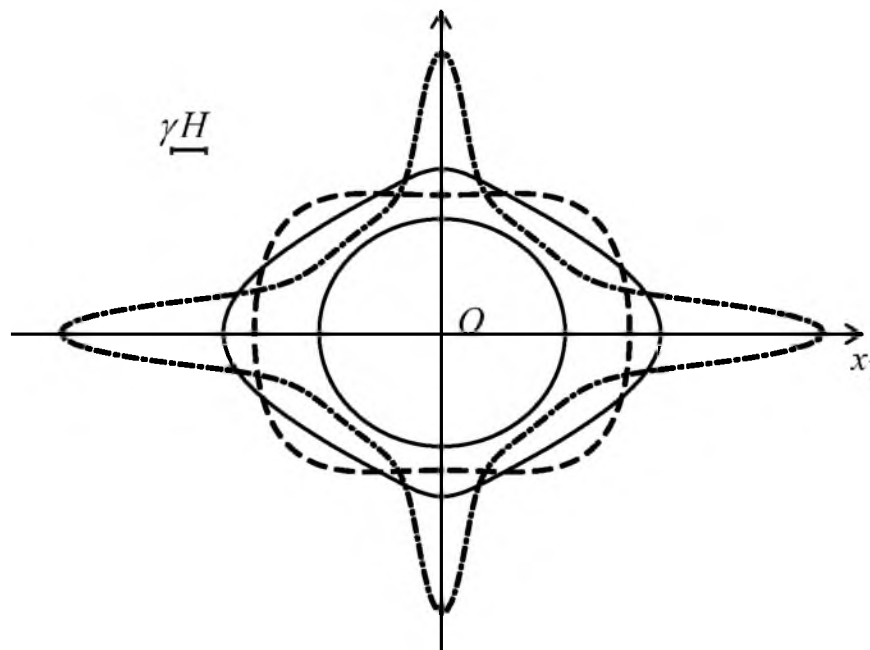


Рис. 4.9

Представленные исследования были проведены для случая, когда плоскость изотропии параллельна плоскости дневной поверхности ($\varphi = 0$, $\psi = 0$). Представляют интерес случаи для наклонных пластов и угла поворота выработки относительно плоскости изотропии. Эпюры напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ даны на рисунках 4.10 – 4.11.

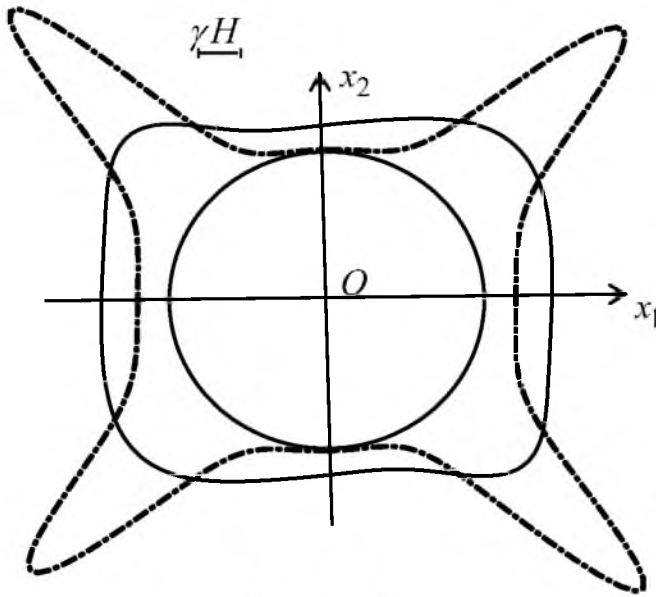


Рис. 4.10

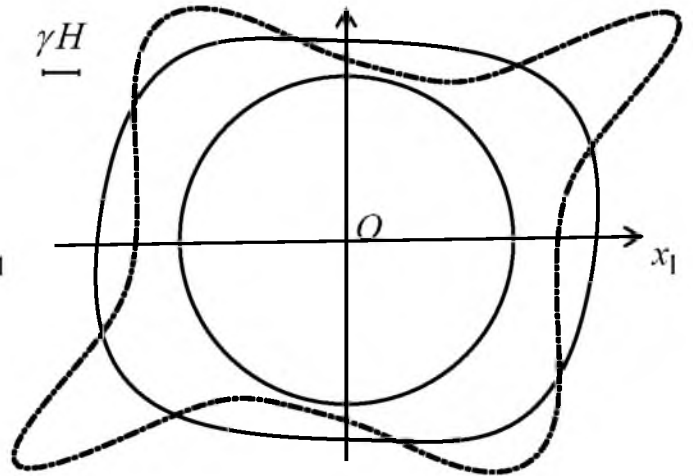


Рис. 4.11

Рисунок 4.10 соответствует случаю $\varphi = \pi / 4$, $\psi = 0$. Здесь в начальный момент времени максимальные значения $s_\theta = -2.7137\gamma H$ возникают в точках, соответствующих $\theta = 141^\circ$ и $\theta = 321^\circ$, а по истечению 200 суток максимальные $s_\theta = -7.1833\gamma H$ получаются при $\theta = 137^\circ$ и $\theta = 317^\circ$.

На рисунке 4.11 – $\varphi = \pi / 4$, $\psi = \pi / 4$, $\max s_\theta(t=0) = -2.3249\gamma H$ при $\theta = 29^\circ$ и $\theta = 209^\circ$, $\max s_\theta(t=200 \text{ сут}) = -5.6165\gamma H$ в точках $\theta = 35^\circ$ и $\theta = 215^\circ$.

4.9.2. Жестко закрепленная выработка

Исследования для жестко подкрепленной выработки показали, что

1) наибольшие напряжения $s_n / (\gamma H)$, возникающие в кровле и почве выработки, релаксируют для всех рассмотренных материалов и форм отверстий и это уменьшение составило до 50 % от начального упругого состояния;

2) напряжения $s_\theta / (\gamma H)$ имеют тенденцию к росту своих значений в боковых стенках выработок и могут увеличиться в 2 – 5 раз;

3) касательные напряжения $s_{n\theta} / (\gamma H)$ имеют слабое изменение во времени.

Для материала А2, где имеются экспериментальные данные для операторного коэффициента $1/\bar{G}_2$ исследования показали, что учет этого коэффициента не существенно влияет на значения основных напряжений.

В качестве примера в таблице 4.8 приведены значения напряжений $s_n / (\gamma H)$, $s_\theta / (\gamma H)$ и $s_{n\theta} / (\gamma H)$ для материала А1 и размеров выработки $a = 1$ м и $b = 2$ м.

Таблица 4.8

$t, \text{час}$	$s_n / (\gamma H)$		$s_\theta / (\gamma H)$		$s_{n\theta} / (\gamma H)$
	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 0^\circ$	$\theta = 90^\circ$	$\theta = 63^\circ$
0	-0.4545	-2.0909	-0.1136	-0.5227	-0.8180
120	-0.3029	-1.4939	-0.5590	-0.5123	-0.5894
600	-0.2832	-1.3836	-0.6496	-0.5008	-0.5501

В работе [63] для этого случая напряжения

$$s_n(t = 120 \text{ ч})|_{\theta=0^\circ} = -0.2815 \gamma H, \quad s_n(t = 120 \text{ ч})|_{\theta=90^\circ} = -1.5174 \gamma H,$$

$$s_n(t = 600 \text{ ч})|_{\theta=0^\circ} = -0.2477 \gamma H, \quad s_n(t = 600 \text{ ч})|_{\theta=90^\circ} = -1.3769 \gamma H.$$

Как видно, результаты хорошо согласуются между собой.

4.10. Выводы по разделу 4

В данном разделе при помощи модели слоистого массива горных пород осадочного происхождения с плоскостями изотропии, параллельными слоям, расположенными под различными углами к дневной поверхности, предложена методика исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния, возникающего вблизи горизонтальных выработок эллиптического сечения.

Для свободной и жестко подкрепленной выработок проведен анализ влияния фактора времени на изменения напряженно-деформированного состояния.

В результате исследований выявлено, что для случая свободной выработки необходимо учитывать фактор влияния анизотропии материала во времени, поскольку он приводит к существенному изменению напряженного состояния вблизи выработки, что противоречит гипотезе о том, что свойства ползучести в анизотропных породах происходят также, как в изотропных, а следовательно, не меняются во времени.

Для жестко подкрепленной выработки фактор времени для рассмотренных материалов менее влиятелен.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [179, 180, 181, 182, 183, 184, 186, 199, 200, 201, 202, 203, 209, 210, 211].

РАЗДЕЛ 5**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ ГЕОМАССИВОВ ПРИ НАЛИЧИИ ВЫРАБОТОК С УСЛОЖНЕННЫМИ ФОРМАМИ СЕЧЕНИЙ**

Точное решение двумерных задач с отверстием или полостью известно только для случая, когда граничный контур является эллиптическим или круговым [157]. Если контур отличен от эллиптического, то задача решалась приближенно либо сведением к ряду задач для эллиптического контура [157], либо построением сложных приближенных конформных отображений [133].

В данном разделе изложен способ построения гладкого контура произвольной конфигурации с заданной кривизной в любой точке [190, 191]. Метод основан на аппроксимации граничного контура криволинейными элементами, в качестве которых выбираются части контуров окружностей с гладким соединением. Подбором радиусов этих окружностей можно аппроксимировать любую часть граничного контура. В дополнительных областях круговым контурам будут соответствовать эллиптические. Предложенная методика использована при исследовании вязкоупругого напряженного состояния вблизи выработок с усложненными формами сечений [258].

5.1. Горный массив с произвольно расположенными выработками эллиптического сечения

Для аппроксимации границы области произвольной конфигурации эллиптическими контурами необходимо уметь строить уравнения эллиптических контуров произвольно расположенных в плоскости Ox_1x_2 [176]. Пусть массив горных пород ослаблен N эллиптическими произвольно расположенными

выработками (рис. 5.1). Контуры выработок обозначены через L_r ($r = \overline{1, N}$), а аффиксы их точек заданы уравнениями

$$t = z_r + R_r \sigma + m_r / \sigma. \quad (5.1)$$

Здесь R_r, m_r – постоянные, характеризующие форму и размер r -го эллипса;

z_r – координата центра эллиптической выработки;

$\sigma = e^{i\theta}$ – аффикс точки на единичном круге.

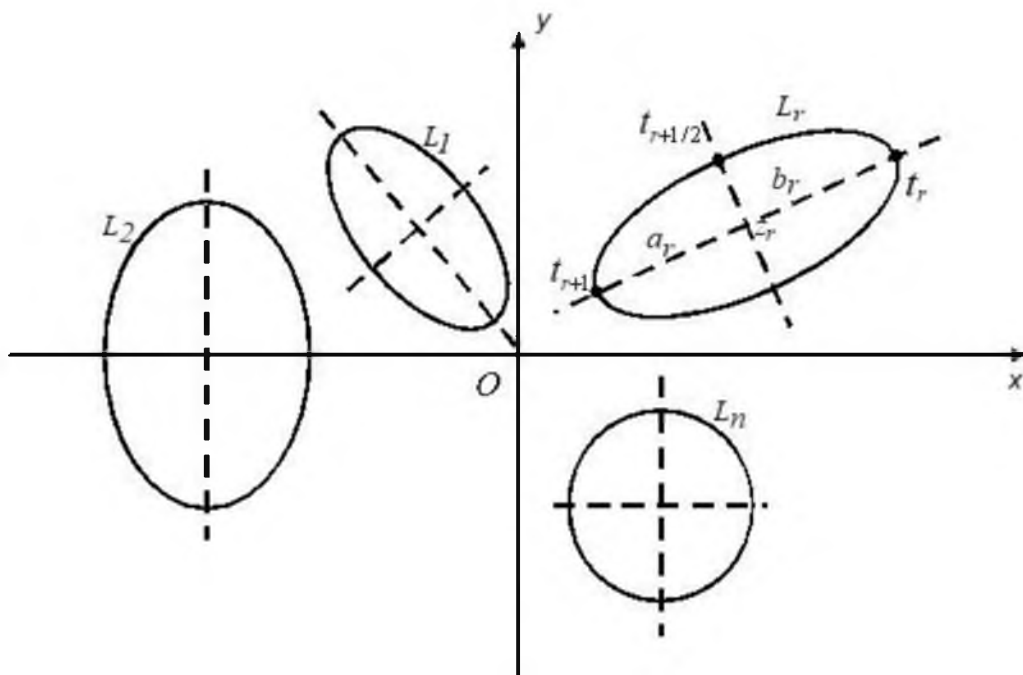


Рис. 5.1

Значения величин R_r, m_r и z_r можно получить, если задать координаты t_r и t_{r+1} концов одной из осей эллипса длины $2a_r = |t_r - t_{r+1}|$, а также безразмерную величину β_r , выражающую длину второй полуоси эллипса в долях полуоси a_r , то есть $b_r = \beta_r a_r$. Третья точка на контуре $t_{r+1/2}$ выбирается на нормали к отрезку $t_r t_{r+1}$. Эта нормаль проведена из центра эллипса, то есть из точки $z_r = (t_r + t_{r+1})/2$. Считается, что обход контура L_r осуществляется в направлении

от точки t_r к точке t_{r+1} так, что область вне выработки остается справа. Тогда координата $t_{r+1/2}$ вычисляется по формуле

$$t_{r+1/2} = z_r + i \beta_r (t_r - t_{r+1}) / 2.$$

Поставив в соответствие точкам t_r , $t_{r+1/2}$, t_{r+1} на контуре эллипса точки $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = i$, $\sigma_3 = -1$ на контуре единичной окружности, из уравнения (5.1) получают значения для величин R_r и m_r

$$R_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{4} (1 + \beta_r), \quad m_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{4} (1 - \beta_r).$$

Из уравнения (5.1) и сопряженного к нему находятся

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1r} + \left[(R_r + \overline{m_r}) \sigma + (\overline{R_r} + m_r) / \sigma \right] / 2, \\ x_2 &= x_{2r} - i \left[(R_r - \overline{m_r}) \sigma - (\overline{R_r} - m_r) / \sigma \right] / 2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Учитывая, что $t_j = x_1 + \mu_j x_2$, с учетом выражений (5.2) находятся уравнения эллиптических контуров в областях S_j , соответствующие контурам (5.1)

$$t_j = z_{jr} + R_{jr} \sigma + m_{jr} / \sigma, \quad (5.3)$$

где

$$z_{jr} = x_{1r} + \mu_j x_{2r}, \quad R_{jr} = \frac{R_r + \overline{m_r} - i \mu_j (R_r - \overline{m_r})}{2}, \quad m_{jr} = \frac{\overline{R_r} + m_r + i \mu_j (\overline{R_r} - m_r)}{2}.$$

На основании уравнений (5.1) и (5.3) можно записать функции, отображающие внешность единичной окружности на внешности эллипсов в областях S и S_j :

$$\begin{aligned} z &= z_r + R_r \zeta + m_r / \zeta, \quad |\zeta| \geq 1, \\ z_j &= z_{jr} + R_{jr} \zeta_{jr} + m_{jr} / \zeta, \quad |\zeta_{jr}| \geq 1. \end{aligned}$$

Для определения уравнения кругового контура, в представлении (5.1) необходимо величину m_r положить равной нулю.

5.2. Построение границы выпуклой области произвольной формы

Предлагается способ построения границы области с помощью криволинейных элементов. В качестве таких элементов используются части круговых контуров с гладким стыкованием (обеспечивается непрерывность касательной в точках стыкования элементов). Алгоритм построения такого контура проиллюстрирован на примере, который дан на рисунке 5.2.

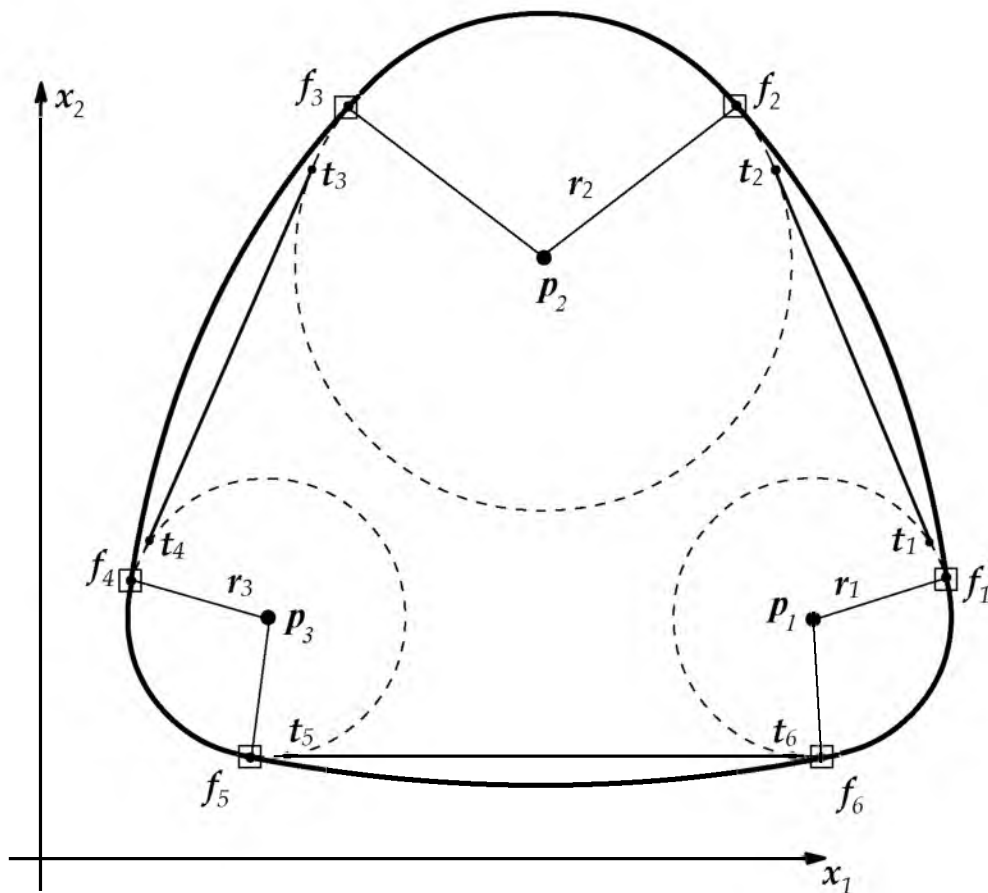


Рис. 5.2

В основе контура, приведенного на рисунке, лежат части трех окружностей радиуса r_k , центры которых расположены в точках p_k ($k=1,2,3$). Далее эти окружности, изображенные пунктирными линиями, именуется обозначениями их точек центра – p_k . Окружности p_k соединяются касательными кривыми f_1f_2 , f_3f_4 , f_5f_6 , образуя замкнутый контур, составляющий границу области.

На рисунке 5.3 дана схема построения касательной кривой f_1f_2 , которая соответствует рисунку 5.2.

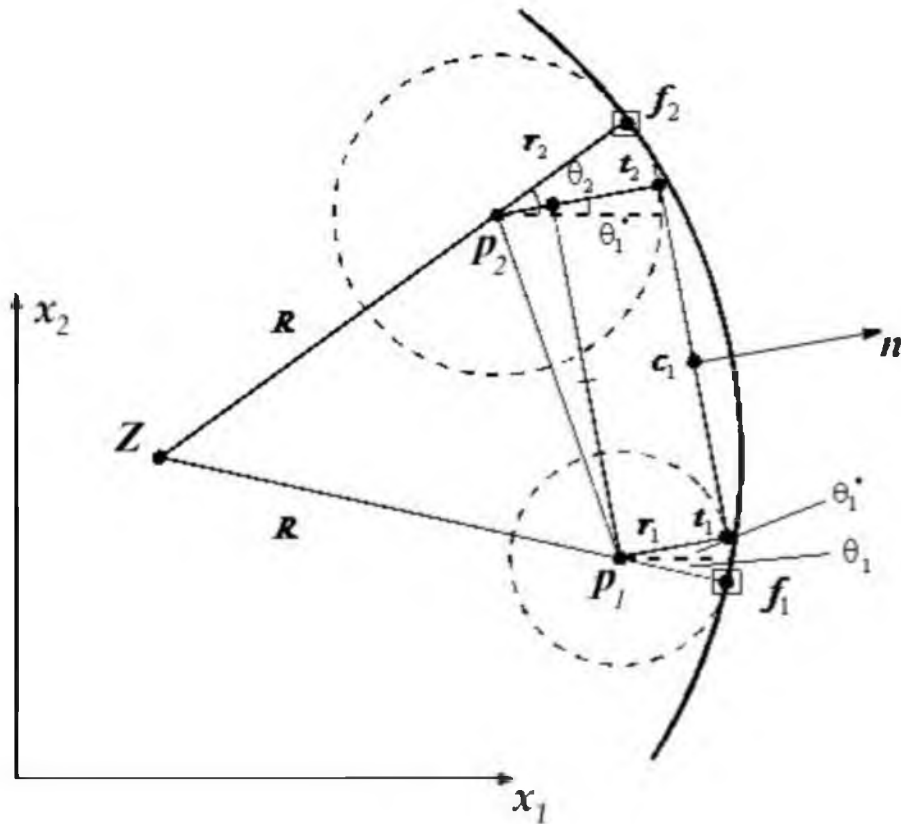


Рис. 5.3

Предельное положение кривой f_1f_2 – прямая t_1t_2 , которая имеет кривизну равную нулю. При нахождении координат точек касания t_1 и t_2 , считается, что направление обхода по касательной осуществляется от точки t_1 к точке t_2 . Радиусы окружностей p_1t_1 и p_2t_2 направлены по нормали к прямой t_1t_2 . Уравнение единичной нормали \bar{n} к прямой, соединяющей точки t_1 и t_2 (рис. 5.4), имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \cos(nx_1) + i \cos(nx_2) = \frac{dx_2}{ds} - i \frac{dx_1}{ds} = -i \frac{dx_1 + i dx_2}{ds} = \\ &= -i \frac{dt}{ds} = -i \frac{t_2 - t_1}{|t_2 - t_1|} = i \frac{t_1 - t_2}{|t_1 - t_2|}. \end{aligned}$$

Здесь $ds = c_1 = |t_1 - t_2| = \sqrt{|p_1 - p_2|^2 - |r_1 - r_2|^2}$, что следует из рисунка 5.3.

Координаты точек t_1 и t_2 определяются из уравнений

$$t_1 = p_1 + nr_1 = p_1 + ir_1 \frac{t_1 - t_2}{c_1}, \quad t_2 = p_2 + nr_2 = p_2 + ir_2 \frac{t_1 - t_2}{c_1}$$

и имеют вид

$$t_1 = \frac{p_1 c_1 + ip_1 r_2 - ir_1 p_2}{c_1 - i(r_1 - r_2)}, \quad t_2 = \frac{p_2 c_1 + ip_1 r_2 - ir_1 p_2}{c_1 - i(r_1 - r_2)}.$$

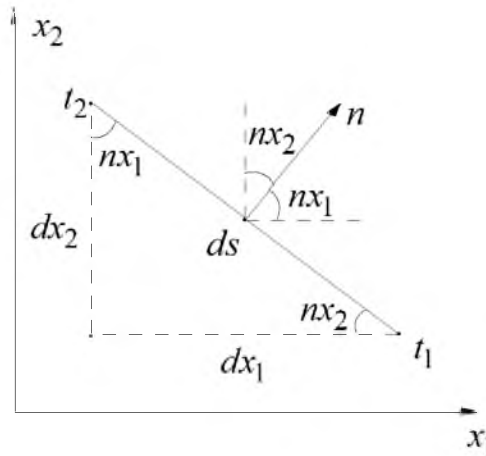


Рис. 5.4

Таким образом, найдены точки t_1 и t_2 принадлежащие прямой касательной линии, соединяющей окружности p_1 и p_2 . Очевидно, что кривизна этой линии равна нулю. Если необходимо, чтобы линия $f_1 f_2$, соединяющая окружности p_1 и p_2 была частью окружности заданной кривизны K , нужно провести соответствующие построения (рис. 5.3).

Для выполнения этих построений необходимо воспользоваться уравнениями круговых контуров p_1, p_2, Z , которые можно записать в комплексной форме

$$t = p_1 + r_1 \sigma, \quad t = p_2 + r_2 \sigma, \quad t = Z + R \sigma, \quad (5.4)$$

где t – аффикс точки на окружности, а $\sigma = e^{i\theta}$ – аффикс точки на единичном круге. Координата центра касательной окружности Z подлежит определению, а радиус R определяется через заданную кривизну K по формуле $R = 1/K$.

Зная координаты точек t_1 и t_2 , из первых двух уравнений (5.4) находятся

$$\sigma_1^* = \frac{t_1 - p_1}{r_1} = \sigma_2^* = \frac{t_2 - p_2}{r_2} = \frac{i(p_1 - p_2)}{c_1 - i(r_1 - r_2)}, \quad \sigma_1^* = e^{i\theta_1^*}, \quad \theta_1^* = -i \ln \frac{t_1 - p_1}{r_1}.$$

Этот угол можно рассматривать как нулевое приближение при определении углов θ_1 и θ_2 . Если кривизна касательной линии, соединяющей окружности p_1 и p_2 не равна нулю, то точками касания будут точки, помеченные на рисунках 5.2 и 5.3 аффиксами f_1 и f_2 . Из соотношений (5.4) для точек f_1 и f_2 можно получить

$$f_1 = p_1 + r_1 \sigma_1, \quad f_2 = p_2 + r_2 \sigma_2, \quad f_1 = Z + R \sigma_1, \quad f_2 = Z + R \sigma_2, \quad (5.5)$$

где $\sigma_1 = e^{i\theta_1}$, $\sigma_2 = e^{i\theta_2}$, а θ_1 и θ_2 – углы соответствующие точкам касания f_1 и f_2 .

Уравнения (5.5) дают возможность определить величины Z и σ_2 через σ_1 по формулам:

$$Z = p_1 + (r_1 - R)\sigma_1, \quad \sigma_2 = \frac{p_1 - p_2 + (r_1 - R)\sigma_1}{r_2 - R}. \quad (5.6)$$

Сравнивая между собой выражения $\bar{f}_2 = \bar{p}_2 + r_2 / \sigma_2$ и $\bar{f}_2 = \bar{Z} + R / \sigma_2$ с учетом (5.6), получается уравнение для нахождения σ_1

$$k_1 \sigma_1^2 + k_2 \sigma_1 + k_3 = 0,$$

где $k_1 = (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(R - r_1)$, $k_2 = (r_2 - R)^2 - (p_1 - p_2)(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (r_1 - R)^2$,

$$k_3 = (p_1 - p_2)(R - r_1).$$

После определения величины $(\sigma_1)_{1,2} = e^{i(\theta_1)_{1,2}}$, можно найти

$$(\theta_1)_{1,2} = -i \ln(\sigma_1)_{1,2}.$$

Из двух значений $(\theta_1)_{1,2}$ выбирается то, которое ближе к θ_1^* . После определения величины σ_1 из формул (5.6) находятся σ_2 и Z , а из соотношений (5.4) все остальные компоненты.

Построение касательной окружности, иллюстрированное на рисунке 5.3, обобщается на отрезки $f_3 f_4$, $f_5 f_6$.

Таким образом, граница области изображенной на рисунке 5.2, составлена из элементов f_1f_2 , f_2f_3 , f_3f_4 , f_4f_5 , f_5f_6 , f_6f_1 . Отображающие функции для элементов f_2f_3 , f_4f_5 , f_6f_1 заданы формулами

$$z = Z_{2k} + R_{2k}\zeta_{2k} + M_{2k} / \zeta_{2k} \quad (k=1,2,3). \quad (5.7)$$

Здесь $Z_{2k} = p_k$, $R_{2k} = r_k$, $M_{2k} = 0$, $\zeta_{2k} = r_{2k}\sigma$, $r_{2k} \geq 1$, $\sigma = e^{i\theta}$.

Для представления функции, аналитической в области внешности кривой f_1f_2 необходимо построить эллипс, аппроксимирующий эту кривую. Фокусы этого эллипса должны лежать внутри окружностей p_1 и p_2 . На рисунке 5.5 приведена схема построения такого эллипса. На расстоянии β от точек f_1 и f_2 на прямых, нормальных к линии f_1f_2 находятся точки d_1 и d_2 . Величина β принимается равной $\alpha \min(r_1, r_2)$, где $\alpha < 1$ – управляющий параметр. Точки d_1 и d_2 являются фокусами эллипса, аппроксимирующего кривую линию f_1f_2 . Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность построенного эллипса имеет вид

$$z = Z_1 + R_1\zeta_1 + M_1 / \zeta_1, \quad (5.8)$$

где $Z_1 = (d_1 + d_2) / 2$, $R_1 = (d_1 - d_2)(1 + \varepsilon) / 4$, $M_1 = (d_1 - d_2)(1 - \varepsilon) / 4$, ε – малая величина [176].

Аналогичные построения проводятся и для кривых f_3f_4 , f_5f_6

$$z = Z_{2k-1} + R_{2k-1}\zeta_{2k-1} + M_{2k-1} / \zeta_{2k-1}, \quad (k=2,3). \quad (5.9)$$

Представления (5.7), (5.8) и (5.9) используется для построения отображающих функций внешности единичного круга на внешность эллипсов в дополнительных областях S_j . Эти функции будут такими

$$x_1 + \mu_j x_2 = z_j = Z_{jr} + R_{jr}\zeta_{jr} + M_{jr} / \zeta_{jr}, \quad (j=1,2,3; r=\overline{1,6}). \quad (5.10)$$

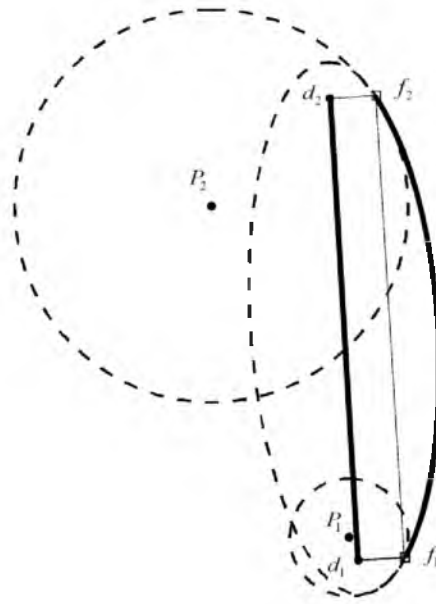


Рис. 5.5

Здесь принято $R_{jr} = [R_r + \bar{M}_r - i\mu_j(R_r - \bar{M}_r)] / 2$, $|\zeta_{jr}| \geq 1$,

$$M_{jr} = [\bar{R}_r + M_r + i\mu_j(\bar{R}_r - M_r)] / 2, \quad Z_{jr} = \operatorname{Re}(Z_r) + \mu_j \operatorname{Im}(Z_r).$$

Построенные функции дают возможность представить решение для задачи о напряженном состоянии около заданного контура.

Замкнутый выпуклый контур, составленный из элементов $f_r f_{r+1}$, называется макроконтуром.

5.3. Характеристические функции областей

Для автоматического формирования контуров сложной формы по заданной входной информации, возникает задача определения принадлежности произвольно взятой точки M с координатами (x_1, x_2) рассматриваемой области. Подобная ситуация возникает также при исследовании напряженного состояния плоской среды с отверстиями или полостями. Эта задача приводится к построению характеристической функции заданной области. Под характеристической функцией области понимается функция $\omega(x_1, x_2)$, которая

принимает положительные значения в области Ω , нулевые на границе $\partial\Omega$ и отрицательные в области $\bar{\Omega}$, являющейся дополнением области Ω до всей плоскости. Алгоритм построения характеристической функции для бесконечной плоской области, ослабленной вырезами с заданными макро и эллиптическими контурами, описывается следующим образом.

Пусть рассматриваемая область обозначена через Ω_r . Функции, которые принимают значение равно 1 в рассматриваемой области и значение равно 0 вне ее, называют двузначными предикатами или характеристическими функциями областей [245]. Так как значение предикатов есть либо 0, либо 1, то их можно подставлять на место аргументов булевых функций. Используя методы алгебры логики, можно построить предикат практически для любого геометрического объекта, составленного из кусков известных линий. Переход от предикатного описания геометрических объектов к построению их уравнений осуществляется путем использования R -функций [245]. Построение предикатного уравнения, определяющего заданный объект, связано с анализом формирования этого объекта из других, более простых (опорных) элементов. В качестве опорных элементов, из которых формируется область Ω_r , выбираются полуплоскости, внешности эллиптических контуров, а также полуплоскости с вырезами в виде полуэллипсов (рис. 5.6). В качестве частного случая вместо эллиптических могут использоваться круговые контуры.

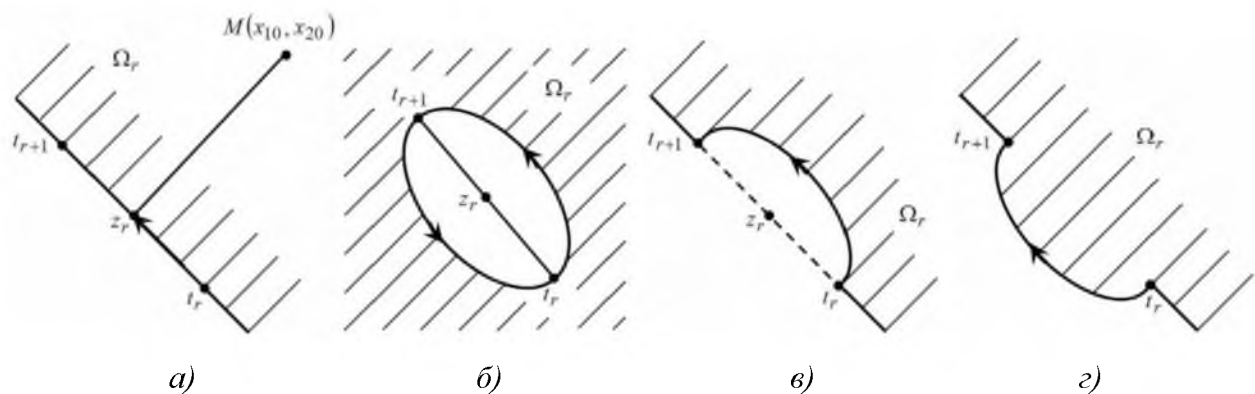


Рис. 5.6

Нетрудно убедиться в том, что

$$\omega_r^1(x_1, x_2) = (x_{2,r+1} - x_{2r})x_1 + (x_{1r} - x_{1,r+1})x_2 + x_{1,r+1}x_{2r} - x_{1r}x_{2,r+1} = 0 \quad (5.11)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точки $t_r = x_{1r} + ix_{2r}$ и $t_{r+1} = x_{1,r+1} + ix_{2,r+1}$.

Действительно, пусть точка M с координатами (x_{10}, y_{10}) лежит на нормали к прямой $t_r t_{r+1}$ на расстоянии $\alpha |t_{r+1} - t_r| / 2$ от середины отрезка $z_r = (t_r + t_{r+1}) / 2$. Считается, что обход контура осуществляется в направлении от точки t_r к точке t_{r+1} так, что область Ω_r остается справа. Тогда координаты (x_{10}, y_{10}) точки M вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} x_{10} &= [x_{1r} + x_{1,r+1} + \alpha(x_{2,r+1} - x_{2r})] / 2, \\ y_{10} &= [x_{2r} + x_{2,r+1} - \alpha(x_{1,r+1} - x_{1r})] / 2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Подставляя представления (5.12) в (5.11), получается значение функции (5.11) в точке M

$$\omega_r^1(x_{10}, x_{20}) = \frac{\alpha}{2} \left[(x_{2,r+1} - x_{2r})^2 + (x_{1,r+1} - x_{1r})^2 \right] > 0. \quad (5.13)$$

Из соотношения (5.13) следует, что функция $\omega_r^1(x_1, x_2) > 0$ в области справа от прямой $t_r t_{r+1}$ и $\omega_r^1(x_1, x_2) < 0$ слева от нее. Это дает основание назвать функцию $\omega_r^1(x_1, x_2)$ характеристической для области, изображенной на рисунке 5.6 а).

Уравнение эллиптического контура, образующего вырез на рисунке 5.6 б), имеет вид

$$t = z_r + R_r \sigma + m_r / \sigma, \quad (5.14)$$

где $\sigma = \exp(-i\theta)$; $R_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{4}(1 + \beta_r)$; $m_r = \frac{t_r - t_{r+1}}{4}(1 - \beta_r)$;

$\beta_r = b_r / a_r$ – безразмерная величина; $a_r = |t_r - t_{r+1}| / 2$, b_r – полуоси эллипса.

На основании уравнения (5.14) определяется функция, отображающая внешность единичной окружности на внешность эллипса

$$z = z_r + R_r \zeta + m_r / \zeta, \quad |\zeta| \geq 1. \quad (5.15)$$

Разрешая уравнение (5.15) относительно переменной ζ , можно найти

$$\zeta_{1,2} = \frac{z - z_r \pm \sqrt{(z - z_r)^2 - 4R_r m_r}}{2R_r}. \quad (5.16)$$

Из соотношений (5.16) следует, что для произвольной точки $z_0 = x_{10} + ix_{20}$ значение одной из величин $|\zeta_1(z_0)|$ или $|\zeta_2(z_0)|$ будет больше единицы, если она лежит вне эллипса и равно единице, если она лежит на контуре эллипса. Если точка z_0 лежит внутри эллиптического контура, то обе величины $|\zeta_1(z_0)|$ и $|\zeta_2(z_0)|$ будут меньше единицы. На основании вышесказанного, можно сделать заключение, что функция

$$\omega_r^2(x_1, x_2) = \left[|\zeta_1| + |\zeta_2| + \left| |\zeta_1| - |\zeta_2| \right| \right] / 2 - 1 = \max \{ |\zeta_1|, |\zeta_2| \} - 1 \quad (5.17)$$

является характеристической для области, изображенной на Рисунке 5.6 б).

Следует отметить, что функция

$$\omega_r^1(z) = -2 \operatorname{Re} i(\zeta_1 + \zeta_2) \quad (5.18)$$

может быть также использована для определения принадлежности точки z_0 области справа от прямой $t_r t_{r+1}$ ($\omega_r^1(x_1, x_2) > 0$) или слева от нее ($\omega_r^1(x_1, x_2) < 0$). Функции (5.11) и (5.18) являются характеристическими для одной и той же области.

Несложно убедиться в том, что функция

$$\omega_r^3 = \left[\omega_r^1 + \omega_r^2 - \left| \omega_r^1 + \omega_r^2 \right| \right] / 2 = \min \{ \omega_r^1, \omega_r^2 \} \quad (5.19)$$

является характеристической для области, изображенной на рисунке 5.6 в), а функция

$$\omega_r^4 = \left[-\omega_r^1 + \omega_r^2 + |-\omega_r^1 - \omega_r^2| \right] / 2 = \max \left\{ -\omega_r^1, \omega_r^2 \right\} \quad (5.20)$$

будет характеристической для области, изображенной на рисунке 5.6 з).

Характеристические функции (5.17) – (5.20) будут использованы как опорные при построении характеристических функций областей сложной формы.

Вводится двузначный предикат $S_2(\omega_r^k)$, который определяется следующим образом [244]

$$S_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Области Ω_r определяются уравнениями $S_2(\omega_r^k)$ ($k = \overline{1,4}$).

Для построения характеристической функции области сложной формы предлагается метод, основанный на использовании R -функций. Конечную замкнутую область D_k на рисунке 5.7 а) можно построить как пересечение (конъюнкцию) опорных областей Ω_r ($r = \overline{1,n}$), изображенных на рисунке 5.6 а), б), в), г), и задать логической формулой

$$D_k = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \dots \cap \Omega_n. \quad (5.22)$$

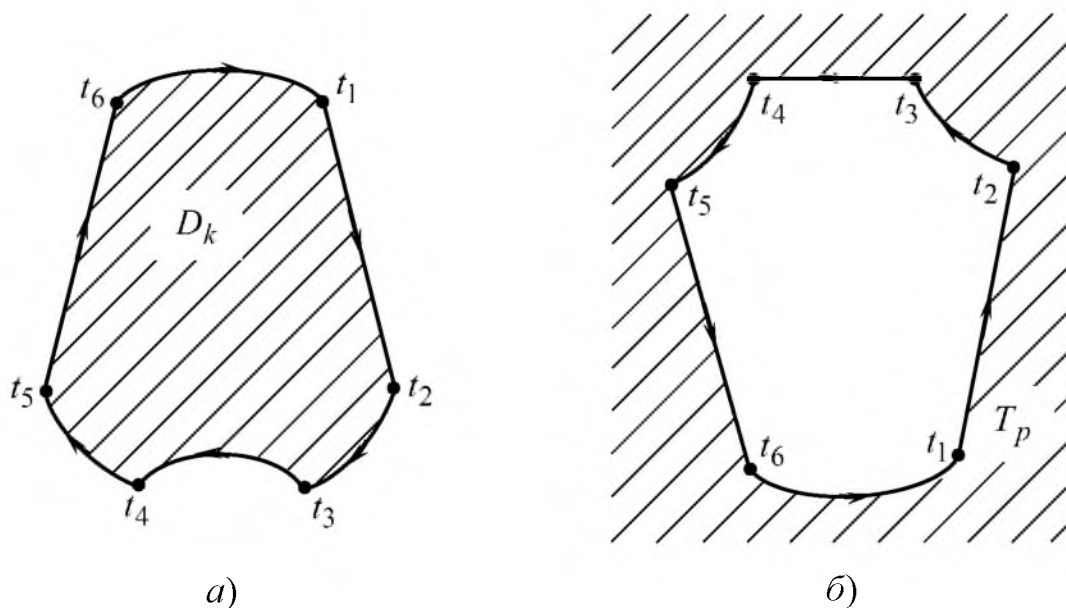


Рис. 5.7

Замкнутую область T_p вне отверстия на рисунке 5.7 б) можно сформировать как объединение (дизъюнкцию) опорных областей Ω_r ($r = \overline{1, m}$), изображенных на рисунках 5.6 а), б), в), г). Соответствующая формула имеет вид

$$T_p = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_m. \quad (5.23)$$

Предикатные уравнения приведенных областей D_k и T_p можно получить, производя формальную замену символов конъюнкции в (5.22) и дизъюнкции в (5.23) символами соответствующих элементарных R -функций, а символов Ω_r – двузначными предикатами $S_2(\omega_r)$

$$D_k = S_2(\varphi_k^1) = S_2(\omega_1) \wedge_1 S_2(\omega_2) \wedge_1 \dots \wedge_1 S_2(\omega_n), \quad (5.24)$$

$$T_p = S_2(\varphi_k^2) = S_2(\omega_1) \vee_1 S_2(\omega_2) \vee_1 \dots \vee_1 S_2(\omega_m). \quad (5.25)$$

Для этих предикатных уравнений булевы функции (5.22) и (5.23) являются сопровождающими. Уравнения (5.24) и (5.25) дают возможность представить области D_k и T_p в виде неравенств [244, 245]

$$\varphi_k^1 = \omega_1 \wedge_1 \omega_2 \wedge_1 \dots \wedge_1 \omega_n \geq 0,$$

$$\varphi_k^2 = \omega_1 \vee_1 \omega_2 \vee_1 \dots \vee_1 \omega_m \geq 0.$$

Равенство нулю достигается лишь на границе области, поэтому уравнения

$$\varphi_k^1 = \omega_1 \wedge_1 \omega_2 \wedge_1 \dots \wedge_1 \omega_n = 0, \quad \varphi_k^2 = \omega_1 \vee_1 \omega_2 \vee_1 \dots \vee_1 \omega_m = 0$$

будут уравнениями границ областей D_k и T_p соответственно.

В качестве элементарных R -функций здесь использованы функции [245]

$$Y_1 = x_1 \wedge_1 x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|) = \min\{x_1, x_2\},$$

$$Y_2 = x_1 \vee_1 x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) = \max\{x_1, x_2\}.$$

Построение предикатных уравнений для областей более сложного вида, чем области D_k и T_p , сводится к объединению (дизъюнкции) областей вида D_k , и к пересечению (конъюнкции) областей вида T_p . Если внешняя область Ω формируется из областей вида T_p ($p = \overline{1, k}$), то окончательное уравнение этой области запишется в форме

$$\omega = \varphi_1^2 \wedge_1 \varphi_2^2 \wedge_1 \dots \wedge_1 \varphi_k^2 \geq 0,$$

где φ_p^2 – предикатные уравнения областей T_p ($p = \overline{1, k}$), построенные выше.

Приведенный алгоритм построения характеристических уравнений позволяет автоматизировать построение контуров областей сложной формы с помощью вычислительной техники. На основе приведенной теории была разработана программа на алгоритмическом языке, позволяющая строить области сложной конфигурации на основе двух базовых контуров: макроконтура и эллиптического контура.

Путем пересечения нескольких макроконтуров, а также необходимого количества эллипсов, используя характеристические уравнения, можно получить область любой заданной конфигурации, в том числе с невыпуклым контуром.

5.4. Решение упругой задачи для полости сложной формы

В данном подразделе указанный подход используется для изучения влияния наследственной ползучести горного массива на напряжения и перемещения вокруг горизонтальных выработок сложной формы сечения под воздействием сил собственного веса. Как и в разделе 4 поперечные сечения выработок находятся в условиях обобщенной плоской деформации.

Начальное напряженное состояние нетронутого массива определяется из соотношений (4.30) и (4.31).

Задача об упругом равновесии массива горных пород приводится к определению в областях S_j функций $\Phi_j(z_j)$, удовлетворяющих граничным условиям (4.35). Для каждого элемента L_r контура границы ставятся в соответствие комплексные потенциалы [140]

$$\Phi_{jr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{rkj}}{\zeta_{jr}^k}.$$

Если контуры выработок содержат N элементов, то комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j)$, будут представлены в виде суммы функций по всем элементам

$$\Phi_j(z_j) = \sum_{r=1}^N \Phi_{jr} = \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{rkj}}{\zeta_{jr}^k}. \quad (5.26)$$

Граничным условиям нужно удовлетворить на каждом из $r = \overline{1, N}$ элементов. Для массива с неподкрепленными выработками, эти условия на r -м элементе имеют вид [177]

$$2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 a_{jr} \Phi'_{jr} = P_{1r}, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 b_{jr} \Phi'_{jr} = P_{2r}, \quad 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 c_{jr} \Phi'_{jr} = P_{3r}. \quad (5.27)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a_{jr} = b_{jr} \mu_j, \quad b_{jr} = n_{1r} \mu_j - n_{2r}, \quad c_{jr} = b_{jr} \lambda_j \quad (j = 1, 2),$$

$$a_{3r} = c_{3r} \mu_3 \lambda_3, \quad b_{3r} = c_{3r} \lambda_3, \quad c_{3r} = n_{1r} \mu_3 - n_{2r},$$

$$P_{1r} = (\tau_1 n_{1r} + \tau_6 n_{2r}) \gamma H (1 - x_2 / H), \quad (5.28)$$

$$P_{2r} = -(\tau_6 n_{1r} + \tau_2 n_{2r}) \gamma H (1 - x_2 / H),$$

$$P_{3r} = -(\tau_5 n_{1r} + \tau_4 n_{2r}) \gamma H (1 - x_2 / H);$$

$$n_{1r} = \cos(n_r, x_1), \quad n_{2r} = \cos(n_r, x_2), \quad n_r - \text{внешняя нормаль к контуру } L_r.$$

Решение задачи о напряженно – деформированном состоянии массива горных пород с выработками свелось к определению комплексных коэффициентов $\alpha_{rkj} = \alpha_{rkj}^1 + i\alpha_{rkj}^2$ функций (5.26) из граничных условий (5.27). Сведение этой задачи к решению систем алгебраических уравнений осуществляется методом наименьших квадратов. Для этого представления (5.26) подставляются в условия (5.27). В результате на граничной линии получаются отличные от нуля невязки с вещественными коэффициентами α_{rkj}^1 и α_{rkj}^2

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{r=1}^N \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^3 \left(\alpha_{rkj}^1 A_{rkj}^1 + \alpha_{rkj}^2 A_{rkj}^2 \right) - P_{1r} \right], \\ R_2 &= \sum_{r=1}^N \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^3 \left(\alpha_{rkj}^1 B_{rkj}^1 + \alpha_{rkj}^2 B_{rkj}^2 \right) - P_{2r} \right], \\ R_3 &= \sum_{r=1}^N \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^3 \left(\alpha_{rkj}^1 C_{rkj}^1 + \alpha_{rkj}^2 C_{rkj}^2 \right) - P_{2r} \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} A_{rkj}^1 &= 2 \operatorname{Re} a_{jr} \varphi_{jrk}, & A_{rkj}^2 &= 2 \operatorname{Re} i a_{jr} \varphi_{jrk}, & B_{rkj}^1 &= 2 \operatorname{Re} b_{jr} \varphi_{jrk}, \\ B_{rkj}^2 &= 2 \operatorname{Re} i b_{jr} \varphi_{jrk}, & C_{rkj}^1 &= 2 \operatorname{Re} c_{jr} \varphi_{jrk}, & C_{rkj}^2 &= 2 \operatorname{Re} i c_{jr} \varphi_{jrk}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\varphi_{jrk} = \frac{d}{dz_j} (\zeta_{jr}^{-k}) = - \frac{k}{(R_{jr} \zeta_{jr}^2 - M_{jr})} \frac{1}{\zeta_{jr}^{k-1}}.$$

В методе наименьших квадратов коэффициенты α_{rkj}^1 и α_{rkj}^2 определяются исходя из условия минимума функционала на граничной линии $\partial\Omega$. Функционал в данном случае отражает минимизацию суммы квадратов невязок (5.29) и имеет вид

$$J = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^3 R_i(x_{1m}, x_{2m}, \alpha_{rkj}^1, \alpha_{rkj}^2) * R_i(x_{1m}, x_{2m}, \alpha_{rkj}^1, \alpha_{rkj}^2) = \min. \quad (5.31)$$

Здесь (x_{1m}, x_{2m}) – система точек, заданная на граничной линии; величина M определяет количество этих точек.

Удовлетворяя условиям

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{lpi}^1} = \frac{\partial J}{\partial \alpha_{lpi}^2} = 0, \quad (l = \overline{1, N}; \quad p = \overline{1, n}; \quad i = \overline{1, 3}) \quad (5.32)$$

получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов α_{rkj}^1 и α_{rkj}^2 . Эта система, с учетом соотношений (5.29), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^3 \left[\alpha_{rkj}^1 \left(A_{mrkj}^1 A_{mlpi}^1 + B_{mrkj}^1 B_{mlpi}^1 + C_{mrkj}^1 C_{mlpi}^1 \right) + \right. \\ & \left. + \alpha_{rkj}^2 \left(A_{mrkj}^2 A_{mlpi}^1 + B_{mrkj}^2 B_{mlpi}^1 + C_{mrkj}^2 C_{mlpi}^1 \right) \right] = \\ & = \sum_{m=1}^M \left[P_{1lm} A_{mlpi}^1 + P_{2lm} B_{mlpi}^1 + P_{3lm} C_{mlpi}^1 \right], \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^N \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^3 \left[\alpha_{rkj}^1 \left(A_{mrkj}^1 A_{mlpi}^2 + B_{mrkj}^1 B_{mlpi}^2 + C_{mrkj}^1 C_{mlpi}^2 \right) + \right. \\ & \left. + \alpha_{rkj}^2 \left(A_{mrkj}^2 A_{mlpi}^2 + B_{mrkj}^2 B_{mlpi}^2 + C_{mrkj}^2 C_{mlpi}^2 \right) \right] = \\ & = \sum_{m=1}^M \left[P_{1lm} A_{mlpi}^2 + P_{2lm} B_{mlpi}^2 + P_{3lm} C_{mlpi}^2 \right] \quad (l = \overline{1, N}; \quad i = \overline{1, 3}; \quad p = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Величины A_{rkj}^n , B_{rkj}^n , C_{rkj}^n и P_{jr} определяемые соотношениями (5.30) и (5.28), помечены здесь также индексом m , который означает зависимость их от системы точек (x_{1m}, x_{2m}) на границе области. Эта зависимость устанавливается через функции φ_{jrk} (5.30) посредством отображений (5.10), а также через величины a_{jr} , b_{jr} и c_{jr} , определяемые соотношениями (5.28). После нахождения коэффициентов $\alpha_{rkj} = \alpha_{rkj}^1 + i\alpha_{rkj}^2$ из системы алгебраических уравнений (5.33)

становятся известными функции $\Phi_j(z_j)$. Перемещения и напряжения, возникающие в массиве, определяются из соотношений

$$u_k = u_k^0 + 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 R_{kj} \Phi_j(z_j) \quad (k = \overline{1,3}),$$

$$\sigma_p = \sigma_p^0 + 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^3 P_{pj} \Phi'_j(z_j) \quad (p = \overline{1,6}). \quad (5.34)$$

Напряжения, действующие на контуре или вблизи контура выработки на площадках, касательных и нормальных к нему вычисляются по формулам (4.40).

5.5. Результаты численных исследований

Расчеты, связанные с реализацией разработанного подхода, проводились для массивов из изотропных (П1, А1) и трансропных (П2, А2) горных пород, упругие и реологические постоянные которых даны в разделе 4. Вязкоупругое напряженно-деформированное состояние определялось по методике, также изложенной в разделе 4. При вычислениях считалось, что выработка находится на глубине $H = 1000 \text{ м}$.

Горизонтальная выработка сводчатого сечения с расширением в нижней части. Геометрические параметры поперечного контура сечения (Рисунок 5.8)

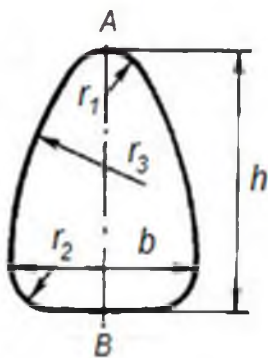


Рис. 5.8

возьмем такими: $r_1 = r_2 = 0.25b$, $r_3 = 2b$, $h = 1.4b$, $b = 4 \text{ м}$. В работе [63] при помощи отображающей функции для такого контура исследовано влияние свойств ползучести изотропного песчаника на нормальные перемещения в точках контура выработки. Свойства ползучести изотропных горных пород в рассматриваемом случае не влияют на напряженное состояние в окрестности выработки.

В результате исследований установлено, что наибольшие перемещения возникают в кровле (точка A) и в почве (точка B). В таблице 5.1 приведены нормальные перемещения u_n [м] в этих точках. Для сравнения в таблице приводятся также значения перемещений, полученные в работе [63]. Вычисления проводились для начального момента времени $t=0$, соответствующего исходному упругому состоянию, для момента времени $t=120$ часов, и для времени установившейся стабилизации процесса ползучести, которое для песчаника составляет $t_{st} = 860$ часов.

Как видно, результаты, полученные по предложенной в диссертационной работе методике, хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами.

Таблица 5.1

Точки на контуре	t , час					
	0		120		860	
	$u_n / м$	$u_n / м$ [63]	$u_n / м$	$u_n / м$ [63]	$u_n / м$	$u_n / м$ [63]
А	-0.0042	-0.0043	-0.0054	-0.0051	-0.0064	-0.0063
В	-0.0062	-0.0060	-0.0077	-0.0070	-0.0089	-0.0083

На рисунке 5.9 для материала П2 и на рисунке 5.10 для материала А2 представлены эпюры распределения напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ на контуре сводчатого сечения в начальный момент времени (сплошная линия) и в моменты времени

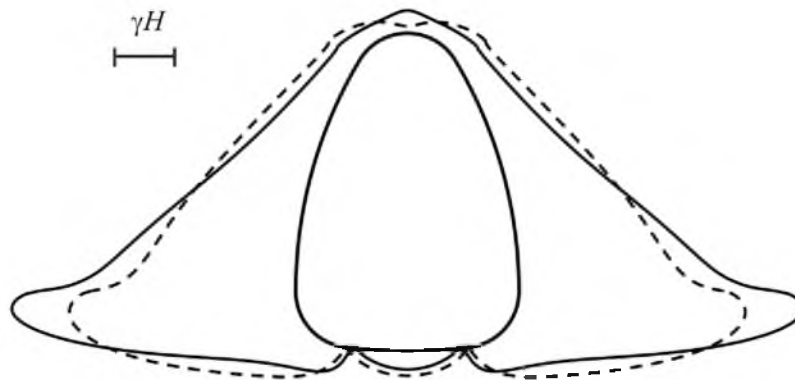


Рис. 5.9

$t = t_{st}$ (штриховая линия).

Материал П2 является довольно прочным, поэтому регистрируемое перераспределение напряжений на контуре выработки с течением времени оказывается не существенным. Однако, в почве возникает зона растягивающих напряжений, что может привести к разрушению пород в этой зоне. Этот факт необходимо учитывать при проведении горных выработок.

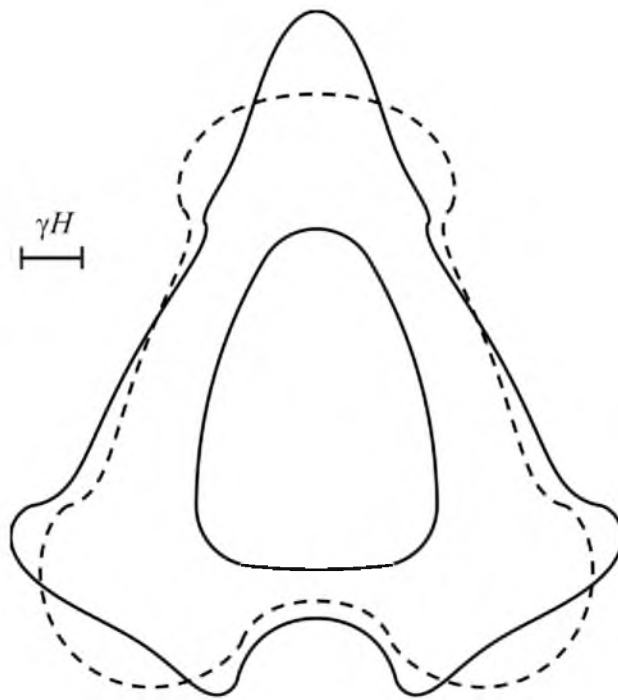


Рис. 5.10

В материале А2 свойства ползучести проявляются в большей степени, и из рисунка 5.10 видно, что с течением времени происходит более равномерное перераспределение концентрации напряжений в сторону уменьшения абсолютных значений. В отличие от песчаника зоны действия положительных напряжений в алевролите с выработкой рассмотренного сечения не возникают.

Горизонтальная выработка квадратного сечения со стороной 2м. На рисунках 5.11 изображены графики распределения напряжений $s_{\theta} / (\gamma H)$ у контура выработки с гладкой аппроксимацией угловой точки частью окружности с радиусом закругления $r = 0.667 м$ для пород П2 (а) и А2 (б). Для породы П2

наблюдаются зоны положительных напряжений в кровле и почве, которые со временем увеличиваются. Сжимающие напряжения преобладают в стенках выработки. Для породы А2 наблюдается снижение концентрации сжимающих напряжений, но имеет место увеличение напряжений в узких зонах скругления. Максимальные и минимальные значения величин $s_\theta / (\gamma H)$ для элементов границы приведены в таблице 5.2 для контуров с различными значениями радиуса закругления r .

Таблица 5.2

Радиус закругления	$r = 0.667 м$				$r = 0.1 м$			
	П2		А2		П2		А2	
Время	$t = 0$	$t = t_{st}$	$t = 0$	$t = t_{st}$	$t = 0$	$t = t_{st}$	$t = 0$	$t = t_{st}$
$\min(s_\theta / \gamma H)$	-4.266	-3.514	-2.699	-2.442	-7.033	-5.819	-5.507	-5.918
$\max(s_\theta / \gamma H)$	0.279	0.381	-0.626	-0.439	0.466	0.534	-0.127	-0.127

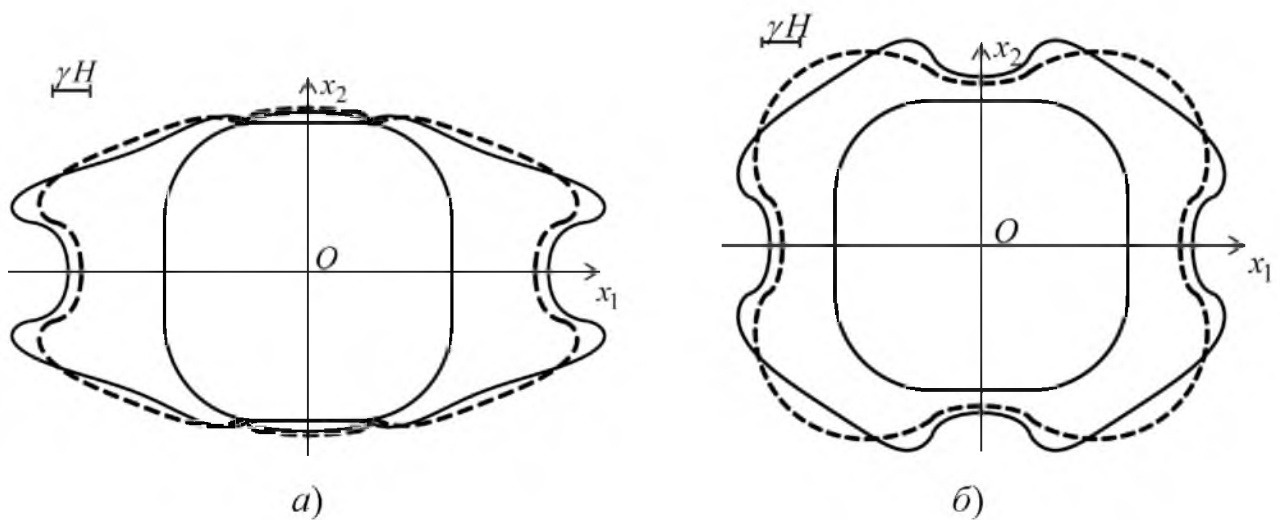


Рис. 5.11

На рисунках 5.12 продемонстрированы эпюры распределения напряжений $s_\theta / (\gamma H)$ для случая радиуса закругления $r = 0,1m$ (а – П2, б – А2).

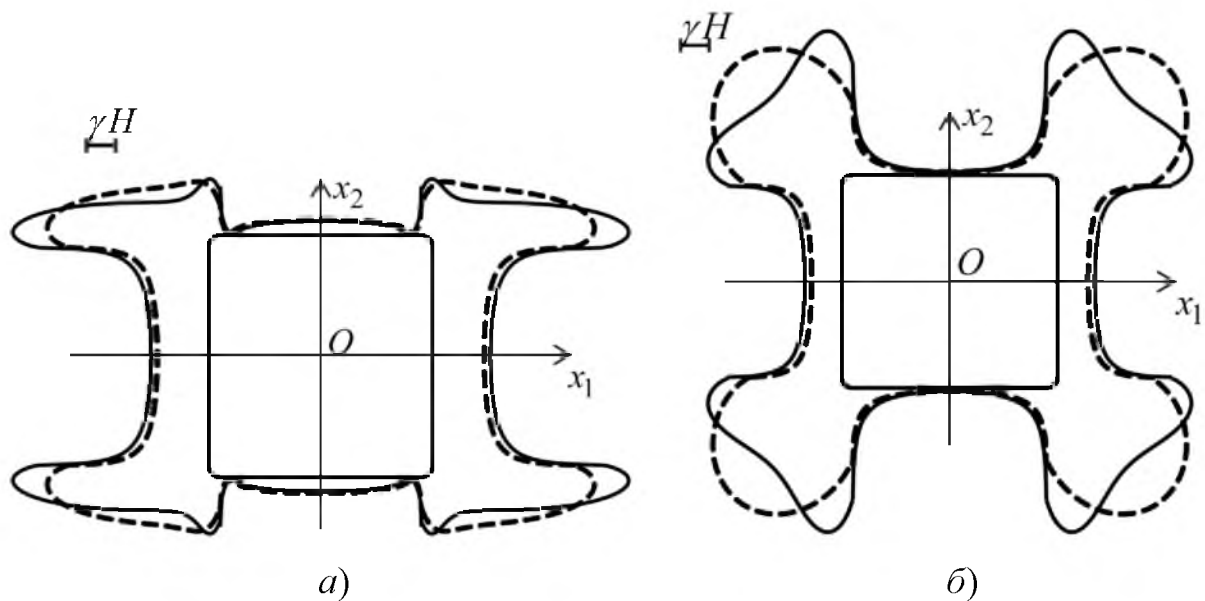


Рис. 5.12

Горизонтальная выработка с сечением, составленным из четырех эллиптических дуг. В работе [191] в качестве примера рассмотрена выработка, составленная из двух одинаковых эллиптических контуров, которые соединены между собой выработкой с “почти прямолинейными” границами в виде дуг эллипсов очень малой кривизны, расстояние между которыми составляют $h = 1m$ (рис. 5.13). Меньшая полуось вертикального эллипса $a = 1.5m$, а большая $b = 2m$. Расстояние между центрами боковых эллиптических полостей $L = 6m$.

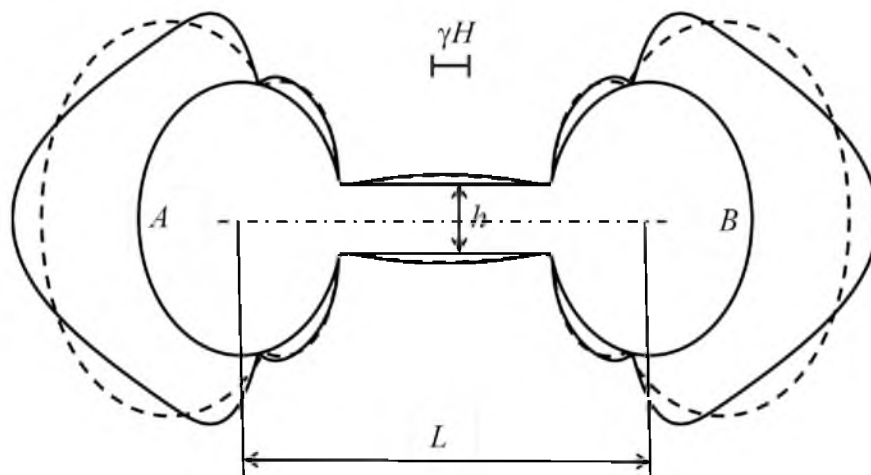


Рис. 5.13

На рисунке 5.13 представлены эпюры напряжений $|s_{\theta} / (\gamma H)|$, возникающих на контуре выработки для материала алевролит2. Сплошная линия соответствует начальному упругому состоянию $t = 0$, а штриховая – установившемуся $t = 600$ ч. Максимальные по модулю значения напряжений возникают в боковых точках выработки (точки A и B) и равны, соответственно, $s_{\theta}|_{t=0} = -3.7017 \gamma H$ и $s_{\theta}|_{t=600} = -2.9203 \gamma H$. Расчеты показывают, что с течением времени максимальные сжимающие напряжения уменьшаются по модулю. Можно также отметить, что на отрезках малой кривизны, соединяющих эллиптические контуры, возникают зоны растягивающих напряжений, которые со временем незначительно уменьшаются ($s_{\theta}|_{t=0} = 0.2866 \gamma H$, $s_{\theta}|_{t=600} = 0.2542 \gamma H$). Исследования также показали, что с увеличением расстояния между эллиптическими выработками напряжения, как в боковых точках, так и центральных точках прямолинейных элементов, растут.

Две горизонтальные выработки эллиптического сечения. Проведены численные исследования для двух выработок с полуосями a , b и расстоянием между их центрами L (рис. 5.14).

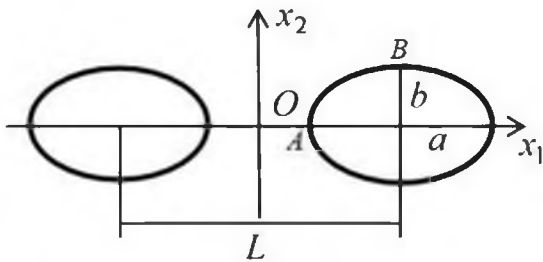


Рис. 5.14

В таблице 5.3 для различных соотношений полуосей эллиптических выработок приведены значения максимальных напряжений $\sigma_{\theta} / \gamma H$, возникающих в боковой стенке (точка A) правой выработки и симметричной ей точке левого отверстия, а также значения напряжений, возникающих в кровле (точка B) и симметричных ей точках почвы и, соответственно, точках левого отверстия. Значение $L = \infty$ соответствует случаю одной выработки. Вычисления проводились для начального момента времени $t = 0$, соответствующего упругому состоянию, и для времени установившейся стабилизации процесса ползучести t_{st} .

Таблица 5.3

Материал	t	$L = \infty$		$L = 20 \text{ м}$		$L = 10 \text{ м}$	
		A	B	A	B	A	B
$a = b = 2 \text{ м}$							
П2	0	-5.078	0.182	-5.099	0.157	-5.213	0.143
	860	-3.989	0.351	-4.002	0.323	-4.072	0.294
А2	0	-2.877	-1.157	-2.924	-1.134	-3.085	-1.074
	600	-2.209	-0.976	-2.238	-0.964	-2.350	-0.925
$a = 2, b = 1.5 \text{ м}$							
П2	0	-6.491	0.332	-6.518	0.306	-6.641	0.279
	860	-5.039	0.467	-5.056	0.442	-5.134	0.407
А2	0	-3.656	-1.013	-3.691	-0.995	-3.829	-0.943
	600	-2.803	-0.601	-2.826	-0.602	-2.919	-0.593
$a = 1.5, b = 2 \text{ м}$							
П2	0	-4.018	-0.018	-4.030	-0.029	-4.082	-0.032
	860	-3.203	0.199	-3.209	0.179	-3.237	0.158
А2	0	-2.293	-2.439	-2.332	-2.330	-2.447	-2.175
	600	-1.765	-1.475	-1.786	-1.451	-1.863	-1.392

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- максимальные по абсолютному значению напряжения $\sigma_{\theta} / \gamma H$, возникающие в боковой стенке для всех вариантов расположения и соотношения полуосей выработок и материалов в стационарном состоянии приблизительно на 30% меньше соответствующих напряжений в начальный момент;
- для материала П2 в кровле и почве возникают положительные растягивающие напряжения, что может привести к разрушению выработок в этой зоне. Для круговых выработок в процессе их эксплуатации растягивающие напряжения увеличиваются почти в два раза. Увеличение длины вертикальной полуоси эллиптических выработок приводит к уменьшению концентрации положительных напряжений в кровле и почве, а с его дальнейшим увеличением, вообще, к переходу в зону сжимающих напряжений.

5.6. Выводы по разделу 5

В рамках разработки методики исследования ползучести массивов анизотропных горных пород с выработками усложненной формы сечения при помощи методов R -функций и алгебры логики построены характеристические уравнения для областей сечений выработок, которые могут быть ограничены прямолинейными отрезками и частями эллиптических контуров. Алгоритм нахождения характеристических уравнений позволяет автоматизировать построение границ областей сечений выработок сложной формы. Предложенная методика позволяет изучить эффекты ползучести горных пород вблизи горизонтальных протяженных выработок, имеющих сложную форму поперечного сечения. Проведен количественный и качественный анализ полученных результатов.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [66, 143, 178, 185, 190, 191, 213, 216, 217, 258].

РАЗДЕЛ 6

**РАЗРАБОТКА НОВЫХ УТОЧНЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ИЗГИБА
АНИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ С ОТВЕРСТИЯМИ**

В этом разделе представлены новые модели уточненных теорий изгиба изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит, основанные на использовании гипотез, предложенных в работе [34]. Построены соотношения для перемещений, напряжений, моментов и перерезывающих сил, а также получена система дифференциальных уравнений шестого порядка. Дана методика нахождения общих решений соответствующих бигармонического и метагармонического уравнений. Указан способ удовлетворения граничным условиям. Представлены результаты численных исследований напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптической полостью.

6.1. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит

6.1.1. Основные соотношения уточненной теории изгиба изотропных плит. Рассматривается изотропная плита, имеющая толщину $2h$ и отнесенная к декартовой системе координат $Oxyz$. Оси Ox и Oy расположены в срединной плоскости плиты, а Oz нормальна к этой плоскости. Плита изгибается усилиями, приложенными на бесконечности (рис. 6.1), а также на боковой поверхности полости. Представления для перемещений выбираются в виде [197]

$$\begin{aligned} u_x &= -z \left[\partial_1 \varphi(x, y) - \partial_2 \psi(x, y) \right], \\ u_y &= -z \left[\partial_2 \varphi(x, y) + \partial_1 \psi(x, y) \right], \quad u_z = w(x, y). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Для построения уточненной теории изгиба плит используются: уравнения закона Гука в форме

$$\sigma_x = \bar{E}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \bar{E}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}; \quad (6.2)$$

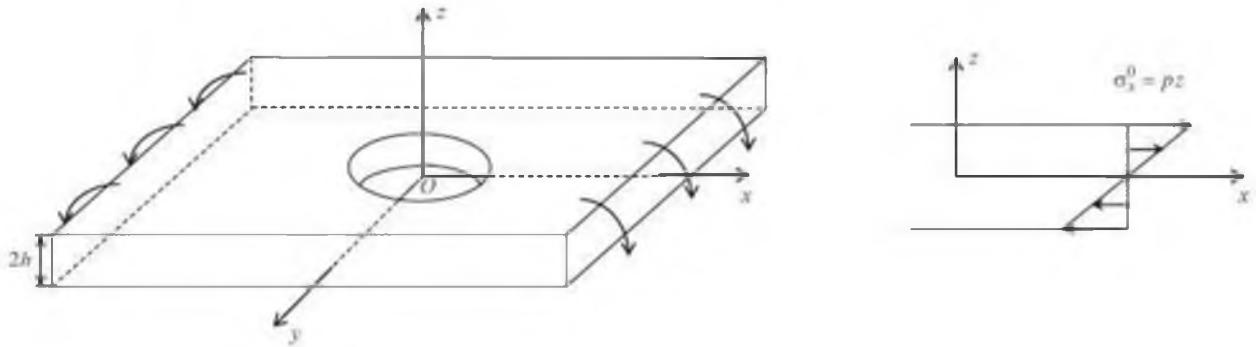


Рис. 6.1

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial_1 u_x, \quad \varepsilon_y = \partial_2 u_y, \quad \gamma_{xy} = \partial_1 u_y + \partial_2 u_x, \\ \gamma_{yz} &= \partial_3 u_y + \partial_2 w, \quad \gamma_{xz} = \partial_3 u_x + \partial_1 w, \end{aligned} \quad (6.3)$$

трехмерные уравнения равновесия без учета объемных сил

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_x + \partial_2 \tau_{xy} + \partial_3 \tau_{xz} &= 0, \\ \partial_1 \tau_{xy} + \partial_2 \sigma_y + \partial_3 \tau_{yz} &= 0, \\ \partial_1 \tau_{xz} + \partial_2 \tau_{yz} + \partial_3 \sigma_z &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\partial_1 = \partial / \partial x$, $\partial_2 = \partial / \partial y$, $\partial_3 = \partial / \partial z$, $\bar{E} = E / (1 - \nu^2)$, $G = E / [2(1 + \nu)]$.

Следует заметить, что к первым трем уравнениям закона Гука, являющимся уравнениями классической теории Кирхгофа, здесь добавлены еще два уравнения.

Из первых трех уравнений закона Гука (6.2), а также из уравнений равновесия (6.4) найдены выражения для напряжений

$$\sigma_x = zS_x, \quad \sigma_y = zS_y, \quad \tau_{xy} = zS_{xy}; \quad (6.5)$$

$$\tau_{xz} = \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) S_{xz}, \quad \tau_{yz} = \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) S_{yz}; \quad (6.6)$$

$$\sigma_z = -\frac{h^2}{2} \left(z - \frac{z^3}{3h^2} + \frac{2h}{3} \right) (\partial_1 S_{xz} + \partial_2 S_{yz}). \quad (6.7)$$

Здесь принято

$$\begin{aligned} S_x &= -\bar{E} \left[(\partial_1^2 + \nu \partial_2^2) \varphi - (1-\nu) \partial_1 \partial_2 \psi \right], \\ S_y &= -\bar{E} \left[(\partial_2^2 + \nu \partial_1^2) \varphi + (1-\nu) \partial_1 \partial_2 \psi \right], \\ S_{xy} &= -\bar{E} (1-\nu) \left[\partial_1 \partial_2 \varphi + \frac{1}{2} (\partial_1^2 - \partial_2^2) \psi \right], \\ S_{xz} &= \partial_1 S_x + \partial_2 S_{xy}, \quad S_{yz} = \partial_1 S_{xy} + \partial_2 S_y. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Напряжения статически эквивалентны моментам M_x , M_y , M_{xy} и перерезывающим силам Q_x и Q_y

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h}^h \sigma_x z dz = \frac{2h^3}{3} S_x, \quad M_y = \int_{-h}^h \sigma_y z dz = \frac{2h^3}{3} S_y, \\ M_{xy} &= \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz = \frac{2h^3}{3} S_{xy}, \\ Q_x &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = \frac{2h^3}{3} S_{xz}, \quad Q_y = \int_{-h}^h \tau_{yz} dz = \frac{2h^3}{3} S_{yz}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Представления для напряжений (6.6) и (6.7) выбраны таким образом, чтобы удовлетворить следующим граничным условиям на плоских гранях плиты

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0, \quad \text{при } z = \pm h,$$

если

$$\partial_1 Q_x + \partial_2 Q_y = 0. \quad (6.10)$$

Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} через функции перемещений могут быть получены также из уравнений закона Гука (6.2). С учетом соотношений (6.1) и (6.3) находятся

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G(\partial_1 w - \partial_1 \varphi + \partial_2 \psi), \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G(\partial_2 w - \partial_2 \varphi - \partial_1 \psi).$$

Эти соотношения входят в противоречие с представлениями (6.6).
Корректный результат можно получить для поперечных усилий

$$Q_x = \int_{-h}^h \tau_{xz} dz = 2Gh(\partial_1 w - \partial_1 \varphi + \partial_2 \psi),$$

$$Q_y = \int_{-h}^h \tau_{yz} dz = 2Gh(\partial_2 w - \partial_2 \varphi - \partial_1 \psi). \quad (6.11)$$

Таким образом, для определения функций φ , ψ и w имеются уравнения (6.9), (6.10) и (6.11). Подставляя Q_x и Q_y из (6.9) в (6.10), с учетом (6.8) получается

$$D\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad D = 2\bar{E}h^3 / 3. \quad (6.12)$$

Сравнивая правые части соотношений для Q_x и Q_y из (6.9) и (6.11), с учетом (6.8) находятся

$$\Delta\psi - k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2C}{D(1-\nu)} = \frac{3}{2h^2}, \quad (6.13)$$

$$w = \varphi - \frac{D}{C}\Delta\varphi, \quad C = Gh. \quad (6.14)$$

Таким образом, получена система уравнений изгиба плит (6.12) – (6.14), имеющая шестой порядок. Это позволяет удовлетворить трем граничным условиям на боковой поверхности, имеющим место в теории изгиба плит.

6.1.2. Построение общих решений дифференциальных уравнений теории пластин. Для построения решения дифференциальных уравнений (6.12) и (6.13) использованы функции обобщенных комплексных переменных.

Бигармоническое уравнение. В операторы $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$ вводятся дополнительные малые слагаемые так, чтобы они приняли вид $\Delta_1 = (1 + \varepsilon)^2 \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\Delta_2 = (1 - \varepsilon)^2 \partial_1^2 + \partial_2^2$, где ε – малый параметр [141]. Тогда

бигармонический оператор $\Delta\Delta$ превращается в обобщенный бигармонический $\Delta_1\Delta_2$. Корни характеристического уравнения теперь не являются кратными и имеют вид $\mu_1 = (1 + \varepsilon)i$, $\mu_2 = (1 - \varepsilon)i$, $\bar{\mu}_1 = -(1 + \varepsilon)i$, $\bar{\mu}_2 = -(1 - \varepsilon)i$.

Общее действительное решение однородного уравнения (6.12) через произвольные функции обобщенных комплексных переменных можно представить так [154]

$$\varphi = 2\text{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)], \quad z_j = x + \mu_j y.$$

Функции $\varphi_j(z_j)$ определены в областях S_j , которые получаются из области S , занимаемой срединной плоскостью плиты, аффинными преобразованиями [154] $x_j = x$, $y_j = (1 \pm \varepsilon)y$.

Метагармоническое уравнение. Рассматривается способ решения уравнения (6.13) для усложненного оператора $\Delta = \alpha^2 \partial_1^2 + \partial_2^2$, где α – вещественное число. Уравнение с усложненным оператором можно привести к виду

$$\left[k^2 - (\partial_2 - \mu \partial_1)(\partial_2 - \bar{\mu} \partial_1) \right] \psi = 0, \quad \mu = i\alpha, \quad \bar{\mu} = -i\alpha. \quad (6.15)$$

Для интегрирования уравнения (6.15) вводится обобщенная комплексная переменная $z = x + \mu y$ и сопряженная к ней величина $\bar{z} = x + \bar{\mu} y$. Это позволяет ввести операторы

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \quad (6.16)$$

После подстановки соотношений (6.16) в уравнение (6.15) получается

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - q^2 \right] \psi(z, \bar{z}) = 0, \quad q^2 = -k^2 / (\mu - \bar{\mu})^2. \quad (6.17)$$

Функцию $\psi(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций различных аргументов

$$\psi = \omega(t) \eta(s), \quad (6.18)$$

где $t = 2qr$, $r = (z\bar{z})^{1/2}$, $s = (z/\bar{z})^{1/2}$.

В результате подстановки представления (6.18) в уравнение (6.17) и разделения уравнений получаются следующие обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $\omega(t)$ и $\eta(s)$

$$t^2 \omega'' + t \omega' - t^2 \omega = c \omega, \quad (6.19)$$

$$\eta'' s^2 + \eta' s - c \eta = 0. \quad (6.20)$$

Уравнению (6.20) удовлетворяют функции $c_n s^n$ при значениях разделительного параметра $c = n^2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответственно. Уравнение (6.19) примет вид

$$t^2 \omega_n''(t) + t \omega_n'(t) - (t^2 + n^2) \omega_n(t) = 0. \quad (6.21)$$

Общее решение уравнения (6.21) при целых значениях величины n имеет вид [218]

$$\omega_n(t) = e_n I_n(t) + f_n K_n(t).$$

где $I_n(t)$, $K_n(t)$ – модифицированные функции Бесселя, e_n , f_n – произвольные постоянные.

Соотношение (6.18) с учетом найденных решений запишется так

$$\psi_n = c_n [e_n I_n(t) + f_n K_n(t)] s^n. \quad (6.22)$$

Общее решение уравнения (6.15) представляется в виде суперпозиции функций (6.22):

$$\psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n I_n(t) + F_n K_n(t)] s^n. \quad (6.23)$$

где E_n и F_n – произвольные комплексные постоянные.

При рассмотрении задач для неограниченных областей в представлении (6.23) следует выбрать убывающую на бесконечности ветвь. Соответствующее решение примет вид

$$\psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n K_n(t) s^n = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \psi_n. \quad (6.24)$$

В представления для перемещений, напряжений, моментов и перерезывающих сил входят производные от функции ψ . Производные от функций $\psi_n = K_n(t) s^n$ найдены путем использования соотношений, связывающих функции Бесселя с различными индексами [218]:

$$\begin{aligned} \psi_n &= K_n(t) s^n, \quad \psi_{1n} = \partial_1 \psi_n = -q \left(K_{n-1} s^{n-1} + K_{n+1} s^{n+1} \right), \\ \psi_{2n} &= \partial_2 \psi_n = -q \left(\mu K_{n-1} s^{n-1} + \bar{\mu} K_{n+1} s^{n+1} \right), \\ \psi_{11n} &= \partial_1^2 \psi_n = q^2 \left(K_{n-2} s^{n-2} + 2K_n s^n + K_{n+2} s^{n+2} \right), \\ \psi_{22n} &= \partial_2^2 \psi_n = q^2 \left(\mu^2 K_{n-2} s^{n-2} + 2\mu\bar{\mu} K_n s^n + \bar{\mu}^2 K_{n+2} s^{n+2} \right), \\ \psi_{12n} &= \partial_1 \partial_2 \psi_n = q^2 \left(\mu K_{n-2} s^{n-2} + (\mu + \bar{\mu}) K_n s^n + \bar{\mu} K_{n+2} s^{n+2} \right). \end{aligned} \quad (6.25)$$

6.1.3. Граничные условия на боковой поверхности. Рассматривается напряженно-деформированное состояние плиты, ослабленной криволинейной полостью, боковая поверхность которой представляет собой цилиндр с образующими, нормальными плоским граням. Граничные условия для криволинейного края с нормалью \bar{n} определяются способом закрепления и нагружения поверхности. Пусть $P(x, y, z)$ – нормальная, а $T(x, y, z)$ и $N(x, y, z)$ – касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то край считается свободным от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивности $\sigma_x^0 = pz$, $\sigma_y^0 = qz$ и $\tau_{xy}^0 = tz$. Считается, что внешний контур находится вдали от полости и

их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на боковой поверхности полости примут вид

$$\begin{aligned} n_1\sigma_x + n_2\tau_{xy} &= n_1(P - pz) - n_2(T + tz), \\ n_1\tau_{xy} + n_2\sigma_y &= n_1(T - tz) + n_2(P - qz), \\ n_1\tau_{xz} + n_2\tau_{yz} &= N. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Направляющие косинусы при параметрическом задании контура имеют вид

$$n_1 = \cos(n, x) = dy / dl, \quad n_2 = \cos(n, y) = -dx / dl; \quad dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (6.27)$$

Пусть внешние усилия представлены в форме

$$P(x, y, z) = z P_1(x, y), \quad T(x, y, z) = z T_1(x, y), \quad N(x, y, z) = \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) N_1(x, y).$$

Тогда в соответствии с представлениями (6.5) – (6.6), условия (6.26) запишутся так

$$\begin{aligned} n_1S_x + n_2S_{xy} &= n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t), \\ n_1S_{xy} + n_2S_y &= n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q), \\ n_1S_{xz} + n_2S_{yz} &= N_1. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Подстановка представлений (6.8) в (6.28) дает уравнения для определения функций φ и ψ

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1r_{1j} + n_2r_{6j}) \varphi_j'' + \left[n_1r_{13}\partial_1\partial_2 + n_2r_{63}(\partial_2^2 - \partial_1^2) \right] \psi &= n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t), \\ 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1r_{6j} + n_2r_{2j}) \varphi_j'' + \left[n_2r_{23}\partial_1\partial_2 + n_1r_{63}(\partial_2^2 - \partial_1^2) \right] \psi &= n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q), \\ 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1r_{3j} + n_2r_{4j}) \varphi_j''' + \frac{3}{4h^2} (n_1r_{33}\partial_2 + n_2r_{43}\partial_1) \psi &= N_1, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где принято

$$\begin{aligned} \varphi_j'' &= \partial^2 \varphi_j / \partial z_j^2, \quad \varphi_j''' = \partial^3 \varphi_j / \partial z_j^3, \quad r_{1j} = -\frac{E(1+\nu \mu_j^2)}{1-\nu^2}, \quad r_{6j} = -\frac{E\mu_j}{1+\nu}, \\ r_{2j} &= -\frac{E(\mu_j^2 + \nu)}{1-\nu^2}, \quad r_{5j} = -\frac{E}{1-\nu^2}(1+\mu_j^2), \quad r_{4j} = \mu_j r_{5j}, \quad (j=1,2), \\ r_{13} &= \frac{E}{1+\nu}, \quad r_{23} = -\frac{E}{1+\nu}, \quad r_{63} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad r_{53} = \frac{E}{1+\nu}, \quad r_{43} = -r_{53}. \end{aligned}$$

Интегрирование граничных условий (6.28) с учетом однородного уравнения (6.10), а также соотношений (6.27) дает

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \bar{E} \sum_{j=1}^2 \frac{(1+\nu\mu_j^2)}{\mu_j} \varphi_j' - \bar{E}(1-\nu) \partial_1 \psi &= (py - tx) - \int_0^l (P_1 dy + T_1 dx + N_i dx) - c_3 x + c_1, \\ 2\operatorname{Re} \bar{E} \sum_{j=1}^2 (\nu + \mu_j^2) \varphi_j' + \bar{E}(1-\nu) \partial_2 \psi &= (qx - ty) + \int_0^l (T_1 dy - P_1 dx + N_i dy) + c_3 y + c_2, \\ 2\operatorname{Re} \bar{E} \left[\mu_1 (1 + \mu_1^2) \varphi_1'' + \mu_2 (1 + \mu_2^2) \varphi_2'' \right] + \bar{E} \frac{3(1-\nu)}{4h^2} \psi &= N_i + c_3, \quad N_i = \int_0^l N_1 dl. \quad (6.30) \end{aligned}$$

Таким образом, граничные условия (6.28) для определения функций $\varphi_j(z_j)$ и ψ можно использовать в формах (6.29) или (6.30).

6.1.4. Представление решения для бесконечной плиты с эллиптической полостью. Пусть плита ослаблена полостью в виде цилиндра эллиптического сечения с образующими, нормальными плоским граням. В сечении срединной плоскости Oxy имеется область S в виде плоскости с эллиптическим вырезом. Главные оси эллипса направлены по осям Ox и Oy . В этом случае уравнение эллиптического контура в параметрической форме можно записать так

$$x = a \cos(\theta) = \frac{a}{2}(\sigma + 1/\sigma), \quad y = b \sin(\theta) = -\frac{bi}{2}(\sigma - 1/\sigma).$$

Здесь $\sigma = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, a и b – полуоси эллипса, θ – полярный угол.

Уравнения контуров в областях S_j , где определены функции $\varphi_j(z_j)$ будут такими

$$t_j = x + \mu_j y = R_j \sigma + \frac{m_j}{\sigma}, \quad R_j = (a - i\mu_j b) / 2, \quad m_j = (a + i\mu_j b) / 2. \quad (6.31)$$

Уравнение контура (6.31) позволяет записать функцию, конформно отображающую внешность единичного круга на внешность эллипса в области S_j

$$z_j = x + \mu_j y = R_j \zeta_j + \frac{m_j}{\zeta_j}, \quad \zeta_j = r_j \sigma, \quad (r_j \geq 1).$$

Функции $\varphi'_j(z_j)$ представляются в виде ряда

$$\varphi'_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nj} / \zeta_j^n. \quad (6.32)$$

На граничном контуре $r_j = 1$ и имеет место равенство $\zeta_j = \sigma$.

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (6.32) и (6.24) необходимо функции, входящие в условия (6.30), разложить в ряды по степеням переменной σ . Для разложения этих функций использована следующая методика приближения функций [24].

Пусть заданная функция $f(\theta)$ известна своими значениями в конечном числе точек отрезка $[0, 2\pi)$:

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_L < 2\pi. \quad (6.33)$$

Выбирая в качестве аппроксимирующей системы функции

$$1, \sigma(\theta), \frac{1}{\sigma(\theta)}, \sigma^2(\theta), \frac{1}{\sigma^2(\theta)}, \dots, \sigma^N(\theta), \frac{1}{\sigma^N(\theta)}, \quad (2N + 1 \leq L), \quad (6.34)$$

можно определить многочлен $T_n(\theta)$, аппроксимирующий функцию $f(\theta)$

$$T_N(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N \left(a_k \sigma^k(\theta) + \frac{b_k}{\sigma^k(\theta)} \right). \quad (6.35)$$

Для получения наилучшего приближения функции $f(\theta)$ использован метод наименьших квадратов. В этом случае коэффициенты многочлена $T_N(\theta)$ должны удовлетворять системе уравнений [24]

$$\begin{cases} La_0 + \sum_{k=1}^N \left[a_k \sum_{l=1}^L \sigma^k(\theta_l) + b_k \sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma^k(\theta_l)} \right] = \sum_{l=1}^L f(\theta_l), \\ a_0 \sum_{l=1}^L \sigma^i(\theta_l) + \sum_{k=1}^N \left[a_k \sum_{l=1}^L \sigma^k(\theta_l) \sigma^i(\theta_l) + b_k \sum_{l=1}^L \frac{\sigma^i(\theta_l)}{\sigma^k(\theta_l)} \right] = \sum_{l=1}^L f(\theta_l) \sigma^i(\theta_l), \\ a_0 \sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma^i(\theta_l)} + \sum_{k=1}^N \left[a_k \sum_{l=1}^L \frac{\sigma^k(\theta_l)}{\sigma^i(\theta_l)} + b_k \sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma^k(\theta_l) \sigma^i(\theta_l)} \right] = \sum_{l=1}^L \frac{f(\theta_l)}{\sigma^i(\theta_l)}, \\ (i = 1, 2, \dots, N). \end{cases} \quad (6.36)$$

После решения этой системы находится аппроксимирующий многочлен (6.35).

Если узлы отрезка (6.33) равноотстоящие, то для системы функций (6.34) справедливы следующие свойства

$$\sum_{l=1}^L \sigma^k(\theta_l) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma^k(\theta_l)} = \begin{cases} L, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k > 0; \end{cases} \quad (6.37)$$

$$\sum_{l=1}^L \sigma^k(\theta_l) \sigma^i(\theta_l) = \sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma^k(\theta_l) \sigma^i(\theta_l)} = 0 \quad \text{для всех } k > 0, i > 0; \quad (6.38)$$

$$\sum_{l=1}^L \frac{\sigma^k(\theta_l)}{\sigma^i(\theta_l)} = \sum_{l=1}^L \frac{\sigma^i(\theta_l)}{\sigma^k(\theta_l)} = \begin{cases} L, & \text{при } k = i > 0, \\ 0, & \text{при } k \neq i, k > 0, i > 0. \end{cases} \quad (6.39)$$

Для доказательства этих свойств достаточно рассмотреть следующие суммы

$$\sum_{l=1}^L \sigma^r(\theta_l) = \sum_{l=1}^L e^{ir\theta_l} \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^L \frac{1}{\sigma^r(\theta_l)} = \sum_{l=1}^L e^{-ir\theta_l}.$$

С учетом того, что узлы отрезка равноотстоящие, т.е. $\theta_l = \alpha(l-1)$, $\alpha = 2\pi/L$, получается

$$\sum_{l=1}^L e^{ir\theta_l} = 1 + e^{ir\alpha} + e^{ir2\alpha} + \dots + e^{ir(L-1)\alpha} = \frac{1 - e^{irL\alpha}}{1 - e^{ir\alpha}} = \frac{1 - e^{ir2\pi}}{1 - e^{ir\alpha}} = 0 \quad \text{при } r \neq 0.$$

Аналогично показывается, что $\sum_{l=1}^L e^{-ir\theta_l} = 0$ при $r \neq 0$. При $r = 0$ $\sum_{i=1}^L 1 = L$.

В силу полученных равенств (6.37) – (6.39) система (6.36) для определения коэффициентов упростится и примет вид

$$\begin{cases} La_0 = \sum_{l=1}^L f(\theta_l), \\ La_i = \sum_{l=1}^L f(\theta_l) \frac{1}{\sigma^i(\theta_l)}, \\ Lb_i = \sum_{l=1}^L f(\theta_l) \sigma^i(\theta_l) \\ (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(\theta_l), \\ a_i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(\theta_l) \frac{1}{\sigma^i(\theta_l)}, \\ b_i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(\theta_l) \sigma^i(\theta_l) \\ (i = 1, 2, \dots, N). \end{cases} \quad (6.40)$$

С учетом изложенной методики представления функций φ'_j и φ''_j на граничном контуре будут такими

$$\varphi'_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nj}}{\sigma^n}, \quad \varphi''_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nj} \frac{-n}{\sigma^{n-1}(R_j \sigma^2 - m_j)} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{nj} \sum_{k=2}^N \frac{a_{jkn}}{\sigma^k}, \quad (6.41)$$

где

$$a_{jkn} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \left[\frac{-n}{\sigma_p^{n-1} (R_j \sigma_p^2 - m_j)} \sigma_p^k \right], \quad (L \geq 2N + 1). \quad (6.42)$$

Здесь $\sigma_p = \exp(i\theta_p)$, а θ_p – равноотстоящие узлы, расположенные на интервале $[0, 2\pi)$: $0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_L < 2\pi$.

Преобразование представлений (6.25) продемонстрируем на примере функции (6.24). Она может быть записана так

$$\psi(x, y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \psi_n = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} F_n \sum_{k=0}^N \left[A_{n+1, k+1}^{00} \sigma^k + B_{n+1, k+1}^{00} \sigma^{-k} \right], \quad (6.43)$$

Для вычисления коэффициентов матриц использованы формулы

$$A_{n+1, k+1}^{00} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \psi_n(\theta_p) / \sigma_p^k, \quad B_{n+1, k+1}^{00} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \psi_n(\theta_p) \sigma_p^k.$$

Здесь, как и в случае вычисления по формуле (6.42), введены равноотстоящие узлы θ_p .

Аналогичным образом строятся разложения других функций (6.25).

После подстановки в граничные условия (6.30) функций (6.41), разложения функций (6.25) в форме (6.43) и выделения выражений при одинаковых степенях переменной σ получается система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (6.32) и (6.24). При этом коэффициенты функций (6.24) выбирались в форме $F_n = \alpha_n / K_n$, где $K_n = \max(K_n(2qr_*))$, а r_* принадлежит граничному контуру.

6.1.5. Результаты численных исследований. При численном исследовании напряженно - деформированного состояния плиты с эллиптической полостью используются безразмерные величины. Они получаются делением линейных величин: координат x , y , полуосей эллипса a и b , полутолщины плиты h , перемещений u_α на характерный линейный параметр. В качестве такого параметра используется величина $R = \max(a, b)$. Безразмерная координата z

получается делением исходной координаты z на полутолщину плиты. Тогда переменная z будет изменяться на отрезке $[-1,1]$.

Деформация осуществляется изгибающими усилиями $\sigma_x^0 = zp$, действующими на бесконечности. Моменты

$$S_r = n_1^2 S_x + 2n_1 n_2 S_{xy} + n_2^2 S_y, \quad S_{rz} = (n_1 S_{xz} + n_2 S_{yz}),$$

$$S_{r\theta} = (S_y - S_x) n_1 n_2 + S_{xy} (n_1^2 - n_2^2)$$

на свободном от усилий граничном контуре, как следует из условий (6.28), равны нулю. Наибольший интерес представляют моменты, определяющие концентрацию напряжений на контуре полости

$$S_\theta = n_2^2 S_x - 2n_1 n_2 S_{xy} + n_1^2 S_y, \quad S_{z\theta} = (-n_2 S_{xz} + n_1 S_{yz}). \quad (6.44)$$

Своего максимального значения величины S_θ / p достигают на контуре при $\theta = \pi / 2$ и $\theta = 3\pi / 2$, а минимального при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Величины $|S_{z\theta} / p|$ для кругового контура максимального значения достигают при $\theta = \pm\pi / 4$ и $\theta = \pm 3\pi / 4$. Для эллиптического контура этот максимум сдвигается в сторону вершины с большей кривизной.

В таблице 6.1 приведены результаты численных исследований для плиты с круговой $a = b$ и эллиптическими $a/b = 2/3$ и $a/b = 3/2$ полостями. Исследования проведены для различных относительных толщин плиты h и различных значений коэффициента Пуассона ν . Для каждого значения параметра ν приведены две строки данных. В верхней строке отражены максимальные, а в нижней – минимальные значения концентрации напряжений.

Анализ численных исследований и данных таблицы 6.1 позволяет сформулировать следующие результаты:

1) величина напряжений при фиксированном коэффициенте Пуассона не зависит от значений E и G ;

2) наибольшая зависимость напряжений от коэффициента Пуассона наблюдается при малых толщинах плиты;

3) напряжения $S_{z\theta} / p$ с увеличением толщины плиты стремятся к нулю;

4) напряжения S_{θ} / p , возникающие при изгибе плиты с полостью, в зависимости от толщины плиты, лежат в границах между решениями задач изгиба в рамках теории Кирхгофа и решениями соответствующих задач плоской теории упругости.

Таблица 6.1

$2h$	0.1		1		10		100	
ν	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$
$a=b$								
0.001	1.693	0.574	1.906	0.538	2.734	0.240	2.992	0.030
	0.307	-0.574	0.094	-0.538	-0.734	-0.240	-0.992	-0.030
1/3	1.828	0.515	2.049	0.468	2.794	0.186	2.994	0.022
	0.173	-0.515	-0.049	-0.468	-0.794	-0.186	-0.994	-0.022
0.499	1.885	0.489	2.108	0.439	2.814	0.168	2.994	0.020
	0.115	-0.489	-0.108	-0.439	-0.814	-0.168	-0.994	-0.020
$a=2/3b$								
1/3	2.269	0.641	2.712	0.558	3.761	0.194	3.996	0.022
	0.174	-0.641	-0.052	-0.558	-0.830	-0.194	-0.998	-0.022
$a=3/2b$								
1/3	1.550	0.427	1.701	0.372	2.220	0.129	2.330	0.015
	0.154	-0.427	-0.142	-0.372	-0.840	-0.129	-0.996	-0.015

Действительно, для тонкой плиты из изотропного материала с круговым отверстием, путем использования теории Кирхгофа получены соотношения [154]

$$\max(S_{\theta} / p) = (5 + 3\nu) / (3 + \nu), \quad \min(S_{\theta} / p) = (1 - \nu) / (3 + \nu). \quad (6.45)$$

В работе [137] при определении плоского напряженного состояния для пластинки с эллиптическим отверстием получены соотношения, которые для изотропного материала имеют вид

$$\max(S_{\theta}/p) = 1 + 2b/a, \quad \min(S_{\theta}/p) = -1. \quad (6.46)$$

Сравнение результатов, полученных по формулам (6.45) и (6.46) с данными таблицы 6.1 при $h = 0.1$ и $h = 100$ соответственно, подтверждает сформулированный выше вывод 4).

На рисунках 6.2 – 6.3 показано распределение напряжений S_{θ}/p и $S_{z\theta}/p$ соответственно по контуру эллиптического отверстия для различных значений относительной толщины плиты h . Параметры эллипса $a = 2/3$, $b = 1$, относительная толщина плиты h выбиралась равной 0.1, 1 и 10, а коэффициент $\nu = 1/3$. Сплошной линией на рисунках обозначен случай, когда $h = 10$, штриховая линия соответствует толщине $h = 1$, а пунктирная – $h = 0.1$.

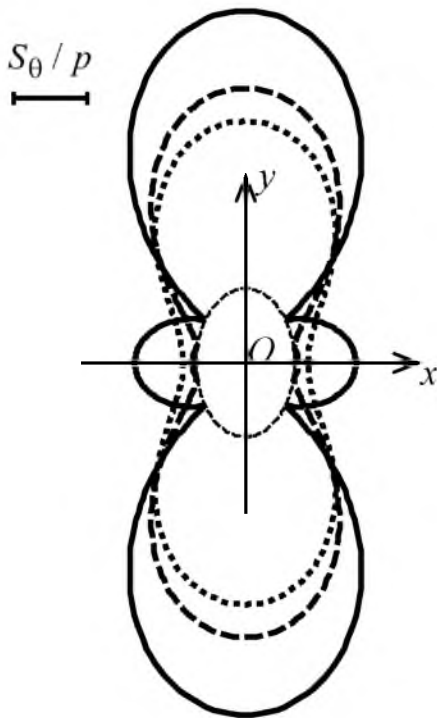


Рис. 6.2

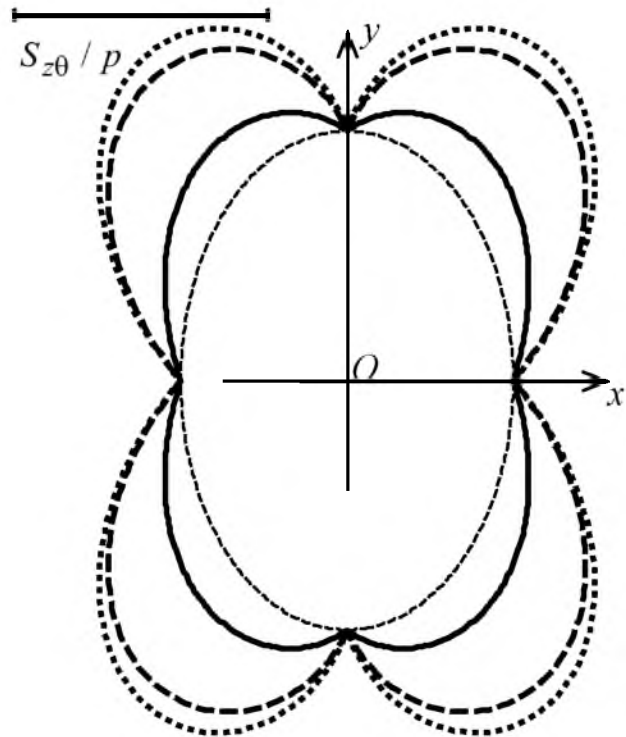


Рис. 6.3

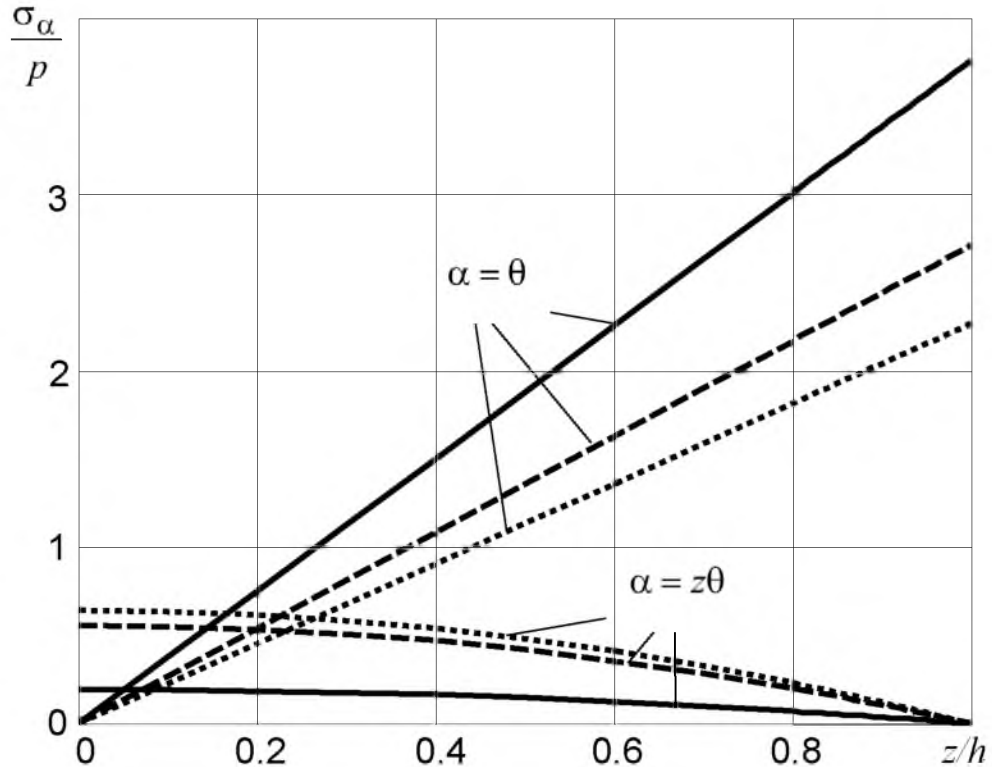


Рис. 6.4

На рисунке 6.4 дано распределение максимальных значений напряжений $\sigma_\theta = zS_\theta$ и $\sigma_{z\theta} = (1 - z^2)S_{z\theta}$ по толщине плиты для указанных случаев. Величины S_θ и $S_{z\theta}$ определялись из соотношений (6.44). На рисунках наглядно просматриваются закономерности распределения напряжений, описанные выше.

6.2. Модель изгиба трансверсально-изотропных плит

6.2.1. Основные соотношения уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит. Рассматривается трансропная плита, отнесенная к декартовой системе координат $Oxyz$, имеющая толщину $2h$. Оси Ox и Oy расположены в срединной плоскости плиты, а ось Oz – нормальна к этой плоскости. Представление для перемещений выбираются в виде

$$u_1 = p_1(z)[\partial_1\varphi(x,y) + \partial_2\psi(x,y)], \quad u_2 = p_1(z)[\partial_2\varphi(x,y) - \partial_1\psi(x,y)],$$

$$u_3 = w_0(x, y) + p_2(z)w(x, y), \quad p_2 = \int p_1 dz. \quad (6.47)$$

Здесь введены: нечетная по переменной z функция $p_1(z)$, характеризующая распределение усилий по толщине плиты; подлежащие определению функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $w_0(x, y)$, $w(x, y)$.

Выражения для напряжений находятся из уравнений закона Гука. С учетом (6.47) получается

$$\sigma_1 = p_1 S_1, \quad \sigma_2 = p_1 S_2, \quad \sigma_3 = p_1 S_3, \quad \sigma_6 = p_1 S_6; \quad (6.48)$$

$$\sigma_4 = A_{44} [\partial_2 w_0 + p_2 \partial_2 w + p_0 (\partial_2 \varphi - \partial_1 \psi)],$$

$$\sigma_5 = A_{55} [\partial_1 w_0 + p_2 \partial_1 w + p_0 (\partial_1 \varphi + \partial_2 \psi)], \quad (6.49)$$

где принято

$$S_i = (A_{i1} \partial_1^2 + A_{i2} \partial_2^2) \varphi + (A_{i1} - A_{i2}) \partial_1 \partial_2 \psi + A_{i3} w \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (6.50)$$

$$S_6 = A_{66} [2 \partial_1 \partial_2 \varphi + (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi], \quad p_0(z) = p_1'(z), \quad A_{ij} - \text{модули упругости,}$$

а также использованы обозначения $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6] = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]$.

Напряжения σ_4 , σ_5 и σ_3 можно также найти, удовлетворяя уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= [p_2(h) - p_2(z)] S_4, \quad \sigma_5 = [p_2(h) - p_2(z)] S_5, \\ \sigma_3 &= [p_3(z) - p_2(h)z] S_3^*. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Здесь введены обозначения

$$p_3 = \int p_2 dz, \quad S_3^* = \partial_1 S_5 + \partial_2 S_4, \quad S_4 = \partial_1 S_6 + \partial_2 S_2, \quad S_5 = \partial_1 S_1 + \partial_2 S_6. \quad (6.52)$$

Представления для напряжений σ_4 и σ_5 в соотношениях (6.51) удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты: $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ когда $z = \pm h$. Однако, эти представления противоречат соотношениям (6.49). Корректный результат можно получить для поперечных усилий.

Для построения системы дифференциальных уравнений, описывающих изгиб плит, полагается:

1. Поперечное нормальное напряжение σ_3 , как и в теории Кирхгофа, равно нулю;
2. Поперечные усилия, полученные интегрированием соотношений (6.49) и (6.51), равны [34].

Реализация указанных предположений приводит к следующим уравнениям

$$S_3 = A_{13} \Delta \varphi + A_{33} w = 0; \quad (6.53)$$

$$S_3^* = A_{11} \Delta \Delta \varphi + A_{13} \Delta w = 0; \quad (6.54)$$

$$Q_5 = \int_{-h}^h \sigma_5 dz = A_{55} [2h \partial_1 w_0 + I_0 (\partial_1 \varphi + \partial_2 \psi) + I_2 \partial_1 w] = [2h p_2(h) - I_2] S_5,$$

$$Q_4 = \int_{-h}^h \sigma_4 dz = A_{44} [2h \partial_2 w_0 + I_0 (\partial_2 \varphi - \partial_1 \psi) + I_2 \partial_2 w] = [2h p_2(h) - I_2] S_4. \quad (6.55)$$

Здесь введены обозначения $I_0 = \int_{-h}^h p_0 dz$, $I_2 = \int_{-h}^h p_2 dz$, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

Таким образом, для определения функций φ , ψ , w_0 и w получена система уравнений (6.53) - (6.55), которая приводится к виду

$$\Delta \Delta \varphi = 0, \quad (6.56)$$

$$\Delta \psi - k^2 \psi = 0, \quad (6.57)$$

$$w_0 = -k_0 \varphi + \alpha_1 \Delta \varphi, \quad w = -\alpha_{13} \Delta \varphi, \quad (6.58)$$

где принято

$$k^2 = k_0 / (k_2 \alpha_{65}), \quad \alpha_{65} = A_{66} / A_{55}, \quad \alpha_{13} = A_{13} / A_{33}, \quad \alpha_1 = k_2 B_{11} / A_{55} + k_1 \alpha_{13},$$

$$k_0 = I_0 / (2h), \quad k_1 = I_2 / (2h), \quad k_2 = p_2(h) - k_1.$$

Представления (6.50) и (6.52) через функции φ и ψ принимают вид

$$S_i = (B_{i1} \partial_1^2 + B_{i2} \partial_2^2) \varphi + (B_{i1} - B_{i2}) \partial_1 \partial_2 \psi, \quad S_6 = A_{66} [2 \partial_1 \partial_2 \varphi + (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi], \quad (6.59)$$

$$S_4 = B_{11} \Delta \partial_2 \varphi - A_{66} \Delta \partial_1 \psi, \quad S_5 = B_{11} \Delta \partial_1 \varphi + A_{66} \Delta \partial_2 \psi, \quad B_{ik} = A_{ik} - A_{i3} A_{3k} / A_{33}.$$

Таким образом, получены дифференциальные уравнения изгиба трансверсально-изотропных плит (6.56) и (6.57), а также соотношения (6.58) для вычисления функций w_0 и w . Уравнения в совокупности имеют шестой порядок, что позволяет удовлетворить всем граничным условиям на боковой поверхности плиты.

Методика получения представлений для общих решений уравнений (6.56) и (6.57) дана в п. 6.1.2. Компоненты перемещений и напряжений, зависящие от функции $\psi(x, y)$, имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1\psi} &= \partial_2 \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n v_{2n} + F_n w_{2n}), \\ u_{2\psi} &= -\partial_1 \psi = -2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n v_{1n} + F_n w_{1n}), \quad u_{3\psi} = 0, \\ S_{5\psi} &= A_{66} k^2 \partial_2 \psi = A_{66} k^2 u_{1\psi}, \quad S_{4\psi} = -A_{66} k^2 \partial_1 \psi = A_{66} k^2 u_{2\psi}, \quad (6.60) \\ S_{i\psi} &= (B_{i1} - B_{i2}) \partial_1 \partial_2 \psi = (B_{i1} - B_{i2}) 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (E_n v_{12n} + F_n w_{12n}) \quad (i=1, 2, 3), \\ S_{6\psi} &= A_{66} (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi = A_{66} 2 \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} [E_n (v_{22n} - v_{11n}) + F_n (w_{22n} - w_{11n})]. \end{aligned}$$

Здесь $v_n = I_n(t) s^n$, $w_n = K_n(t) s^n$, $I_n(t)$, $K_n(t)$ – модифицированные функции Бесселя; E_n , F_n – произвольные постоянные,

$$\begin{aligned} w_{1n} &= \partial_1 w_n, \quad w_{2n} = \partial_2 w_n, \quad w_{11n} = \partial_1^2 w_n, \quad w_{22n} = \partial_2^2 w_n, \quad w_{12n} = \partial_1 \partial_2 w_n, \\ v_{1n} &= \partial_1 v_n, \quad v_{2n} = \partial_2 v_n, \quad v_{11n} = \partial_1^2 v_n, \quad v_{22n} = \partial_2^2 v_n, \quad v_{12n} = \partial_1 \partial_2 v_n. \end{aligned}$$

Производные от функций $v_n = I_n(t) s^n$ и $w_n = K_n(t) s^n$ находятся путем использования соотношений, связывающих функции Бесселя с различными индексами [218].

Точное решение (6.23) уравнения (6.57) представляется через модифицированные функции Бесселя и может быть использовано при исследовании краевых задач для областей с границами, близкими к круговым, когда толщина плиты произвольна. Однако, это решение не всегда пригодно для исследования краевых задач с границами, отличными от круговых. В связи с этим, возникает необходимость построения решения, подходящего для произвольных контуров. Ниже предлагается способ приближенного решения уравнения (6.57) для тонких плит, пригодный для исследования плит, ослабленных полостями произвольной формы.

6.2.2. Уравнение границы области. Предлагаемый способ решения метагармонического уравнения (6.57) опирается на использование уравнения границы области, в которой определяется это решение. Способы построения таких уравнений для практически произвольных контуров, с помощью методов алгебры логики и аппарата R -функций, разработаны в работах В.Л. Рвачева и его учеников [244, 245].

Пусть Ω есть некоторая область, граница $\partial\Omega$ которой описывается уравнением $\omega = 0$. При этом для функции ω на границе могут быть обеспечены дополнительные свойства

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 1, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial^2 n} = \frac{\partial^3\omega}{\partial^3 n} = \dots = \frac{\partial^k\omega}{\partial^k n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (6.61)$$

где n - нормаль к $\partial\Omega$.

При выполнении условий (6.61) уравнение $\omega = 0$ называют нормализованным до k -го порядка на $\partial\Omega$.

Для построения уравнения, нормализованного до первого порядка, вводится функция w_1 , удовлетворяющая условиям

$$w_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad w_1 > 0 \quad \text{внутри } \Omega; \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} > 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Нормализованное уравнение до первого порядка можно представить в виде [245]

$$\omega = w_1 / \sqrt{f}, \quad \text{если } f = (\partial_1 w_1)^2 + (\partial_2 w_1)^2 \neq 0 \quad \text{в } \Omega,$$

или в виде

$$\omega = w_1 / \sqrt{w_1 + f}, \quad \text{если } f = (\partial_1 w_1)^2 + (\partial_2 w_1)^2 = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Именно такая функция будет использована при построении приближенного решения уравнения (6.57) в окрестности граничной линии (области краевого эффекта).

6.2.3. Решение метагармонического уравнения с малым параметром при старшей производной. Уравнение (6.57) можно записать в виде

$$\lambda^2 \Delta \psi - \psi = 0. \quad (6.62)$$

Для функции $p_1(z) = z^{2m-1}$, введенной в представлениях (6.47), величина $\lambda^2 = 1/k^2 = h^2 \alpha_{65} / (2m+1)$ принимается в качестве малого параметра. Это возможно, когда толщина плиты h является малой величиной.

Метод решения уравнения (6.62) основан на использовании уравнения границы области и пограничного слоя. При значениях параметра $\lambda^2 \rightarrow 0$, решение предельного уравнения (6.62) – $\psi = 0$, близко к точному решению всюду, за исключением малого интервала возле граничной линии $\omega = 0$, где точное решение изменяется так, чтобы удовлетворить краевому условию на границе области. Этот малый интервал, в котором функция ψ очень быстро изменяется, в механике называется пограничным слоем или областью краевого эффекта. Для нахождения решения, пригодного в погранслое, предлагается использование асимптотических методов. Асимптотические разложения позволяют не только получить первое приближение, но и построить, в случае необходимости, высшие. Для получения решения функция $\psi(x, y)$ представлена в виде произведения

$$\psi = r(x, y) \Psi(x, y). \quad (6.63)$$

Функции r и Ψ определены в виде разложений в области краевого эффекта

$$r = \exp\left(\alpha\omega + \alpha_2 \frac{\omega^2}{2} + \alpha_3 \frac{\omega^3}{6} + \dots\right), \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1 \omega + \Psi_2 \frac{\omega^2}{2} + \Psi_3 \frac{\omega^3}{6} + \dots$$

Здесь α – постоянная величина, $\alpha_2, \dots, \Psi_0, \Psi_1, \dots$ – функции переменных (x, y) .

Уравнение (6.62) с учетом представления (6.63) принимает вид

$$\lambda^2 \Delta \psi - \psi = \lambda^2 [\Delta r \Psi + 2(\partial_1 r \partial_1 \Psi + \partial_2 r \partial_2 \Psi) + r \Delta \Psi] - r \Psi = 0. \quad (6.64)$$

На граничном контуре $\partial\Omega$ с учетом соотношений $\omega = 0$, $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$, можно найти

$$\begin{aligned} \Delta r &= r \left(\alpha^2 + \alpha \Delta \omega + \alpha_2 \right), \quad 2[\partial_1 r \partial_1 \Psi + \partial_2 r \partial_2 \Psi] = 2r\alpha [\omega_1 \partial_1 \Psi_0 + \omega_2 \partial_2 \Psi_0 + \Psi_1], \\ \Delta \Psi &= \Delta \left(\Psi_0 + \omega \Psi_1 + \frac{\omega^2}{2} \Psi_2 \right) = \Delta \Psi_0 + \Delta \omega \Psi_1 + 2[\omega_1 \partial_1 \Psi_1 + \omega_2 \partial_2 \Psi_1] + \Psi_2. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Из уравнения (6.64) с учетом (6.65) получается

$$\Delta \Psi_0 = 0; \quad \alpha = -1/\lambda, \quad \alpha_2 = -\alpha \Delta \omega. \quad (6.66)$$

$$\Psi_1 = -(\omega_1 \partial_1 \Psi_0 + \omega_2 \partial_2 \Psi_0), \quad \Psi_2 = -\Delta \omega \Psi_1 - 2[\omega_1 \partial_1 \Psi_1 + \omega_2 \partial_2 \Psi_1]. \quad (6.67)$$

Решение уравнения (6.66) и функции (6.67) выражаются через произвольную функцию комплексной переменной $z_3 = x + \mu_3 y$ (μ_3 – мнимая единица) в форме

$$\Psi_0 = 2 \operatorname{Re} \Phi(z_3), \quad \Psi_1 = 2 \operatorname{Re} p_{11} \Phi'(z_3), \quad \Psi_2 = 2 \operatorname{Re} [p_{21} \Phi'(z_3) + p_{22} \Phi''(z_3)],$$

где принято $\Phi' = \frac{d\Phi}{dz_3}$, $\Phi'' = \frac{d^2\Phi}{dz_3^2}$, $p_{11} = -(\omega_1 + \mu_3 \omega_2)$, $p_{22} = 2p_{11}^2$,

$$p_{21} = 3\omega_1 \partial_1^2 \omega + 2\omega_2 \partial_1 \partial_2 \omega + \omega_1 \partial_2^2 \omega + \mu_3 (3\omega_2 \partial_2^2 \omega + 2\omega_1 \partial_1 \partial_2 \omega + \omega_2 \partial_1^2 \omega).$$

При таких значениях функций Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 уравнение (6.62) в первом приближении удовлетворяется тождественно. В представлении для компонент перемещений и напряжений, зависящих от функции $\psi(x, y)$, входят производные

от этой функции. В первом приближении, соотношения (6.47) и (6.59) через комплексную функцию и ее производные будут такими

$$\begin{aligned}
u_{1\psi} &= \partial_2 \psi = 2 \operatorname{Re}(p_{13} \Phi + p_{14} \Phi'), & u_{2\psi} &= -\partial_1 \psi = -2 \operatorname{Re}(p_{23} \Phi + p_{24} \Phi'), & u_{3\psi} &= 0, \\
S_{5\psi} &= A_{66} k^2 \partial_2 \psi = A_{66} k^2 u_{1\psi}, & S_{4\psi} &= -A_{66} k^2 \partial_1 \psi = A_{66} k^2 u_{2\psi}, \\
S_{i\psi} &= C_i \partial_1 \partial_2 \psi = 2 \operatorname{Re} [r_{i3} \Phi + r_{i4} \Phi' + r_{i5} \Phi''], \\
S_{6\psi} &= A_{66} (\partial_2^2 - \partial_1^2) \psi = 2 \operatorname{Re} [r_{63} \Phi + r_{64} \Phi' + r_{65} \Phi''].
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Здесь принято

$$\begin{aligned}
p_{13} &= r \alpha \omega_2, & p_{14} &= r (\mu_3 + p_{11} \omega_2), & p_{23} &= r \alpha \omega_1, & p_{24} &= r (1 + p_{11} \omega_1), \\
r_{i3} &= C_i r \left[\alpha^2 \omega_1 \omega_2 + \alpha (\partial_1 \partial_2 \omega - \omega_1 \omega_2 \Delta \omega) \right], \\
r_{i4} &= C_i r \left[\alpha (\omega_1 \mu_3 + \omega_2 + 2 \omega_1 \omega_2 p_{11}) + \partial_1 \partial_2 \omega p_{11} + \omega_1 \partial_2 p_{11} + \omega_2 \partial_1 p_{11} + \omega_1 \omega_2 p_{21} \right], \\
r_{i5} &= C_i r \left[\mu_3 + \omega_1 p_{11} \mu + \omega_2 p_{11} + \omega_1 \omega_2 p_{22} \right], \\
r_{63} &= A_{66} r \left[\alpha^2 v + \alpha (\partial_2^2 \omega - \partial_1^2 \omega - \Delta \omega v) \right], \\
r_{64} &= A_{66} r \left[2 \alpha (\omega_2 \mu_3 - \omega_1 + v p_{11}) + (\partial_2^2 \omega - \partial_1^2 \omega) p_{11} + 2 (\omega_2 \partial_2 p_{11} - \omega_1 \partial_1 p_{11}) + v p_{21} \right], \\
r_{65} &= A_{66} r \left[\mu_3^2 - 1 + 2 (\omega_2 \mu_3 - \omega_1) p_{11} + v p_{22} \right], & v &= \omega_2^2 - \omega_1^2, & C_i &= B_{i1} - B_{i2}.
\end{aligned}$$

Представления для перемещений (6.47) и напряжений (6.59) через найденные функции комплексных переменных имеют вид

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2 \operatorname{Re} (p_{11} \varphi_1' + p_{12} \varphi_2' + u_{1\psi}) p_1(z), & u_2 &= 2 \operatorname{Re} (p_{21} \varphi_1' + p_{22} \varphi_2' + u_{2\psi}) p_1(z), \\
u_3 &= 2 \operatorname{Re} [p_{31} \varphi_1 + p_{32} \varphi_2 + (p_{33} \varphi_1'' + p_{34} \varphi_2'')];
\end{aligned} \tag{6.69}$$

$$S_5 = 2 \operatorname{Re} (r_{51} \varphi_1''' + r_{52} \varphi_2''' + S_{5\psi}), \quad S_4 = 2 \operatorname{Re} (r_{41} \varphi_1''' + r_{42} \varphi_2''' + S_{4\psi}), \tag{6.70}$$

$$S_i = 2 \operatorname{Re} (r_{i1} \varphi_1'' + r_{i2} \varphi_2'' + S_{i\psi}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad S_6 = 2 \operatorname{Re} (r_{61} \varphi_1'' + r_{62} \varphi_2'' + S_{6\psi}).$$

В соотношениях (6.69) и (6.70) приняты следующие обозначения

$$p_{1j} = 1, \quad p_{2j} = \mu_j, \quad p_{3j} = -k_0, \quad p_{3,j+2} = [\alpha_1 - \alpha_{13}p_2(z)](1 + \mu_j^2) \quad (j = 1, 2),$$

$$r_{5j} = B_{11}(1 + \mu_j^2), \quad r_{4j} = r_{5j}\mu_j, \quad r_{ij} = B_{i1} + B_{i2}\mu_j^2 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad r_{6j} = 2A_{66}\mu_j \quad (j = 1, 2).$$

При решении граничных задач компоненты перемещений и напряжений $u_{i\psi}$, $S_{5\psi}$, $S_{4\psi}$, $S_{i\psi}$, входящие в соотношения (6.69) и (6.70) следует брать в форме (6.60) или (6.68) в зависимости от формы контура и толщины плиты.

6.2.4. Граничные условия на боковой поверхности. Рассматривается напряженно – деформированное состояние плиты, ослабленной криволинейной полостью. Боковая поверхность плиты представляет собой цилиндр с образующими, нормальными плоским граням. Граничные условия для криволинейного края с нормалью \bar{n} определяются способом нагружения поверхности. Пусть $P(x, y, z)$ – нормальная, а $T(x, y, z)$ и $N(x, y, z)$ – касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то край считается свободным от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивности $\sigma_1^0 = pz$, $\sigma_2^0 = qz$ и $\sigma_6^0 = tz$. Полагаем, что внешний контур находится вдали от полости и их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на боковой поверхности полости примут вид

$$n_1\sigma_1 + n_2\sigma_6 = n_1(P - pz) - n_2(T + tz),$$

$$n_1\sigma_6 + n_2\sigma_2 = n_1(T - tz) + n_2(P - qz), \quad n_1\sigma_5 + n_2\sigma_4 = N. \quad (6.71)$$

Рассмотрен случай, когда внешние усилия представлены в форме

$$P = p_1(z)P_1(x, y), \quad T = p_1(z)T_1(x, y), \quad N = [p_2(h) - p_2(z)]N_1(x, y).$$

Тогда в соответствии с представлениями (6.48), (6.49) и (6.51), условия (6.71) запишутся так

$$n_1S_1 + n_2S_6 = f_1, \quad n_1S_6 + n_2S_2 = f_2, \quad n_1S_5 + n_2S_4 = N_1, \quad (6.72)$$

$$f_1 = n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t), \quad f_2 = n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q).$$

Здесь при усилиях p , q и t функция $p_1(z) = z$.

При подстановке представлений (6.70) в условия (6.72) получается дифференциальная форма граничных условий для определения функций φ и ψ

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{1j} + n_2 r_{6j}) \varphi_j'' + A_{66} \left[2n_1 \partial_1 \partial_2 + n_2 (\partial_2^2 - \partial_1^2) \right] \psi &= f_1, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{6j} + n_2 r_{2j}) \varphi_j'' - A_{66} \left[2n_2 \partial_1 \partial_2 - n_1 (\partial_2^2 - \partial_1^2) \right] \psi &= f_2, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 (n_1 r_{5j} + n_2 r_{4j}) \varphi_j''' + A_{66} k^2 (n_1 \partial_2 - n_2 \partial_1) \psi &= N_1, \end{aligned} \quad (6.73)$$

где принято $\varphi_j'' = \partial^2 \varphi_j / \partial z_j^2$, $\varphi_j''' = \partial^3 \varphi_j / \partial z_j^3$.

Интегрирование граничных условий (6.73), с учетом соотношений (6.27), дает

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 \frac{r_{1j}}{\mu_j} \varphi_j' + 2 A_{66} \partial_1 \psi &= (tx - py) + \int_0^l (P_1 dy + T_1 dx + N_i dx) + c_3 x + c_1, \\ 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^2 r_{2j} \varphi_j' - 2 A_{66} \partial_2 \psi &= (ty - qx) - \int_0^l (T_1 dy - P_1 dx + N_i dy) - c_3 y + c_2, \\ 2 \operatorname{Re} \left[\frac{r_{51}}{\mu_1} \varphi_1'' + \frac{r_{22}}{\mu_2} \varphi_2'' \right] + A_{66} k^2 \psi &= N_i + c_3, \quad N_i = \int_0^l N_1 dl. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Граничные условия (6.72) для определения функций $\varphi_j(z_j)$ и ψ можно использовать в формах (6.73) или (6.74).

6.2.5. Численные исследования. В качестве примера рассмотрен случай, когда деформация плиты осуществляется изгибающими усилиями $\sigma_1^0 = zp$, действующими на бесконечности. Плита ослаблена полостью в виде цилиндра эллиптического сечения с образующими, нормальными плоским граням.

Функции $\varphi_j'(z_j)$ ($j = 1, 2$) и $\Phi(z_3)$ представлены в виде рядов

$$\varphi'_j(z_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{nj}}{\zeta_j^n}, \quad \Phi(z_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n3}}{\zeta_3^{n+1}}. \quad (6.75)$$

Для получения линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (6.75) и (6.60) необходимо функции, входящие в условия (6.74), переразложить в ряды по степеням переменной σ . Подставляя эти переразложения в граничные условия (6.74) и выделяя выражения при одинаковых степенях переменной σ , получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов функций (6.75) и (6.60).

При численном исследовании напряженно - деформированного состояния плиты с эллиптической полостью использованы безразмерные величины. Они получаются делением линейных величин: координат x , y , полуосей эллипса a и b , полутолщины плиты h , перемещений u_α на характерный линейный параметр. В качестве такого параметра использовалась величина $R = \max(a, b)$. Безразмерная координата z получается делением исходной координаты z на полутолщину плиты h . Тогда переменная z будет изменяться на отрезке $[-1, 1]$.

Напряжения

$$\sigma_n = z(n_1^2 S_1 + 2n_1 n_2 S_6 + n_2^2 S_2) / h, \quad \tau_{n\theta} = z((S_2 - S_1)n_1 n_2 + S_6(n_1^2 - n_2^2)) / h,$$

$$\tau_{nz} = (h - z^2 / h)(n_1 S_5 + n_2 S_4) / 2$$

при заданной деформации плиты, как следует из условий (6.72), на граничном контуре равны нулю. Наибольший интерес представляют величины, определяющие концентрацию напряжений на контуре полости

$$\sigma_\theta = \frac{z}{h} S_\theta = \frac{z}{h} (n_2^2 S_1 - 2n_1 n_2 S_6 + n_1^2 S_2),$$

$$\tau_{z\theta} = P_2(z) S_{z\theta} = P_2(z) (-n_2 S_5 + n_1 S_4), \quad P_2(z) = (h - z^2 / h) / 2.$$

Максимального значения величины S_θ / p достигают на контуре при $\theta = \pi / 2$ и $\theta = 3\pi / 2$, а минимального при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Величины $|S_{z\theta} / p|$ для

кругового контура максимального значения достигают при $\theta = \pm\pi/4$ и $\theta = \pm3\pi/4$. Для эллиптического контура этот максимум сдвигается в сторону вершины с большей кривизной.

Упругие постоянные материалов, для которых проводились исследования, даны в таблице 6.2 [288]. Изотропный материал является модельным с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$.

Таблица 6.2

Материал	A_{11} , ГПа	A_{12} , ГПа	A_{13} , ГПа	A_{33} , ГПа	A_{44} , ГПа
Изотропный	120	60	60	120	30
Ceramic PZT-4	139	78	74	115	25,6
InSe	73	27	30	36	12

В результате проведения численных исследований были установлены следующие закономерности:

1) использование функций Бесселя при интегрировании уравнения (6.57) имеет ограничение относительно полуосей эллипса. Для всех рассмотренных материалов и толщин предел этого соотношения приблизительно равен $2/3$ (или $3/2$);

2) использование методики интегрирования уравнения Гельмгольца с малым параметром при старшей производной в первом приближении позволяет определить отношение тонкая – толстая плита. Так, сравнение результатов, полученных по двум методикам, для круговой полости показывает, что тонкой можно считать плиту, у которой $h/a = 0.25$.

В качестве примера в Таблице 6.3 приведены значения максимальных напряжений S_{θ}^i / p , $S_{z\theta}^i / p$, возникающих на контуре круговой полости, где $i = 1$ соответствует решению уравнения (6.57) через функции Бесселя, а $i = 2$ – методике интегрирования уравнения (6.62) с малым параметром при старшей производной.

Таблица 6.3

Материал	$2h = 0.01$				$2h = 0.25$				$2h = 1$		$2h = 10$	
	S_{θ}^1	S_{θ}^2	$S_{z\theta}^1$	$S_{z\theta}^2$	S_{θ}^1	S_{θ}^2	$S_{z\theta}^1$	$S_{z\theta}^2$	S_{θ}^1	$S_{z\theta}^1$	S_{θ}^1	$S_{z\theta}^1$
Изотропный	1.81	1.81	0.52	0.52	1.93	1.93	0.49	0.52	2.242	0.414	2.918	0.105
Ceramic PZT-4	1.81	1.81	0.48	0.47	1.94	1.92	0.45	0.37	2.271	0.371	2.928	0.089
InSe	1.69	1.69	0.41	0.41	1.86	1.81	0.39	0.29	2.244	0.319	2.936	0.071

Результаты, полученные для материала InSe, хорошо согласуются с результатами, полученными по трехмерной теории [272].

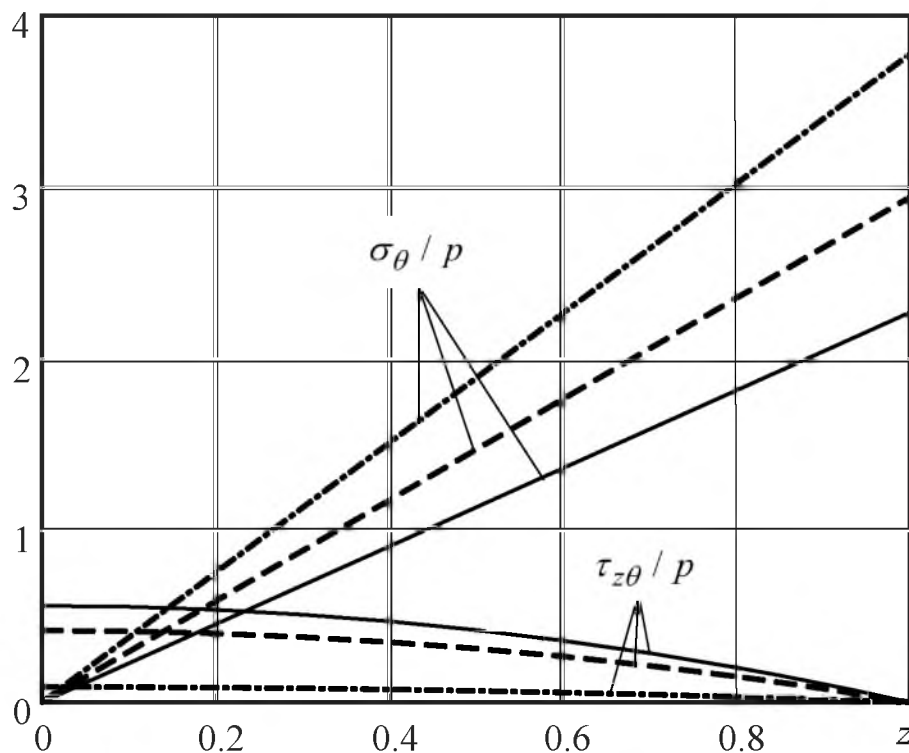


Рис. 6.5

На рисунке 6.5 представлены графики распределения максимальных напряжений σ_{θ} / ρ и $\tau_{z\theta} / \rho$ по толщине плиты. Соотношение полуосей эллиптической полости $a/b = 0.7$, материал плиты – Ceramic PZT-4. Сплошная линия соответствует толщине $h/b = 0.1$, штриховая – $h/b = 1$, штрихпунктирная – $h/b = 10$.

Таблица 6.4

$\frac{a}{b}$	Изотропный		Ceramic PZT-4		InSe	
	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$
0.25	3.710	0.884	3.640	0.785	3.083	0.623
	0.148	-0.884	0.144	-0.785	0.246	-0.623
0.5	2.722	0.684	2.718	0.618	2.462	0.512
	0.150	-0.684	0.145	-0.618	0.248	-0.512
0.75	2.155	0.562	2.161	0.510	2.017	0.432
	0.149	-0.562	0.145	-0.510	0.248	-0.432
1	1.852	0.490	1.856	0.446	1.751	0.379
	0.148	-0.490	0.144	-0.446	0.249	-0.379
1.33	1.638	0.421	1.642	0.383	1.564	0.324
	0.133	-0.421	0.130	-0.383	0.237	-0.324
2	1.425	0.342	1.427	0.309	1.376	0.256
	0.139	-0.342	0.141	-0.309	0.269	-0.256
4	1.213	0.221	1.214	0.196	1.188	0.156
	0.323	-0.221	0.340	-0.196	0.479	-0.156

В таблице 6.4 представлены результаты численных исследований для тонкой плиты ($h = 0.1$) с эллиптической полостью в зависимости от соотношения полуосей и материала. Верхняя строка в ячейке соответствует максимальному значению, а нижняя – минимальному.

Как видно из таблицы 6.4, наибольшие напряжения возникают в случае, когда эллипс вытянут вдоль оси, перпендикулярной направлению действия изгибающих усилий.

6.3. Уточненная модель изгиба ортотропных плит

6.3.1. Основные соотношения уточненной теории изгиба ортотропных плит. Рассматривается ортотропная плита, имеющая толщину $2h$ и отнесенная к декартовой системе координат $Oxuz$. Оси Ox и Oy расположены в срединной плоскости плиты, а Oz – нормальна к этой плоскости. Для построения уточненной теории изгиба ортотропных плит используются уравнения обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + A_{13}\varepsilon_3, & \sigma_4 &= A_{44}\varepsilon_4, \\
\sigma_2 &= A_{21}\varepsilon_1 + A_{22}\varepsilon_2 + A_{23}\varepsilon_3, & \sigma_5 &= A_{55}\varepsilon_5, \\
\sigma_3 &= A_{31}\varepsilon_1 + A_{32}\varepsilon_2 + A_{33}\varepsilon_3, & \sigma_6 &= A_{66}\varepsilon_6,
\end{aligned} \tag{6.76}$$

геометрические соотношения (3.5) и трехмерные уравнения равновесия (3.4) без учета объемных сил.

Представление для перемещений выбираются в виде

$$u_1 = p_1 \partial_1 \varphi_1(x, y), \quad u_2 = p_1 \partial_2 \varphi_2(x, y), \quad u_3 = w_0(x, y) + p_2 w(x, y). \tag{6.77}$$

где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $w_0(x, y)$, $w(x, y)$ – подлежащие определению функции.

Уравнения закона Гука (6.76) с учетом соотношений (3.5) и (6.77), дают выражения для напряжений в форме

$$\sigma_1 = p_1 s_1, \quad \sigma_2 = p_1 s_2, \quad \sigma_3 = p_1 s_3, \quad \sigma_6 = p_1 s_6; \tag{6.78}$$

$$\sigma_4 = A_{44}(\partial_2 w_0 + p_2 \partial_2 w + p_0 \partial_2 \varphi_2), \quad \sigma_5 = A_{55}(\partial_1 w_0 + p_2 \partial_1 w + p_0 \partial_1 \varphi_1). \tag{6.79}$$

где приняты обозначения

$$s_i = A_{i1} \partial_1^2 \varphi_1 + A_{i2} \partial_2^2 \varphi_2 + A_{i3} w \quad (i = \overline{1, 3}), \quad s_6 = A_{66} \partial_1 \partial_2 (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Выражения для напряжений σ_3 , σ_4 и σ_5 можно также найти, удовлетворяя уравнениям равновесия (3.4)

$$\sigma_4 = P_2(z) S_4, \quad \sigma_5 = P_2(z) S_5, \quad \sigma_3 = [p_3(z) - p_2(h)z] S_3, \tag{6.80}$$

где

$$\begin{aligned}
S_5 &= \partial_1 s_1 + \partial_2 s_6, & S_4 &= \partial_1 s_6 + \partial_2 s_2, & S_3 &= \partial_1 S_5 + \partial_2 S_4, \\
p_3 &= \int p_2(z) dz, & P_2(z) &= [p_2(h) - p_2(z)].
\end{aligned}$$

Представления для напряжений σ_4 и σ_5 в представлениях (6.80) удовлетворяют однородным граничным условиям на плоских гранях плиты: $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ при $z = \pm h$. Однако, эти представления противоречат соотношениям (6.79). Корректный результат можно получить, если использовать

предположения, предложенные в п.п. 6.2.1: $\sigma_3 = 0$ и поперечные усилия, полученные интегрированием соотношений (6.79) и (6.80) для напряжений σ_4 и σ_5 , равны.

Реализация этих предположений приводит к дифференциальным уравнениям, описывающим изгиб плит:

$$s_3 = A_{31}\partial_1^2\varphi_1 + A_{32}\partial_2^2\varphi_2 + A_{33}w = 0; \quad (6.81)$$

$$S_3 = \left[A_{41}\partial_1^4 + c_{12}\partial_1^2\partial_2^2 \right] \varphi_1 + \left[c_{12}\partial_1^2\partial_2^2 + A_{22}\partial_2^4 \right] \varphi_2 + D_2w = 0; \quad (6.82)$$

$$Q_5 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_5 dz = A_{55} (\partial_1 w_0 + k_0 \partial_1 \varphi_1 + k_1 \partial_1 w) = k_2 S_5,$$

$$Q_4 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_4 dz = A_{44} (\partial_2 w_0 + k_0 \partial_2 \varphi_2 + k_1 \partial_2 w) = k_2 S_4; \quad (6.83)$$

где

$$k_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_0 dz, \quad k_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p_2 dz, \quad k_2 = p_2(h) - k_1,$$

$$D_2 = A_{31}\partial_1^2 + A_{32}\partial_2^2, \quad c_{12} = A_{12} + 2A_{66}.$$

Таким образом, для определения функций φ_1 , φ_2 , w_0 и w получена система уравнений (6.81) – (6.83). Для удовлетворения уравнениям (6.81) и (6.82) функции φ_1 , φ_2 и w представляются через произвольную функцию $F(x, y)$ следующим образом

$$\varphi_1 = G_2 \partial_2^2 F, \quad \varphi_2 = R_2 \partial_1^2 F, \quad w = -\frac{1}{A_{33}} (A_{31}G_2 + A_{32}R_2) \partial_1^2 \partial_2^2 F,$$

где

$$G_2 = -\left(D_{12}\partial_1^2 + B_{22}\partial_2^2 \right), \quad R_2 = B_{11}\partial_1^2 + D_{12}\partial_2^2, \quad D_{12} = B_{12} + 2A_{66},$$

$$B_{ik} = A_{ik} - \frac{A_{i3}A_{3k}}{A_{33}} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Из уравнений (6.83) находится дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $F(x, y)$ и представление для функции w_0 :

$$\left(D_4 L_2 - \lambda^2 P_4\right) F = 0,$$

$$w_0 = k_0 B_{22} \left(\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2\right) \partial_2^2 F - k_2 \frac{B_{22} A_{66}}{A_{55}} D_4 \partial_2^2 F + k_1 B_{22} A_{66} \left(q_3 \partial_2^2 + q_4 \partial_1^2\right) \partial_1^2 \partial_2^2 F,$$

где

$$D_4 = \partial_2^4 + 2q_0 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, \quad P_4 = \partial_2^4 + 2q_1 \partial_2^2 \partial_1^2 + q_2 \partial_1^4, \quad L_2 = \partial_2^2 + q_5 \partial_1^2,$$

$$\lambda^2 = A_{55} k_0 / (A_{66} k_2), \quad q_0 = (B_{11} - B_{12} q_1) / (2A_{66}), \quad q_1 = D_{12} / B_{22}, \quad q_2 = B_{11} / B_{22},$$

$$q_3 = (A_{32} q_1 - A_{31}) / (A_{33} A_{66}), \quad q_4 = (A_{32} q_2 - A_{31} q_1) / (A_{33} A_{66}), \quad q_5 = A_{55} / A_{44}.$$

Представления для перемещений (6.77) и напряжений (6.78), (6.80) можно записать через произвольную функцию $\Phi(x, y) = B_{22} A_{66} \partial_1 \partial_2 F$

$$u_1 = -\frac{p_1}{A_{66}} \left(\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2\right) \partial_2 \Phi, \quad u_2 = \frac{p_1}{A_{66}} \left(q_1 \partial_2^2 + q_2 \partial_1^2\right) \partial_1 \Phi,$$

$$u_3 = \frac{k_0}{A_{66}} \left(\partial_2^2 + q_1 \partial_1^2\right) \frac{\partial_2}{\partial_1} \Phi - k_2 \frac{D_4}{A_{55}} \frac{\partial_2}{\partial_1} \Phi + (k_1 - p_2) \left(q_3 \partial_2^2 + q_4 \partial_1^2\right) \partial_1 \partial_2 \Phi; \quad (6.84)$$

$$\sigma_1 = -2p_1 \left(q_0 \partial_2^2 + q_2 \partial_1^2\right) \partial_1 \partial_2 \Phi, \quad \sigma_2 = 2p_1 \left(\partial_2^2 + q_0 \partial_1^2\right) \partial_1 \partial_2 \Phi,$$

$$\sigma_6 = p_1 \left(q_2 \partial_1^4 - \partial_2^4\right) \Phi, \quad \sigma_5 = -P_2(z) D_4 \partial_2 \Phi, \quad \sigma_4 = P_2(z) D_4 \partial_1 \Phi; \quad (6.85)$$

$$\left(D_4 L_2 - \lambda^2 P_4\right) \Phi = 0. \quad (6.86)$$

Решение задачи изгиба приведено к нахождению функции $\Phi(x, y)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению шестого порядка (6.86) и граничным условиям на боковой поверхности плиты.

6.3.2. Методика построения приближенного решения для разрешающего уравнения. Представления общего решения уравнения (6.86) найти не удастся. В случае, когда плита изготовлена из изотропного или трансверсально-изотропного материала, операторы P_4 и D_4 становятся бигармоническими. Уравнение (6.86) в

этом случае распадается на основное бигармоническое уравнение и уравнение Гельмгольца, которое относится к типу краевого эффекта. Здесь предлагается для случая тонких и толстых плит провести разделение этого уравнения на основное уравнение четвертого порядка и уравнение типа Гельмгольца. Для этого воспользуемся методом штрафов [168]. Этот метод в применении к уравнению (6.86) состоит в замене оператора D_4 на P_4 или наоборот. Это достигается путем добавления к уравнению дополнительного слагаемого, умноженного на малый параметр. Параметр $\lambda^2 = A_{55}k_0 / (A_{66}k_2)$ имеет порядок h^{-2} . Для больших толщин плиты этот параметр может быть сколь угодно малым. В этом случае добавление к уравнению (6.86) малой величины $\lambda^2 2(q_1 - q_0) \partial_1^2 \partial_2^2 \Phi$ приводит его к виду

$$D_4(L_2 - \lambda^2) \Phi = 0. \quad (6.87)$$

Для малых толщин плиты этот параметр может быть сколь угодно большим. Тогда малый параметр $1/\lambda^2$ будет при операторе шестого порядка. Добавление к уравнению (6.86) малой величины $\lambda^{-2} 2L_2(q_1 - q_0) \partial_1^2 \partial_2^2 \Phi$ приводит его к виду

$$P_4(L_2 - \lambda^2) \Phi = 0. \quad (6.88)$$

Для решения уравнений вида (6.87), (6.88) можно использовать теорему Боджио [219], согласно которой, общим решением уравнения $G_1 G_2 \dots G_n \Phi = 0$, где G_1, \dots, G_n – некоторые операторы, является функция $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$. При этом, функции Φ_k удовлетворяют уравнениям $G_k \Phi_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$).

Далее будет рассматриваться уравнение (6.88). Его можно использовать для определения напряженно деформированного состояния тонких плит. Общим решением этого уравнения является функция

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (6.89)$$

где величины Φ_k удовлетворяют уравнениям

$$P_4\Phi_1 = 0; \quad (6.90)$$

$$\left(L_2 - \lambda^2\right)\Phi_2 = 0. \quad (6.91)$$

Общим действительным решением уравнения (6.90) является выражение [157]

$$\Phi_1 = 2\operatorname{Re}\left[F_1(z_1) + F_2(z_2)\right], \quad (6.92)$$

где $F_j(z_j)$ – произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$; параметры μ_j являются корнями уравнения

$$P_4(\mu) = \mu^4 + 2q_1\mu^2 + q_2 = 0.$$

Для получения приближенного решения метагармонического уравнения (6.91) здесь предлагается использование уравнения границы области, в которой определяется это решение. Способы построения таких уравнений для практически произвольных областей, с помощью методов алгебры логики и аппарата R -функций, разработаны в работах В.Л. Рвачева и его учеников [245]. Пусть Ω есть некоторая область, граница $\partial\Omega$ которой описывается уравнением $\omega = 0$. Полагается, что для производных первого порядка выполняется следующее условие

$$\omega_2^2 + q_5\omega_1^2 = 1 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (6.93)$$

где $\omega_1 = \partial_1\omega$, $\omega_2 = \partial_2\omega$.

Пусть функция w_1 удовлетворяет условиям

$$w_1 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad w_1 > 0 \quad \text{внутри } \Omega; \quad f = q_5(\partial_1 w_1)^2 + (\partial_2 w_1)^2 > 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (6.94)$$

Уравнение граничной линии, удовлетворяющее условию (6.93), можно представить в виде

$$\omega = w_1 / \sqrt{f}, \quad \text{если } f \neq 0 \quad \text{в } \Omega,$$

или в виде

$$\omega = w_1 / \sqrt{w_1^2 + f}, \text{ если } f = 0 \text{ в } \Omega.$$

Именно такая функция будет использована при построении приближенного решения уравнения (6.91) в окрестности граничной линии.

С целью упрощения последующих выкладок считается, что в окрестности любой заданной точки (x_0, y_0) на граничной линии, функция $w_1(x, y)$ аппроксимирована линейной функцией. Тогда в этой точке производные ω_1 и ω_2 будут постоянными величинами, а производные второго и последующих порядков будут равны нулю.

Пример. Функция $w_1 = (x/a)^2 + (y/b)^2 - 1$, для области Ω , состоящей из внешности эллиптического контура с полуосями a и b , удовлетворяет условиям (6.94). Тогда функция

$$\omega = \frac{w_1}{2\sqrt{q_5 x^2/a^4 + y^2/b^4}},$$

является уравнением области Ω , а на граничной линии имеет место равенство (6.93).

Параметр $\lambda^2 = A_{55}k_0 / (A_{66}k_2)$, входящий в уравнение (6.91), имеет порядок h^{-2} . Для малых толщин плиты этот параметр может быть сколь угодно большим. Уравнение (6.91) можно записать в виде

$$\left[\varepsilon^2 (\partial_2^2 + q_5 \partial_1^2) - 1 \right] \Phi_2 = 0, \quad (6.95)$$

где $\varepsilon^2 = 1/\lambda^2$ – малый параметр при старших производных.

Метод решения уравнения (6.95) основан на использовании уравнения границы области и пограничного слоя. Приближенное решение уравнения (6.95) представляется в виде произведения

$$\Phi_2 = r(x, y) \Psi(x, y). \quad (6.96)$$

Функции r и Ψ определяются в виде разложений в области краевого эффекта

$$r = \exp(\alpha\omega), \quad \Psi = \psi_0 + \psi_1 \omega + \psi_2 \frac{\omega^2}{2}.$$

Здесь α – постоянная величина, ψ_0, ψ_1, ψ_2 – функции переменной $x + \mu y$, подлежащие определению в процессе решения уравнения (6.95). После подстановки представления (6.96) в уравнение (6.95) в результате математических преобразований получаются уравнения для функций ψ_i

$$\partial_2^2 \psi_0 + q_5 \partial_1^2 \psi_0 = 0; \quad (6.97)$$

$$\psi_1 = -(\omega_2 \partial_2 \psi_0 + q_5 \omega_1 \partial_1 \psi_0), \quad \psi_2 = -2(\omega_2 \partial_2 \psi_1 + q_5 \omega_1 \partial_1 \psi_1). \quad (6.98)$$

Решение уравнения (6.97) и представления для функций (6.98) будут такими

$$\psi_0 = 2 \operatorname{Re} F_3(z_3), \quad \psi_1 = 2 \operatorname{Re} [r_1 F_3'(z_3)], \quad \psi_2 = 2 \operatorname{Re} [r_2 F_3''(z_3)], \quad (6.99)$$

где принято

$$r_1 = -(\omega_2 \mu_3 + q_5 \omega_1), \quad r_2 = 2r_1^2, \quad \mu_3 = i\sqrt{q_5}, \quad F_3' = dF_3 / dz_3, \quad F_3'' = dF_3' / dz_3, \quad (6.100)$$

$F_3(z_3)$ – произвольная функция обобщенной комплексной переменной $z_3 = x + \mu_3 y$.

Представление (6.96) решения уравнения (6.95) будет таким

$$\Phi_2 = 2 \operatorname{Re} \left[F_3 + \omega r_1 F_3' + \left(\omega^2 / 2 \right) r_2 F_3'' \right] \exp(\alpha\omega). \quad (6.101)$$

Это решение, при значениях параметра $\alpha = \pm \lambda$ и величин (6.100), удовлетворяет уравнению (6.91) в окрестности граничной линии.

Таким образом, общее решение (6.89) уравнения (6.88) представляется в виде суммы функций (6.92) и (6.101)

$$\Phi = 2 \operatorname{Re} \left[F_1 + F_2 + \left(F_3 + \omega r_1 F_3' + \left(\omega^2 / 2 \right) r_2 F_3'' \right) \exp(\alpha\omega) \right]. \quad (6.102)$$

Функции $F_j(z_j)$ находятся из граничных условий на боковой поверхности полости. После их определения перемещения и напряжения определяются по формулам (6.84) и (6.85) соответственно.

6.3.3. Граничные условия на боковой поверхности. Граничные условия для криволинейного края с нормалью \bar{n} определяются способом закрепления и нагружения поверхности. Пусть $P(x, y, z)$ – нормальная, а $T(x, y, z)$ и $N(x, y, z)$ – касательные составляющие внешних сил, приложенных к боковой поверхности полости. Если $P = T = N = 0$, то край считается свободным от усилий. На внешней боковой поверхности также могут быть заданы усилия интенсивности $\sigma_1^0 = pp_1(z)$, $\sigma_2^0 = qp_1(z)$ и $\sigma_6^0 = tp_1(z)$. Полагается, что внешний контур находится вдали от полости и их взаимным влиянием можно пренебречь. Тогда граничные условия на боковой поверхности полости примут вид

$$n_1\sigma_1 + n_2\sigma_6 = n_1(P - pz) - n_2(T + tz), \quad (6.102)$$

$$n_1\sigma_6 + n_2\sigma_2 = n_1(T - tz) + n_2(P - qz), \quad n_1\sigma_5 + n_2\sigma_4 = N.$$

Рассматривается случай, когда внешние усилия представлены в форме

$$P = p_1(z)P_1(x, y), \quad T = p_1(z)T_1(x, y), \quad N = [p_2(h) - p_2(z)]N_1(x, y).$$

Тогда в соответствии с представлениями (6.78) и (6.80) условия (6.102) запишутся так

$$n_1s_1 + n_2s_6 = f_1, \quad n_1s_6 + n_2s_2 = f_2, \quad n_1S_5 + n_2S_4 = N_1, \quad (6.103)$$

где

$$f_1 = n_1(P_1 - p) - n_2(T_1 + t), \quad f_2 = n_1(T_1 - t) + n_2(P_1 - q).$$

Интегрирование условий (6.103) приводит их к виду

$$2(q_0\partial_2^2 + q_2\partial_1^2)\partial_1\Phi = -\int_0^s \left(f_1 - \frac{dx}{ds}(N_i + c_3) \right) ds + c_1,$$

$$2(q_0\partial_1^2 + \partial_2^2)\partial_2\Phi = -\int_0^s \left(f_2 - \frac{dy}{ds}(N_i + c_3) \right) ds + c_2, \quad (6.104)$$

$$D_4\Phi = N_i + c_3, \quad N_i = -\int_0^s N_1 ds.$$

Граничные условия (6.104) используются для определения функции $\Phi(x, y)$.

6.3.4. Численные исследования. Исследования напряженного состояния были проведены для случая нагружения бесконечной плиты нагрузкой $\sigma_1^0 = pz/h$ $\sigma_2^0 = \sigma_6^0 = 0$. Эллиптическая полость с полуосями a и b , отложенными по осям x и y соответственно, свободна от усилий. Технические постоянные материалов, из которых изготовлены исследуемые плиты, даны в таблице 6.5.

Таблица 6.5

Материал	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{31}	ν_{23}	ν_{12}
<i>O</i>	4.76	2.07	1.45	0.531	0.501	0.434	0.099	0.325	0.149
<i>И</i>	4.76	4.76	4.76	2.071	2.071	2.071	0.149	0.149	0.149

Константы приведены с точностью до 10^4 МПа. Материал *O* – ортотропный материал (волокнистый стеклопластик ВМ-1 [19]). Материал *И* – модельный изотропный материал.

В таблице 6.6 даны значения максимальных и минимальных напряжений $s_\theta = \sigma_\theta / (pz/h)$ при $z = \pm h$ и максимальных по модулю значений напряжений $s_{z\theta} = |\tau_{z\theta} / P_2|$, возникающих в срединной плоскости в зависимости от соотношения полуосей a/b . Результаты приведены для случая $h = 0.01b$.

Таблица 6.6

Материал	$a/b = 0.5$			$a/b = 1$			$a/b = 2$		
	max s_θ	min s_θ	$s_{z\theta}$	max s_θ	min s_θ	$s_{z\theta}$	max s_θ	min s_θ	$s_{z\theta}$
<i>И</i>	2.46	0.27	0.81	1.73	0.27	0.54	1.36	0.27	0.41
<i>O</i>	3.48	0.37	0.92	2.24	0.37	0.58	1.62	0.34	0.39

Сравнение результатов, полученных по предложенной методике для тонких плит и по классической теории показало их полное совпадение. Однако,

классическая теория не позволяет сделать выводы о поведении касательных напряжений $\tau_{z\theta}$, которые в некоторых случаях составляют около 30% от максимальных напряжений σ_θ .

Исследования позволяют также сделать следующие выводы:

- наличие в материале плиты ортотропных свойств приводит к увеличению концентрации напряжений вблизи полости;
- наибольшие напряжения s_θ возникают в случае, когда эллипс вытянут вдоль оси, перпендикулярной направлению действия изгибающих усилий;
- с уменьшением толщины напряжения $s_{z\theta}$ растут, стремясь к некоторому конечному значению, а не уменьшаются до нуля, как в прикладной теории. С ростом толщины эти напряжения стремятся к нулю.

6.4. Выводы по разделу 6

В разделе представлены новые модели уточненных теорий изгиба изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит, учитывающие деформацию поперечного сдвига. Построены соотношения для перемещений, напряжений, моментов и перерезывающих сил, а также получена система дифференциальных уравнений шестого порядка. Для случаев изотропной и трансверсально-изотропной плит дана методика нахождения общих решений соответствующих бигармонического и метагармонического уравнений. Показан способ удовлетворения граничным условиям. Для случая ортотропной плиты получено дифференциальное уравнение шестого порядка, которое не разделяется на два независимых уравнения. При помощи метода малого параметра уравнение разделено на два уравнения четвертого и второго порядков. Представлены результаты численных исследований напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптической полостью.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [194, 195, 196, 197, 204, 205, 208, 212, 214, 275].

РАЗДЕЛ 7

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ
ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛИТ В РАМКАХ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

7.1. Изгиб изотропных вязкоупругих плит

При рассмотрении вязкоупругого изгиба уравнения закона Гука (6.2) следует заменить уравнениями состояния вида (2.25). Рассмотрим задачу определения значений действия интегральных операторов на единицу, входящих в уравнения состояния для случая изгиба изотропной плиты. Из упругих постоянных матриц a_{mn} или A_{mn} формируются матрицы интегральных операторов \bar{a}_{mn} или \bar{A}_{mn} . Наиболее предпочтительной для формирования является матрица a_{mn} изотропного материала с элементами, отличными от нуля

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1/E, \quad a_{44} = a_{55} = a_{66} = 1/G = 2(1+\nu)/E, \\ a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = -\nu/E. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Элементы обратной матрицы A_{mn} более сложным образом зависят от технических упругих постоянных. Поэтому для определения элементов матрицы \bar{A}_{mn} можно воспользоваться соотношениями (2.72).

В работе [253] приведены опытные данные об изменении коэффициента Пуассона во времени для алюминиевого и медного образцов. Оператор $\bar{\nu}$ аппроксимировался с помощью дробно-экспоненциального оператора с ядром Ю.Н. Работнова (2.44). Упругие и реологические характеристики для алюминия и меди даны соотношениями (2.60) и (2.61).

Исходный оператор (2.44), а также реологические данные дают возможность определить экспериментальную кривую ползучести $p_\nu(t)$, то есть

$$\bar{\nu} \cdot 1 = \nu \left[1 + \lambda_\nu \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_\nu) \cdot 1 \right] = \nu p_\nu(t). \quad (7.2)$$

Кривая ползучести $p_v(t)$ является исходным материалом для построения элементов матрицы состояния \bar{a}_{mn} .

Процедура получения элементов $(1/\bar{E}) \cdot 1$, $(\bar{\nu}/\bar{E}) \cdot 1$, $(1/\bar{G}) \cdot 1$ описана в подразделе 2.5 (формулы (2.84) – (2.90)).

Таким образом, по известной из эксперимента функции ползучести $p_v(t)$ для коэффициента Пуассона определены значения матрицы состояния $\bar{a}_{mn} \cdot 1$. При этом, предложенный способ не требует построения ядер специального вида, а использует непосредственно таблицу экспериментальных данных. Для определения значений матрицы $\bar{A}_{mn} \cdot 1$ уравнений состояния следует воспользоваться соотношениями (2.72), где в качестве исходных данных используется матрица

$$\bar{a}_{mn} \cdot 1 = a_{mn} \left(1 + p_{mn}^* \cdot 1\right) = a_{mn} p_{mn}(t) = P_{mn}(t) = \mathbf{P}(t). \quad (7.3)$$

Временные матрицы позволяют решать задачи вязкоупругости в любой момент времени как обычные задачи теории упругости.

В таблице 7.1 приведены результаты численных исследований вязкоупругого поведения алюминиевой плиты с круговой или эллиптической полостью в случае цилиндрического изгиба усилиями $\sigma_x^0 = zp$. Исследования проведены для различных относительных толщин плиты $2h$ в моменты времени $t = 0$ ч. (упругое состояние) и $t = 300$ ч., когда установилось стационарное состояние [253]. Своего максимального значения величины S_θ / p достигают на контуре при $\theta = \pi / 2$ и $\theta = 3\pi / 2$, а минимального при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Величины $|S_{z\theta} / p|$ для кругового контура максимального значения достигают при $\theta = \pm\pi / 4$ и $\theta = \pm 3\pi / 4$. Для эллиптического контура этот максимум сдвигается в сторону вершины с большей кривизной. Для каждого значения времени t приведены две строки данных. В верхней строке отражены максимальные, а в нижней – минимальные значения концентрации напряжений.

Таблица 7.1

$2h$	0.1		1		10	
	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$
$a = 1, b = 0.75$						
$t = 0$	1.577	0.434	1.764	0.412	2.358	0.153
	0.231	-0.434	-0.083	-0.412	-0.818	-0.153
$t = 300$	1.632	0.408	1.821	0.379	2.376	0.133
	0.157	-0.408	-0.157	-0.379	-0.842	-0.133
$a = 1, b = 1$						
$t = 0$	1.769	0.502	2.017	0.484	2.781	0.197
	0.231	-0.502	-0.017	-0.484	-0.781	-0.197
$t = 300$	1.843	0.472	2.093	0.446	2.809	0.172
	0.157	-0.472	-0.093	-0.446	-0.809	-0.172
$a = 0.75, b = 1$						
$t = 0$	2.026	0.578	2.441	0.549	3.425	0.204
	0.231	-0.578	-0.018	-0.549	-0.810	-0.204
$t = 300$	2.124	0.543	2.542	0.505	3.456	0.178
	0.157	-0.543	-0.095	-0.505	-0.835	-0.178

Анализ численных исследований и данных таблицы 7.1 позволяет сформулировать следующие выводы.

1) Значения максимальных напряжений S_{θ} / p незначительно увеличиваются с течением времени и для рассмотренных случаев их рост составил не более 5%. Причем, с увеличением толщины разница между напряжениями в стационарном состоянии и начальном уменьшается.

2) Минимальные напряжения S_{θ} / p для тонких плит уменьшаются со временем приблизительно на 50%, а для толстых плит становятся отрицательными и растут по абсолютному значению, причем с увеличением толщины этот рост значительно сокращается.

3) Напряжения $S_{z\theta} / p$ с течением времени незначительно уменьшаются и это уменьшение также сокращается с ростом толщины плиты.

7.2. Изгиб трансверсально-изотропных вязкоупругих плит

Рассмотрим задачу определения значений интегральных операторов, входящих в уравнения состояния для случая изгиба трансверсально-изотропной плиты. Отличные от нуля элементы матрицы коэффициентов деформации a_{mn} в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} = 1/E_1, \quad a_{12} = a_{21} = -\nu_1/E_1, \quad a_{33} = 1/E_2, \quad a_{66} = 1/G_1 = 2(1+\nu_1)/E_1, \\ a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = -\nu_2/E_2, \quad a_{44} = a_{55} = 1/G_2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь E_1, E_2 – модули Юнга для растяжения - сжатия в направлении плоскости изотропии и нормальном к ней; ν_1 – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости, а ν_2 – при растяжении в направлении нормальном к плоскости изотропии; G_1, G_2 – модули сдвига для плоскости изотропии и нормальной к ней.

В работе [112] приведены результаты экспериментов на ползучесть трансверсально-вязкоупругого полимерного композита. Элементы вязкоупругой матрицы $1/\bar{E}_1, 1/\bar{E}_2$ и $1/\bar{G}_2$ аппроксимировались с помощью операторов

$$\frac{1}{\bar{E}_i} = \frac{1}{E_i} \left[1 + \lambda_i \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_i) \right], \quad \frac{1}{\bar{G}_2} = \frac{1}{G_2} \left[1 + \lambda_{G2} \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_{G2}) \right], \quad (7.5)$$

где интегральные операторы $\mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_i)$ содержат ядро Ю.Н. Работнова.

Упругие и реологические характеристики указанного материала следующие

$$\begin{aligned} E_1 = 17,4 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_1 = 0,023 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_1 = 0,095 c^{-(1+\alpha)}, \quad \nu_1 = 0,115, \\ E_2 = 12,3 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_2 = 0,057 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_2 = 0,115 c^{-(1+\alpha)}, \quad \nu_2 = 0,099, \quad (7.6) \\ G_2 = 5,99 \cdot 10^3 \text{ МПа}, \quad \lambda_{G2} = 0,112 c^{-(1+\alpha)}, \quad \beta_{G2} = 0,032 c^{-(1+\alpha)}, \quad \alpha = -0,7. \end{aligned}$$

На примере этих данных покажем два способа построения матриц уравнений состояния \bar{a}_{mn} .

Первый способ основан на использовании интегральных операторов с дробно-экспоненциальным ядром Ю.Н. Работнова. Исходные операторы (7.5) и данные соотношений (7.6) позволяют вычислить кривые ползучести элементов матрицы (7.4)

$$\bar{a}_{11} \cdot 1 = \bar{a}_{22} \cdot 1 = \frac{1}{\bar{E}_1} \cdot 1, \quad \bar{a}_{33} \cdot 1 = \frac{1}{\bar{E}_2} \cdot 1, \quad \bar{a}_{44} \cdot 1 = \bar{a}_{55} \cdot 1 = \frac{1}{\bar{G}_2} \cdot 1.$$

Приведенные в работе [112] экспериментальные данные не содержат информации для определения других операторов соотношений (7.4). Используем допущение об упруго сжимаемом материале. Для трансверсально-изотропного материала это допущение позволяет считать следующие операторные величины постоянными

$$\frac{1 - 2\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} = \frac{1 - 2\nu_1}{E_1}, \quad \frac{1}{\bar{E}_1} + \frac{1}{\bar{E}_2} - \frac{4\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{4\nu_2}{E_2}. \quad (7.7)$$

Тогда из равенств (7.7), соотношений алгебры операторов, а также известной зависимости $1/\bar{G}_1 = 2(1 + \bar{\nu}_1)/\bar{E}_1$ последовательно находятся

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} \cdot 1 = \bar{a}_{21} \cdot 1 &= -\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} \cdot 1 = -\frac{\nu_1}{E_1} \left[1 + \frac{\lambda_1}{2\nu_1} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_1) \cdot 1 \right], \\ \bar{a}_{66} \cdot 1 = \frac{1}{\bar{G}_1} \cdot 1 &= 2 \left(\frac{1}{\bar{E}_1} + \frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} \right) \cdot 1 = \frac{1}{G_1} \left[1 + \lambda_{G1} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_1) \cdot 1 \right], \quad \lambda_{G1} = \frac{3\lambda_1}{2(1 + \nu_1)}, \quad (7.8) \\ \bar{a}_{13} \cdot 1 = \bar{a}_{31} \cdot 1 = \bar{a}_{23} \cdot 1 = \bar{a}_{32} \cdot 1 &= \frac{-\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} \cdot 1 = -\frac{\nu_2}{E_2} \left[1 + \frac{\lambda_1 E_2}{4\nu_2 E_1} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_1) \cdot 1 + \frac{\lambda_2}{4\nu_2} \mathfrak{D}_\alpha^*(-\beta_2) \cdot 1 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для приведенного выше материала можно сформировать симметричную матрицу \bar{a}_{mn} уравнений состояния (2.25).

Во втором способе используются произвольные операторы, значения действий которых на единицу, выражены непосредственно через таблицы экспериментальных данных. Воспользуемся исходными операторами (7.5) и реологическими данными (7.6) для восстановления кривых ползучести $p_{Ei}(t)$ и $p_{G2}(t)$, полученных экспериментальным путем

$$\frac{1}{\bar{E}_i} \cdot 1 = \frac{1}{E_i} \left[1 + \lambda_i \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_i) \cdot 1 \right] = \frac{1}{E_i} p_{Ei}(t) \quad (i=1,2),$$

$$\frac{1}{\bar{G}_2} \cdot 1 = \frac{1}{G_2} \left[1 + \lambda_{G2} \mathcal{D}_\alpha^* (-\beta_{G2}) \cdot 1 \right] = \frac{1}{G_2} p_{G2}(t).$$

Кривые ползучести $p_{Ei}(t)$ и $p_{G2}(t)$ являются исходными данными для построения элементов матрицы состояния $\bar{a}_{mn} \cdot 1$.

Если ввести произвольные резольвентные операторы p_{Ei}^* и p_{G2}^* , то действия на единицу операторов $1/\bar{E}_i$ и $1/\bar{G}_2$ можно выразить через значения кривых ползучести $p_{Ei}(t)$ и $p_{G2}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{E}_i} \cdot 1 &= \frac{1}{E_i} \left[1 + p_{Ei}^* \cdot 1 \right] = \frac{1}{E_i} p_{Ei}(t) \quad (i=1,2), \\ \frac{1}{\bar{G}_2} \cdot 1 &= \frac{1}{G_2} \left[1 + p_{G2}^* \cdot 1 \right] = \frac{1}{G_2} p_{G2}(t). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Из соотношений (7.9) находятся значения действия на единицу введенных операторов через экспериментальные данные

$$p_{Ei}^* \cdot 1 = p_{Ei}(t) - 1, \quad p_{G2}^* \cdot 1 = p_{G2}(t) - 1. \quad (7.10)$$

Соотношения (7.8) в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \bar{a}_{12} \cdot 1 &= \bar{a}_{21} \cdot 1 = -\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} \cdot 1 = -\frac{\nu_1}{E_1} \left[1 + \frac{1}{2\nu_1} p_{E1}^* \cdot 1 \right], \\ \bar{a}_{66} \cdot 1 &= \frac{1}{\bar{G}_1} \cdot 1 = 2 \left(\frac{1}{\bar{E}_1} + \frac{\bar{\nu}_1}{\bar{E}_1} \right) \cdot 1 = \frac{1}{G_1} \left[1 + \lambda_{G1} p_{E1}^* \cdot 1 \right], \quad \lambda_{G1} = \frac{3}{2(1+\nu_1)}, \\ \bar{a}_{13} \cdot 1 &= \bar{a}_{31} \cdot 1 = \bar{a}_{23} \cdot 1 = \bar{a}_{32} \cdot 1 = \frac{-\bar{\nu}_2}{\bar{E}_2} \cdot 1 = -\frac{\nu_2}{E_2} \left[1 + \frac{E_2}{4\nu_2 E_1} p_{E1}^* \cdot 1 + \frac{1}{4\nu_2} p_{E2}^* \cdot 1 \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Значения операторов p_{Ei}^* и p_{G2}^* в соотношениях (7.11) следует заменить правыми частями равенств (7.10).

Таким образом, по известным из экспериментов функциям ползучести двумя способами определены значения матрицы состояния \bar{a}_{mn} . Как и ранее, элементы матрицы $\bar{A}_{mn} \cdot 1$ уравнений состояния находятся при помощи соотношений (2.72), где в качестве исходных данных используется матрица (7.3).

Численные исследования, аналогичные рассмотренному случаю цилиндрического изгиба вязкоупругой алюминиевой плиты, были проведены для трансверально-изотропного материала (7.6) для которого время, соответствующее стационарному состоянию составило 600 ч. В таблице 7.2 приведены соответствующие значения напряжений S_{θ} / p и $S_{z\theta} / p$.

Таблица 7.2

$2h$	0.1		1		10	
	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$	S_{θ} / p	$S_{z\theta} / p$
$a=1, b=0.75$						
$t=0$	1.558	0.442	1.745	0.376	2.366	0.134
	0.241	-0.442	-0.061	-0.376	-0.829	-0.134
$t=600$	1.594	0.244	1.891	0.196	2.439	0.048
	0.184	-0.244	-0.248	-0.196	-0.921	-0.048
$a=1, b=1$						
$t=0$	1.746	0.484	1.991	0.442	2.794	0.173
	0.254	-0.484	0.009	-0.442	-0.794	-0.173
$t=600$	1.795	0.279	2.171	0.234	2.902	0.064
	0.205	-0.279	-0.171	-0.234	-0.902	-0.064
$a=0.75, b=1$						
$t=0$	2.012	0.563	2.415	0.501	3.439	0.179
	0.256	-0.563	0.007	-0.501	-0.822	-0.179
$t=600$	2.088	0.325	2.663	0.261	3.561	0.065
	0.208	-0.325	-0.188	-0.261	-0.918	-0.065

Анализ численных исследований и данных таблицы позволяет сделать следующие выводы:

1) Значения напряжений S_{θ} / p в упругом и стационарном состояниях мало отличаются друг от друга. Наибольшее увеличение максимального напряжения S_{θ} / p получается при толщинах плиты соизмеримых с длиной большей полуоси

отверстия и составляет 8% – 10% от упругого состояния. При малых и больших толщинах рост напряжений со временем составляет 2% – 4%.

2) Напряжения $S_{z\theta} / p$ с увеличением толщины плиты стремятся к нулю. При длительном нагружении значения максимальных напряжений $|S_{z\theta} / p|$ в срединной плоскости уменьшаются на 40% – 60%.

7.3. Изгиб ортотропных вязкоупругих плит

Определение значений результатов воздействия интегральных операторов \bar{a}_{mn} или \bar{A}_{mn} , входящих в уравнения состояния для случая изгиба ортотропной плиты, целесообразно реализовать с использованием элементов матрицы a_{mn} для ортотропного материала с отличными от нуля элементами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_1}, & a_{22} &= \frac{1}{E_2}, & a_{33} &= \frac{1}{E_3}, & a_{12} &= a_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \\ a_{13} &= a_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, & a_{23} &= a_{32} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & a_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & a_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned}$$

В качестве примера был рассмотрен вязкоупругий полимерный композит с эпоксидным связующим, имеющий упругие и реологические параметры (2.58). Элементы вязкоупругой матрицы $1/\bar{E}_1$, $1/\bar{E}_2$ и $1/\bar{G}_{12}$ аппроксимировались с помощью операторов

$$\frac{1}{\bar{E}_i} = \frac{1}{E_i} \left[1 + \lambda_i \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_i) \right], \quad \frac{1}{\bar{G}_{12}} = \frac{1}{G_{12}} \left[1 + \lambda_6 \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_6) \right]. \quad (7.12)$$

В связи с отсутствием в справочной литературе для данного материала значений модуля Юнга E_3 , коэффициентов Пуассона ν_{31} и ν_{32} , модулей сдвига G_{13}

и G_{23} , а также их реологических характеристик, можно считать их постоянными величинами и положить равными

$$E_3 = (E_1 + E_2) / 2, \quad \nu_{31} / E_3 = \nu_{32} / E_3 = \nu_{12} / E_3, \quad G_{13} = G_{23} = G_{12}.$$

Из принятых допущений, равенства $1/\bar{K} = 1/K$ и с учетом формул (2.53), (7.12) записывается формула для вычисления $\bar{\nu}_{12} / \bar{E}_1$

$$\frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_1} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \left[1 + \frac{\lambda_1}{2\nu_{12}} \mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta_1) + \frac{\lambda_2 E_1}{2\nu_{12} E_2} \mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta_2) \right].$$

Исследования напряженного состояния были проведены для случаев нагружения бесконечной плиты с круговой полостью радиуса a усилиями $\sigma_1^0 = pz$ или $\sigma_2^0 = qz$ ($\sigma_6^0 = 0$). В таблице 7.3 для различных моментов времени приведены значения напряжений $S_\theta = \sigma_\theta / \sigma_i^0$ в точках $A(a, 0)$ и $B(0, a)$ при $z = h$. Результаты даны для случая $2h = 0.01a$.

Таблица 7.3

Нагрузка	Точки	S_θ				
		$t = 0$	$t = 100$ ч	$t = 200$ ч	$t = 300$ ч	$t = 600$ ч
$p = 1, q = 0$	A	0.478	0.426	0.428	0.430	0.433
	B	2.120	2.299	2.310	2.316	2.327
$p = 0, q = 1$	A	1.934	1.994	2.001	2.005	2.012
	B	0.687	0.727	0.734	0.738	0.746

Из таблицы 7.3 видно, что для изгиба плиты усилиями $\sigma_1^0 = pz$ максимальные значения напряжений S_θ возникают в точке B , растут с течением времени и при переходе в стационарное состояние ($t = 600$ ч.) увеличиваются на 10%. Напряжения в точке A уменьшаются на 9.5%.

Для изгиба усилиями $\sigma_2^0 = qz$ максимальные напряжения получаются в точке A и при переходе в стационарное состояние увеличиваются на 4%. Напряжения в точке B также увеличиваются на 8.6%. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными по прикладной теории [107]. Однако, при-

кладная теория не позволяет сделать выводы о поведении касательных напряжений $\tau_{z\theta}$, которые в некоторых случаях составляют около 40% от максимальных напряжений σ_θ .

В таблице 7.4 приводятся значения максимальных и минимальных касательных напряжений $S_{z\theta} = \tau_{z\theta} / P_2$, возникающих в срединной плоскости плиты.

Таблица 7.4

Нагрузка	Точки	$S_{z\theta}$				
		$t = 0$	$t = 100$ ч	$t = 200$ ч	$t = 300$ ч	$t = 600$ ч
$p = 1, q = 0$	58°	-0.638	-0.733	-0.746	-0.753	-0.767
	122°	0.638	0.733	0.746	0.753	0.767
$p = 0, q = 1$	37°	0.680	0.804	0.817	0.826	0.841
	143°	-0.680	-0.804	-0.817	-0.826	-0.841

Как видно, максимальные по модулю касательные напряжения $S_{z\theta}$ для обоих случаев нагружения плиты растут с течением времени и при переходе в стационарное состояние увеличиваются более чем на 20%.

7.4. Выводы по разделу 7

При помощи преобразования интегральных уравнений состояния задач вязкоупругости к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени получено решение задачи изгиба вязкоупругих изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных плит в уточненной постановке.

Временные матрицы позволяют решать задачи вязкоупругости в любой момент времени как обычные задачи теории упругости.

Проведены численные исследования напряженного состояния бесконечной плиты с эллиптической полостью. Дан анализ полученных результатов.

Основные положения данного раздела отражены в публикациях [206, 207, 215].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решена актуальная проблема разработки комплекса специализированных аналитико-числовых методов для решения формулируемых в рамках неклассических моделей задач исследования двумерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных массивов и тонких анизотропных плит с отверстиями и полостями, а также выявление и систематизация установленных на основе их применения ведущих параметрических закономерностей влияния физико-механических и геометрических параметров моделей на характеристики деформирования классов изучаемых объектов. Реализованы исследования вязкоупругого напряженно-деформированного состояния и его изменения с течением времени для анизотропных сред и элементов конструкций с отверстиями и полостями, дано решение на их основе практических задач по выявлению эффектов ползучести в горных породах с горизонтальными выработками усложненных форм сечений, а также построение решений уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных и ортотропных упругих и вязкоупругих плит.

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. С применением аппарата алгебры резольвентных операторов и матричной алгебры разработан новый численно-аналитический метод обращения операторов определяющих уравнений деформирования анизотропных вязкоупругих сред без использования аналитических представлений ядер ползучести и релаксации, позволяющий распространить область возможного применения численно-аналитических подходов на новые классы неклассических моделей деформирования вязкоупругих тел и элементов конструкций.

2. Разработана численно-аналитическая методика исследования задач линейной вязкоупругости анизотропных сред, которая для произвольных моментов времени сводится к применению алгоритмов, подобных используемым при решении задач теории упругости анизотропного деформируемого тела без учета реологических эффектов, и позволяет изучить наследственные

деформационные процессы в случаях многосвязных конструкций из низкосимметричных по физико-механическим свойствам материалов.

3. Для исследования эффектов ползучести и релаксации в задачах деформирования анизотропных массивов горных пород предложен новый метод преобразования интегральных уравнений состояния к уравнениям закона Гука с параметрическими зависимостями деформативных характеристик материалов от времени, эффективно применимый в проектных и технологических расчетах характеристик прочности подземных сооружений.

4. На основе применения разработанных методов и с учетом различных гипотез об упругой сжимаемости либо несжимаемости рассматриваемых конструкционных материалов впервые реализованы исследования обобщенного плоского напряженного состояния бесконечных ортотропных вязкоупругих пластин с эллиптическим свободным или жесткозакрепленным отверстием, обеспечивающие получение более адекватных практике оценок мгновенной и длительной прочности тонкостенных конструкций из современных волокнистых композитных материалов.

5. Предложен новый теоретический аналитико-числовой алгоритм построения замкнутых граничных кривых сложных конфигураций, как совокупностей участков в виде эллиптических или круговых дуг контуров пересечений либо объединений вспомогательных выпуклых областей, позволяющий в исследованиях неклассических моделей двумерного деформирования тел с локализованными неоднородностями гладких очертаний получать верифицированные расчетные результаты повышенной точности.

6. Применительно к изотропным и трансверсально-изотропным пластинам малой толщины разработан новый теоретический аналитико-числовой алгоритм редукции описывающей их изгибное деформирование системы пространственных соотношений теории упругости с получением комплекса разрешающих соотношений новой уточненной теории изгиба ослабленных отверстиями пластин указанного типа в виде системы двух двумерных дифференциальных уравнений в частных производных второго и четвертого порядка, а также описан

соответствующий способ интегрирования уравнений пограничного слоя и удовлетворения краевым условиям на границах отверстий, что позволяет в сравнении с исследованиями в рамках классической теории получать в практике прочностных расчётов более адекватные оценки влияния касательных напряжений в изгибаемых тонких пластин.

7. Разработан новый теоретический алгоритм аналитико-числовой редукции описывающей изгибное деформирование ортотропных пластин системы пространственных соотношений теории упругости с переходом к новой уточненной неклассической теории изгиба тонких ортотропных пластин с отверстиями, содержащей разрешающее соотношение в виде двумерного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, а также разработан соответствующий аналитико-числовой метод его решения и удовлетворения соответствующим краевым условиям на границах отверстий, что позволяет увеличить точность расчетных оценок прочности и надежности волокнистых композитных пластин при изгибном деформировании посредством учета существенных уровней возникающих касательных напряжений.

8. Осуществлены разработка и применение нового аналитико-числового метода определения в уточненной постановке описываемого неклассическими моделями вязкоупругого напряженно-деформированного состояния изгибаемых многосвязных изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин, что является вкладом в теорию и расчетную практику получения оценок для мгновенной и длительной прочности тонкостенных пластинчатых элементов из различных типов конструкционных материалов.

9. На базе применения комплекса предложенных методов впервые выявлен и описан ряд специфических эффектов изменения напряженно-деформированного состояния геомассивов вблизи туннельных горных выработок с усложненными формами поперечных сечений в зависимости от времени их эксплуатации и физико-механических свойств вмещающих пород, что является важным вкладом в теорию и практику проектных и мониторинговых расчетов прочности подземных сооружений.

10. Впервые реализованы обобщение и систематизация востребованных в практике прочностных расчетов новых данных о закономерностях напряженно-деформированного состояния изгибаемых вязкоупругих пластин с отверстиями, которые получены на базе применения комплекса новых разработанных методов исследования неклассических моделей деформационных процессов данного типа, включая анализ зависимостей характеристик деформирования рассматриваемых конструктивных элементов от их геометрических особенностей, вида и степени анизотропии механических свойств, а также периода приложения нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамов А.А. Методы прикладной вязкоупругости / А.А. Адамов, В.П. Матвеев, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. – 411 с.
2. Айнола Л.Я. Волновые процессы деформации в пластинках и оболочках / Л.Я. Айнола, У.К. Нигул // Известия АН ЭстССР. – Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1965 – Т. 14, № 1. – С. 3 – 63.
3. Айталиев Ш.М. Напряженное и деформированное состояние диагональной выработки произвольного поперечного сечения / Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов // Проблемные вопросы механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1972. – С. 51 – 52.
4. Айталиев Ш.М. Расчет горного давления в разно-ориентированных горизонтальных выработках / Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов // Горное давление в капитальных и подготовительных выработках. – Новосибирск: Изд-во ИГД СО АН СССР, 1973. – С. 21 – 26.
5. Айталиев Ш.М. Развитие механики подземных и специальных сооружений в Казахстане за последние 49 лет / Ш.М. Айталиев // Прикладная механика. – 2004. Т. 40, № 10. – С. 3 – 35.
6. Аксентян О.К. Напряженное состояние плиты малой толщины / О.К. Аксентян, И.И. Ворович // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 6. – С. 1057 – 1074.
7. Аксентян О.К. Об определении коэффициентов концентрации напряжений на основе прикладной теории / О.К. Аксентян, И.И. Ворович // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 3. – С. 589 – 596.
8. Аксентян О.К. Построение уточненных прикладных теорий для плиты на основе уравнений теории упругости / О.К. Аксентян, Ю.А. Устинов // Прикладная математика и механика – 1972. – Т. 36, № 2. – С. 272 – 281.

9. Алтухов Е.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин: Монография / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
10. Алфуттов Н.А. О некоторых парадоксах теории тонких упругих пластин / Н.А. Алфуттов // Известия РАН. МТТ. – 1992. – № 3. – С. 65 – 72.
11. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1967. – 268 с.
12. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
13. Амузин Б.З. Об использовании переменных модулей для решения одного класса задач задач линейной наследственной ползучести / Б.З. Амузин, А.М. Линьков // Известия АН СССР. Серия МТТ. – 1974. – № 6. – С. 162 – 166.
14. Андреев А.Н. Об одном варианте теории упругих многослойных анизотропных пластин / А.Н. Андреев, Ю.В. Немировский // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 55 – 62.
15. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н.Х. Арутюнян. – М.: Гостехиздат, 1952. – 323 с.
16. Арутюнян Н.Х. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести / Н.Х. Арутюнян, А.А. Зевин. – М.: Стройиздат, 1988. – 336 с.
17. Афанасенко Н.Н. Численные методы решения некоторых краевых задач ползучести судовых конструкций из стеклопластика / Н.Н. Афанасенко, В.С. Екельчик, В.Я. Ривкинд, В.М. Рябов // Применение численных методов в строительной механике корабля. – Л.: Судостроение, 1973. – С. 14 – 21.
18. Афанасенко Н.Н. Изгиб коротких балок из наследственно упругого армированного пластика / Н.Н. Афанасенко, В.С. Екельчик, В.Я. Ривкинд, В.М. Рябов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – №1. – С. 118 – 126.
19. Ашкенази Е.К. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник / Е.К. Ашкенази, Э.В. Ганов. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.

20. Бабиюк Г.В. Моделирование взаимодействия породного массива с рамной крепью / Г.В. Бабиюк, А.А. Леонов, А.И. Мележик // Изв. вузов. Горный журнал. – №1. – 2001. – С.44 – 50.
21. Бабиюк Г.В. Имитационное моделирование проявлений горного давления при проведении выработки / Г.В. Бабиюк // Вестник МАНЭБ. – Вып. 7(55). – Том 7. – Санкт-Петербург, Алчевск: ИПЦ "Ладо", 2002. – С.16 – 18.
22. Бабиюк Г.В. Напряженно-деформированное состояние анизотропного породного массива / Г.В. Бабиюк, Е.В. Мочалин, М.А. Диденко // Матеріали міжнародної конференції «Форум гірників - 2005», т.1. – Дніпропетровськ : НГУ, 2005. – С. 41 – 48.
23. Баклашов И.В. Геомеханика: Учебник для вузов. В 2 т. / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия, А.Н. Шашенко, В.Н. Борисов. – М.: Изд-во МГГУ, 2004. – Т. 2. Геомеханические процессы. – 249 с.
24. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин. Н.П. Жидков. – Том 1. М.: Наука, 1966. – 632 с.
25. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости / Д. Бленд. – М.: Мир, 1965. – 197 с.
26. Богомолов А.Н. Пример определения безопасной глубины заложения горизонтальной выработки сложного сечения / А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, С.Л. Шолудько, А.В. Соловьев // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр-во и архит. – 2013. – Вып. 33(52). – С. 6 – 12.
27. Болотин В.В. Об изгибе плит, состоящих из большого числа слоев / В.В. Болотин // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 1. – С. 61 – 66.
28. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
29. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов (теория и приложения) / И.И. Бугаков. – М.: Наука, 1973. – 287 с.
30. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах / Н.С. Булычев. – М.: Недра, 1988. – 270 с.

31. Васильев В.В. О теории тонких пластин / В.В. Васильев // Известия РАН. МТТ. – 1992. – № 3. – С. 26 – 47.
32. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин / В.В. Васильев // Известия РАН. МТТ. – 1995. – №4. – С. 140 – 150.
33. Васильев В.В. Об асимптотическом методе обоснования теории пластин / В.В. Васильев // Известия РАН. МТТ. – 1997.– № 3. – С. 150 – 155.
34. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ / В.В. Васильев // Известия РАН. МТТ. – 1998. – № 3. С. 46 – 58.
35. Векуа И.Н. Об интегрировании системы уравнений упругого равновесия пластинки / И.Н. Векуа // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 186, № 3. – С. 54 – 544.
36. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / И.И. Ворович // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикладной механике. Механика твердого тела. – М.: Наука, 1966. – С. 116 – 136.
37. Ворович И.И. О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты / И.И. Ворович, О.С. Малкина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – Вып. 5. – С. 92 – 102.
38. Ворович И.И. Некоторые проблемы концентрации напряжений / И.И. Ворович // Концентрация напряжений. – 1968. – Вып. 2. – С. 45 – 53.
39. Ворович И.И. Качественное исследование напряженно-деформируемого состояния трехслойной плиты / И.И. Ворович, И.Г. Кадомцев // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, № 5. – С. 870 – 876.
40. Ворович И.И. К теории неоднородных по толщине плит / И.И. Ворович, И.Г. Кадомцев, Ю.А. Устинов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – Вып. 3. – С. 119 – 130.
41. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек / И.И. Ворович // Материалы I Всесоюз. шк. по теории и численным расчетам оболочек и пластин. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – С. 51 – 149.

42. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям / А.К. Галиныш // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1967. – Вып.5. – С. 66 – 92.
43. Глушко В.Т. О функциях специальных операторов и их приложениях в теории ползучести анизотропных тел / В.Т. Глушко, А.Н. Зорин, М.И. Розовский // Известия АН Армянской ССР. – 1967. – Т. 10, № 3. – С. 14 – 22.
44. Голуб В.П. Об определении параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности линейно вязкоупругих материалов / В.П. Голуб, П.В. Фернати, Я.Г. Ляшенко // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 9. – С. 12 – 25.
45. Голуб В.П. Метод определения параметров ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В.С. Рагулина // Прикладная механика. – 2011. – Т. 47, №3. – С. 75 – 88.
46. Голуб В.П. К определению параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов / В.П. Голуб, Я.В. Павлюк, П.В. Фернати // Прикладная механика. – 2013. – Т. 49, № 2. – С. 100 – 113.
47. Гольденвейзер А.Л. Методы обоснования и уточнения теории оболочек / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 4. – С. 684 – 695.
48. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин / А.Л. Гольденвейзер // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 3. – С. 134 – 149.
49. Гольденвейзер А.Л. Замечания о статье В.В. Васильева “Об асимптотическом методе обоснования теории пластин” / А.Л. Гольденвейзер // Известия РАН. МТТ. – 1997. – № 4. – С. 150 – 158.
50. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс / А.Я. Гольдман. – Ленинград: Машиностроение, 1979. – 320 с.

51. Горохов А.Ю. О перераспределении напряжений в ортотропной вязкоупругой пластинке в окрестности круглого включения/ А.Ю. Горохов, Н.А. Труфанов // Вестник ПГТУ. Механика. – 2011, № 1 – С. 170 – 182.
52. Громов В.Г. Об одном способе описания вязкоупругого поведения полимерных тел / В.Г. Громов // ДАН СССР. – 1967. – Т. 173, № 2. – С. 288 – 290.
53. Громов В.Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости / В.Г. Громов // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 182, № 1. – С. 56 – 59.
54. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках / О.М. Гузь // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 605 – 612.
55. Гузь А.Н. Механика композитных материалов и элементов конструкций / А.Н. Гузь, А.Я. Григоренко, И.Ю. Бабич и др. – В 3-х томах, Т. 2. Механика элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1983. – 464 с.
56. Гузь А.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред (Обзор) / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш // Прикл. механика. – 1987. – Т. 23, №9. – С. 3 – 29.
57. Гусейн-Заде М.И. К построению теории изгиба слоистых пластин / М.И. Гусейн-Заде // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 2. – С. 232 – 243.
58. Гухман А.А. Введение в теорию подобия / А.А. Гухман. – М.: Высшая школа, 1973. – 295 с.
59. Даревский В.М. О статических граничных условиях в классической теории оболочек и пластин / В.М. Даревский // Известия РАН. МТТ. – 1995. – № 4. – С. 130 – 133.
60. Дашко Р.Э. Механика горных пород / Р.Э. Дашко. – М.: Недра, 1987. – 264 с.
61. Динник А.Н. О давлении горных пород и расчет крепи круглой шахты / А.Н. Динник // Инженерный работник. – 1925. – № 7. – С. 1 – 12.

62. Динник А.Н. Распределение напряжений вокруг подземных выработок / А.Н. Динник, А.Б. Моргаевский, Г.Н. Савин // Тр. совещ. по управл. горным давлением. – М., Л.: Изд-во АН СССР, 1938. С. 7 – 55.
63. Ержанов Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения / Ж.С. Ержанов. – Алма-Ата: Наука, 1964. – 175 с.
64. Ержанов Ж.С. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве / Ж.С. Ержанов, Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов. – Алма-Ата: Наука, 1971. – 160 с.
65. Ержанов Ж.С. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве / Ж.С. Ержанов, Ш.М. Айталиев, Ж.К. Масанов. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 212 с.
66. Жабоедов А.А. Напряженное состояние массива горных пород вокруг выработки, ослабленной системой трещин / А.А. Жабоедов, Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2007. – Вып. 15. – С. 63 – 69.
67. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин / П.А. Жилин // Известия РАН. МТТ. – 1992. – № 3. – С. 48 – 64.
68. Жилин П.А. О классической теории пластин и преобразовании Кельвина-Тэта / П.А. Жилин // Известия РАН. МТТ. – 1995. – № 4. – С. 134 – 140.
69. Зевин А.А. Применение метода конечных сумм к расчету упругих и стареющих наследственных сред / А.А. Зевин // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 9. – С. 82 – 88.
70. Зорин А.Н. Метод расшифровки иррациональной функции интегрального оператора / А.Н. Зорин, М.И. Розовский // Прикладная механика. – 1965. – Т. 1, № 9. – С. 81 – 88.
71. Иванов Г.М. К решению первой основной задачи плоской теории вязкоупругости изотропного многосвязного тела / Г.М. Иванов, Л.П. Борозенец // Теорет. и прикладная механика. – 1974. – Вып. 5. – С. 31 – 38.

72. Иванов Г.М. Напряженное состояние изотропной вязкоупругой плиты с отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами / Г.М. Иванов, Л.Н. Шкодина // Прикладная механика. – 1975. – Т. 11, № 8. – С. 26 – 32.
73. Иванов Г.М. Напряженное состояние вязкоупругой плиты с двумя круговыми отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами / Г.М. Иванов, Л.Н. Шкодина // Механика твердого тела. – 1975. – Вып. 7. – С. 161 – 165.
74. Ильин В.П. Расчет строительных конструкций из вязкоупругих материалов / В.П. Ильин, Л.Е. Мальцев, В.Г. Соколов. – Л.: Стройиздат, 1991. – 190 с.
75. Ильюшин А.А. Метод аппроксимаций для расчета конструкций по линейной теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин // Механика полимеров. – 1968. – № 2. – С. 210 – 221.
76. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязко-упругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М: Наука, 1970. – 280 с.
77. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием, близко расположенным от границы / С.А. Калоеров, А.С. Космодамианский // Некоторые основные задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – Саратов: Изд-во СГУ, 1967. – С. 55 – 60.
78. Калоеров С.А. Упругое равновесие весомой анизотропной полуплоскости с эллиптическим отверстием / С.А. Калоеров, А.С. Космодамианский // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7, № 1. – С. 55–60.
79. Калоеров С.А. Напряженное состояние массива горных пород вокруг выработки с разгрузочной полостью / С.А. Калоеров, А.А. Левшин, В.А. Полухин // Теорет. и прикладная механика. – 1989. – Вып. 20. С. 31 – 36.
80. Калоеров С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теоретическая и прикладная механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 45 – 56.
81. Калоеров С.А. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями / С.А. Калоеров,

- А.Б. Мироненко // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2005. – Вып. 1, ч. 1. – С. 71 – 78.
82. Калоеров С.А. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Прикладная механика. – 2007. – Т.43, №2. – С.88 – 98.
83. Калоеров С.А. Задача вязкоупругости для пластинки с жесткими эллиптическими включениями / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, М.А. Коломиец // Теорет. и прикладная механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 183 – 194.
84. Калоеров С.А. Вязкоупругий изгиб многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // Вісн. Донец. ун-ту. Сер.А, Природ. науки. – 2007. – Вип. 2. – С.58 – 65.
85. Калоеров С.А. Исследование вязкоупругого и термовязкоупругого состояния пластинки с включениями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 70 – 84.
86. Калоеров С.А. Определение вязкоупругого состояния многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша, А.И. Баева // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С.80 – 95.
87. Калоеров С.А. Исследование термовязкоупругого состояния пластинки с конечным числом жестких эллиптических или линейных включений / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2008. – Вып. 1. – С. 70 – 77.
88. Калоеров С.А. Определение вязкоупругого состояния анизотропной пластинки с жесткими включениями / С.А. Калоеров, М.А. Коломиец // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 202 – 211.
89. Калоеров С.А. Вязкоупругое состояние вязкоупругой пластинки с упругими включениями / С.А. Калоеров, М.А. Коломиец // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 79 – 89.
90. Калоеров С.А. Задача о вязкоупругом изгибе изотропной плиты с упругими включениями / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // Теорет. и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С.169 – 177.

91. Калоеров С. А. Вязкоупругий изгиб многосвязных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Шипоша // Зб. прац. Міжнар. наук. конф. Обчисл. мат. і мат. проблеми механіки. Львів, 31.08.09–4.09.09.– Львів.– 2009.– С. 126–127.
92. Калоеров С.А. Задача вязкоупругости для анизотропной пластинки с упругим включением / С.А. Калоеров, М.А. Коломиец, Ю.В. Мысовский // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2009. – Вып. 1. – С. 92 – 99.
93. Калоеров С. А. Вязкоупругий изгиб изотропной плиты с упругими включениями / С.А. Калоеров, Ю.С. Сенченко // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. VII всерос. науч. конф. с междунар. участием, 3 – 6 июня 2010 г. Самара. – Ч.1. – С. 165 – 166.
94. Калоеров С. А. Циклическая задача о вязкоупругом изгибе кусочно-однородной плиты / С.А. Калоеров, Ю.С. Сенченко // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – Вып. 1 (47). – С. 35 – 44.
95. Калоеров С.А. Задача вязкоупругости для многосвязных плит / С.А. Калоеров, Ю.С. Сенченко // Вісн. Дніпр. нац. ун-та. – 2011. – Вип. 15. – Т.2, №5. – С. 91 – 102.
96. Калоеров С.А. Решение задачи термовязкоупругости для анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Теорет. и прикладная механика. – 2011. – Вып. 2 (48). – С. 51 – 70.
97. Калоеров С.А. Задача вязкоупругости для анизотропной пластинки с жесткими включениями / С.А. Калоеров, М.А. Коломиец // Теорет. и прикл. механика. – 2011. – Вып. 2 (48). – С. 71 – 86.
98. Калоеров С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 113 – 132.
99. Калоеров С. А. Изгиб многосвязной анизотропной плиты сложной конфигурации / С. А. Калоеров, А. И. Занько // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Матер. VI Межд. науч. конф., Донецк-Мелекино, 11–14 июня 2013 г. – Донецк: Юго-Восток. – 2013. – Т. 1. – С. 158 – 162.

100. Калоеров С. А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С. А. Калоеров, А. И. Занько, А. А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 55. – С. 99 – 138.
101. Калоеров С.А. Задача электромагнитовязкоупругости для многосвязных пластинок / С.А. Калоеров, А. А. Самодуров // Прикладная механика. – 2015. – Т. 51, № 6. – С. 23 – 41.
102. Калоеров С.А. Решение задач об изгибе многосвязных плит под действием распределенных по основанию усилий / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Вісн. Запорізь. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2015. – Вып. 2. – С. 94–104.
103. Калоеров С. А. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 456 – 464.
104. Калоеров С. А. Приближенный метод решения задач об изгибе анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Донецкие чтения 2016: Матер. I Междунар. науч. конф., Донецк, 16-18 мая 2016 г. – Т. 1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета. – 2016. – С.30 – 31.
105. Калоеров С. А. Решение задачи линейной вязкоупругости для однородных и кусочно-однородных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XVIII междунар. конф., Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 1. – С. 349–353.
106. Калоеров С.А. Эффективный метод определения напряженного состояния пластинки с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 108 – 120.
107. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 141 – 151.

108. Калоеров С.А. Решение задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных анизотропных плит / С.А. Калоеров, А.А. Кошкин // Прикладная механика. – 2017. – Т. 53, № 6. – С. 92 – 107.
109. Каминский А.А. Механика разрушения вязко-упругих тел / А.А. Каминский. – Киев: Наук. думка, 1980. – 160 с.
110. Каминский А. А. Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. Т.1. Разрушения вязко-упругих тел с трещинами / А.А. Каминский. – Киев: Наук. думка, 1990. – 312 с.
111. Каминский А.А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами / А.А. Каминский. – К.: Наук. думка, 1990. – 310 с.
112. Каминский А.А. Длительное разрушение полимерных и композиционных материалов с трещинами / А.А. Каминский, Д.А. Гаврилов. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с. (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т.: т. 3).
113. Каминский А.А. К методу решения задач линейной теории вязкоупругости для анизотропных материалов (с учетом наличия трещин) / А.А. Каминский, С.А. Кекух // Прикладная механика. – 1994. – Т. 30, № 4. – С. 82 – 91.
114. Каминский А.А. Исследование деформирования анизотропных вязкоупругих тел / А.А. Каминский // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 39–63.
115. Каминский А.А. Механика длительного разрушения вязкоупругих тел с трещинами: теория, эксперимент (обзор) / А.А. Каминский // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 3 – 79.
116. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
117. Карев В.И. Экспериментальные исследования процессов деформирования, разрушения и фильтрации в горных породах / В.И. Карев, В.В. Химуля, Н.И. Шевцов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2021. – № 5. – С. 3 – 26.
118. Кильчевский Н.А. Обобщение современной теории оболочек / Н.А. Кильчевский // Прикладная математика и механика. – 1939. – Т. 2, № 4. – С. 427 – 438.

119. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач оболочек / Н.А.Кильчевский // Теория пластин и оболочек: Тр. II Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – Киев, 1962. – С. 58 – 69.
120. Коваленко А.Д. О методе переменных модулей в задачах линейной наследственной упругости / А.Д. Коваленко, А.А. Кильчинский // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, № 12. – С. 27 – 34.
121. Коваленко А.Д. Исследование макроскопических реономных свойств однонаправленного стеклопластика / А.Д. Коваленко, А.А. Кильчинский // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1972. – Вып. 12. – С. 18 – 27.
122. Кожевникова В.Н. Распределение напряжений возле прямоугольного отверстия в несом массиве / В.Н. Кожевникова // Записки Ленингр. горн. ин-та. – 1956. - № 33. – С. 99 – 108.
123. Колокольчиков В.В. Об оценках погрешности аппроксимации аналитического решения задач для линейных вязкоупругих материалов / В.В. Колокольчиков // Механика полимеров. – 1971. – № 5. – С. 827 – 834.
124. Коломиец М.А. Периодическая задача вязкоупругости для анизотропной пластинки с жесткими включениями // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 88 – 93.
125. Колос А.В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластин / А.В. Колос // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 3. – С. 528 – 589.
126. Колос А.В. Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок / А.В. Колос // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29, № 4. – С. 771 – 781.
127. Колос А.В. Об области применения приближенных теорий изгиба пластин типа Рейснера / А.В. Колос. – Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966. – С. 497 – 501.

128. Колтунов М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации / М.А. Колтунов // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 483 – 497.
129. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация / М.А. Колтунов. – М.: Высш. шк., 1976. – 277 с.
130. Космодамианский А.С. Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропного массива с двумя одинаковыми эллиптическими выработками / А.С. Космодамианский // Исслед. горного давления. – М.: Госгортехиздат, 1960. – С 311 – 322.
131. Космодамианский А.С. Определение напряженного состояния анизотропного массива вблизи горизонтальных горных выработок / А.С. Космодамианский // В кн.: «Исследования горного давления» – М., Госгортехиздат. – 1960. – С. 295 – 310.
132. Космодамианский А.С. О напряженном состоянии горного массива, ослабленного большим количеством выработок квадратного сечения / А.С. Космодамианский // Труды по вопросам горного давления. – 1962. – № 45. – С. 194 – 203.
133. Космодамианский А.С. Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластике с криволинейным отверстием / А.С. Космодамианский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. – 1965. – № 2. – С.35 – 42.
134. Космодамианский А.С. Напряженное состояние пластинок с отверстиями в трехмерной постановке / А.С. Космодамианский, В.Н. Ложкин, Ю.В. Мысовский, В.А. Шалдырван. – Донецк.: Изд-во Донецк. гос. ун-та, 1970. – 255 с.
135. Космодамианский А.С. Изгиб тонких многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк, 1973. – 264 с.
136. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами / А.С. Космодамианский. – Киев: Вища школа, 1975. – 228 с.

137. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К.-Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.
138. Космодамианский А.С. Толстые многосвязные пластины / А.С. Космодамианский, В.А. Шалдырван. – Киев: Наукова думка, 1978. – 240 с.
139. Космодамианский А.С. Пространственные задачи теории упругости для многосвязных пластин: Обзор / А.С. Космодамианский // Прикладная механика. – 1983. – Т. 19, №12. – С. 3 – 21.
140. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропной пластинки с отверстиями произвольной формы / А.С. Космодамианский, Н.М. Нескородев // Доповіді АН України. – 1993. – № 7. – С. 54 – 56.
141. Космодамианский А.С. Связь уравнений плоской теории упругости для анизотропного и изотропного тел / А.С. Космодамианский, Н.М. Нескородев // Прикл. математика и механика. – 1998. – Том 62, №2. – С. 344 – 346.
142. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости анизотропного тела / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – С. 27. – 50. – (Механика композитов: В 12 т., т. 7).
143. Космодамианский А.С. Напряженное состояние анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, граница которого имеет непрерывную касательную / А.С. Космодамианский, Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Известия РАН. МТТ. – 1998. – № 3. – С. 66 – 72.
144. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд – М.: Мир, 1987. – 328 с.
145. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен; пер. с англ. под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
146. Кузнецов Г.Н. Механические свойства горных пород / Г.Н. Кузнецов. – М.: Углетехиздат, 1947. – 179 с.
147. Кузнецов Г.Н. Изучение проявлений горного давления на моделях / Г.Н. Кузнецов и др. – М.: Углетехиздат, 1959. – 283 с.

148. Кузнецов Г.Н. О моделировании процессов проявления горного давления и сдвижения горных пород под влиянием подземных разработок методом эквивалентных материалов / Г.Н. Кузнецов. – Сб. трудов ВНИМИ по вопросам моделирования проявлений горного давления методом эквивалентных материалов. – 1967. – № 44. – С. 7 – 17.
149. Кургузов В.Д. Напряженно-деформированное состояние массива горных пород, ослабленного квадратной выработкой / В.Д. Кургузов // Вычислительные технологии. – 2003. – Т. 8., № 5. – С. 81 – 93.
150. Кухлинг Х. Справочник по физике / Х. Кухлинг. – М: Мир, 1985. – 520с.
151. Лазько В.А. Изгиб трансверсально-изотропной пластинки с отверстием, подкрепленным по контуру упругим кольцом / В.А. Лазько // Математические методы и физически-механические поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 140 – 143.
152. Левинсон-Лессинг Ф. К вопросу о давлении в тоннелях / Ф. Левинсон-Лессинг, А.К. Зайцев. – М.: ОНТИ, 1915. – 118 с.
153. Лехницкий С.Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит/ С. Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. – 1938. – Т. 2, Вып. 2. – С. 181 – 210.
154. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
155. Лехницкий С.Г. Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения / С.Г. Лехницкий // Труды по вопросам горного давления, сдвижения горных пород и методики маркшейдерских работ. – 1962. – № 45. – С. 155 – 179.
156. Лехницкий С.Г. Распределение напряжений вблизи горизонтальной выработки эллиптического сечения в трансверсально-изотропном массиве с наклонными плоскостями изотропии / С.Г. Лехницкий // Инженерный журнал. МТТ. – 1966. – № 2. – С. 54 – 62.
157. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – Наука, 1977. – 416 с.

158. Ложкин В.Н. Изгиб плиты с двумя неравными круговыми отверстиями в трехмерной постановке / В.Н. Ложкин, Г.Ю. Рудакова // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – №1. – С. 147 – 150.
159. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
160. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
161. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матье / Н.В. Мак-Лахлан. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1953. – 475 с.
162. Малинин Н.Н. Ползучесть элементов конструкций из полимерных материалов / Н.Н. Малинин // Журнал прикл. механики и техн. физики – 1970. – №2. – С.109 – 125.
163. Маличенко С.А. Об одной уточненной теории изгиба слоистых пластин / С.А. Маличенко, А.П. Прусаков // Известия высших учебных заведений. Сер.: Строительство и архитектура. – 1982. – № 8. – С. 39 – 42.
164. Малый В.И. Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости нестареющих материалов / В.И. Малый // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 1. – С. 77 – 86.
165. Малый В.И. Квазиконстантные операторы в теории вязкоупругости стареющих материалов / В.И. Малый // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 4. – С. 120 – 127.
166. Малый В.И. Метод квазиконстантных операторов в теории вязкоупругости анизотропных нестареющих материалов / В.И. Малый, Н.А. Труфанов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 6. – С. 148 – 154.
167. Мальцев Л.Е. Оценка погрешности решения вязкоупругой задачи по методу аппроксимаций / Л.Е. Мальцев // Механика полимеров. – 1978. – № 5. – С. 808 – 815.
168. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агашков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

169. Меглинский В.В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В.В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1967. – Вып. 3. – С. 97 – 127.
170. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе / В.В. Москвитин. – М.: Наука, 1972. – 328 с.
171. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
172. Насонов И.Д. Моделирование физических процессов в горном деле / И.Д. Насонов, В.И. Ресин. – М.: Изд-во Академии горных наук, 1999. – 343 с.
173. Немиш Ю.Н. Изгиб трансверсально изотропных плит с криволинейными отверстиями / Ю.Н. Немиш, Б.Л. Пелех, И.Ю. Хома // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 87 – 95.
174. Немиш Ю.Н. Изгиб трансверсально изотропных пластин с криволинейными отверстиями / Ю.Н. Немиш, Б.Л. Пелех, И.Ю. Хома // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, № 1. – С. 119 – 124.
175. Немиш Ю.Н. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Трехмерная теория (Обзор) / Ю.Н. Немиш, И.Ю. Хома // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, №11. – С. 3 – 27.
176. Нескородев Н.М. Метод граничных элементов в задачах о напряженном состоянии анизотропной пластинки с отверстиями / Н.М. Нескородев // Теоретическая и прикладная механика. – 1993. – № 24. – С. 44 – 50.
177. Нескородев Н.М. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве: учебное пособие / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.
178. Нескородев Н.М. Напряжения в массиве горных пород с выработкой и трещинами вокруг нее / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Труды XIV Международной научной школы им. академика С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические

- явления в горных породах и выработках” (Крым, Алушта, 20 – 26 сентября 2004 г.) – Симферополь. – 2004. – С. 109 – 115.
179. Нескородев Н.М. Деформирование анизотропного массива горных пород с выработками при учете ползучести / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Труды IX Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения И.И.Воровича (г. Ростов-на Дону, 11-15 октября 2005 г.) – Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2005. – С. 147-151.
180. Нескородев Н.М. Вязкоупругая модель деформирования анизотропного массива горных пород с выработкой / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. –2005.– Вып. 1. – С. 79 – 84.
181. Нескородев Н.М. Действие сил тяжести в анизотропном массиве горных пород с частично подкрепленной выработкой / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2005. – Вып. 2. – С. 48 – 53.
182. Нескородев Н.М. Определение подходящих размеров выработки эллиптического сечения, находящейся в поле сил тяжести / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Труды XVI Международной научной школы им. академика С.А. Христиановича “Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках” (Крым, Алушта, 18 – 24 сентября 2006 г.) – Симферополь. – 2006. – С. 204 – 210.
183. Нескородев Н.М. Напряжения и деформации в анизотропном массиве горных пород с выработками при учете ползучести / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2007. – Вып. 1. – С. 101 – 108.
184. Нескородев Н.М. Математические модели расчета напряженно-деформированного состояния горного массива при отработке горизонтального пласта полезного ископаемого / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2008. – Вып. 1. – С. 78 – 83.
185. Нескородев Р.Н. Напряжения и перемещения в окрестности выработки, проведенной в области нарушенных горных пород / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2005. – Вып. 11. – С. 99 – 105.

186. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое деформирование анизотропного массива горных пород с выработками / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2007. – Вып. 14. – С. 122 – 130.
187. Нескородев Р.Н. О новом численно-аналитическом методе решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2009. – Вып. 2. – С. 7 – 15.
188. Нескородев Р.Н. Численно-аналитический метод решения задач линейной вязкоупругости для анизотропных сред / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2009. – Том. 19. – С. 168 – 177.
189. Нескородев Р.Н. Учет упругой сжимаемости материала в теории вязкоупругости ортотропного тела / Р.Н. Нескородев // Материалы VI Междунар. науч. конф. “Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела” (Мелекино, 8-11 июня 2010 г.) – Донецк: Юго-Восток, 2010. – С. 67 – 70.
190. Нескородев Р.Н. Применение способа гладкой аппроксимации криволинейных отверстий в решении задач плоской теории упругости / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2010. – Вып. 1. – С. 81 – 88.
191. Нескородев Р.Н. Алгоритм построения областей сложной формы и его использование при решении задач плоской теории упругости / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2010. – Вып. 2. – С. 84 – 89.
192. Нескородев Р.Н. Численное определение резольвент интегральных уравнений линейной вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2011. – Т. 22. – С. 162 – 170.
193. Нескородев Р.Н. Численное определение резольвент интегральных уравнений состояния среды при решении задач вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды XV Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 4 – 7 декабря 2011 г.) Т. 1 – Ростов-на-Дону, 2011. – С. 179 – 183.

194. Нескородев Р.Н. Варианты решений задач изгиба трансверсально-изотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Труды VII Международной научной конференции “Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела” (Мелекино, 11-14 июня 2013 г.). – Т. 2. – С. 89 – 93.
195. Нескородев Р.Н. Уравнения одного из вариантов уточненной теории изгиба ортотропных плит / Р.Н. Нескородев // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 14-18 октября 2013 г.). – Т.2. – С. 121 – 125.
196. Нескородев Р.Н. Решение задачи изгиба трансверсально-изотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2013. – № 1. – С. 61 – 68.
197. Нескородев Р.Н. Представление решения уточненной теории изгиба изотропных плит / Нескородев Р.Н. // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 4. – С. 65 – 73.
- Neskorodev R.N. Representation of the solution of refined bending theory for isotropic plates / R.N. Neskorodev // Mechanics of Solids. – 2014. – V. 49, № 4. – P. 413 – 421.
198. Нескородев Р.Н. Метод переменных коэффициентов упругости решения задач вязкоупругости / Р.Н. Нескородев // Труды Института прикладной математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 114 – 126.
199. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое поведение анизотропного массива горных пород вблизи протяженной выработки // Нескородев Р.Н. / Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: Материалы I Международной научной конференции (Донецк, 16-18 мая 2016 г.) – Т. 1. Физико-математические, технические науки, экология / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 38 – 41.
200. Нескородев Р.Н. Напряженно-деформированное состояние вблизи выработки эллиптического сечения в условиях ползучести анизотропных горных пород / Р.Н. Нескородев // Труды XVIII Международной конференции “Современные

- проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 7 - 10 ноября 2016 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – Т. 2. – С. 132 – 136.
201. Нескородев Р.Н. Преобразование интегральных уравнений состояния вязкоупругих горных пород к временным уравнениям закона Гука / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 3. – С. 10 – 21.
202. Нескородев Р.Н. Ползучесть анизотропных горных пород с выработками в условиях обобщенной плоской деформации / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 4. – С. 50 – 57.
203. Нескородев Р.Н. Определение напряженного состояния вблизи горизонтальной выработки в условиях ползучести анизотропных горных пород / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2016. – № 2 (57). – С. 14 – 23.
204. Нескородев Р.Н. Об одном варианте построения уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 68 – 74.
205. Нескородев Р.Н. Решение задачи изгиба ортотропной плиты в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 3-4 (60-61). – С. 60 – 68.
206. Нескородев Р.Н. Изгиб трансверсально-изотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 1. – С. 26 – 35.
207. Нескородев Р.Н. Метод переменных коэффициентов упругости решения задач изгиба вязкоупругих изотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – № 1 (58). – С. 42 – 56.
208. Нескородев Р.Н. Об одном варианте решения задач уточненной теории изгиба ортотропных плит / Нескородев Р.Н. // Донецкие чтения 2018. Образование, наука и вызовы современности: Материалы III Международной научной конференции (Донецк, 25 октября 2018 г.) – Т. 1. Физико-

- математические и технические науки / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 303 – 305.
209. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое напряженное состояние анизотропных горных пород с жестко подкрепленной горизонтальной выработкой эллиптического сечения // Р.Н. Нескородев, В.И. Сторожев / Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IV Международной научной конференции (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1 / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 65 – 67.
210. Нескородев Р.Н. Математические модели геомеханики: учебное пособие (2-е издание) / Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2019. – 105 с.
211. Нескородев Р.Н. Реализация математических моделей геомеханики в среде пакета Matlab: учебно-методическое пособие (2-е издание) / Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2019. – 90 с.
212. Нескородев Р.Н. Методика получения разрешающих уравнений теории изгиба ортотропных плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 32 – 38.
213. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое напряженно-деформируемое состояние в нарушенных анизотропных массивах с горизонтальными выработками / Р.Н. Нескородев // Труды XX Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (Ростов-на-Дону, 18 – 21 июня 2020 г.): в 2 т. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2020. – Т. 2. – С. 178 – 182.
214. Нескородев Р.Н. Об одном способе получения разрешающих уравнений уточненной теории изгиба ортотропных плит / Р.Н. Нескородев // Донецкие чтения 2020: Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17 - 18 ноября 2020 г.) – Т. 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1 / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 84 – 86.

215. Нескородев Р.Н. Изгиб ортотропных вязкоупругих плит в уточненной постановке / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 4 (73). – С. 24 – 32.
216. Нескородев Р.Н. Ползучесть анизотропного массива горных пород с несколькими горизонтальными выработками / Р.Н. Нескородев // Донецкие чтения 2021: Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VI Международной научной конференции (Донецк, 26 - 27 октября 2021 г.) – Т. 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 54 – 56.
217. Нескородев Р.Н. Вязкоупругое состояние многосвязного анизотропного горного массива с горизонтальными выработками / Р.Н. Нескородев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 3 (73). – С. 18 – 24.
218. Никифоров А.Ф. Специальные функции математической физики / А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. – М.: Наука, 1978. – 320с.
219. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
220. Пелех Б.Л. К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями / Б.Л. Пелех // Прикладная механика. – 1965. – Т. 1, № 7. – С. 139 – 143.
221. Пелех Б.Л. К исследованию концентрации напряжений около отверстий при изгибе плит / Б.Л. Пелех // Концентрация напряжений. – 1965. – Вып. 1. – С. 200 – 206.
222. Пелех Б.Л. Некоторые задачи изгиба трансверсально-изотропных пластин, ослабленных круговыми отверстиями / Б.Л. Пелех // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1969. – Т. 22, № 5. – С. 35 – 44.
223. Пелех Б.Л. Изгиб бесконечной трансверсально-изотропной плиты с впаянной упругой шайбой из другого материала / Б.Л. Пелех, С.А. Пелех // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1969. – Т. 22, № 6. – С. 38 – 44.

224. Пелех Б.Л. О решении задач изгиба пластин для многосвязных областей / Б.Л. Пелех // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5, № 9. – С. 54 – 61.
225. Пелех Б.Л. Изгиб бесконечной трансверсально-изотропной пластины, ослабленной конечным числом круговых отверстий / Б.Л. Пелех // Известия АН Арм ССР. Механика. – 1970. – Т. 23, № 1. – С. 50 – 57.
226. Пелех Б.Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б.Л. Пелех, В.А. Лазько. – Киев: Наук. думка, 1982. – 295 с.
227. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин / Б.Л. Пелех. – К.: Наук. Думка, 1997. – 182 с.
228. Перепелица В.Г. Методика аналитических исследований распределения напряжений в забоях разных форм при проведении горных выработок / В.Г. Перепелица, Л.Д. Шматовский, А.Н. Коломиец // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2008. – Вып. 78. – С. 18 – 33.
229. Пестренин В.М. Применение аппроксимации в задачах линейной теории вязкоупругого анизотропного тела / В.М. Пестренин, И.В. Пестренина // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 462 – 467.
230. Пештмалджян Д.В. Об изгибе трансверсально-изотропной пластинки с круговым отверстием / Д.В. Пештмалджян, А.А. Хачатрян // Известия АН Арм. ССР. Сер.: Механика. – 1968. – Т. 21, № 5-6. – С. 44 – 50.
231. Плеханов А.В. Об уточненной теории пластин при конечных прогибах / А.В. Плеханов, А.П. Прусаков // Прикладная механика. – 1982. – Т. 18, № 11. – С. 70 – 74.
232. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б.Е. Победря. – М: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
233. Подильчук И.Ю. Исследование концентрации напряжений в вязкоупругой ортотропной пластине с жестким круговым включением / И.Ю. Подильчук // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 8. – С. 78 – 88.

234. Подильчук И.Ю. Исследование концентрации напряжений в вязкоупругой ортотропной пластине с эллиптическим отверстием / И.Ю. Подильчук // Прикладная механика. – 1997. – Т. 33, № 9. – С. 64 – 73.
235. Покровский Г.П. Центробежное моделирование в горном деле / Г.П. Покровский, И.С. Федоров. – М.: Недра, 1969. – 263 с.
236. Полухин В.А. Управление напряженным состоянием породного массива и устойчивостью горных выработок / В.А. Полухин, С.А. Калоеров, Ю.Б. Грядущий, Е.С. Горянская. – Донецк: Юго-Восток, 2002. – 304 с.
237. Понятовский В.В. К теории изгиба анизотропных пластинок / В.В. Понятовский // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 6. – С. 1033 – 1039.
238. Протоdjяконов М.М. Давление горных пород и рудничное крепление. Ч. 2. Рудничное крепление / М.М. Протоdjяконов. – М.: Гостехиздат, 1933. – 127 с.
239. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю.Н. Работнов // Прикл. математика и механика. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 53 – 62.
240. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
241. Работнов Ю.Н. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 / Ю.Н. Работнов, Л.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // Механика полимеров. – 1971. – № 3. – С. 391 – 397.
242. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
243. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
244. Рвачев В.Л. Алгебрологические и проекционные методы в задачах теплообмена / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1978. – 138 с.
245. Рвачев В.Л. Теория R-фукнций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
246. Ржаницын А.Р. Теория ползучести / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1968. – 416 с.

247. Ровинский Б.М. Коэффициент Пуассона при релаксации напряжений / Б.М. Ровинский, В.Г. Лютцау // Изв. АН СССР. ОТН. – 1953. – № 10. С. 1471 – 1474.
248. Родин И.В. К вопросу о влиянии выработок на напряженное состояние горного массива / И.В. Родин // Известия АН СССР ОТН. – 1950. – № 12. – С. 1763 – 1783.
249. Розовский М.И. Некоторые свойства специальных операторов, применяемых в теории ползучести / М.И. Розовский // Прикл. математика и механика. – 1959. – Том 23, №5. – С. 978 – 983.
250. Розовский М.И. Приложения интегральных операторов к определению напряжений и перемещений контура подземного сооружения с учетом влияния фактора времени и анизотропии / М.И. Розовский, А.Н. Зорин // Проблемы механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1966. – С. 365 – 372.
251. Савин Г.Н. Влияние крепления на распределение напряжений возле узких подземных выработок / Г.Н. Савин // Записки Ин-та горной механики АН УССР. – 1947. – № 5. – В кн.: Механика деформируемых тел. Избранные труды. – Киев: Наукова думка, 1979. – С. 73 – 100.
252. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 494 с.
253. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
254. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий в пластинах и оболочках с учетом явлений, обусловленных деформациями поперечного сдвига (обзор) / Г.Н. Савин, Б.Л. Пелех // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7. – № 2. – С. 3 – 11.
255. Садиков Х.С. Численное моделирование задач изгиба и колебаний вязкоупругих пластин сложной формы при различных моделях вязкости / Х.С. Садиков, Д.А. Абдуллаева, А.Ж. Халилов // Молодой ученый. – 2017. – № 50 (184). – С. 82 – 85.

256. Сарсамбаев А.А. Об определении упругих и временных деформаций по слоистым образцам / А.А. Сарсамбаев, А.Я. Синяева, В.П. Матвеева, Е.Ф. Кудашов // Исследования по механике горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1965. – С. 114 – 119.
257. Селіванов М.Ф. Дослідження зміни концентрації напружень з часом у в'язкопружному ортотропному тілі / М.Ф. Селіванов, Є.Р. Кульбачний, Д.Р. Онищенко // Доповіді НАН України. – 2020. – № 10. – С. 28 – 34.
258. Сторожев В.И. Ползучесть массивов анизотропных горных пород с выработками усложненной формы сечения / В.И. Сторожев, Р.Н. Нескородев // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – Вып. 3-4. – С. 95 – 106.
259. Тарнопольский Ю.М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков / Ю.М. Тарнопольский Ю.М., А.В. Розе. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с.
260. Трумбачев В.Ф. Изучение распределения напряжений вокруг горных выработок оптическим методом / В.Ф. Трумбачев // Исследование горного давления. – М.: Госгортехиздат, 1960. – С. 158 – 176.
261. Трумбачев В.Ф. Применение оптического метода для исследования напряженного состояния пород вокруг горных выработок / В.Ф. Трумбачев, Л.С. Молодцова. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 95 с.
262. Труфанов Н.А. Ползучесть композиционных накопителей энергии / Н.А. Труфанов, О.Ю. Сметанников // Проблемы прочности. – 1991. – № 6. – С. 59 – 62.
263. Труфанов Н.А. Напряженно-деформированное состояние вязкоупругой системы оболочка-оправка при силовой намотке / Н.А. Труфанов, А.А. Суходоева // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 495 – 503.
264. Угодчиков А.Г. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в плитах по теории Рейсснера / А.Г. Угодчиков, В.А. Соболева // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 6. – С. 58 – 66.

265. Устинов Ю.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода в теории плит и оболочек / Ю. А. Устинов, М. А. Шленев // Расчет оболочек и пластин. – Ростов н/Д, 1976. – С. 3 – 27.
266. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б. Фадеев. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
267. Хома И.Ю. Об исследовании напряженного состояния пластин с отверстиями / И.Ю. Хома // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3 – № 1. – С. 37 – 49.
268. Хома И.Ю. О решении граничных задач обобщенной теории ортотропных пластин / И.Ю. Хома // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16. – № 12. – С. 61 – 68.
269. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек / И.Ю. Хома. – Киев: Наукова думка, 1986. – 170 с.
270. Шалдырван В.А. Об одном варианте построения уточненных теорий изгиба трансформных плит / В.А. Шалдырван // Известия АН Арм. ССР. Сер.: Механика. – 1980. – Т. 23, № 2. – С. 55 – 63.
271. Шалдырван В.А. Некоторые результаты проблемы трехмерной теории пластин / В.А. Шалдырван // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 45 – 69.
272. Шалдырван В.А. К задаче цилиндрического изгиба трансверсально-изотропного слоя с полостью / В.А. Шалдырван, Г.В. Ержаков // Труды XV Международной конференции “Современные проблемы механики сплошной среды” (г. Ростов-на-Дону, 4 – 7 декабря 2011 г.) Т. 2. – Ростов-на-Дону, 2011. – С. 156 – 260.
273. Шашенко А.Н. Геомеханика: Учебник для ВУЗов / А.Н. Шашенко, В.П. Пустовойтенко, Е.А. Сдвижкова. – К., 2015. – 563 с.
274. Шевченко В.П. Новый метод решения задач теории вязкоупругости анизотропных сред / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2010. – № 11. – С. 52 – 58.

275. Шевченко В.П. Об одном варианте уточненной теории изгиба трансверсально-изотропных плит / В.П. Шевченко, Р.Н. Нескородев // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 50 – 57.
276. Шевченко В.П. Численно-аналитический метод решения задач линейной вязкоупругости / Шевченко В.П., Нескородев Р.Н. // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 42 – 53.
- Shevchenko V.P. A Numerical-Analytical Method for Solving Problems of Linear Viscoelasticity / Shevchenko V.P., Neskorojev R.N. // International Applied Mechanics.- 2014. – Vol. 50, Issue 3. – P. 263 – 273.
277. Шепери Р. Вязкоупругие свойства композиционных материалов / Р. Шепери // Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – С. 102 – 195.
278. Шерман Д.И. О напряжениях в весоной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями / Д.И. Шерман // Прикладная математика и механика. – 1951. – Т. 15, № 3. – С. 297 – 316.
279. Шерман Д.И. Упругая весоная полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы / Д.И. Шерман // Проблемы механики сплошной среды. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 527 – 563.
280. Шитикова М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела / М.В. Шитикова // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2022. – № 1. – С. 3 – 40.
281. Шкодина Л.Н. Растяжение вязкоупругой изотропной пластины с жестко подкрепленными отверстиями / Л.Н. Шкодина // Теоретическая и прикладная механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 45 – 49.
282. Шкодина Л.Н. Растяжение вязкоупругой пластины с эллиптическими отверстиями / Л.Н. Шкодина, Н.В. Кухта // Теорет. и прикладная механика. – 1980. – Вып. 13. – С. 65 – 68.

283. Шкодина Л.Н. Растяжение вязкоупругой пластины с эллиптическими отверстиями, подкрепленными упругими ядрами / Л.Н. Шкодина // Теоретическая и прикладная механика. – 1986. – Вып. 17. – С. 63 – 67.
284. Шленев М.А. Асимптотический метод решения задачи об изгибе толстой трансверсально-изотропной плиты / М.А. Шленев // Толстые плиты и оболочки. – 1974. – С. 119 – 138.
285. Bazant Z.P. Numerical solution of nonlinear creep problems with application to plates // Int. J. Solids and Struct. – 1971. – Vol. 7. – P. 83 – 97.
286. Boltzmann L. Zur theorie der elastischen nachwirkung / L. Boltzmann // Annalen der Physik and Chemie. – 1876. – Bd. 7. – P. 624 – 654.
287. Boussinesque M.J. Compliments a une etude sur la theorie de lequilibre et du mouvement des solides elastiques // J. Math, pures et appl., ser. 3, vol. 5, 1879. – P. 163 – 194 and 329 – 344.
288. Ding H. Elasticity of transversaly isotropic materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. – Dordrecht: Springer, 2006. – 435 p.
289. Ferry J.D. Viscoelastic properties of polymers / J.D. Ferry. – New York: John Wiley&Sons, 1961. – 412 p.
290. Gehring F.D. De acquationibus differentialibus quibuacquilibrium et modus laminae crystallinae definiuntur. Ph.D. dissertation / F. D. Gehring. – Berlin, 1860. – 150 p.
291. Hencky H. Uber die Berucksichugung der Schubverzerrung in ebenen Platten / H. Hencky // Ing. Arch. – 1947. – Bd. 16, H 1. S. 72 – 76.
292. Huber M.T. Teoria plyt prostokatnie-róznokierunkowych. – Lwow, 1921. – 235 p.
293. Huber M.T. Einige Anwendungen der Biegung Theorie orthotroper Platten // Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech. – 1926. – Bd. 6. – P. 24 – 54.
294. Huber M.T. Probleme der statik technisch wichtiger orthotroper platten: gastvorlesungen in der eidgenössischen technischen hochschule zürich / M. T. Huber. – Warschau, 1929. – 165 p.
295. Jemielita G. On the winding paths of the theory of plates / G. Jemielita // Mechanika Teoretyczna i Stosowana. – 1993. – V. 2., № 31. – P. 317 – 327.

296. Kaminskii A.A. A Continued Fraction Operator Technique for Viscoelasticity Problems Involving Anisotropic Aging Materials / A.A. Kaminskii, G.V. Gavrilov // J. Math. Sciences. – 2000. – Vol. 101, № 1. – P. 2780 – 2784.
297. Kirchhoff G.R. Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem scheibe / G. R. Kirchhoff // J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51 – 58.
298. Koiter W.T. On the foundations of the linear theory of thin elastic shells / W.T. Koiter // Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. – 1970. – Vol. 73. – P. 169 – 195.
299. Naghdi P.M. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shells of revolution / P.M. Naghdi // Quart. Math. – 1957. – Vol. 15, № 1. – P. 41 – 42.
300. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. and Phys. – 1944. – V. 23, № 4. – P. 184 – 191.
301. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates / E. Reissner // Trans. ASME. 1945. – V.67. – P. A69-A77.
302. Reissner E. On bending of elastic plates / E. Reissner // Quart. Appl. Math. – 1947. – V. 5. № 1. – P. 55 – 68.
303. Reissner E. On the equations of linear shallow shell theory / E. Reissner, F.Y. Wan // Stud. Appl. Math. – 1969. – Vol. 48, № 2. – P. 133 – 145.
304. Reissner E. Reflections on the theory of elastic plates / E. Reissner // Appl. Mech. Revs. – 1985. – V. 38., № 11. – P. 1453 – 1464.
305. Reissner E. Asymptotic considerations for transverse bending of orthotropic sheardeformable plates / E. Reissner // ZAMP. – 1989. – V. 40, No 4. – P. 543 – 557.
306. Schapery R.A. A method of viscoelastic stress analysis using elastic solutions / R.A. Schapery // J. Franklin Inst. – 1965. – Vol. 279, № 4. – P. 268 – 289.
307. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars / S.P. Timoshenko // Phil. Magaz. – 1921. – Ser. 6. – Vol. 41. – P. 744 – 746.
308. Timoshenko S.P. History of Strength of Materials / S.P. Timoshenko. – N.-Y.: Dover, 1983. –452 p.

309. Todhunter I. History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials / I. Todhunter, K. Pearson. – N.-Y.: Dover, 1960. – V.2., Pt. 1. – 762 p.; Pt. 2. – 546 p.
310. Volterra V. Sulle equazioni integrodifferenziali della theoria dell'elasticita / V. Volterra // Atti della reale accodemia dei Lincei. – 1909. – Vol. 18, № 2. – P. 151 –167.
311. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations / V. Volterra. – New York, 1959. – 226 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ



ДОНЕЦКАЯ НАРОДНАЯ РЕСПУБЛИКА
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

83001, г. Донецк - 01, ул. Университетская, 24,
тел: приемная (062) 302-07-22, справочная служба (062) 302-06-00, факс: (062) 302-07-49
e-mail: rector@donnu.ru

29.08.2022 № 840/01-276.1.0

На № _____ от _____

Диссертационный совет Д 01.016.03
при ГОУ ВПО «Донецкий
национальный университет»

СПРАВКА

о внедрении результатов исследований диссертационной работы Нескородева Романа Николаевича на тему «Методы исследования неклассических моделей упругого и вязкоупругого деформирования многосвязных тонкостенных конструкций и геомассивов», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Настоящим подтверждается, что новые результаты научных исследований доц. Нескородева Р.Н., заключающиеся в разработке комплекса специализированных аналитико-числовых методов для решения формулируемых в рамках неклассических моделей задач исследования двумерного вязкоупругого напряженно-деформированного состояния многосвязных анизотропных массивов, а также выявлении и систематизации установленных на основе их применения ведущих параметрических закономерностей влияния физико-механических и геометрических параметров моделей на характеристики деформирования классов изучаемых объектов, внедрены в учебный процесс при подготовке авторских разделов учебных дисциплин и учебно-методических материалов в Государственном

образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет»:

– в рамках преподавания учебной дисциплины «Математические модели геомеханики» для студентов направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» на факультете математики и информационных технологий ГОУ ВПО ДОННУ;

– в качестве материалов учебных и учебно-методических пособий:

1. Нескородев Н.М. Напряжения вокруг выработок в анизотропном горном массиве: учебное пособие / Н.М. Нескородев, Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2003. – 148 с.
2. Нескородев Р.Н. Математические модели геомеханики: учебное пособие (2-е издание) / Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2019. – 105 с.
3. Нескородев Р.Н. Реализация математических моделей геомеханики в среде пакета Matlab: учебно-методическое пособие. – 2-е изд., изм. и доп. / Р.Н. Нескородев. – Донецк: ДонНУ, 2020. – 90 с.

Справка дана для предъявления в диссертационный совет.

Проректор, д. пед. наук, профессор



Е.И. Скафа