

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Пачева Марина Николаевна

**ВОЛНОВЫЕ ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ,
ПЕРФОРИРОВАННОМ И СОСТАВНОМ СЛОЕ С УСЛОЖНЕННЫМИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

01.02.04. – механика деформируемого твердого тела

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель

Сторожев Валерий Иванович

доктор технических наук,

профессор

Донецк – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ В ВИДЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО, СОСТАВНОГО И ПЕРФОРИРОВАННОГО СЛОЯ	17
1.1. Обзор публикаций по ведущим аспектам рассматриваемой проблемы..	17
1.2. Общая характеристика рассматриваемых классов задач.....	24
1.3. Концептуальные подходы к численно-аналитическому исследованию полей волн деформаций в полубесконечном, составном и содержащем неоднородности упругом слое	28
1.4 Выводы по разделу 1.....	31
РАЗДЕЛ 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ ОТРАЖЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ОТ НАКЛОННОЙ ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУСЛОЯ	33
2.1. Методика исследования процесса отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности трансверсально-изотропного полуслоя со свободными гранями	33
2.2. Отражение нормальных сдвиговых волн от наклонной торцевой поверхности ортотропного полуслоя с закрепленной границей.....	35
2.3. Рассеяние нормальных сдвиговых волн у наклонной торцевой поверхности свободного ортотропного полуслоя	44
2.4. Отражение волн сдвига от свободной наклонной боковой поверхности ортотропного полуслоя на жестком основании.....	52
2.5. Выводы по разделу 2.....	63

РАЗДЕЛ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ	
УПРУГИХ ВОЛН ВДОЛЬ СОСТАВНОГО ВОЛНОВОДА	
СО СТЫКУЕМЫМИ ПОД УГЛОМ ОДНОРОДНЫМИ	
ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ИЛИ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ	
КОМПОНЕНТАМИ.....	65
3.1. Прохождение сдвиговой волны по упругому волноводу из	
состыкованных под углом полуслоев	65
3.2. Методика учета особенностей поля напряжений на границах области	
контакта компонентов волновода.....	78
3.3. Модифицированная схема алгебраизации функциональных	
граничных условий задачи о поперечных упругих волнах в	
Г-образном волноводе.....	90
3.4. Сдвиговые волны в упругом слое с участком зигзагообразного излома	94
3.5. Распространение волн сдвига по волноводу с изломом дугообразной	
формы	98
3.6. Выводы по разделу 3	104
РАЗДЕЛ 4. СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ ИЗ	
КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОЛУСЛОЕВ В СЛУЧАЕ	
УСЛОЖНЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА	
ЛИБО УСЛОЖНЕННЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ	
СВОЙСТВ СТЫКУЕМЫХ КОМПОНЕНТОВ	107
4.1. Сдвиговые волны в составном поперечно-анизотропном волноводе из	
полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми	
поверхностями	107
4.2. Энергетические характеристики нормальных волн сдвига в составном	
волноводе из изотропного и ортотропного полуслоев	111
4.3. Трансформация нормальных упругих волн сдвига при падении на	
поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-	
градиентных полуслоев	115

4.4. Выводы по разделу 4	129
РАЗДЕЛ 5. ВОЛНОВЫЕ ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЕРФОРИРОВАННОМ СЛОЕ	131
5.1. Методика анализа модели волнового деформирования свободного по граням слоя с локализованной внутренней туннельной полостью либо включением	131
5.2. Методика исследования полей сдвиговых волн в функционально- градиентном изотропном упругом слое с туннельной цилиндрической полостью	147
5.3. Методика анализа модели формирования поля стоячих волн в перфорированном слое с полостями или включениями.....	152
5.4. Выводы по разделу 5.....	170
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	173
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	176
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	197

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Процессы распространения, отражения, преломления и локализации волн деформаций в упругих телах и элементах конструкций в форме слоя с различными особенностями физико-механических свойств и геометрического строения являются одними из важнейших и масштабных по разнообразию классами объектов исследований в механике деформируемого твердого тела. Результаты анализа этих проблем на сегодняшний день представлены в многочисленных трудах отечественных и зарубежных ученых, и в концентрированной обобщенной форме отражены в публикациях В.А. Бабешко, А.О. Ватульяна, М.В. Вильде, Л.П. Вовка, И.П. Гетмана, О.В. Глушкова, В.Т. Головчана, Э.И. Григолюка, В.Т. Гринченко, Н.С. Городецкой, А.Н. Гузя, Л.А. Игумнова, В.В. Калинин, Л.Ю. Коссовича, П.В. Крауклиса, С.В. Кузнецова, В.Т. Маципуры, В.В. Мелешко, Л.А. Молоткова, А.Н. Наседкина, Г.И. Петрашеня, А.Н. Соловьева, Ю.А. Устинова, Л.А. Фильштинского, Н.А. Шульги и ряда других авторов. Данные разработки представляют большой теоретический интерес для фундаментальной науки, а также для предпроектных прочностных расчетов в строительной механике и механике подземных горно-шахтных сооружений, в механике конструкций машин, приборов и сооружений, в технологических расчетах для таких современных научно-технических отраслей, как горная сейсмоакустика, неразрушающий ультразвуковой контроль, акустоэлектроника, гидроакустика.

При этом, несмотря на наличие весьма обширного ряда работ по различным аспектам данной проблематики, некоторые ее крайне актуальные тематические разделы стали предметом результативных теоретических и прикладных численно-аналитических разработок лишь в течение нескольких последних десятилетий, и на сегодняшний день остаются областью дальнейших перспективных, важных для фундаментальной науки и инженерной практики исследований. Так, в рассматриваемых моделях динамического деформирования упругого слоя

открытыми до настоящего времени остаются многие вопросы учета факторов выраженной механической анизотропии и непрерывной неоднородности функционально-градиентных материалов, а также ряда специфических усложнений в структуре и геометрическом строении исследуемых объектов. К числу последних относятся наличие наклонных торцевых граничных поверхностей, участков излома и дугообразного искривления слоя, многосвязная геометрия слоя с внутренними туннельными цилиндрическими неоднородностями. Представляет теоретический и прикладной интерес анализ закономерностей распространения упругих сдвиговых волн в меандровых волноводах и составных кусочно-однородных волноводах, образуемых состыкованными под различными углами анизотропными однородными и функционально-градиентными полуслоями, а также изучение полей дифракции на внутренних неоднородностях. В качестве инструмента таких исследований подлежат дальнейшему развитию и совершенствованию теоретические основы и методологические приемы применения численно-аналитического метода частичных областей и метода рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих волн в структурных элементах рассматриваемых волноводов.

Таким образом, тематика диссертации, посвященной разработке и апробации численно-аналитических методов исследования волновых деформационных процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слоях с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, является актуальной с теоретической и прикладной точек зрения.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Представленные в работе исследования связаны с тематикой конкурсных исследовательских проектов: «Волны деформаций в анизотропных телах с локализованными участками неоднородности геометрических и физико-механических свойств» (МОНУ, МОН ДНР, номер государственной регистрации 0113U001529, 2013-2016 гг.); «Математическое моделирование прочностных и волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (МОН ДНР, номер

государственной регистрации 0117D000071, 2017-2019 гг.); «Методы исследования линейных и нелинейных моделей статического и динамического деформирования анизотропных функционально-градиентных упругих тел» (МОН ДНР, номер государственной регистрации 0120D000014, 2020-2022 гг.). Ведущие результаты диссертационной работы включены в отчеты по указанным НИР.

Целью работы является разработка и апробация теоретических численно-аналитических методик анализа полей сдвиговых волн в упругих телах в форме слоя из анизотропных однородных и функционально-градиентных материалов при учете особенностей геометрического строения в виде наклонных плоских торцевых граничных поверхностей, изломов, дугообразных искривлений, внутренних туннельных цилиндрических полостей и включений, а также компьютерная реализация разработанных методик и проведение параметрических исследований ведущих закономерностей в структуре и свойствах анализируемых полей.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

– разработку методического приема учета при исследовании рассматриваемых классов краевых задач динамической антиплоской деформации специфики распределения полей напряжений в окрестностях краевых точек областей контакта сопрягаемых элементов составных волноводов и возможностей появления в указанных точках особенностей степенного типа для этих полей;

– разработку методики теоретического анализа проблемы отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой граничной поверхности анизотропного полуслоя при различных вариантах задания краевых условий на его плоских гранях и на наклонной торцевой поверхности;

– разработку численно-аналитической методики исследования процессов распространения нормальных сдвиговых упругих волн вдоль составных волноводов из стыкуемых под углом анизотропных однородных прямолинейных компонентов и волноводов с прямолинейными участками зигзагообразного излома;

– разработку численно-аналитической методики исследования процессов распространения сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропных составных меандровых волноводов в форме слоя с искривленными участками полукольцевого либо четвертькольцевого поперечного сечения;

– разработку алгоритма построения теоретического численно-аналитического решения задачи о распространении сдвиговых упругих волн в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями;

– изучение процессов трансформации энергетических потоков при распространении сдвиговых нормальных упругих волн по составному волноводу из идеально контактирующих изотропного и ортотропного полуслоев;

– анализ эффектов трансформации нормальных упругих волн сдвига при падении на ортогональную граням плоскую поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев;

– разработку алгоритмов численно-аналитического анализа процессов дифракционного рассеяния нормальных упругих волн продольного сдвига в прямолинейно-ортотропном слое с внутренней туннельной цилиндрической полостью либо туннельным ортотропным цилиндрическим включением эллиптического поперечного сечения с произвольным соотношением полуосей, а также дифракционного рассеяния сдвиговых бегущих нормальных волн на туннельной полости в изотропном функционально-градиентном слое;

– разработку численно-аналитической методики анализа модели расчета характеристик гидроакустических экранов в виде многосвязного деформируемого слоя с периодическим рядом коллинеарных плоским граням внутренних цилиндрических полостей либо радиально-неоднородных цилиндрических включений.

Объект исследования – процессы упругих колебаний и распространения стационарных волн деформаций в волноводах в форме плоскопараллельного, однородного, составного, искривленного либо содержащего внутренние неоднородности упругого слоя.

Предмет исследования – кинематические, энергетические и силовые характеристики полей сдвиговых упругих волн в полубесконечном, перфорированном и составном однородном либо функционально-градиентном слое при учете факторов механической анизотропии и усложненных геометрических свойств.

Методы исследования. В исследованиях применяются линейные модели стационарного динамического деформирования однородных и неоднородных анизотропных упругих сред; концептуальные основы метода динамических однородных решений и метода частичных областей; методы анализа особенностей в полях напряжений около угловых точек областей исследования при антиплоской деформации; аппарат теории дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений математической физики; теория разложений в степенные и обобщенно степенные ряды; теория специальных цилиндрических функций; метод ортогональных рядов и алгоритм обобщенной граничной ортогонализации функциональных систем; дискретный и интегральный метод наименьших квадратов; методы разработки специализированных программных приложений для реализации расчетных алгоритмов в среде C++.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Эффекты влияния параметра наклона торцевой граничной поверхности анизотропного полуслоя на структуру полей рассеиваемых на ней нормальных сдвиговых волн варьируемой относительной длины эффективно описываются с применением предложенных в работе численно-аналитических методик синтеза теории однородных решений и принципа частичных областей.

2. Получивший развитие в диссертации прием комбинирования метода рядов по базисным системам бегущих и краевых стоячих нормальных волн и метода частичных областей позволяет эффективно реализовать анализ моделей распространения нормальных сдвиговых упругих волн вдоль составных волноводов из стыкуемых под углом анизотропных однородных прямолинейных компонентов и волноводов с прямолинейными участками зигзагообразного излома, моделей распространения сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-

изотропных составных волноводов в виде слоя с искривленными участками полукольцевой либо четвертькольцевой формы, моделей сдвиговых упругих волн в составном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями.

3. Применение в работе синтеза теории однородных решений и принципа частичных областей позволяет эффективно изучить особенности трансформации энергетических потоков при распространении сдвиговых нормальных упругих волн варьируемой частоты по составному волноводу из изотропного и ортотропного полуслоев, а также реализовать анализ эффектов трансформации нормальных упругих волн сдвига при падении на ортогональную граням плоскую поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев,

4. Разработанная методика исследования дифракционного рассеяния нормальных волн сдвига в функционально-градиентном либо прямолинейно-ортотропном слое с внутренней туннельной цилиндрической полостью, с туннельным ортотропным цилиндрическим включением эллиптического сечения, либо с периодическим рядом описанных неоднородностей, позволяет описать эффекты в полях рассеиваемых и преломляющихся во включениях волн различной относительной длины, заключающиеся в появлении и локализации областей фокусной концентрации волновых перемещений в точках включения и слоя, в специфике распределения каналов отгибания, специфике структуры дифракционных полей в дальнем поле при варьировании параметров слоя и включения.

Научная новизна полученных результатов.

1. Предложена и реализована новая базирующаяся на синтезе теории однородных решений и принципе частичных областей модификация метода теоретического анализа проблемы отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой граничной поверхности анизотропного полуслоя при различных вариантах задания краевых условий на его плоских гранях и на наклонной торцевой поверхности.

2. Предложена новая модификация метода анализа моделей распространения нормальных сдвиговых упругих волн вдоль составных волноводов из стыкуемых под углом анизотропных однородных прямолинейных компонентов и волноводов с прямолинейными участками зигзагообразного излома, основанная на комбинировании метода рядов по базисным системам бегущих и краевых стоячих нормальных волн и метода частичных областей.

3. Предложен новый алгоритм теоретического анализа моделей распространения сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропных составных волноводов в форме слоя с искривленными участками полукольцевого либо четвертькольцевого поперечного сечения, а также моделей распространения сдвиговых упругих волн в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями.

4. Впервые разработан алгоритм применения метода обобщенной граничной ортогонализации базисного множества нормальных волн сдвига в анизотропном упругом слое для решения задачи о распространении стационарной сдвиговой волны по составному волноводу из контактирующих полуслоев.

5. Получила развитие методика решения задачи о взаимодействии нормальной упругой волны с границей контакта полуслоев в составном плоскопараллельном волноводе с распространением ее на случай трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев.

6. Впервые разработана базирующаяся на синтезе теории динамических однородных решений, принципа отображений и аппарата теории специальных цилиндрических функций методика численно-аналитического решения задач о дифракционном рассеянии нормальных упругих продольного сдвига на туннельной полости в изотропном функционально-градиентном слое и на внутренней туннельной цилиндрической полости либо на туннельном ортотропном цилиндрическом включении эллиптического поперечного сечения в однородном прямолинейно-ортотропном слое.

7. Впервые осуществлено распространение метода решения задач о дифракционном рассеянии нормальных упругих волн продольного сдвига на

внутренних туннельных полостях либо включениях в упругом слое на задачи расчета характеристик функционирования гидроакустических экранов в виде многосвязного изотропного слоя с периодическим рядом коллинеарных плоским граням внутренних туннельных цилиндрических полостей либо радиально-неоднородных туннельных изотропных цилиндрических включений.

8. Впервые установлены, систематизированы и обобщены некоторые физико-механические закономерности волновых деформационных процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слоях с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

Достоверность и обоснованность научных положений, основных результатов и выводов работы обосновывается использованием в процессе исследований апробированных математических моделей деформационных процессов; строгостью и корректностью постановок рассматриваемых задач; применением апробированных корректных математических методов; верификацией полученных решений по критериям удовлетворения граничным условиям исследуемых краевых задач; сходимостью в представлениях, получаемых в форме функциональных рядов; согласованностью результатов применения разработанных методик в предельных частных случаях с опубликованными результатами других исследователей.

Теоретическая значимость результатов работы заключается в создании, совершенствовании и расширении областей применения предложенных эффективных численно-аналитических методик решения новых классов задач теории волновых процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слое с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

Практическое значение полученных результатов заключается в применимости разработанных методик, алгоритмов их числовой реализации, установленных и обобщенных свойств и закономерностей анализируемых волновых процессов в предпроектном моделировании и конструкторских расчетах новых поколений волноводных акустоэлектронных компонентов, при разработке технологий геоакустических исследований, неразрушающего

ультразвукового контроля, при проектировании систем гидроакустического экранирования, в практике прочностных расчетов элементов строительных конструкций и деталей машин из анизотропных функционально-градиентных композиционных материалов.

Результаты диссертационного исследования, а именно методики синтеза теории динамических однородных решений, принципа частичных областей и принципа отражения для исследования волновых деформационных процессов, внедрены в учебный процесс в ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» в качестве материала разделов учебного курса «Методы компьютерно-математического моделирования в задачах волновой механики» для студентов образовательного направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Личный вклад автора. Все основные теоретические и расчетные результаты исследований получены лично соискателем. Из 34 публикаций [18–21, 36–37, 49–50, 96–119, 125–126] по теме работы 17 подготовлены самостоятельно. В совместно проведенных исследованиях и опубликованных работах, соавторам В.Е. Болнокину [18–21], В.И. Сторожеву [18–21, 36–37, 49–50, 97, 103–104, 110, 112, 114, 118, 125–126], Зыонг Минь Хай [18–19], Чан Ба Ле Хоанг [18–19] принадлежат участие в постановке рассматриваемых задач, рекомендации по схемам анализа и обобщения, а также направлениям практического применения полученных результатов; соавторам Д.С. Вуколову [36–37], А.А. Глухову [49–50], Л.В. Дубяго [97], С.А. Прийменко [126], А.С. Телевному [103] принадлежат консультационные рекомендации по разработке программных приложений для осуществления численных экспериментов на базе предложенных методик, а также участие в обработке и систематизации их результатов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы были представлены, доложены и обсуждены на: IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела», посвященной памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского (г. Донецк, ДонНУ, 2006 г.); Всеукраинской научной конференции молодых

ученых и студентов по дифференциальным уравнениям и их приложениям, посвященной 100-летию юбилею Я.Б. Лопатинского (г. Донецк, ДонНУ, 2006 г.); Акустическом симпозиуме «Консонанс–2007» (Киев, ИГМ НАНУ, 2007 г.); Международной научно-технической конференции памяти академика НАН Украины В.И. Моссаковского (Днепропетровск, ДНУ, 2007 г.); I, II, III, IV, V, VI и VII Международных научно-практических интернет-конференциях «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты» (Донецк, ДонНУЭТ, 2012 г., 2013 г., 2014 г., 2015 г., 2016 г., 2017 г., 2018 г.); X, XI и XIV Всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, ЮФУ, 2015 г., 2016 г., 2019 г.); VI и VII Международных научных конференциях «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела» (пос. Мелекино, ДонНУ, 2010 г., 2013 г.); I, IV, V, VI и VII Международных научных конференциях «Донецкие чтения. Образование, наука и вызовы современности» (г. Донецк, ДонНУ, 2016 г., 2019 г., 2020 г., 2021 г., 2022 г.); научных конференциях профессорско-преподавательского состава ДонНУ (г. Донецк, ДонНУ, 2009 г., 2013 г.).

Работа по отдельным полученным результатам и в целом была доложена и обсуждена на объединенных научных семинарах по механике сплошных сред кафедры теории упругости и вычислительной математики им. академика А.С. Космодамианского ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» и отдела аналитической механики горных пород ГУ «Институт прикладной математики и механики» под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А. Калоерова (2018 – 2022 гг.).

Публикации. По теме диссертации опубликованы 34 научные работы [18–21, 36–37, 49–50, 96–119, 125–126], в том числе: в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК ДНР – 5 [96, 107, 108, 112, 116], одна из которых [108] в издании, включенном в Международную наукометрическую базу MathSciNet; в других изданиях – 29. В автореферате диссертации приведен список 20 основных публикаций.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения с основными выводами и результатами, списка литературы из 180 наименований и приложения. Работа содержит 68 рисунков и 3 таблицы, изложена на 199 страницах.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, определяются цели, задачи, предмет, объект и методологические основания исследования, дается характеристика степени новизны, теоретической и практической значимости результатов исследования, публикаций и апробаций по теме работы, а также личного вклада автора в получение представленных в диссертации результатов.

В первом разделе работы представлена информация об основных методах и результатах исследований динамического деформирования упругих тел в виде полубесконечного и составного слоя, включая обзор публикаций по ведущим аспектам рассматриваемой проблемы, общая характеристика рассматриваемых классов задач и описание концептуальных подходов к численно-аналитическому исследованию полей волн деформаций в полубесконечном, составном и содержащем неоднородности упругом слое

Во втором разделе работы представлен теоретический анализ проблемы отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности анизотропного полуслоя. Изложена методика исследования процесса отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности трансверсально-изотропного полуслоя со свободными гранями, а также результаты исследований по задачам об отражении нормальных сдвиговых волн от наклонной торцевой поверхности ортотропного полуслоя с закрепленной границей, рассеянии сдвиговых волн у наклонной торцевой поверхности свободного ортотропного полуслоя, отражении волн сдвига от свободной наклонной боковой поверхности ортотропного полуслоя на жестком основании.

В третьем разделе приводятся результаты исследования процессов распространения упругих волн вдоль составного волновода со стыкуемыми под углом однородными прямолинейными или криволинейными компонентами,

включая результаты разработки методик решения задач о прохождении сдвиговой волны по ортотропному волноводу из состыкованных под углом полуслоев, о сдвиговых волнах в упругом слое с участком зигзагообразного излома и о распространении волн сдвига по волноводу меандровой структуры с изломом дугообразной формы. Представлены также результаты разработки модифицированной схемы алгебраизации функциональных граничных условий задачи о поперечных упругих волнах в Г-образном волноводе, базирующейся на приеме обобщенной граничной ортогонализации базисных систем нормальных волн в стыкуемых компонентах волновода.

В четвертом разделе работы приводятся методы и результаты исследования процессов распространения сдвиговых волн в волноводе из состыкованных полуслоев в случае усложненной геометрии поверхности контакта либо усложненных физико-механических свойств стыкуемых компонентов. Представлены методики и результаты решения задач о сдвиговых волнах в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями, об энергетических характеристиках нормальных волн сдвига в составном волноводе из изотропного и ортотропного полуслоев и о трансформации нормальных упругих волн сдвига при падении на поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев.

В пятом разделе диссертации излагаются методы и результаты исследования волновых деформационных процессов в перфорированном слое. Представлена разработка методики анализа модели волнового деформирования свободного по граням слоя с локализованной внутренней туннельной полостью либо включением, методики исследования полей сдвиговых волн в функционально-градиентном изотропном упругом слое с туннельной цилиндрической полостью и методики анализа модели формирования поля стоячих волн в перфорированном слое с полостями или включениями.

В приложении приведены материалы внедрения результатов работы в учебный процесс.

РАЗДЕЛ 1

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ В ВИДЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО, СОСТАВНОГО И ПЕРФОРИРОВАННОГО СЛОЯ

1.1. Обзор публикаций по ведущим аспектам рассматриваемой проблемы

Как отмечено во вступительном разделе работы, процессы формирования и локализации волновых деформационных полей в областях у внешних границ упругих тел и конструктивных элементов с различной геометрией очертания и спецификой физико-механических свойств, полей динамических напряжений и деформаций в зонах контакта компонентов составных упругих тел, дифракционных полей упругих волн в окрестностях границ внутренних неоднородностей в деформируемых телах, являются одним из важнейших и масштабных классов объектов исследований в механике деформируемого твердого тела по тематическому разнообразию и длительности периода активного изучения.

Обобщенная характеристика предшествующих этапов теоретических и экспериментальных исследований по данной проблематике, а также описание основных полученных на этих этапах результатов, с различной степенью полноты и детализации представлены в монографиях и обзорных публикациях Е.В. Алтухова, М.В. Фоменко [3]; В.М. Бабича, Л.А. Молоткова [9]; А.В. Белокопя, А.В. Наседкина [12]; А.О. Ватульяна, А.В. Моргуновой [24]; И.А. Викторова [27, 28]; Л.П. Вовка [30, 34]; И.И. Воровича, В.А. Бабешко [35]; И.П. Гетмана, Ю.А. Устинова [38]; В.Г. Гоголадзе [51], Э.И. Григолюка, И.Т. Селезова [54]; В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [55]; В.Т. Гринченко, И.В. Вовка, В.Т. Маципуры [58]; А.Н. Гузя, В.Т. Головчана [59]; А.Н. Гузя,

В.Д. Кубенко, М.А. Черевко [60]; Р.М. Дейвиса [61]; Э. Дьелесана, Д. Руайе [62]; Н.В. Зволинского, М.И. Рейтмана, Г.С. Шапиро [64]; Г. Кольского [68]; А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева [70, 71]; В.Д. Купрадзе, Т.В. Бурчуладзе [73]; В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгого, А.Н. Трофимчука, Г.Я.Ф. Ван Хейста [78]; Т. Микера, А. Мейтцлера [79]; Р. Миттра, С. Ли [80]; В.З. Партона, П.И. Перлина [95]; В.Т. Головчана, В.Д. Кубенко, Н.А. Шульги [121]; Р.А. Силина [123]; В.А. Шутилова [130]; J.D. Achenbach [132]; М.М. Al-Mousawi [133]; В.А. Auld [135]; P. Chadwick; G.D. Smith [137]; S.K. Datta [140]; K.F. Graff [147]; V.T. Grinchenko, I.V. Vovk, V.T. Matsypura [149]; T.R. Meeker, А.Н. Meitzler [155]; J. Miklowitz [156, 157]; M.J.P. Musgrave [158]; M. Redwood [171]; J. Whitham [178].

Интерес к этим исследованиям, наряду с логикой внутринаучного фундаментального развития данного направления, стимулируется их важнейшими современными приложениями в технологиях ультразвуковой дефектоскопии [27, 67, 130, 140, 180], геоакустики и сейсмодинамики [4–7, 40–48, 128], в технологиях передачи, трансформации и обработки сигналов в акустоэлектронных радиокомпонентах [62, 92, 134, 154, 158, 160–168], в технологиях гидроакустического экранирования [18, 19], в методиках оценки динамической прочности и надежности конструкций и сооружений [54, 73, 121].

Тем не менее, как в теоретическом плане, так и с точки зрения потребностей в эффективных инструментах прикладных предпроектных расчетов, в рассматриваемой предметной области на сегодняшний день сохраняется достаточно обширный ряд важнейших открытых вопросов, связанных с разработкой алгоритмизированных численно-аналитических методов, обеспечивающих корректный максимально точный учет в теоретических исследованиях факторов влияния особенностей неканонического геометрического строения и усложненных физико-механических свойств упругих тел рассматриваемого типа.

Аспектами данной проблематики, рассматриваемыми в настоящей диссертационной работе, являются вопросы прохождения упругих волн через границы раздела в составных упругих волноводах из контактирующих элементов

с геометрией плоскопараллельного либо искривленного слоя, вопросы распространения и дифракционного рассеяния упругих волн в конструкциях в виде перфорированного слоя с внутренними параллельными туннельными полостями или включениями, вопросы проявления динамических эффектов вблизи торцевых граничных поверхностей упругих тел в виде слоя.

Развитие теоретических исследований в рассматриваемой предметной области связано с распространением на исследуемые классы задач одного из двух выделяемых концептуальных численно-аналитических подходов – метода суперпозиции (метода частичных областей), различные аспекты применения которого отражены, в частности, в работах И.В. Вовка, В.Т. Маципуры, Я.П. Троценко [29], Л.П. Вовка [30–34]; Н.С. Городецкой [53]; В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [55]; В.Т. Гринченко, Н.С. Городецкой [57]; В.Т. Гринченко, И.В. Волка, В.Т. Маципуры [58]; А.Д. Ляшко, В.Н. Чехова [75]; С.О. Папкина, В.Н. Чехова [94]; V.T. Grinchenko, I.V. Vovk, V.T. Matsypura [149], а также метода динамических однородных решений (метода рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн), представленного в публикациях О.П. Абрамовой, В.И. Сторожева, В.А. Шпака [1]; Е.В. Алтухова, М.В. Фоменко [3]; Р.В. Бобаковой, И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко [13], Ю.И. Бобровницкого, М.Д. Генкина [15]; Ю.И. Бобровницкого [16]; И.И. Воровича [35]; А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева [70, 71]; А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева, В.А. Шпака [72]; А.В. Наседкина [89, 90]; С.П. Пельца, В.М. Шихмана [120] и ряде других работ. Применительно к методу динамических однородных решений особую роль играют исследования, посвященные вопросам построения базисных систем нормальных волн и исследования дисперсионных соотношений [1, 3, 24–26, 38, 70–72, 81–88], полноты систем однородных решений и сходимости рядов по однородным решениям [63, 71, 120], а также проблеме обобщенной ортогональности систем базисных однородных решений [16, 89], связанной с методиками получения коэффициентов разложений по однородным решениям из краевых условий соответствующих динамических граничных задач.

Отдельный тематический раздел рассматриваемых проблем составляют представленные в работах А.В. Белоконя, А.В. Наседкина [10–12], Т.И. Калининой, А.В. Наседкина [66] исследования волновых процессов в слое, обусловленных движущимися нагрузками.

Относящиеся к рассматриваемой проблематике задачи об отражении нормальных упругих волн от плоского торца упругого тела-волновода в форме изотропного полуслоя, представляющие фундаментальный и прикладной интерес для технологий неразрушающей ультразвуковой диагностики, ультразвукового сваривания, динамических прочностных расчетов оснований и фундаментов, рассмотрены в публикациях Y.H. Cho, J.L. Rose [138]; R. D. Gregory, I. Gladwell [148]; V. Pagneux [170]; P.J. Torvic [176].

Случай взаимодействия упругой волны с наклоненной по отношению к плоским граням изотропного упругого слоя боковой поверхностью рассмотрен в работе Т.В. Суворовой [127]. Однако задачи о взаимодействии упругих гармонических волн сдвигового типа с наклоненным торцом упругого слоя из поперечно-анизотропного либо ортотропного материалов оставались неисследованными актуальными задачами, формулируемыми на современном этапе развития теоретических и прикладных исследований в динамике деформируемого твердого тела.

Эффективные численно-аналитические математические методы описания эффектов прохождения стационарных упругих волн в составных плоскопараллельных волноводах из сопрягаемых компонентов в форме полуслоя на данный момент разработаны применительно к случаям изотропных компонентов в работах Е.В. Алтухова, М.В. Фоменко [3]; Р.В. Бударгина, А.А. Радионова, А.А. Титаренко [22]; Р.В. Бударгина, В.М. Темнова [23]; И.П. Гетмана, Ю.А. Устинова [38]; И.П. Гетмана, О.Н. Лисицкого [39]; Н.С. Городецкой [53]; В.Т. Гринченко, Н.С. Городецкой [57]; Y. H. Cho, J.L. Rose [138]. При этом в работах Р.В. Бударгина, А.А. Радионова [16]; Р.В. Бударгина, А.А. Радионова, А.А. Титаренко [22]; Р.В. Бударгина, В.М. Темнова [23]; А.О. Ватульяна, А.В. Моргуновой [24]; И.П. Гетмана,

Ю.А. Устинова [38]; И.П. Гетмана, О.Н. Лисицкого [39]; В.Т. Гринченко, И.В. Волка, В.Т. Мацыпуры [58]; В.Т. Мацыпуры [77]; Р.А. Силина [123]; V.T. Grinchenko, I.V. Vovk, V.T. Matsypura [149]; E. Khajeh, L. Breon, J.L. Rose [151]. В перечисленных работах рассмотрены также отдельные вопросы анализа закономерностей распространения электромагнитных, звуковых акустических и упругих волн в нерегулярных волноводах из контактирующих участков слоев различной толщины, в волноводах сложного изменяющегося по длине поперечного сечения и с изменяющимися по длине физико-механическими свойствами.

Теоретический анализ волновых процессов в составных конструкциях имеет принципиально важный аспект, связанный с необходимостью учета в разрабатываемых методиках возможностей появления локальных особенностей полей механических напряжений в крайних угловых точках областей контакта сопрягаемых компонентов. Поэтому исследование ряда рассматриваемых в диссертации задач должно учитывать результаты анализа проблем сингулярности полей напряжений в окрестностях угловых точек областей стыка фрагментов составных деформируемых тел, представляемые, в частности, в работах В.Т. Аваняна, Н.В. Аваняна, А.А. Баблюяна [2]; Л.П. Вовка [30–34]; А.И. Каландия [65]; В.А. Кондратьева [69]; В.Т. Мацыпуры [76]; А.М. Саргсяна [122]; А.Н. England [2]; G.B. Sinclair [172, 173]; M.L. Williams [179].

Актуальной проблемой, рассматриваемой применительно к телам в форме полубесконечного слоя, является также анализ эффектов локализации волновых полей в приграничных областях рассматриваемых тел и явления краевого резонанса. Исследования в этом направлении применительно к изотропным телам данной геометрии представлены в работах Е.В. Бабенковой, Ю.Д. Каплунова, Ю.А. Устинова [8]; Ю.И. Бобровницкого, М.П. Короткова [8]; В.Т. Гринченко [56]; Y.H. Cho, J.L. Rose [138]; V. Pagneux [170];

Задача о распространении акустической звуковой волны в плоскопараллельном волноводе с изломом рассматривалась в работе Г.Ю. Гончаровой, В.Т. Мацыпуры [52]. Однако случаи, когда компоненты

составных волноводов в виде полубесконечных либо конечных отрезков плоскопараллельного слоя являются анизотропными упругими телами из однородных либо функционально градиентных [136, 144, 145, 152, 159, 174, 177] материалов, составляют поле открытых для исследования задач из рассматриваемой предметной области. Одному из ее частных вариантов с предлагаемой схемой исследования посвящена публикация В.И. Сторожева, Е.Ю. Павлюшиной [124].

К подлежащим исследованию актуальным задачам анализа волновых деформационных процессов в слое с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами относятся и задачи о прохождении сдвиговых упругих волн по волноводам с участками дугообразных изломов различной угловой меры. Подобные задачи, как свидетельствует обзор опубликованных исследований по данной проблематике, применительно к случаю механических волн практически не исследовались, и результаты их анализа представляют значительный интерес для прикладных расчетных моделей распространения сигналов в акустоэлектронных устройствах, в частности ультразвуковых линиях задержки [80, 122, 130, 151, 158,], а также в пластах горных пород с участками выгиба, искривления и выпучивания [4–6, 41–48, 128].

Еще одним обширным классом задач по рассматриваемой проблематике являются задачи об эффектах дифракционного рассеяния нормальных сдвиговых волн деформаций на внутренних неоднородностях в виде туннельных незаполненных либо содержащих упругие включения цилиндрических полостях, расположенных в толще плоскопараллельного упругого слоя и ориентированных коллинеарно его плоским граням. Задачи данного типа применительно к случаям изотропного слоя с различными типами краевых условий на граничных плоскостях, слоя с изотропными включениями, рассматривались в работах [59, 60, 150]; в работах [93, 169] рассмотрена задача о рассеянии магнитоупругих сдвиговых волн на туннельной цилиндрической полости в слое их изотропного электропроводного материала; в публикации [146] представлено исследование проблемы описания характеристик упругой волны сдвигового типа,

распространяющейся вдоль изотропного упругого слоя с периодической системой внутренних туннельных цилиндрических полостей. Задача о рассеянии сдвиговых упругих волн на туннельной цилиндрической полости в изотропном слое из функционально-градиентного материала в контексте использования результатов исследования в технологиях неразрушающего ультразвукового контроля рассматривалась в публикации [180]. Однако принципиально важные в фундаментальном и прикладном аспектах проблемы исследования перечисленных моделей волновых полей в перфорированном слое с туннельными внутренними полостями и включениями применительно к случаям поперечно-анизотропных и ортотропных кристаллических и композиционных материалов, неоднородных функционально-градиентных материалов с анизотропией физико-механических свойств указанных типов, остаются открытыми наследованными задачами из данной предметной области.

Таким образом, к числу новых важных аспектов, подлежащих учету в перспективных исследованиях по охарактеризованной проблематике, относятся учет существенной разнотипной физико-механической анизотропии современных конструкционных кристаллических, керамических и композиционных материалов [63, 64, 67, 115, 122, 125, 127, 134, 150 – 153], учет свойств выраженной непрерывной неоднородности [15, 20, 59, 121], свойственной новым классам создаваемых с применением аддитивных технологий функционально-градиентных конструкционных материалов [21, 123, 130 – 133, 139, 144, 149, 155, 158], учет свойств материалов с особыми специальными акустическими свойствами [5, 8]. Актуальными подлежащими решению заданиями является также учет усложненного геометрического строения полубесконечных и составных анизотропных функционально-градиентных волноводов.

Охарактеризованное состояние исследований по проблемам исследования волновых деформационных процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слое составляет информационную базу для определения темы и заданий данного диссертационного исследования, содержанием которых является разработка и апробация теоретических численно-аналитических методов

исследования волновых деформационных процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слоях с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, а именно – одновременного учета в рассматриваемых моделях динамического упругого деформирования тел в форме слоя факторов усложнения физико-механических свойств в виде выраженной анизотропии и непрерывной неоднородности материалов исследуемых объектов, а также ряда специфических усложнений в геометрии рассматриваемых объектов, в том числе – не ортогональных граням слоя боковых поверхностей, наличия участков излома и дугообразного искривления слоя, многосвязной внутренней геометрии слоя с туннельными цилиндрическими неоднородностями.

1.2. Общая характеристика рассматриваемых классов задач

В рамках сформулированных целей исследования в диссертации ставятся задачи разработки и базирующегося на числовой компьютерной реализации применения методов теоретического численно-аналитического исследования нескольких новых актуальных классов задач теории волновых деформационных процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слое с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

Первый подлежащий исследованию класс составляют задачи об отражении нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности трансверсально-изотропного полуслоя со свободными гранями, от наклонной торцевой поверхности ортотропного полуслоя с закрепленными либо свободными боковой границей и плоскими гранями, от свободной либо закрепленной наклонной боковой поверхности ортотропного полуслоя на жестком основании. В задачах перечисленного типа рассматриваемым объектом является ортотропное либо трансверсально-изотропное упругое тело в виде части плоскопараллельного слоя (полуслоя) с плоскими гранями, коллинеарными плоскостям упругой симметрии его материала, и с боковой границей (торцевой поверхностью),

представляющей собой плоскость, наклоненную по отношению к плоским граням и коллинеарную горизонтальному упруго-эквивалентному направлению.

Для описанного упругого тела рассматривается задача о падении и отражении от торца полуслоя нормальной сдвиговой волны из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра, генерируемой в бесконечно удаленной от его боковой поверхности области при заданном типе краевых условий на плоских гранях. Подлежащая исследованию проблема заключается в разработке соответствующей модификации метода динамических однородных решений (метода рядов по базисным семействам бегущих и краевых стоячих нормальных волн), учитывающей специфику процедуры удовлетворения краевым условиям задачи на наклоненной торцевой поверхности, и анализе с использованием этой модификации специфических свойств волновых полей у торца анизотропного полуслоя, и в удаленной от него зоне при варьируемых показателях наклона торца и оговариваемых вариантах задания однородных граничных условий.

Следующий класс анализируемых задач включает задачи трех типов.

Во-первых, это задачи описания полей сдвиговых упругих волн в составном волноводе, образуемом состыкованными под углом полуслоями из разнотипных прямолинейно-ортотропных материалов. Один из полуслоев имеет ортогональную граням торцевую поверхность, а второй – наклоненную торцевую поверхность при условии равенства размеров стыкующихся торцевых граничных поверхностей. В рассмотрение включается и случай стыковки полуслоев под прямым углом.

Вторым типом задач являются задачи описания поля сдвиговых упругих волн в состоящем из трех фрагментов составном ортотропном упругом слое с прямолинейным участком зигзагообразного излома. В общем случае рассматриваемый волновод имеет первую компоненту в виде ортотропного полуслоя с ортогональным граням или наклоненным торцом, к которому под углом пристыкован второй фрагмент в виде конечного по длине участка ортотропного слоя, а к его конечной перпендикулярной или наклоненной к граням торцевой поверхности в свою очередь пристыкован третий фрагмент в виде ортотропного полуслоя с указанными вариантами вида торцевой граничной поверхности,

средина плоскость которого является коллинеарной срединной полскости первого фрагмента-полуслоя. Таким образом, рассматриваемый волновод с участком прямолинейного излома имеет зигзагообразную форму. Как и для задач первого типа, предполагается выполнение условий равенства размеров стыкующихся торцевых граничных поверхностей. Исследованию для описываемого волновода подлежат процессы прохождения по нему генерируемой в бесконечно удаленной от торца зоне первого фрагмента-полуслоя нормальной сдвиговой волны из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра при заданном типе краевых условий на плоских гранях, включая процессы взаимодействия волн с обеими контактными плоскостями фрагментов волновода.

Задачи третьего типа связаны с исследованием процессов распространения упругих волн вдоль составного волновода со стыкуемыми под углом криволинейными компонентами, в частности волновода с участком меандровой структуры, с изломом дугообразной формы. В этой связи рассматриваются волноводы из трех компонентов; первый и последний из них, как и для волновода зигзагообразной формы с участком прямолинейного излома, в общем случае имеют вид упругого полуслоя с некоторым образом ориентированным по отношению к граням плоским торцом, а средний участок является фрагментом цилиндрического слоя с дугообразным сечением заданной угловой секторной меры, который по окружным торцевым поверхностям с идеальным механическим контактом стыкуется с полуслоями при выполнении условий равенства размеров стыкующихся торцевых граничных поверхностей. Отдельно рассматриваемыми случаями здесь являются составные волноводы из полуслоев с ортогональными граням плоскими торцами и со средним участком дугообразного сечения полукруговой угловой меры (волновод с подковообразным сечением), либо четвертькруговой меры (волновод Г-образной формы с закругленной вершиной). Применительно ко всем описанным волноводам третьего типа исследованию также подлежат процессы прохождения по ним генерируемой в бесконечно удаленной от торца зоне первого фрагмента-полуслоя нормальной сдвиговой волны из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра при

заданном типе краевых условий на плоских гранях, включая процессы взаимодействия волн с обеими плоскостями контакта фрагментов волновода и движения волн по криволинейным закругленным участкам.

К рассматриваемым в диссертации классам задач относятся также задачи исследования структуры волновых полей в составных плоскопараллельных волноводах из состыкованных полуслоев в случае усложненной геометрии торцевых поверхностей контакта либо в случае усложненных физико-механических свойств сопрягаемых компонентов. При этом исследованию подлежат задачи о сдвиговых волнах в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями; задачи исследования энергетических характеристик нормальных волн сдвига в составных волноводах из изотропного и ортотропного полуслоев; задачи о трансформации нормальных упругих волн сдвига при падении на поверхность контакта полуслоев из отличающихся по свойствам трансверсально-изотропных функционально-градиентных материалов.

Наконец, еще одним классом подлежащих рассмотрению в диссертации волноводов, являются волноводы сдвиговых волн в виде слоя с внутренними туннельными неоднородностями в виде полостей либо цилиндрических включений с коллинеарными, ориентированными параллельно граням слоя осями (волноводы в виде продольно перфорированного слоя). Реализуемое по этой проблематике исследование предполагает разработку методики анализа модели сдвигового волнового деформирования ортотропного слоя с локализованной внутренней туннельной полостью либо туннельным анизотропным упругим включением; получение дисперсионного соотношения для сдвиговых упругих волн в анизотропном слое с периодическим рядом внутренних туннельных цилиндрических полостей; разработку методики анализа моделей формирования поля стоячих волн в перфорированном слое с полостями или включениями при внешних воздействиях, приложенных к плоским граням слоя, представляющих, в частности прикладной интерес для разработок в области гидроакустического экранирования.

При охарактеризованной выше общей постановке рассматриваемых в диссертации классов задач волновой механики деформируемого твердого тела, их

детализированные математические формулировки даются непосредственно в подразделах, посвященных разработке соответствующих методик численно-аналитического исследования.

1.3. Концептуальные подходы к численно-аналитическому исследованию полей волн деформаций в полубесконечном, составном и содержащем неоднородности упругом слое

Реализуемое в диссертационной работе исследование, посвященное разработке обеспечивающих эффективную компьютерную реализацию теоретических численно-аналитических методов исследования волновых полей в полубесконечном, составном и содержащем неоднородности слое с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, соответственно сформулированным выше общим постановкам рассматриваемых задач, базируется на применении ряда концептуальных подходов в математическом моделировании проблем механики деформируемого твердого тела.

Первым из них является принцип описания исследуемых полей в форме спектральных разложений по базисным множествам распространяющихся (бегущих) и краевых стоячих нормальных упругих волн, называемый также методом динамических однородных решений. Некоторые основные положения этого метода, включая вопросы построения базисных систем нормальных волн, исследования дисперсионных соотношений, вопросы полноты систем однородных решений, сходимости рядов по однородным решениям, получения коэффициентов разложений по однородным решениям из краевых условий соответствующих динамических граничных задач, отражены и получили развитие в работах В.А. Бабешко, А.О. Ватульяна, И.И. Воровича, И.П. Гетмана, А.С. Космодамианского, И.А. Моисеенко, А.В. Наседкина, В.И. Сторожева, Ю.А. Устинова, М.А. Шленева, В.А. Шалдырвана и ряда других исследователей [1, 3, 13, 15, 16, 24–26, 35, 38, 63, 70–72, 81–90, 120].

Схема реализации метода однородных решений применительно к сформулированной в дифференциальной форме краевой задаче для определенной в области V с границей G_V вектор-функции $\bar{\Phi}(\bar{x})$

$$L_V \bar{\Phi}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in V;$$

$$(L_{G_1} \bar{\Phi}(\bar{x}))_{G_1} = 0; \quad (L_{G_2} \bar{\Phi}(\bar{x}))_{G_2} = \Psi(\bar{x}|_{G_2}); \quad G_1 \cup G_2 = G_V,$$

где L_V, L_{G_1}, L_{G_2} – некоторые дифференциальные операторы, может быть представлена следующим образом.

На первом этапе применения метода рассматривается однородная спектральная граничная задача

$$L_V \bar{\Phi}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in V; \quad (L_{G_1} \bar{\Phi}(\bar{x}))_{G_1} = 0;$$

для которой определяется базисное множество частных решений $\{\bar{\Phi}_j(\bar{x})\}_{j=1}^{\infty}$ и вводится представление для искомой функции $\bar{\Phi}(\bar{x})$ в виде ряда

$$\bar{\Phi}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \bar{\Phi}_j(\bar{x})$$

с неизвестными подлежащими определению коэффициентами α_j . На втором этапе реализации метода данные коэффициенты определяются из функциональных граничных условий

$$(L_{G_2} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \bar{\Phi}_j(\bar{x}))_{G_2} = \Psi(\bar{x}|_{G_2})$$

на основе их алгебраизации и сведения к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений с использованием одного из отработанных приемов, включающих применение метода, основанного на свойствах обобщенной ортогональности системы базисных однородных решений, методов ортогональных рядов, наименьших квадратов, коллокаций. Возможно также определение искомых коэффициентов с применением метода обобщенной граничной ортогонализации базисного множества однородных решений.

Что касается вопросов обоснования редукции бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, то при наличии исследований по данной проблематике, представленных, в частности, в публикациях В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [55], А.Д. Ляшко, В.Н. Чехова [75], С.О. Папкова, В.Н. Чехова [94], преимущественно реализуемым в исследованиях приемом является контроль практической численной сходимости решений при варьируемом наращиваемом порядке редукции [71].

Вторым концептуальным приемом, применяемым в исследованиях по рассматриваемой в диссертационной работе проблематике, является принцип введения частичных подобластей V_q с граничными контурами G_{V_q} в области V с границей G_V , классифицируемый также как метод сшивания. Вводимые области V_q с некоторыми условными границами G_{V_q} , отдельные участки которых совпадают с участкам внешней границы G_V , в совокупности покрывают V и являются областями «канонической формы», для которых G_{V_q} представляют собой координатные поверхности (координатные линии) некоторой системы координат, и в каждой из которых может быть реализовано интегрирование рассматриваемых уравнений краевой задачи $L_V \bar{\Phi}(\bar{x}) = 0$ с построением некоторого базисного множества частных решений этих уравнений для частичной области V_q основе метода разделения переменных. В случае частичной области V_q , часть границы которой является свободным участком внешней границы G_V области V , реализация метода предполагает построение в V_q соответствующего базисного множества решений $\{\bar{\Phi}_{qj}(\bar{x})\}_{j=1}^{\infty}$, удовлетворяющих однородным условиям на указанном участке внешней границы. На внешних участках условно введенных граничных поверхностей (контуров) G_{V_q} , на которых задаются неоднородные граничные условия, указанные условия формулируются для разложений по частным решениям уравнений задачи в частичной области V_q , а на внутренних участках условно введенных граничных поверхностей (контуров), являющихся контактными границами смежных частичных областей, для разложений по частным решениям уравнений задачи (разложений по

базисным множествам однородных решений) формулируются краевые условия идеального механического контакта этих частичных областей. Неоднородные и контактные функциональные граничные условия алгебраизируются со сведением их к системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов вышеуказанных разложений. Свойства алгебраических систем получаемого при этом типа исследованы в работах [55, 75, 94].

В основном числе случаев применения концепции частичных областей рассматривается введение непересекающихся областей V_q с общим участком контактной границы. Однако это не является обязательным требованием при реализации рассматриваемого подхода, а сравнение альтернативных подходов к решению волновых задач методом частичных областей при наличии пересекающихся областей представлено в работе [58].

Наконец, еще одним концептуальным приемом, используемым в диссертационном исследовании при рассмотрении граничных задач для многосвязных областей, является принцип суперпозиции рядов базисным по системам частных решений волновых уравнений в локальных координатных системах, связываемых с центрами сечений неоднородностей в виде полостей и включений. Основы и практика применения данного принципа в задачах дифракции упругих волн в многосвязных телах, включая результаты данного диссертационного исследования, представлены в работах [18–19, 36–37, 59–60, 70–71, 105, 109, 119, 146]. Реализация этого подхода связана с использованием известных теорем сложения специальных цилиндрических функций, и с получением модификаций этих теорем при переходе к задачам для обобщенных волновых уравнений [59, 60, 71].

1.4. Выводы по разделу 1

1. На основе обзора публикаций по ведущим аспектам рассматриваемой проблемы обоснована актуальность разработки и апробации теоретических численно-аналитических методов исследования волновых деформационных

процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слое с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами, а именно учета в рассматриваемых моделях динамического упругого деформирования тел в форме слоя факторов анизотропии и непрерывной неоднородности материалов исследуемых объектов, а также некоторых специфических усложнений в геометрии рассматриваемых объектов в виде неортогональных граням слоя боковых поверхностей, участков излома и дугообразного искривления слоя, многосвязной внутренней геометрии слоя с туннельными цилиндрическими неоднородностями. Перечисленные научные задания являются новыми, ранее не исследованными, и представляют интерес как в фундаментальном аспекте, так и для широкого спектра высокотехнологичных приложений в ультразвуковой дефектоскопии, сейсмоакустике, акустоэлектронике, гидроакустике.

2. Даны общая формулировка исследовательских заданий работы и постановки нескольких новых актуальных классов задач теории волновых деформационных процессов в полубесконечном, перфорированном и составном слое с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами.

3. Охарактеризованы методологические основы работы и используемые в ней концептуальные подходы к теоретическому численно-аналитическому исследованию полей волн деформаций в полубесконечном, составном и содержащем неоднородности упругом слое, ведущими из которых являются принцип описания исследуемых полей в форме спектральных разложений по базисным множествам распространяющихся (бегущих) и краевых стоячих нормальных упругих волн, принцип частичных областей или метод сшивания, а также принцип суперпозиции рядов базисным по системам частных решений волновых уравнений в локальных координатных системах, связываемых с центрами сечений неоднородностей в виде полостей и включений.

РАЗДЕЛ 2

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ ОТРАЖЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ
ВОЛН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА ОТ НАКЛОННОЙ ТОРЦЕВОЙ
ПОВЕРХНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУСЛОЯ**

**2.1. Методика исследования процесса отражения нормальных волн
продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности трансверсально-
изотропного полуслоя со свободными гранями**

Исследование закономерностей отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности трансверсально-изотропного полуслоя представляет интерес как с фундаментальной точки зрения, так и для приложений в акустической диагностике, динамике конструкций, строительной механике. При охарактеризованном уровне актуальности данная задача ранее не исследовалась с применением теоретических численно-аналитических методов, и описание методики ее решения в случае свободных от напряжений граней является целью исследований в данном подразделе диссертационной работы.

Рассматривается упругое тело, общая геометрия сечения которого и способ отнесения к безразмерным координатам $Ox_1x_2x_3$ с нормирующим параметром $R_* = h$ представлены на рисунке 2.1.

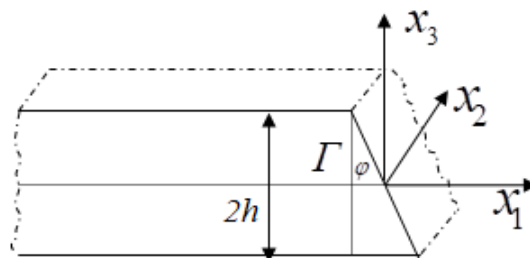


Рис. 2.1. Описание геометрии полуслоя с наклонной торцевой поверхностью.

Все граничные поверхности считаются свободными от напряжений. Наклонная торцевая поверхность Γ имеет во введенных координатах

представление $\Gamma = \{x_1 = -tg\phi \cdot x_3, x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [-h, h]\}$. Физико-механические свойства слоя при рассматриваемом типе деформирования характеризуются параметром плотности ρ и упругими постоянными $c_{44}, c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$.

Полагается, что в бесконечно удаленной от Γ зоне $x_1 \rightarrow -\infty$ полуслоя возбуждается бегущая вдоль положительного координатного направления Ox_1 нормальная сдвиговая волна с относительной длиной $\lambda = \tilde{\lambda}/h$ и нормированной комплексной функцией волновых перемещений $u_2^{(пад)}(x_1, x_3, t)$. Указанная волна принадлежит моде с номером q_0 из дисперсионного спектра симметричных нормальных упругих SH-волн в трансверсально-изотропном слое со свободными плоскими гранями.

При взаимодействии данной волны с боковой поверхностью Γ генерируется поле отраженных волн, которое характеризуется нормированной функцией волновых перемещений $u_2^{(omp)}(x_1, x_3, t)$. Функции волновых перемещений в падающей и отраженных волнах подлежат определению из дифференциальных уравнений

$$(c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})u_2 - \rho R_*^2 / c_* \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2 = 0, \quad (2.1)$$

а их суммарное поле $u_2 = u_2^{(пад)} + u_2^{(omp)}$ подчинено краевому условию $(\sigma_{n2})_{\Gamma} = 0$ на граничной поверхности Γ .

Для комплексных функций волновых перемещений в падающей и отраженной волнах вводятся представления

$$u_2^{(пад)} = u_{20} \cos(\alpha_{q_0}^{(c)} x_3) e^{-i(\omega t - k_{q_0}^{(c)} x_1)},$$

$$u_2^{(omp)} = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{(c)} \cos(\alpha_p^{(c)} x_3) e^{-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1)} + \sum_{q=0}^{\infty} A_q^{(s)} \sin(\alpha_q^{(s)} x_3) e^{-i(\omega t + k_q^{(s)} x_1)}, \quad (2.2)$$

$$\alpha_p^{(c)} = p\pi/h, \quad \alpha_q^{(s)} = (2q+1)\pi/2h,$$

$$k_p^{(c)} = \sqrt{(\rho\omega^2 - c_{44}(p\pi/h)^2)/c_{66}}, \quad k_q^{(s)} = \sqrt{(\rho\omega^2 - c_{44}((2q+1)\pi/(2h))^2)/c_{66}},$$

которые точно удовлетворяют граничным условиям на свободных от напряжений плоских гранях слоя и обладают функциональным произволом в виде неопределенных коэффициентов $A_p^{(c)}$, $A_q^{(s)}$ для удовлетворения граничных условий на торцевой поверхности Γ . С их использованием комплексная амплитудная характеристика контурных напряжений $\sigma_{n2} = \sigma_{12} \cos \varphi + \sigma_{32} \sin \varphi$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sigma_{n2} = & \left[c_{66} u_{20} i k_{q0}^{(c)} \cos(\varphi) \cos(\alpha_{q0}^{(c)} x_3) + c_{44} u_{20} (-\alpha_{q0}^{(c)}) \sin(\varphi) \sin(\alpha_{q0}^{(c)} x_3) \right] e^{i k_{q0}^{(c)} x_1} + \\ & + \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{(c)} \left[c_{66} (-i k_p^{(c)}) \cos(\varphi) \cos(\alpha_p^{(c)} x_3) + c_{44} (-\alpha_p^{(c)}) \sin(\varphi) \sin(\alpha_p^{(c)} x_3) \right] e^{-i k_p^{(c)} x_1} + \\ & + \sum_{q=0}^{\infty} A_q^{(s)} \left[c_{66} (-i k_q^{(s)}) \cos(\varphi) \sin(\alpha_q^{(s)} x_3) + c_{44} \alpha_q^{(s)} \sin(\varphi) \cos(\alpha_q^{(s)} x_3) \right] e^{-i k_q^{(s)} x_1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Определение постоянных коэффициентов $A_p^{(c)}$, $A_q^{(s)}$ из граничных условий на Γ с учетом связи $x_1 = -x_3 \operatorname{tg}(\varphi)$ осуществляется с применением метода ортогональных рядов для алгебраизации указанных функциональных граничных условий. Искомые алгебраические уравнения для $A_p^{(c)}$, $A_q^{(s)}$ следуют из условий

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \sigma_{n2} \cos(n\pi x_3/h) dx_3 = 0, \quad n = \overline{0, N}; \\ \int_{-h}^h \sigma_{n2} \sin((2m+1)\pi x_3/(2h)) dx_3 = 0, \quad m = \overline{0, M}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

На этапе численной реализации получаемая бесконечная алгебраическая система подлежит редукции с определением порядка редуцирования на основе контроля точности удовлетворения краевых условий на Γ .

2.2. Отражение нормальных сдвиговых волн от наклонной торцевой поверхности ортотропного полуслоя с закрепленной границей

Для ортотропного полуслоя с наклонной торцевой поверхностью, все участки границы которого являются закрепленными, задачи описания полей

отражаемых от боковой границы нормальных волн, в том числе нормальных волн продольного сдвига, также остаются неисследованными. Соответственно, в данном подразделе работы осуществляется построение и анализ теоретического численно-аналитического решения задачи о падении симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн сдвига на наклоненную по отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность в полуслое, при допущении о том, что все участки границы рассматриваемого тела являются жестко закрепленными. Используемый подход основывается на концепции метода частичных областей.

Рассматривается отнесенный к нормированным безразмерным прямоугольным координатам $O\xi_1\xi_2\xi_3$ ортотропный упругий полуслой $L_h^{(\xi)}$ толщины h с наклоненной плоской боковой граничной поверхностью, которая составляет угол $\psi_0^{(\xi)}$ с его плоской гранью $\xi_2 = 0$ (рис. 2.2).

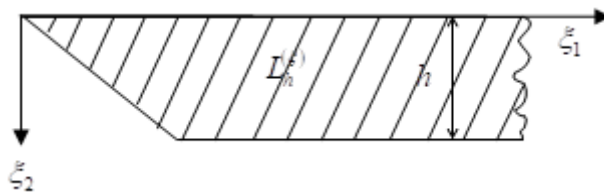


Рис. 2.2

Рассматриваемый полуслой с наклонной боковой поверхностью $\Gamma_-^{(n)}$ интерпретируется как нижняя половина полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ толщины $2h$ с треугольной клиновидной боковой поверхностью $\Gamma_+^{(n)} \cup \Gamma_-^{(n)}$. Сечение рассматриваемого тела с клиновидным профилем торца в плоскости $O\xi_1\xi_2$ представлено на рисунке 2.3. Грани Γ_{\pm} : $\xi_2 = \pm h$ полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ и участки клиновидной боковой поверхности $\Gamma_+^{(n)} \cup \Gamma_-^{(n)}$ полагаются закрепленными. Физико-механические свойства материала полуслоя при динамической антиплоской деформации характеризуются упругими постоянными $\{\tilde{c}_{44}, \tilde{c}_{55}\}$ и параметром плотности ρ .

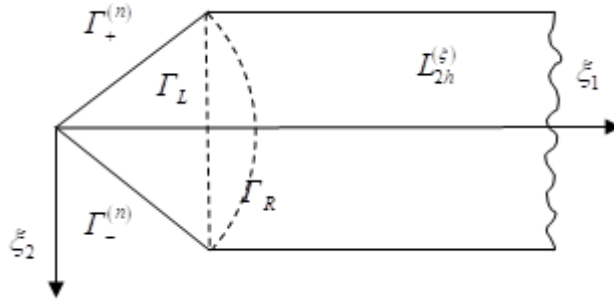


Рис. 2.3

Полагается, что в полуслое $L_h^{(\xi)}$ вдоль направления, противоположного положительному координатному направлению $O\xi_1$, распространяется нормальная симметричная по толщине $L_h^{(\xi)}$ поляризованная вдоль $O\xi_3$ волна продольного сдвига с круговой частотой ω из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра, характеризуемая функцией упругих волновых перемещений $u_3^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t)$. При ее падении на наклонную боковую поверхность $\Gamma_-^{(n)}$ формируется поле отраженных волн $u_3^{(omp)}(\xi_1, \xi_2, t)$.

Комплексные амплитудные функции волновых перемещений в падающих и рассеянных волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации материала полуслоя, которое в случае отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру h принимает вид

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - \rho h^2 c_*^{-1}\partial_t^2)u_3 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial \xi_j \quad (j=1, 2), \quad \partial_t = \partial / \partial t. \quad (2.5)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи на закрепленных плоских гранях полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ и на закрепленных участках боковой границы $\Gamma_{\pm}^{(n)}$ имеют вид

$$(u_3)_{\xi_2=\pm h} = 0, \quad (2.6)$$

$$(u_3)_{\Gamma_{\pm}^{(n)}} = 0. \quad (2.7)$$

В соотношениях (2.5) – (2.7) $u_3(\xi_1, \xi_2, t) = u_3^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t) + u_3^{(omp)}(\xi_1, \xi_2, t)$; c_{55} , c_{44} – отнесенные к нормирующему параметру $c_* = \tilde{c}_{55}$ упругие постоянные материала полуслоя. Задача заключается в описании и частотном параметрическом анализе

волнового поля, являющегося суперпозицией полей падающих и отражаемых от $\Gamma_{\pm}^{(n)}$ волн.

На исходном этапе построения решения осуществляется аффинное преобразование координат $O\xi_1\xi_2$ в координаты Ox_1x_2 на основе соотношений

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu\xi_2, \quad \mu = (c_{55} / c_{44})^{1/2}, \quad (2.8)$$

в результате которых уравнение (2.5) трансформируется в классическое волновое уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho h^2 c_*^{-1} \partial_t^2 \right) u_3 = 0. \quad (2.9)$$

В области сечения полуслоя L_{2h} , получаемого из $L_{2h}^{(\xi)}$ преобразованиями (2.8), вводится вспомогательная система полярных координат $Or\psi$ ($x_1 = r \cdot \cos\psi$, $x_2 = r \cdot \sin\psi$), а также выделяются частичные подобласти в виде полуполосы $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_{\mu}, h_{\mu}]\}$, $h_{\mu} = \mu h$, сектора $L_R = \{r \in [0, R], \psi \in [-\psi_0, \psi_0]\}$, $\psi_0 = \arctg(\mu \cdot \tg\psi_0^{(\xi)})$ и треугольника $L_T = \{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-x_1 \cdot \tg\psi_0, x_1 \tg\psi_0]\}$, $L_T \subset L_R$.

Для описания поля волн в подобласти сечения L вводится удовлетворяющее уравнению (2.9) и трансформированным краевым условиям (2.6) представление $u_3^{(L)}$ в виде суммы падающей и отраженной составляющих

$$\begin{aligned} u_3^{(L)} = & u_{30}^{(p)} \sin(p\pi x_2 / h_{\mu}) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p(x_1 - l))) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x_2 / h_{\mu}) \cdot \exp(-i(\omega t - k_n(x_1 - l))). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поле волн, отраженных от боковой поверхности полуслоя с сечением $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_{\mu}, h_{\mu}]\}$, в представлении (2.10) описывается суперпозицией базисных нормальных волн. В этом представлении A_n – произвольные коэффициенты; k_p и k_n – постоянные распространения для падающей и отражающихся нормальных волн из мод с соответствующими номерами. Структура представления (2.10) в пределах L обеспечивает выполнение условия

$(u_3)_{x_2=0} = 0$ и соответствует симметричному по толщине подобласти $0 \leq x_2 \leq h_\mu$ распределению сдвиговых динамических перемещений в падающей волне при четных значениях p , либо их антисимметричному распределению при нечетных p . В соответствии с этим, представление (2.10) в подобласти $0 \leq x_2 \leq h_\mu$ описывает решение исходной сформулированной задачи о падении симметричных или антисимметричных нормальных упругих волн сдвига в закрепленном анизотропном полуслое толщины h на наклоненную по отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность.

В частичной подобласти L_R для описания стационарного поля набегающих и рассеиваемых сдвиговых волн вводится удовлетворяющее уравнению (2.8) и краевому условию (2.7) представление

$$u_3^{(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\alpha_n}(kr) \sin \alpha_n \psi \cdot \exp(-i\omega t) \quad (2.11)$$

в котором B_n – произвольные коэффициенты; $\alpha_n = n\pi / \psi_0$, $k = (\rho h^2 \omega^2 / c_*)^{1/2}$, $J_{\alpha_n}(kr)$ – цилиндрические функции Бесселя первого рода. Коэффициенты A_n , B_n в этом представлении подлежат определению из функциональных краевых условий на границе $\Gamma = \{x_1 = l, x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$ контакта частичных областей L и L_T .

$$(u_3^{(L)})_\Gamma = (u_3^{(C)})_\Gamma, \quad (\sigma_{13}^{(L)})_\Gamma = (\sigma_{13}^{(C)})_\Gamma, \quad (2.12)$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(L)} = & -c_{55} u_{30} i k_p \sin \frac{p\pi x_2}{h} \cdot \exp(-i k_p (x_1 - l)) + \\ & + c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} A_n i k_n \sin \frac{n\pi x_2}{h} \cdot \exp(i k_n (x_1 - l)), \\ \sigma_{13}^{(C)} = & c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[k \left(\frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_n+1}(kr) \right) \sin \alpha_n \psi \cos \psi - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \sin \psi \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При использовании для алгебраизации функциональных краевых условий (2.12) метода наименьших квадратов, они сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{llnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{lcnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{lln}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{clnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{ccnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{cln}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{llnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{lcnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \delta_{lln} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{clnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{ccnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(C)}(x_2)} dx_2, \\ \delta_{cln} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2; \\ F_{up}^{(L)}(x_2) &= u_{30} \sin(p\pi x_2 / h); \quad F_{un}^{(L)}(x_2) = \sin(n\pi x_2 / h), \\ F_{un}^{(C)}(x_2) &= J_{\alpha_n}(ks) \sin(\alpha_n \arcsin(x_2 / s)), \\ F_{13p}^{(L)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} u_{30} (-ik_p) \sin(p\pi x_2 / h), \\ F_{13n}^{(L)}(x_2) &= ik_n c_{55}^{(L)} \sin(n\pi x_2 / h), \\ F_{13n}^{(C)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} \cos(\varphi) \sin(\alpha_n \varphi) (\alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s - k J_{\alpha_n+1}(ks)) - \\ &\quad - \sin(\varphi) \cos(\alpha_n \varphi) \alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s; \end{aligned}$$

$$s = \sqrt{l^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arcsin\left(x_2 / \sqrt{l^2 + x_2^2}\right). \quad (2.15)$$

Системы уравнений (2.14) в процессе численных исследований подлежат редукции, порядок которой устанавливается в соответствии с критериями требуемой точности удовлетворения краевым условиям и устойчивости результатов расчетов при варьировании параметра редукции. После определения искомых коэффициентов расчеты характеристик динамического напряженно-деформированного состояния реализуются с переходом к исходным координатам.

Результаты численных исследований в рассматриваемой задаче на основе разработки программного приложения, реализующего описанный алгоритм решения, получены применительно к изотропному полуслою с торцевой поверхностью, наклоненной под углом $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$ либо под углом $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$. Ниже представлены данные расчетов полей волновых упругих перемещений в подобласти $\xi_1 \leq 6h / \operatorname{tg}(\psi_0^{(\xi)})$ для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний, в случаях рассеяния у торцевой поверхности нормальной волны из низшей моды дисперсионного спектра симметричных сдвиговых волн в свободном изотропном слое с варьируемым параметром относительной длины $\lambda = 2\pi / (kh)$. Распределения характеристик анализируемых полей иллюстрируются тонированными изображениями, в которых переход от темных тонов к светлым соответствует росту интенсивности описываемой характеристики.

На рисунках 2.4 – 2.8 соответственно отражены распределения интенсивностей полей волновых перемещений для полуслоя с $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$ при значениях λ , равных 0,7; 1,0; 1,3; 1,6; 3,0; а на рисунках 2.9 – 2.13 приведены аналогичные распределения для полуслоя с $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$.

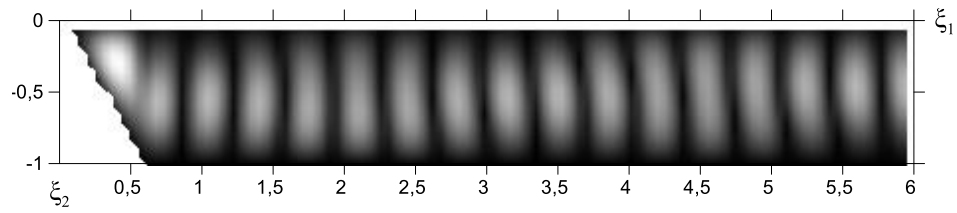


Рис. 2.4. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 0.7$

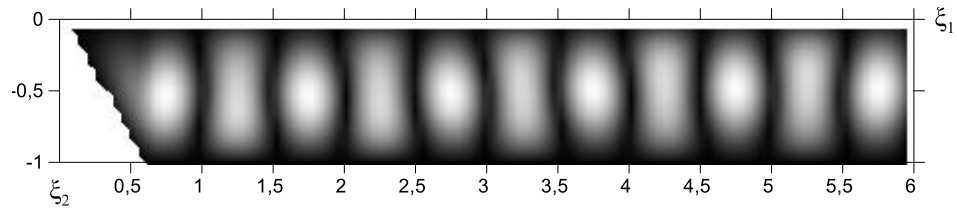


Рис. 2.5. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 1.0$

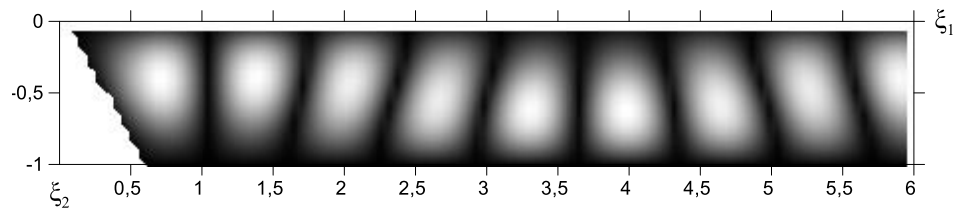


Рис. 2.6. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 1.3$

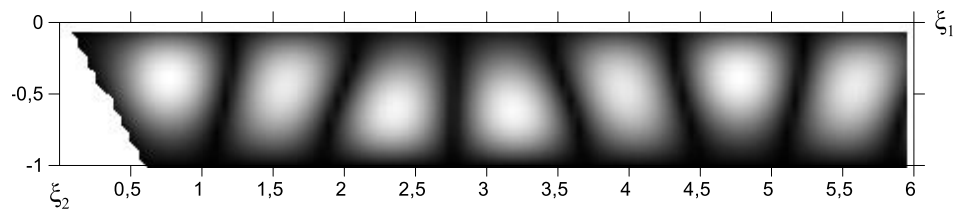


Рис. 2.7. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 1.6$

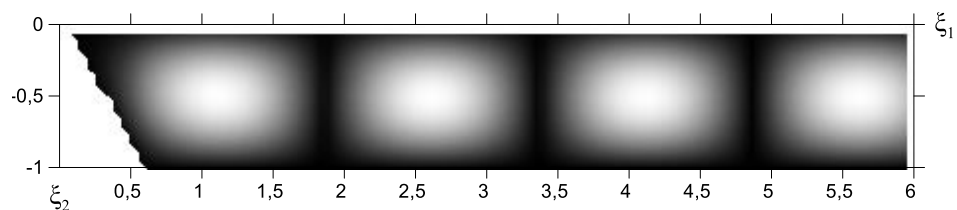


Рис. 2.8. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 3.0$

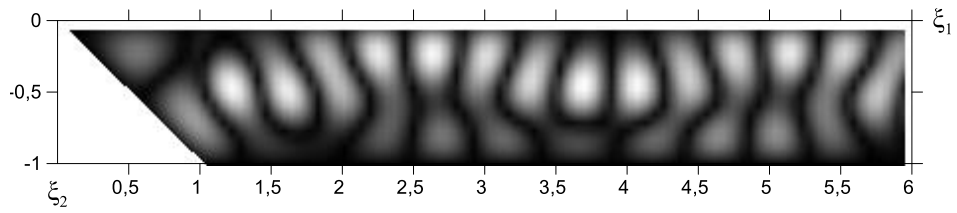


Рис. 2.9. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 0.7$

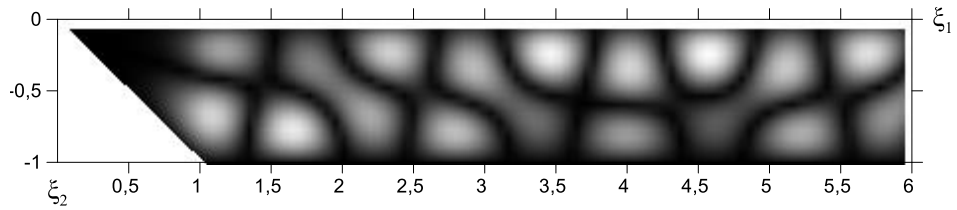


Рис. 2.10. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 1.0$

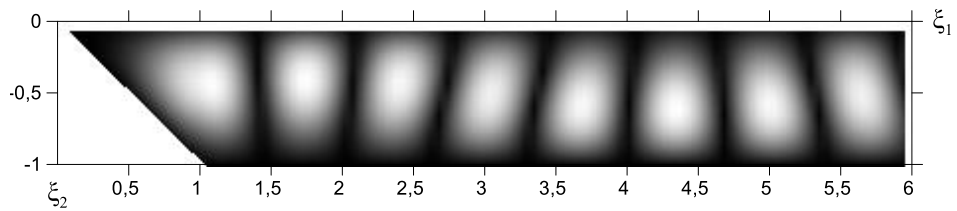


Рис. 2.11. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 1.3$

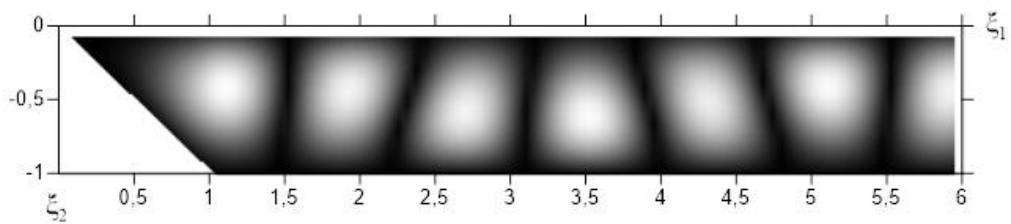


Рис. 2.12. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 1.6$

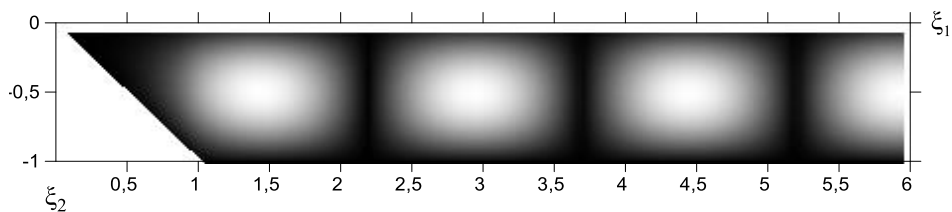


Рис. 2.13. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 3.0$

На основе анализа данных рисунков можно констатировать малое влияние наклона торцевой поверхности на дальнее поле рассеиваемых волн и наблюдаемый эффект концентрации интенсивности волновых перемещений у вершины клиновидной приторцевой области при падении относительно длинной волны с $\lambda = 3.0$. Для более коротких волн с $\lambda = 1,3$ основные эффекты также наблюдаются в приторцевой зоне и выражаются в искривлении фронта волны и росте степени локализации зоны интенсивных волновых смещений в окрестности вершины клиновидной границы. В случае $\lambda = 0,7$ начинает отчетливо проявляться влияние эффектов рассеяния от наклоненного торца на форму дальнего волнового поля, а в клиновидной приграничной подобласти вместо фокусировки волновых смещений у ее вершины формируются два фокусных пятна повышенной интенсивности волновых смещений. Наконец, при $\lambda = 0,2$ локальные приграничные эффекты в структуре рассеиваемого поля становятся исчезающе маловыраженными, и наблюдается качественная перестройка поля рассеиваемых волн во всей рассматриваемой зоне полуслоя.

2.3. Рассеяние нормальных сдвиговых волн у наклонной торцевой поверхности свободного ортотропного полуслоя

Исследования, представляемые в подразделе, посвящены построению и анализу теоретического численно-аналитического решения задачи о падении симметричных и антисимметричных нормальных упругих волн сдвига в свободном по плоским граням анизотропном полуслое на свободную, наклоненную по отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность. Как и в подразделе 2.2, применяемый подход базируется на концепции метода частичных областей.

Рассматривается отнесенный к нормированным безразмерным прямоугольным координатам $O\xi_1\xi_2\xi_3$ анизотропный упругий полуслой $L_h^{(\xi)}$

толщины h с наклоненной плоской боковой граничной поверхностью, составляющей угол $\psi_0^{(\xi)}$ с его плоской гранью $\xi_2 = 0$ (рис. 2.14).

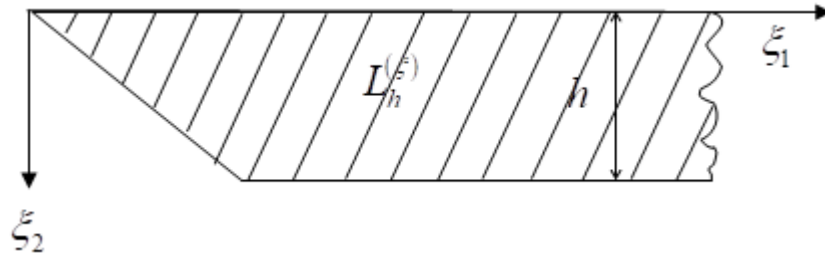


Рис. 2.14

В рамках используемой методики, как и п. 2.2, рассматриваемый полуслоем с наклонной боковой поверхностью $\Gamma_+^{(n)}$ интерпретируется как верхняя половина полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ толщины $2h$ с треугольной клиновидной боковой поверхностью $\Gamma_+^{(n)} \cup \Gamma_-^{(n)}$. Сечение рассматриваемого тела в плоскости $O\xi_1\xi_2$ представлено на рисунке 2.15.

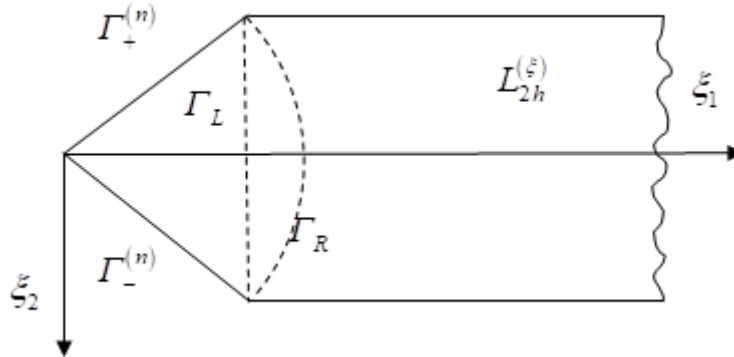


Рис. 2.15

Грани $\Gamma_{\pm}: \xi_2 = \pm h$ полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ свободны от механических напряжений. Физико-механические свойства материала полуслоя при динамической антиплоской деформации характеризуются упругими постоянными $\{\tilde{c}_{44}, \tilde{c}_{55}\}$ и параметром плотности ρ . Полагается, что в полуслое $L_h^{(\xi)}$ вдоль направления, противоположного положительному координатному направлению $O\xi_1$, распространяется характеризуемая функцией упругих волновых перемещений

$u_3^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t)$ нормальная симметричная по толщине $L_h^{(\xi)}$ поляризованная вдоль $O\xi_3$ волна продольного сдвига с круговой частотой ω из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра. При ее взаимодействии с наклонной боковой поверхностью $\Gamma_+^{(n)}$ формируется дифракционное поле $u_3^{(omp)}(\xi_1, \xi_2, t)$ рассеянных волн.

Искомые комплексные амплитудные функции для волновых перемещений в падающих и рассеянных волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации материала полуслоя, которое в случае отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру h принимает вид

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - \rho h^2 c_*^{-1}\partial_t^2)u_3 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial \xi_j \quad (j=1, 2), \quad \partial_t = \partial / \partial t. \quad (2.16)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи на плоских гранях полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ и на участках боковой границы Γ_{\pm} имеют вид

$$(\sigma_{23})_{\xi_2=\pm h} = 0; \quad (2.17)$$

$$(\sigma_{n3})_{\Gamma_{\pm}^{(n)}} = 0. \quad (2.18)$$

В соотношениях (2.16) – (2.18) c_{55} , c_{44} – отнесенные к нормирующему параметру $c_* = \tilde{c}_{55}$ упругие постоянные материала полуслоя; $(\sigma_{23})_{\xi_2=\pm h}$, $(\sigma_{n3})_{\Gamma_{\pm}^{(n)}}$ – отнесенные к $c_* = \tilde{c}_{55}$ нормированные характеристики касательных напряжений на площадках с нормальными к плоским граням полуслоя и к поверхностям $\Gamma_{\pm}^{(n)}$. Задача заключается в описании и частотном параметрическом анализе волнового поля, являющегося суперпозицией полей падающих и отражаемых от $\Gamma_{\pm}^{(n)}$ волн.

На исходном этапе построения теоретического алгоритма решения, как и п. 2.2, осуществляется аффинное преобразование координат $O\xi_1\xi_2$ в координаты Ox_1x_2 на основе соотношений

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu\xi_2, \quad \mu = (c_{55} / c_{44})^{1/2}, \quad (2.19)$$

в результате которых уравнение (2.16) трансформируется в классическое волновое уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho h^2 c_*^{-1} \partial_t^2 \right) u_3 = 0. \quad (2.20)$$

В области сечения полуслоя L_{2h} , получаемого из $L_{2h}^{(\xi)}$ преобразованиями (2.19), вводится вспомогательная система полярных координат $Or\psi$ ($x_1 = r \cdot \cos \psi$, $x_2 = r \cdot \sin \psi$), а также выделяются частичные подобласти в виде полуполосы $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$, $h_\mu = \mu h$, сектора $L_R = \{r \in [0, R], \psi \in [-\psi_0, \psi_0]\}$, $\psi_0 = \arctg(\mu \cdot tg\psi_0^{(\xi)})$ и треугольника $L_T = \{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-x_1 \cdot tg\psi_0, x_1 tg\psi_0]\}$, $L_T \subset L_R$.

Для описания поля волн в подобласти сечения L вводится удовлетворяющее уравнению (2.20) и трансформированным краевым условиям (2.17) представление $u_3^{(L)}$ в виде суммы падающей и отраженной составляющих

$$\begin{aligned} u_3^{(L)} = & u_{30}^{(p)} \cos(p\pi x_2 / h_\mu) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p(x_1 - l))) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos((n-1)\pi x_2 / h_\mu) \cdot \exp(-i(\omega t - k_n(x_1 - l))) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Поле волн, отраженных от боковой поверхности полуслоя с сечением $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$, в представлении (2.21) описывается суперпозицией базисных нормальных волн. В этом представлении A_n – произвольные коэффициенты; k_p и k_n – постоянные распространения для падающей и отражающихся нормальных волн из мод с соответствующими номерами. Структура представления (2.21) в пределах L обеспечивает выполнение условия $(\sigma_{23})_{x_2=0} = 0$ и соответствует симметричному по толщине подобласти $0 \leq x_2 \leq h_\mu$ распределению сдвиговых динамических перемещений в падающей волне при четных значениях p , либо их антисимметричному распределению при нечетных p . В соответствии с этим, представление (2.21) в подобласти $0 \leq x_2 \leq h_\mu$ описывает решение исходной сформулированной задачи о падении

симметричных или антисимметричных нормальных упругих волн сдвига в свободном анизотропном полуслое толщины h на наклоненную по отношению к граням плоскую торцевую граничную поверхность.

В частичной подобласти L_R для описания стационарного поля набегающих и рассеиваемых сдвиговых волн вводится удовлетворяющее уравнению (2.20) и краевому условию (2.18) представление

$$u_3^{(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \cdot \exp(-i\omega t) \quad (2.22)$$

в котором B_n – произвольные коэффициенты; $\alpha_n = n\pi / \psi_0$, $k = (\rho h^2 \omega^2 / c_*)^{1/2}$, $J_{\alpha_n}(kr)$ – цилиндрические функции Бесселя первого рода. Коэффициенты A_n , B_n в этом представлении подлежат определению из функциональных краевых условий на границе $\Gamma = \{x_1 = l, x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$ контакта частичных областей L и L_T .

$$(u_3^{(L)})_\Gamma = (u_3^{(C)})_\Gamma, \quad (\sigma_{13}^{(L)})_\Gamma = (\sigma_{13}^{(C)})_\Gamma, \quad (2.23)$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(L)} = & -c_{55} u_{30} i k_p \cos \frac{p\pi x_2}{h} \cdot \exp(-i k_p (x_1 - l)) + \\ & + c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} A_n i k_n \cos \frac{(n-1)\pi x_2}{h} \cdot \exp(i k_n (x_1 - l)), \\ \sigma_{13}^{(C)} = & c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[k \left(\frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_n+1}(kr) \right) \cos \alpha_n \psi \cos \psi + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \sin \alpha_n \psi \sin \psi \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

При использовании для алгебраизации функциональных краевых условий (2.23) метода ортогональных рядов они сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$A_n \Delta_{nu} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \Delta_{nmu} = \delta_{nu}, \quad (2.25)$$

$$A_n \Delta_{n\sigma} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \Delta_{nm\sigma} = \delta_{n\sigma},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{nu} &= 1; \quad \Delta_{nm\mu} = - \int_{-h}^h J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \cos \frac{(n-1)\pi x_2}{h} dx_2 / \gamma_n^*; \\ \Delta_{nm\sigma} &= -c_{55} \int_{-h}^h \left[k \left(\frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_{n+1}}(kr) \right) \cos \alpha_n \psi \cos \psi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \sin \alpha_n \psi \sin \psi \right] \cos \frac{(n-1)\pi x_2}{h} dx_2 / \gamma_n^*; \\ \delta_{nu} &= -u_{30}; \quad \Delta_{n\sigma} = ik_n c_{55}; \quad \delta_{n\sigma} = c_{55} u_{30} ik_p. \end{aligned} \quad (2.26)$$

При использовании для алгебраизации функциональных краевых условий (2.23) метода наименьших квадратов они сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{llnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{lcnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{lln}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{clnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{ccnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{cln}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{llnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{lcnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \delta_{lln} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{clnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{ccnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(C)}(x_2)} dx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{cln} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2; \\
F_{up}^{(L)}(x_2) &= u_{30} \cos(p\pi x_2 / h); \quad F_{un}^{(L)}(x_2) = \cos((n-1)\pi x_2 / h), \\
F_{un}^{(C)}(x_2) &= J_{\alpha_n}(ks) \cos(\alpha_n \arcsin(x_2 / s)), \\
F_{13p}^{(L)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} u_{30} (-ik_p) \cos(p\pi x_2 / h), \quad F_{13n}^{(L)}(x_2) = ik_n c_{55}^{(L)} \cos((n-1)\pi x_2 / h), \\
F_{13n}^{(C)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} \cos(\varphi) \cos(\alpha_n \varphi) (\alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s - k J_{\alpha_n+1}(ks)) + \\
&\quad + \sin(\varphi) \sin(\alpha_n \varphi) \alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s; \\
s &= \sqrt{l^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arcsin(x_2 / \sqrt{l^2 + x_2^2}). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Системы уравнений (2.27) при численных исследованиях подлежат редукции, порядок которой обуславливается критериями требуемой точности удовлетворения краевым условиям и устойчивости результатов расчетов при варьировании параметра редукции. После определения искомым коэффициентов расчеты характеристик динамического напряженно-деформированного состояния реализуются с переходом к исходным координатам. Результаты численных исследований в рассматриваемой задаче, как и в п. 2.2, в представляемом частном случае получены на основе приема алгебраизации функциональных граничных условий методом наименьших квадратов применительно к изотропному полуслою с торцевой поверхностью, наклоненной под углом $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$. На рисунках 2.16 – 2.19 соответственно отражены результаты расчета распределений интенсивностей полей волновых перемещений для значений λ , равных 3,3; 1,3; 0,7; 0,2, в подобласти $\xi_1 \leq 6h / \operatorname{tg}(\psi_0^{(\xi)})$ для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний, в случаях рассеяния у торцевой поверхности нормальной волны из низшей моды дисперсионного спектра симметричных сдвиговых волн в свободном изотропном слое с варьируемым

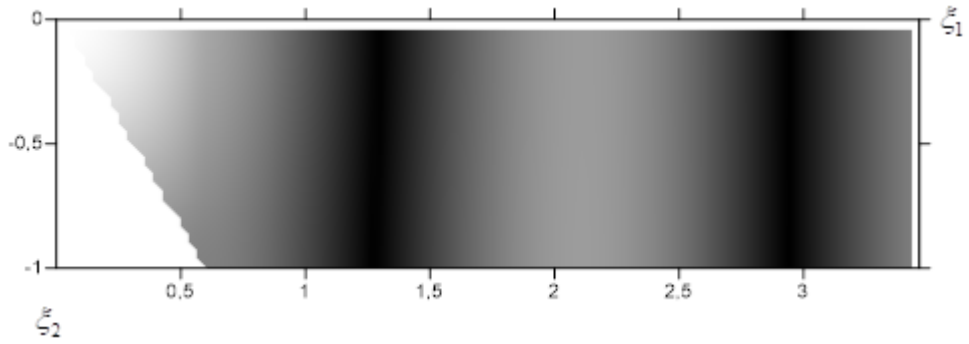


Рис. 2.16. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 3.3$

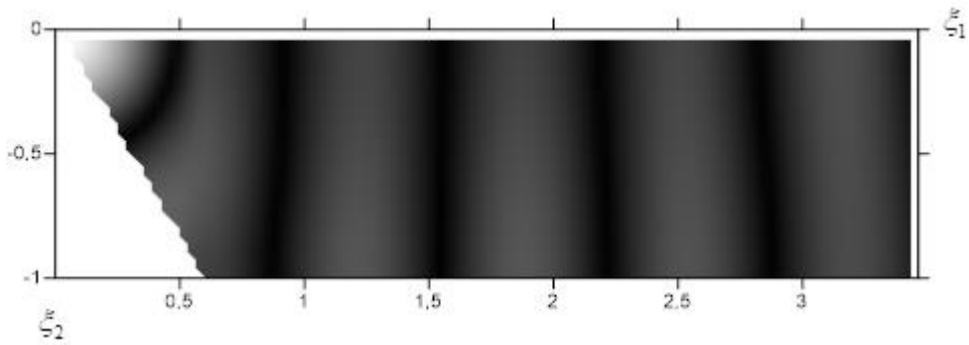


Рис. 2.17. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 1.3$

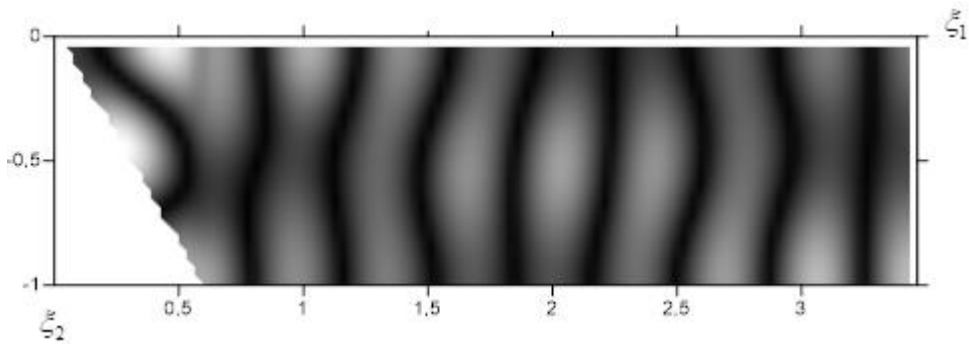


Рис. 2.18. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 0.7$

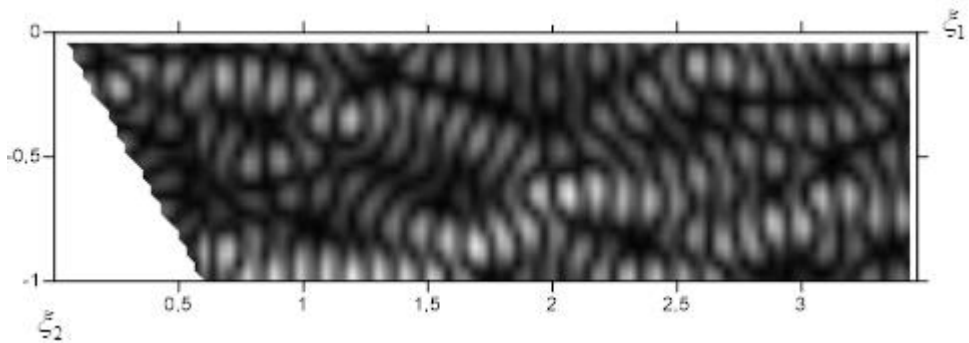


Рис. 2.19. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 0.2$

параметром относительной длины $\lambda = 2\pi / (kh)$. Анализируемые поля иллюстрируются тонированными изображениями, в которых переход от темных тонов к светлым соответствует росту интенсивности описываемой характеристики.

На основе анализа данных рисунков можно констатировать достаточно малое влияние наклона торцевой поверхности на картину дальнего поля рассеиваемых волн и наблюдаемый эффект концентрации интенсивности волновых перемещений у вершины клиновидной приторцевой области при падении относительно длинной волны с $\lambda = 3,3$, рост степени локализации зоны интенсивных волновых смещений в окрестности вершины клиновидной границы. В случае $\lambda = 0,7$ начинает отчетливо проявляться влияние эффектов рассеяния от наклоненного торца на форму дальнего волнового поля, а в клиновидной приграничной подобласти вместо фокусировки волновых смещений у ее вершины формируются два фокусных пятна повышенной интенсивности волновых смещений. Наконец, при $\lambda = 0,2$ локальные приграничные эффекты в структуре рассеиваемого поля становятся исчезающе маловыраженными, и наблюдается качественная перестройка поля рассеиваемых волн во всей рассматриваемой зоне полуслоя.

2.4. Отражение волн сдвига от свободной наклонной боковой поверхности ортотропного полуслоя на жестком основании

В данном подразделе диссертационной работы методика, представленная в п. 2.2, п. 2.3 и основывающаяся основывается на концепции метода частичных областей, распространяется на случай исследования задачи об отражении волн сдвига от свободной наклонной боковой поверхности полуслоя, лежащего на жестком основании. Реализуется построение теоретического численно-аналитического решения данной задачи и исследование кинематических характеристик динамических упругих перемещений в поле волн, формирующемся

вблизи отражающей наклонной боковой поверхности в случае падения на нее нормальной сдвиговой волны из низшей моды соответствующего дисперсионного спектра.

Рассматривается ортотропный упругий полуслой $L_h^{(\xi)}$ толщины h , отнесенный к нормированным безразмерным прямоугольным координатам $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и имеющий поперечное сечение представленной на рисунке 2.20 геометрии.

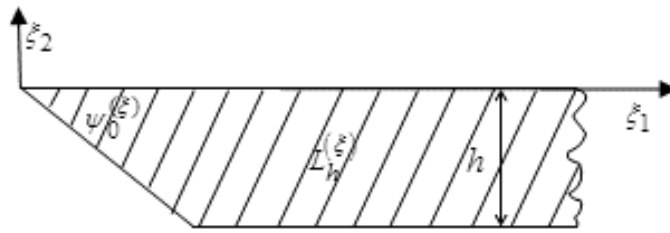


Рис. 2.20.

Полуслой имеет наклонную боковую поверхность $\Gamma_-^{(n)}$, составляющую угол $\psi_0^{(\xi)}$ с его закрепленной плоской гранью $\xi_2 = 0$. Он интерпретируется как нижняя половина полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ толщины $2h$ со свободными гранями и свободной треугольной клиновидной боковой поверхностью $\Gamma_+^{(n)} \cup \Gamma_-^{(n)}$ (рис 2.21). Способ отнесения полуслоя к прямоугольным координатам $O\xi_1\xi_2\xi_3$ обеспечивает эффективное сравнение получаемых результатов с результатами, представленными в п.2.2, п. 2.3. Материал слоя является прямолинейно ортотропным, и в случае динамической антиплоской деформации характеризуется упругими постоянными $\{\tilde{c}_{44}, \tilde{c}_{55}\}$ и параметром плотности ρ .

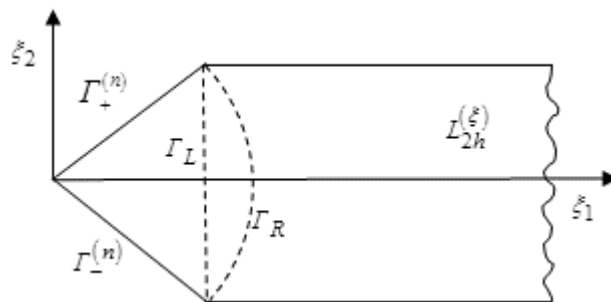


Рис. 2.21

Из глубины полуслоя $L_h^{(\xi)}$ на свободную наклонную боковую поверхность $\Gamma_-^{(n)}$ падает поляризованная вдоль $O\xi_3$ нормальная сдвиговая упругая волна с круговой частотой ω из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра, которая характеризуется функцией волновых упругих перемещений $u_3^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t)$. При ее падении на боковую поверхность $\Gamma_-^{(n)}$ формируется поле отраженных волн, описываемое функцией волновых упругих перемещений $u_3^{(omp)}(\xi_1, \xi_2, t)$.

Комплексные функции волновых перемещений в падающих и рассеянных волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации материала полуслоя. В случае отнесения всех характеристик с линейной размерностью к нормирующему параметру h это уравнение принимает вид

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - \rho h^2 c_*^{-1}\partial_t^2)u_3 = 0, \quad \partial_j = \partial / \partial \xi_j \quad (j=1, 2), \quad \partial_t = \partial / \partial t. \quad (2.29)$$

Краевые условия рассматриваемой задачи на плоских гранях полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ и на участках боковой границы $\Gamma_{\pm}^{(n)}$ имеют вид

$$(\sigma_{23})_{\xi_2=\pm h} = 0 \quad (2.30)$$

$$(\sigma_{n3})_{\Gamma_{\pm}^{(n)}} = 0. \quad (2.31)$$

В соотношениях (2.29) – (2.31) $u_3(\xi_1, \xi_2, t) = u_3^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t) + u_3^{(omp)}(\xi_1, \xi_2, t)$; c_{55} , c_{44} – отнесенные к нормирующему параметру $c_* = \tilde{c}_{55}$ упругие постоянные материала полуслоя. Частотному параметрическому анализу подлежит волновое поле, являющееся суперпозицией полей падающих и отраженных от $\Gamma_{\pm}^{(n)}$ волн.

В процессе построения решения на основе введения аффинного преобразования координат $O\xi_1\xi_2$

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu\xi_2, \quad \mu = (c_{55} / c_{44})^{1/2}, \quad (2.32)$$

уравнение (2.29) преобразуется в волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \rho h^2 c_*^{-1} \partial_t^2 \right) u_3 = 0. \quad (3.33)$$

В области сечения полуслоя L_{2h} , получаемого из $L_{2h}^{(\xi)}$ преобразованиями (2.32), вводится вспомогательная система полярных координат $Or\psi$ ($x_1 = r \cdot \cos\psi$, $x_2 = r \cdot \sin\psi$), а также выделяются частичные подобласти в виде полуполосы $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$, $h_\mu = \mu h$, сектора $L_R = \{r \in [0, R], \psi \in [-\psi_0, \psi_0]\}$, $\psi_0 = \arctg(\mu \cdot tg\psi_0^{(\xi)})$ и треугольника $L_T = \{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-x_1 \cdot tg\psi_0, x_1 tg\psi_0]\}$, $L_T \subset L_R$.

Поле волн в подобласти сечения L описывается удовлетворяющим уравнению (2.33) и трансформированным краевым условиям (2.30) представлением $u_3^{(L)}$ в виде суммы падающей и отраженной составляющих

$$u_3^{(L)} = u_{30}^{(p)} \sin(p\pi x_2 / (2h_\mu)) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p(x_1 - l))) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x_2 / (2h_\mu)) \cdot \exp(-i(\omega t - k_n(x_1 - l))). \quad (2.34)$$

При этом, поле волн, отраженных от боковой поверхности полуслоя с сечением $L = \{x_1 \in [l, \infty), x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$, в представлении (2.34) описывается суперпозицией базисных нормальных волн с произвольными коэффициентами A_n ; k_p и k_n – постоянные распространения для падающей и отражающихся нормальных волн из мод с соответствующими номерами. Структура представления (2.34) в пределах L обеспечивает выполнение условия $(u_3)_{x_2=0} = 0$.

В частичной подобласти L_R для описания стационарного поля набегающих и рассеиваемых сдвиговых волн вводится удовлетворяющее уравнению (2.33) и краевому условию (2.31) представление

$$u_3^{(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\alpha_n}(kr) \sin \alpha_n \psi \cdot \exp(-i\omega t), \quad (2.35)$$

в котором B_n – произвольные коэффициенты; $\alpha_n = n\pi / (2\psi_0)$, $k = (\rho h^2 \omega^2 / c_*)^{1/2}$, $J_{\alpha_n}(kr)$ – цилиндрические функции Бесселя первого рода. Коэффициенты A_n , B_n представлений (2.34) – (2.35) подлежат определению из функциональных краевых условий на границе $\Gamma = \{x_1 = l, x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$ контакта частичных областей L и L_T

$$(u_3^{(L)})_\Gamma = (u_3^{(C)})_\Gamma, \quad (\sigma_{13}^{(L)})_\Gamma = (\sigma_{13}^{(C)})_\Gamma, \quad (2.36)$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(L)} = & -c_{55}u_{30}ik_p \sin \frac{p\pi x_2}{2h_\mu} \cdot \exp(-ik_p(x_1 - l)) + \\ & + c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} A_n ik_n \sin \frac{n\pi x_2}{2h_\mu} \cdot \exp(ik_n(x_1 - l)), \\ \sigma_{13}^{(C)} = & c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[k \left(\frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_n+1}(kr) \right) \sin \alpha_n \psi \cos \psi - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \sin \psi \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

В случае применения для алгебраизации функциональных краевых условий (2.36) метода наименьших квадратов, эти условия сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{llnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{lcnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{lln}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{A_m} \Delta_{clnm} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{B_m} \Delta_{ccnm} &= \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{cln}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{llnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\ \Delta_{lcnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{lln} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(L)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(L)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\
\Delta_{clnm} &= - \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(L)}(x_2)} dx_2 - \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(L)}(x_2)} dx_2, \\
\Delta_{ccnm} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{um}^{(C)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13m}^{(C)}(x_2)} dx_2, \\
\delta_{cln} &= \int_{-h}^h F_{un}^{(C)}(x_2) \overline{F_{up}^{(L)}(x_2)} dx_2 + \int_{-h}^h F_{13n}^{(C)}(x_2) \overline{F_{13p}^{(L)}(x_2)} dx_2; \\
F_{up}^{(L)}(x_2) &= u_{30} \sin(p\pi x_2 / 2h_\mu); \quad F_{un}^{(L)}(x_2) = \sin(n\pi x_2 / 2h_\mu), \\
F_{un}^{(C)}(x_2) &= J_{\alpha_n}(ks) \sin(\alpha_n \arcsin(x_2 / s)), \\
F_{13p}^{(L)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} u_{30} (-ik_p) \sin(p\pi x_2 / 2h_\mu), \\
F_{13n}^{(L)}(x_2) &= ik_n c_{55}^{(L)} \sin(n\pi x_2 / 2h_\mu), \\
F_{13n}^{(C)}(x_2) &= c_{55}^{(L)} \cos(\varphi) \sin(\alpha_n \varphi) (\alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s - k J_{\alpha_n+1}(ks)) - \\
&\quad - \sin(\varphi) \cos(\alpha_n \varphi) \alpha_n J_{\alpha_n}(ks) / s; \\
s &= \sqrt{l^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arcsin(x_2 / \sqrt{l^2 + x_2^2}).
\end{aligned}$$

Система уравнений (2.38) в процессе численных исследований редуцируется до порядков, устанавливаемых в соответствии с критериями требуемой точности удовлетворения краевым условиям и устойчивости результатов расчетов при варьировании параметра редукции. После определения искомых коэффициентов A_n , B_n , расчеты характеристик исследуемого волнового поля реализуются с переходом к исходным координатам.

Характеризуемые далее результаты численных исследований получены для частного случая изотропного полуслоя с боковыми поверхностями, наклоненными под углами $\psi_0^{(\xi)} = \pi/3$ и $\psi_0^{(\xi)} = \pi/4$. Рассматривается падение нормальной сдвиговой волны из низшей моды соответствующего дисперсионного

спектра с варьируемыми параметрами относительной длины $\lambda = 2\pi / (kh)$ и иллюстрируются данные расчетов полей упругих перемещений в подобласти $\xi_1 \leq 6h / \operatorname{tg}(\psi_0^\xi)$ для моментов времени, отвечающих началу периодов волновых колебаний. Результаты расчетов анализируемых полей представлены тонированными изображениями, в которых переход от темных тонов к светлым соответствует росту интенсивности описываемой характеристики.

На рисунках 2.22 – 2.26 соответственно отражены распределения интенсивностей полей волновых перемещений для полуслоя с $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$ при значениях λ , равных 3.0, 1.6, 1.3, 1.0, 0.7, в моменты времени, соответствующие началу периода волновых колебаний. На рисунках 2.27 – 2.31 приведены аналогичные распределения для полуслоя с $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$.

На основе анализа приведенных распределений можно указать ряд закономерностей, свойственных процессам отражения волн от наклонной торцевой поверхности в полуслое, лежащем на жестком основании, а также указать на ряд сопоставительных отличий этих распределений в сравнении со случаями, когда все участки граничной поверхности полуслоя свободны от напряжений (п. 2.3), либо жестко закреплены (п. 2.2). В качестве эффекта влияния характеризующего степень наклона торцевой поверхности угла $\psi_0^{(\xi)}$ можно указать на то, что его уменьшение в диапазоне $\pi / 4 \leq \psi_0^{(\xi)} \leq \pi / 3$, соответствующее росту степени наклона торца, обуславливает картину выраженного затенения в условно выделяемой треугольной приторцевой области сечения полуслоя в диапазоне относительных длин падающих волн $1.0 \leq \lambda \leq 3.0$. При дальнейшем уменьшении относительной длины падающей волны этот эффект выражено не проявляется, и вместе с тем, для $\lambda = 0.7$ можно указать на наличие «синусоидально» размещающихся в рассматриваемой подобласти сечения зон, в которых достигаются максимальные уровни волновых смещений.

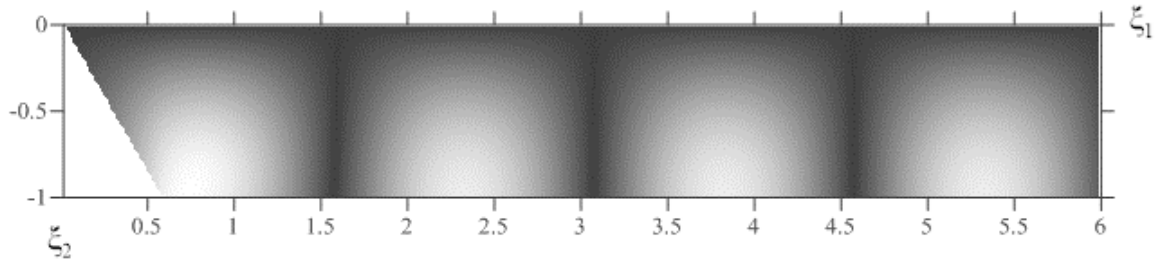


Рис. 2.22. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 3.0$

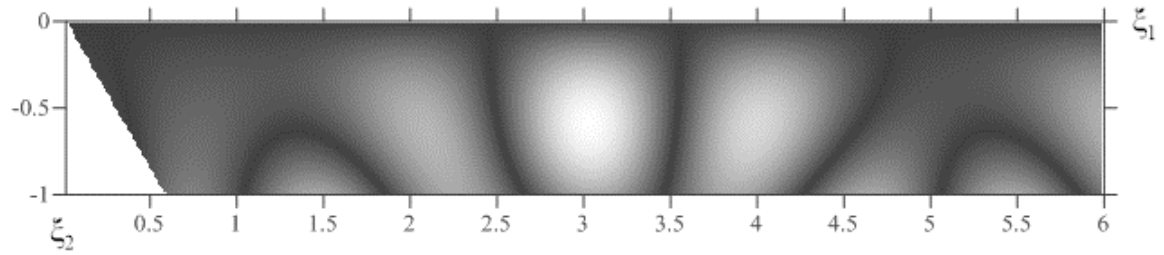


Рис. 2.23. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 1.6$

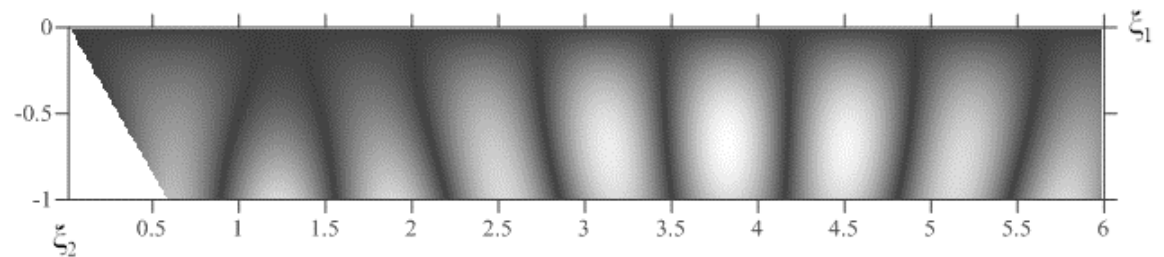


Рис. 2.24. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 1.3$

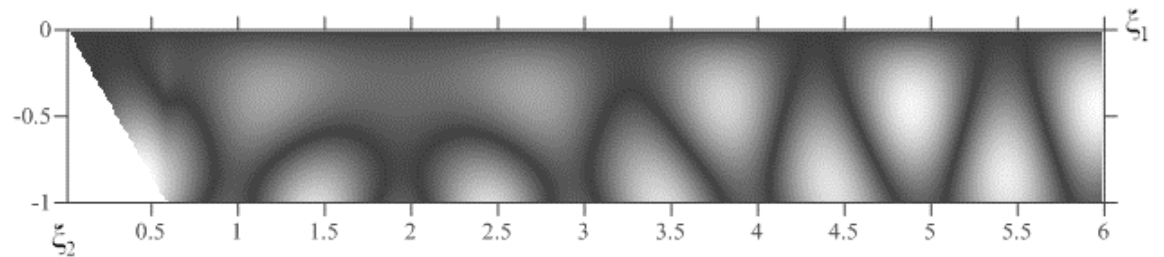


Рис. 2.25. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 1.0$

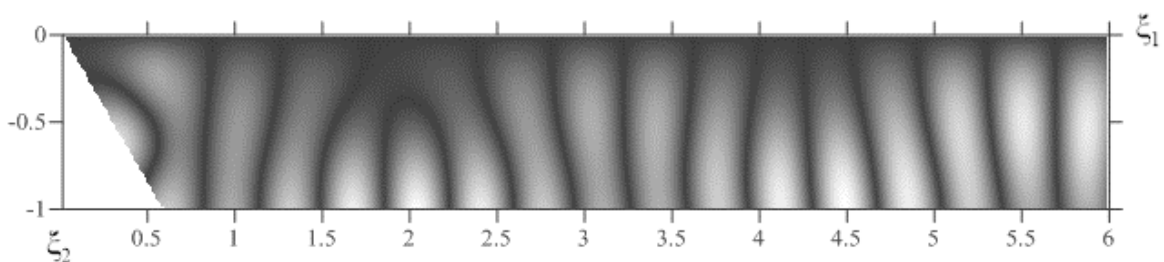


Рис. 2.26. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 3$, $\lambda = 0.7$

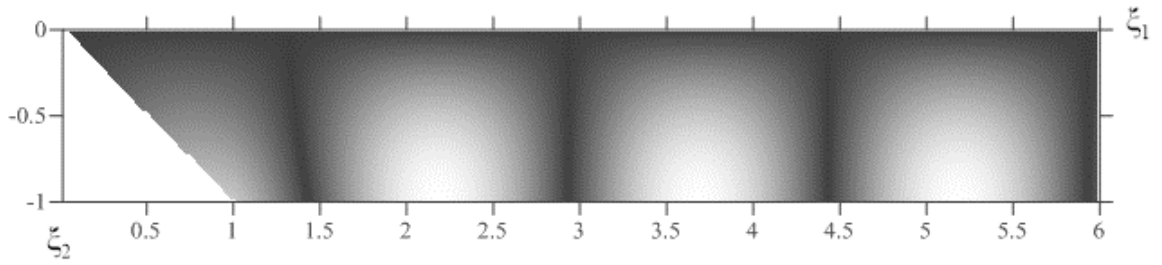


Рис. 2.27. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 3.0$

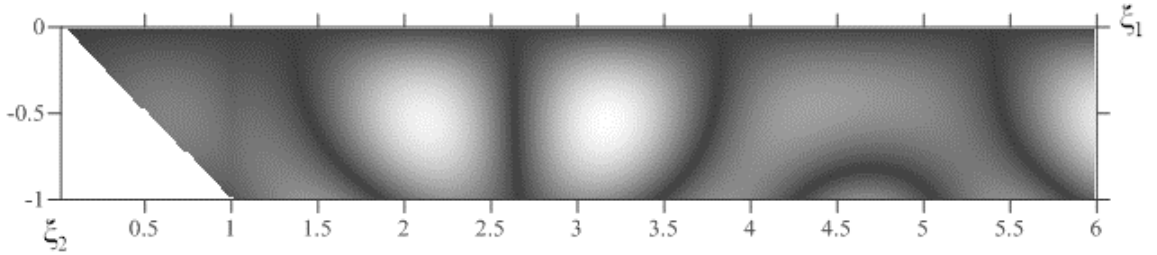


Рис. 2.28. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 1.6$

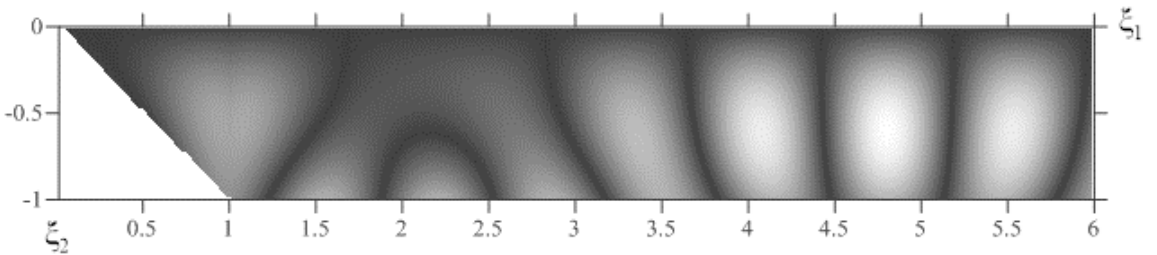


Рис. 2.29. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 1.3$

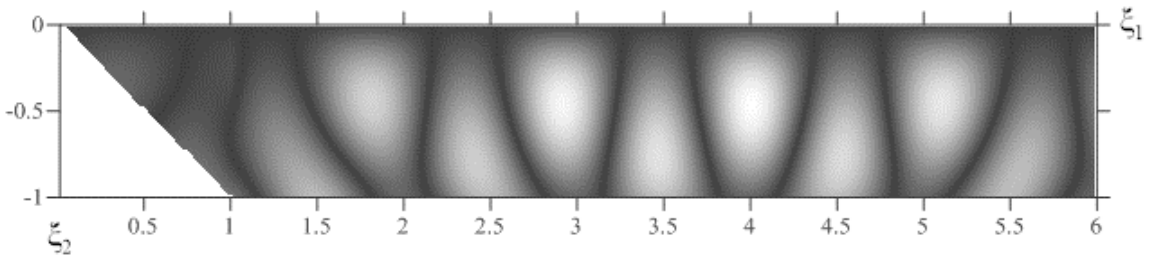


Рис. 2.30. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 1.0$

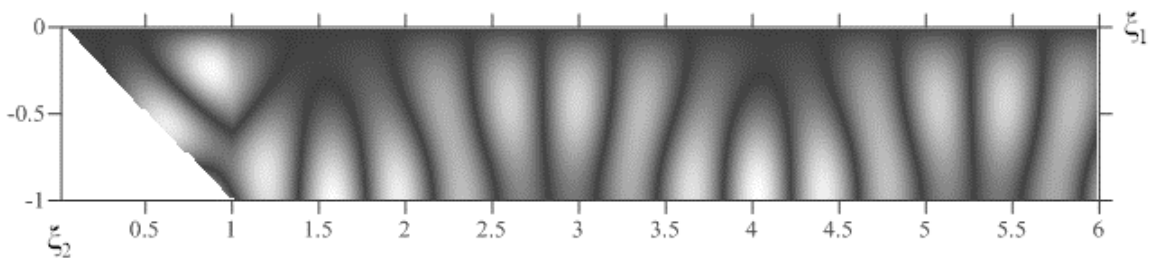


Рис. 2.31. Картина поля волновых перемещений при $\psi_0^{(\xi)} = \pi / 4$, $\lambda = 0.7$

Таким образом, в результате проведенных исследований построено численно-аналитическое решение краевой задачи об отражении нормальной волны сдвига от свободной, наклоненной под произвольным углом к граням плоской боковой поверхности упругого полуслоя, лежащего на жестком основании. Получен ряд результатов расчетов интенсивностей полей волновых перемещений в прилежащей к наклонной боковой поверхности зоне полуслоя и охарактеризованы отдельные эффекты влияния на картины распределения указанных интенсивностей факторов частоты падающей нормальной волны из низшей моды дисперсионного спектра и углового параметра наклона боковой поверхности. Установлено, что степень влияния величины угла наклона скошенной торцевой поверхности полуслоя на структуру анализируемых полей в рассматриваемом частотном диапазоне для случая его контакта с жестким основанием является более выраженной в сравнении со случаями закрепленного либо свободного по всем участкам границы полуслоя. Наблюдаются также достаточно существенные количественные и качественные различия в картинах распределений интенсивности волновых перемещений для различных рассматриваемых параметров наклона боковой поверхности, которые могут быть использованы для анализа обратной задачи идентификации степени наклона по характеристикам поля отраженных волн.

В случае применения описанной методики для моделирования волновых процессов в ортотропном полуслое на жестком основании с закрепленной наклонной боковой поверхностью, краевые условия рассматриваемой задачи на плоских гранях полуслоя $L_{2h}^{(\xi)}$ и на участках боковой границы $\Gamma_{\pm}^{(n)}$ принимают вид

$$(\sigma_{23})_{\xi_2=\pm h} = 0 \quad (2.39)$$

$$(u_3)_{\Gamma_{\pm}^{(n)}} = 0. \quad (2.40)$$

При этом поле волн в подобласти сечения L описывается представлением $u_3^{(L)}$ в виде суммы падающей и отраженной составляющих, удовлетворяющим уравнению (2.33) и краевым условиям (2.39)

$$u_3^{(L)} = u_{30}^{(p)} \sin(p\pi x_2 / (2h_{\mu})) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p(x_1 - l))) + \quad (2.41)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x_2 / (2h_\mu)) \cdot \exp(-i(\omega t - k_n(x_1 - l))).$$

В частичной подобласти L_R для описания стационарного поля набегающих и рассеиваемых сдвиговых волн вводится представление, удовлетворяющее уравнению (2.33) и краевому условию (2.40)

$$u_3^{(C)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_{\alpha_n}(kr) \sin \alpha_n \psi \cdot \exp(-i\omega t), \quad (2.42)$$

где B_n – произвольные коэффициенты; $\alpha_n = n\pi/\psi_0$, $k = (\rho h^2 \omega^2 / c_*)^{1/2}$, $J_{\alpha_n}(kr)$ – цилиндрические функции Бесселя первого рода. Коэффициенты A_n , B_n представлений (2.41) – (2.42) подлежат определению из функциональных краевых условий на границе $\Gamma = \{x_1 = l, x_2 \in [-h_\mu, h_\mu]\}$ контакта частичных областей L и L_T

$$(u_3^{(L)})_\Gamma = (u_3^{(C)})_\Gamma, \quad (\sigma_{13}^{(L)})_\Gamma = (\sigma_{13}^{(C)})_\Gamma, \quad (2.43)$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(L)} = & -c_{55} u_{30} i k_p \sin \frac{p\pi x_2}{2h_\mu} \cdot \exp(-i k_p (x_1 - l)) + \\ & + c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} A_n i k_n \sin \frac{n\pi x_2}{2h_\mu} \cdot \exp(i k_n (x_1 - l)), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(C)} = & c_{55} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[k \left(\frac{\alpha_n}{kr} J_{\alpha_n}(kr) - J_{\alpha_n+1}(kr) \right) \sin \alpha_n \psi \cos \psi - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_n}{r} J_{\alpha_n}(kr) \cos \alpha_n \psi \sin \psi \right]. \end{aligned}$$

Для алгебраизации функциональных краевых условий (2.43) в данном случае также может быть применен метод наименьших квадратов, в результате чего эти условия сводятся к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, которая в процессе численных исследований редуцируется. Порядки редуцирования устанавливаются в соответствии с критериями требуемой точности удовлетворения краевым условиям и устойчивости результатов расчетов при варьировании параметра редукции. После определения искомым коэффициентов

A_n , B_n , расчеты характеристик исследуемого волнового поля, как и в ранее рассмотренных случаях, реализуются с переходом к исходной системе координат.

2.5. Выводы по разделу 2

1. Дано общее описание теоретической численно-аналитической методики исследования процесса отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности трансверсально-изотропного полуслоя со свободными гранями. Использована концепция метода динамических однородных решений с введением представления для описываемого волнового поля в форме разложения по базисному множеству бегущих и краевых стоячих нормальных волн в слое с соответствующим типом краевых условий на плоских гранях. Определение коэффициентов представлений в рядах по базисным системам динамических однородных решений реализуется из редуцируемой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, получаемой в результате алгебраизации функциональных краевых условий на наклонной торцевой поверхности рассматриваемого тела с применением метода ортогональных рядов.

2. На базе концепции метода частичных областей разработана методика построения численно-аналитических решений краевых задач об отражении нормальной волны сдвига от наклоненной к граням под произвольным углом плоской боковой поверхности ортотропного упругого полуслоя, все участки граничных поверхностей которого являются жестко закрепленными либо свободными от силовых механических нагрузжений. Использован прием симметричного дополнения рассматриваемой области до области в виде полуслоя с треугольной равнобедренной клиновидной боковой поверхностью и выделения в его продольном сечении частичных подобластей секторной и треугольной формы, а также полуполосы с прямой ортогональной граням границей.

Волновые поля в частичных подобластях представляются рядами с неопределенными коэффициентами по априори удовлетворяющим соответствующим краевым условиям на плоских гранях и на наклонной боковой

поверхности базисным множествам частных решений волновых уравнений в прямоугольной и полярной координатных системах, удобно описывающих геометрию частичных подобластей (базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн в слое и в клиновидном теле с соответствующим типом однородных граничных условий на гранях). Коэффициенты вводимых разложений определяются из алгебраизируемых функциональных краевых условий на поверхностях идеального механического контакта введенных частичных областей. Алгебраизация функциональных краевых условий механического сопряжения выделенных в продольном сечении подобластей осуществляется с использованием метода ортогональных рядов либо метода наименьших квадратов и приводит к подлежащим редукции бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно множеств искомым коэффициентов.

3. Разработанная методика исследования процессов отражения нормальных волн сдвига от жестко закрепленной либо свободной плоской боковой поверхности ортотропного упругого полуслоя, наклоненной к его граням под произвольным углом, распространена на задачу об отражении волн сдвига от свободной наклонной боковой поверхности ортотропного полуслоя, лежащего на жестком основании.

4. Осуществлена базирующаяся на использовании созданных специализированных программных приложений численная реализация построенных решений, и применительно к рассмотренным вариантам постановки задач получены результаты расчетов интенсивностей полей волновых упругих перемещений в окрестности скошенной боковой поверхности анизотропного полуслоя для ряда значений относительной длины падающей нормальной волны из низшей моды соответствующего дисперсионного спектра и варьируемого углового показателя наклона боковой границы. Описаны и систематизированы эффекты структурной трансформации отраженных волн в ближнем и дальнем поле рассеяния при варьировании указанных параметров рассматриваемых задач.

5. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [102, 107, 108, 112, 115].

РАЗДЕЛ 3

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН ВДОЛЬ СОСТАВНОГО ВОЛНОВОДА СО СТЫКУЕМЫМИ ПОД УГЛОМ ОДНОРОДНЫМИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ИЛИ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

3.1. Прохождение сдвиговой волны по упругому волноводу из состыкованных под углом полуслоев

Проблема анализа эффектов распространения гармонических упругих волн в волноводах из состыкованных под углом полуслоев наиболее полно исследована для волноводов акустических и электромагнитных волн. Для полуслоев из деформируемых упругих материалов данная проблема остается крайне малоисследованной. Одним из потенциально применимых подходов к теоретическому численно-аналитическому исследованию задач о распространении нормальных упругих волн сдвига по кусочно-однородным волноводам [38, 39], в том числе, волноводам из состыкованных под углом анизотропных полуслоев, является использование представлений волновых полей для компонентов составных волноводов в виде рядов по соответствующим базисным множествам бегущих и краевых стоячих волн с последующим определением коэффициентов этих рядов из алгебраизированных функциональных краевых условий контакта полуслоев. Повышение эффективности данного подхода на стадии численной реализации связано с применением различных альтернативных методик алгебраизации краевых условий в задачах данного типа [71], к числу которых относятся метод ортогональных рядов, несколько версий метода наименьших квадратов, метод коллокаций, энергетический метод. Однако опыт использования перечисленных методик алгебраизации свидетельствует о необходимости дальнейших исследований по выработке оптимизированных схем поиска коэффициентов

разложений по базисным множествам нормальных волн, обеспечивающих высокую точность удовлетворения краевым условиям в максимально широком частотном диапазоне.

В той связи, одной из целей представляемого исследования является синтез новых альтернативных методик алгебраизации функциональных краевых условий в задачах волновой механики упругих тел, – методик ориентированных на повышение уровня достоверности численных исследований в задачах волновой механики составных тел с функциональными краевыми условиями контакта компонентов.

В данном подразделе диссертационной работы, во-первых, осуществляется построение и анализ теоретического численно-аналитического решения задач о распространении сдвиговых волн в составном волноводе из двух состыкованных под углом изотропных полуслоев с закрепленными плоскими гранями.

Исследуемый волновод можно рассматривать как составное тело, образуемое полуслоем V_1 с наклоненной по отношению к плоским граням плоской торцевой границей Γ_1 и полуслоем V_2 с ортогональным к граням плоским торцом Γ_2 . Полагается, что торцевые поверхности Γ_1 и Γ_2 имеют одинаковые размеры и при наложении образуют плоскость Γ идеального механического сопряжения полуслоев V_1 и V_2 .

С фрагментами рассматриваемого волновода связываются локальные координатные системы $Ox_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$ ($j = \overline{1,2}$), имеющие общий центр O , расположенный в центре Γ . Во введенных координатных системах составные части волновода соответственно занимают области

$$V_1 = V_{11} \cup V_{12}, \quad (3.1)$$

$$V_{11} = \{ x_1^{(1)} \geq l/2, x_2^{(1)} \in [-h_1, h_1], x_3^{(1)} \in (-\infty, \infty) \},$$

$$V_{12} = \{ -l/2 \leq x_1^{(1)} < l/2, -(2h_1/l)x_1^{(1)} \leq x_2^{(1)} \leq h_1, x_3^{(1)} \in (-\infty, \infty) \}; \quad (3.2)$$

$$V_2 = \{ x_1^{(2)} \geq 0, x_2^{(2)} \in [-h_2, h_2], x_3^{(2)} \in (-\infty, \infty) \}.$$

Используемый для решения задачи подход базируется на концепции частичных областей, согласно которой для каждого из выделенных фрагментов V_j вводятся соответствующие представления функции сдвиговых колебательных перемещений $u_3(x_1, x_2, t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\left[\left(\partial_1^{(j)} \right)^2 + \left(\partial_2^{(j)} \right)^2 - \rho_j R_*^2 / (\mu_j c_*) \partial_t^2 \right] u_3(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, t) = 0, \quad (3.3)$$

где $\partial_i^{(j)} = \partial / \partial x_i^{(j)}$, $\partial_t^2 = \partial / \partial t$; μ_j , ρ_j - нормированные модули сдвига и плотности для материалов составляющих V_j ; R_* , c_* - нормирующие параметры для характеристик с линейными размерностями и размерностями механических напряжений.

В предположении о том, что в бесконечно удаленной от Γ зоне составляющей V_1 генерируется симметричная нормальная сдвиговая волна из моды с номером p , которая распространяется в V_1 вдоль противоположного оси $Ox_1^{(1)}$ направления, и трансформируясь переходит в составляющую V_2 , указанные представления принимают вид

$$\begin{aligned} u_3^{(11)} = & u_{30}^{(p)} \cos(p\pi x_2^{(1)} / h_1) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p^{(11)} x_1^{(1)})) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{cn}^{(11)} \cos\left((2n-1)\pi x_2^{(1)} / 2h_1\right) \exp\left(k_{cn}^{(11)} x_1^{(1)}\right) + \right. \\ & \left. + A_{sn}^{(11)} \sin\left(n\pi x_2^{(1)} / h_1\right) \exp\left(k_{sn}^{(11)} x_1^{(1)}\right) \right] \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$k_{cn}^{(11)} = \left(\Omega_1^2 - (n\pi/h_1)^2 \right)^{1/2}, \quad k_{sn}^{(11)} = \left(\Omega_1^2 - ((2n+1)\pi/(2h_1))^2 \right)^{1/2}, \quad (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \in V_{11};$$

$$\begin{aligned} u_3^{(12)} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{sn}^{(12)} \sin\left(n\pi(x_2^{(1)} + h_1) / h_1\right) \sin\left(\nu_n x_1^{(1)}\right) + \right. \\ & \left. + A_{cn}^{(12)} \sin\left(n\pi(x_2^{(1)} + h_1) / h_1\right) \cos\left(\nu_n x_1^{(1)}\right) \right] \cdot \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\nu_n = \left(\Omega_1^2 - (n\pi/h_1)^2 \right)^{1/2}, \quad (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) \in V_{12};$$

$$u_3^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{cn}^{(2)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x_2^{(2)}}{2h_2}\right) \exp\left(k_{cn}^{(2)} x_1^{(2)}\right) + \right. \\ \left. + A_{sn}^{(2)} \sin\left(\frac{n\pi x_2^{(2)}}{h_2}\right) \exp\left(k_{sn}^{(2)} x_1^{(2)}\right) \right] \exp(-i\omega t), \quad (3.6)$$

$$k_{cn}^{(2)} = \left(\Omega_2^2 - (n\pi/h_2)^2\right)^{1/2}, \quad k_{sn}^{(2)} = \left(\Omega_2^2 - ((2n+1)\pi/(2h_2))^2\right)^{1/2}, \quad (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \in V_2; \\ \Omega_j^2 = (\rho_j \omega^2 R_*^2) / (\mu_j c_*), \quad (j = \overline{1,2}).$$

Введенные выражения удовлетворяют краевым условиям на жестко закрепленных плоских гранях компонентов волновода, а содержащийся в них произвол в виде групп неопределенных коэффициентов может быть использован для удовлетворения граничным условиям идеального механического сопряжения на поверхностях контакта выделенных подобластей

$$(u_3^{(11)})_{\Gamma_*} = (u_3^{(12)})_{\Gamma_*}, \quad (\sigma_{13}^{(11)})_{\Gamma_*} = (\sigma_{13}^{(12)})_{\Gamma_*}, \quad \Gamma_* = \left\{ x_1^{(1)} = l/2, x_2^{(1)} \in [-h, h] \right\}; \quad (3.7)$$

$$(u_3^{(12)})_{\Gamma} = (u_3^{(2)})_{\Gamma}, \quad (\sigma_{n3}^{(12)})_{\Gamma} = (\sigma_{13}^{(2)})_{\Gamma}, \quad (3.8)$$

$$\Gamma = \left\{ x_1^{(1)} = \left(\frac{l}{2h_2}\right) x_2^{(2)}, \quad x_2^{(1)} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right) x_2^{(2)}, \quad x_1^{(2)} = 0, \quad x_2^{(2)} \in [-h_2, h_2] \right\};$$

где

$$\sigma_{n3}^{(12)} = \sigma_{13}^{(12)} \cos(\pi/2 + \arctg(2h_1/l)) + \sigma_{23}^{(12)} \cos(\arctg(2h_1/l)), \quad (3.9)$$

$$\sigma_{13}^{(11)} = u_{30}^{(p)} \mu_1 \left(-ik_p^{(11)}\right) \cos(p\pi x_2^{(1)}/h_1) \cdot \exp(-ik_p^{(11)} x_1^{(1)}) + \\ + \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{cn}^{(11)} k_{cn}^{(11)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x_2^{(1)}}{2h_1}\right) \exp\left(k_{cn}^{(11)} x_1^{(1)}\right) + \right. \\ \left. + A_{sn}^{(11)} k_{sn}^{(11)} \sin\left(\frac{n\pi x_2^{(1)}}{h_1}\right) \exp\left(k_{sn}^{(11)} x_1^{(1)}\right) \right], \quad (3.10)$$

$$\sigma_{13}^{(12)} = \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin\left(n\pi \left(x_2^{(1)} + h_1\right) / h_1\right) \left[A_{sn}^{(12)} \cos\left(v_n x_1^{(1)}\right) - A_{cn}^{(12)} \sin\left(v_n x_1^{(1)}\right) \right], \quad (3.11)$$

$$\sigma_{13}^{(2)} = \mu_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{cn}^{(2)} k_{cn}^{(2)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x_2^{(2)}}{2h_2}\right) \exp\left(k_{cn}^{(2)} x_1^{(2)}\right) + \right.$$

$$+ A_{sn}^{(2)} k_{sn}^{(2)} \sin\left(n\pi x_2^{(2)} / h_2\right) \exp\left(k_{sn}^{(2)} x_1^{(2)}\right) \Big], \quad (3.12)$$

$$\sigma_{23}^{(12)} = \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{h_1} \cos\left(n\pi \left(x_2^{(1)} + h_1\right) / h_1\right) \left[A_{sn}^{(12)} \sin\left(v_n x_1^{(1)}\right) + A_{cn}^{(12)} \cos\left(v_n x_1^{(1)}\right) \right]. \quad (3.13)$$

Поиск неопределенных коэффициентов во введенных представлениях для функций сдвиговых волновых перемещений из сформулированных функциональных краевых условий осуществляется путем их предварительной алгебраизации. В качестве приема алгебраизации в рассматриваемом случае использован интегральный метод наименьших квадратов, после применения которого исходная задача сведена к решению редуцированных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов.

Применительно к задаче для волновода рассматриваемой геометрии в диссертации разработаны модифицированные процедуры получения систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений волновых полей по базисным системам нормальных волн. В этом случае рассматривается обобщенный вариант исследуемой задачи о движении сдвиговой гармонической волны по кусочно-однородному волноводу из состыкованных под углом ортотропных полуслоев. Для алгебраизации функциональных граничных условий контакта стыкуемых торцевых поверхностей предложено использовать методику обобщенной граничной ортогонализации систем функций, описывающих множества бегущих и краевых стоячих нормальных волн в компонентах волновода, а также включать в число контактных условий нелинейное соотношение баланса средних за период потоков мощности на поверхности сопряжения компонентов.

В рамках синтеза упомянутых модифицированных методик рассматривается составное ортотропное тело из полуслоя V_1 толщины $2h_1$ с ортогональным к граням плоским торцом Γ_1 и полуслоя V_2 толщины $2h_2$, $h_2 = h_1 \cdot \sin \alpha$ с плоской торцевой границей Γ_2 , наклоненной на угол α по отношению к его нижней

плоской грани. Торцевые поверхности Γ_1 и Γ_2 при стыковочном наложении образуют плоскость Γ идеального механического контакта полуслоев V_1 и V_2 . В телах V_1 и V_2 вводятся локальные координатные системы $Ox_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$ ($j = \overline{1,2}$), имеющие общий центр O , расположенный в центре Γ . При этом во введенных координатных системах составные части волновода занимают области

$$V_1 = \{-\infty < x_1^{(1)} \leq 0, x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1], x_2^{(1)} \in (-\infty, \infty)\}, \quad (3.14)$$

$$V_2 = \{x_3^{(2)} / \operatorname{tg} \alpha \leq x_1^{(2)} < \infty, x_3^{(2)} \in [-h_2, h_2], x_2^{(2)} \in (-\infty, \infty)\},$$

причем на контактной поверхности Γ выполняется условие $x_3^{(1)} = x_3^{(2)} / \sin \alpha$. Плоские граничные поверхности $x_3^{(1)} = \pm h_1$, $x_3^{(2)} = \pm h_2$ составных частей рассматриваемого волновода считаются свободными от напряжений.

Полагается, что из бесконечно удаленной зоны $x_3^{(1)} \rightarrow -\infty$ полуслоя V_1 вдоль положительного координатного направления $Ox_1^{(1)}$ к поверхности Γ движется стационарная нормальная поляризованная вдоль $Ox_2^{(1)}$ сдвиговая волна, принадлежащая некоторой моде дисперсионного спектра нормальных SH волн в слое со свойственными V_1 характеристиками. При взаимодействии падающей волны с наклонной контактной поверхностью Γ генерируется поле отраженных в V_1 и преломленных в V_2 SH -волн. Определению подлежат комплексные амплитудные функции сдвиговых колебательных перемещений $u_2^{(j)}(x_1^{(j)}, x_3^{(j)}, t)$ в отраженных и преломленных волнах для составных частей волновода V_1, V_2 , удовлетворяющие уравнениям стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации для материалов полуслоев V_j с упругими постоянными $c_{44}^{(j)}, c_{66}^{(j)}$ и плотностями $\rho^{(j)}$. Эти уравнения в случае отнесения всех переменных с размерностью расстояний к нормирующему параметру h_* , а характеристик с размерностью механических напряжений – к нормирующему параметру c_* , принимают вид

$$(c_{44}^{(j)}\partial_1^2 + c_{66}^{(j)}\partial_3^2 - \rho^{(j)}h_*^2c_*^{-1}\partial_t^2)u_2^{(j)} = 0, \quad (3.15)$$

$$\partial_j = \partial / \partial x_j \quad (j=1;3), \quad \partial_t = \partial / \partial t.$$

После аффинного преобразования координат $Ox_1^{(j)}x_3^{(j)}$ в координаты $O\tilde{x}_1^{(j)}\tilde{x}_2^{(j)}$ с использованием соотношений

$$\tilde{x}_1^{(j)} = x_1^{(j)}, \quad \tilde{x}_3^{(j)} = \mu_j x_3^{(j)}, \quad \mu_j = (c_{44}^{(j)} / c_{66}^{(j)})^{1/2}, \quad (3.16)$$

уравнения (3.15) трансформируются в классические волновые уравнения вида

$$(\partial_1^2 + \partial_3^2 - \rho^{(j)}h_*^2c_*^{-1}(c_{44}^{(j)})^{-1}\partial_t^2)u_2^{(j)} = 0. \quad (3.17)$$

Поля колебательных волновых перемещений $u_2^{(j)}(x_1^{(j)}, x_3^{(j)}, t)$ подчинены краевым условиям на контактной поверхности Γ

$$(u_2^{(1)})_\Gamma = (u_2^{(2)})_\Gamma, \quad (\sigma_{n2}^{(1)})_\Gamma = (\sigma_{n2}^{(2)})_\Gamma \quad (3.18)$$

В рамках используемого для решения подобных задач подхода [39, 71], для каждого из выделенных фрагментов V_j вводится соответствующее удовлетворяющее уравнению (3.17) представление функции сдвиговых колебательных перемещений $u_2^{(j)}(x_1^{(j)}, x_3^{(j)}, t)$ в виде ряда по базисной системе нормальных волн, включающей составляющие с различным типом симметрии по толщине координате. В качестве падающей волны рассматривается распространяющаяся в V_1 нормальная сдвиговая гармоническая волна круговой частоты ω с комплексной функцией колебательных перемещений

$$\tilde{u}_2^{(1,s)}(x_1, x_3, t) = \phi_s^{(1)}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k_s^{(1)}x_1)) \quad (3.19)$$

из моды с номером s объединенного спектра симметричных и антисимметричных нормальных волн антиплоской деформации в свободном ортотропном слое. В данном представлении и при записи ряда последующих соотношений рассматриваемой задачи, индексация координатных переменных и параметров, связанная с номером j составляющей V_j волновода и переходом к нормированным величинам координат на основе соотношения (3.16), без ограничения общности опускается.

Поля волновых упругих перемещений, генерируемые в составных элементах V_j волновода, в рамках рассматриваемой методики представляются редуцированными разложениями по базисным множествам бегущих и стоячих сдвиговых волн с неопределенными постоянными коэффициентами $A_q^{(j)}$, а амплитудные характеристики этих полей в подобластях продольных сечений G_j составляющих V_j соответственно имеют вид:

$$u_2^{(1)}(x_1, x_3) = \phi_s^{(1)}(x_3) \cdot \exp(-ik_s^{(1)}x_1) + \sum_{p=1}^{N_1} A_p^{(1)} \phi_p(x_3) \cdot \exp(ik_p^{(1)}x_1), \quad (x_1, x_3) \in G_1; \quad (3.20)$$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3) = \sum_{n=1}^{N_3} A_n^{(2)} \psi_n^{(2)}(x_3) \cdot \exp(-ik_n^{(2)}x_1), \quad (x_1, x_3) \in G_2, \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_s^{(1)}(x_3) &= u_0 (\exp(-iv_{1s}h_1) \cdot \exp(iv_{1s}x_3) + \exp(iv_{1s}h_1) \cdot \exp(-iv_{1s}x_3)), \\ \phi_p(x_3) &= \exp(-iv_{1p}h_1) \cdot \exp(iv_{1p}x_3) + \exp(iv_{1p}h_1) \cdot \exp(-iv_{1p}x_3), \\ \psi_n^{(2)}(x_3) &= \exp(-iv_{2n}h_2) \cdot \exp(iv_{2n}x_3) + \exp(iv_{2n}h_2) \cdot \exp(-iv_{2n}x_3), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$v_{1p} = (p-1)\pi / (2h_1), \quad v_{2n} = (n-1)\pi / (2h_2),$$

$$k_p^{(1)} = (\Omega_1^2 + v_{1p}^2)^{1/2}, \quad k_p^{(2)} = (\Omega_2^2 + v_{2p}^2)^{1/2}, \quad \Omega_q^2 = \rho_q \omega^2 h_*^2 / (c_* c_{44}^{(j)}).$$

Введенные представления $u_2^{(1)}(x_1, x_3)$, $u_2^{(2)}(x_1, x_3)$ удовлетворяют уравнениям волнового деформирования для составляющих рассматриваемого тела, а также краевым условиям на свободных полубесконечных боковых поверхностях. Контактные функциональные граничные условия для амплитудных характеристик рассматриваемых полей на поверхности Γ имеют вид:

$$(u_2^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_{\Gamma} = (u_2^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))_{\Gamma}, \quad (3.23)$$

$$(c_{66}^{(1)} \partial_1 u_2^{(1)}(x_1, x_3))_{\Gamma} = (c_{66}^{(2)} \partial_1 u_2^{(2)}(x_1, x_3))_{\Gamma}, \quad (3.24)$$

$$\Gamma : \{x_1^{(1)} = 0, x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1]\} = \{x_1^{(2)} = x_3^{(2)} / \operatorname{tg} \alpha, x_3^{(2)} \in [-h_2, h_2]\}.$$

Данные соотношения образуют систему функциональных уравнений относительно $A_p^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, подлежащую алгебраизации на следующем этапе исследования.

Предлагаются два модифицированных варианта алгоритма алгебраизации. Концепция первого из них базируется на использовании алгоритма обобщенной граничной ортогонализации множества функций, в ряды по которым разложены компоненты напряженно-деформированного состояния полуслоя V_2 . Данный алгоритм основывается на процедуре ортогонализации систем функций по Шмидту [71]. При этом учитывается, что, представление

$$u_{2,omp}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \sum_{p=1}^{N_1} A_p^{(1)} F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \sum_{p=1}^{N_1} A_p^{(1)} \phi_p(x_3^{(1)}) \cdot \exp(ik_p^{(1)} x_1^{(1)}), \quad (x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \in G_1$$

в виде разложения по системе функций

$$\{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})\}_{p=1}^{\infty} = \{(\phi_p(x_3^{(1)}) \cdot \exp(ik_p^{(1)} x_1^{(1)}))\}_{p=1}^{\infty} \quad (3.25)$$

при введении скалярного произведения

$$\gamma_{pq} = \int_{-h_1}^{h_1} (F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \cdot \overline{F_q^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})})_{\Gamma} dx_3^{(1)}, \quad (3.26)$$

с учетом

$$\{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} = \{(\phi_p(x_3^{(1)}) \cdot \exp(ik_p^{(1)} x_1^{(1)}))_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} = \{\phi_p(x_3^{(1)})\}_{p=1}^{\infty}, \quad (3.27)$$

ввиду свойства

$$\gamma_{pq} = \int_{-h_1}^{h_1} (\exp(-iv_{1p} h_1) \cdot \exp(iv_{1p} x_3^{(1)}) + \exp(iv_{1p} h_1) \cdot \exp(-iv_{1p} x_3^{(1)})) \cdot$$

$$\cdot (\exp(iv_{1p} h_1) \cdot \exp(-iv_{1p} x_3^{(1)}) + \exp(-iv_{1p} h_1) \cdot \exp(iv_{1p} x_3^{(1)})) dx_3^{(1)} = \begin{cases} 0, & p \neq q; \\ \neq 0, & p = q; \end{cases} \quad (3.28)$$

является ортогональным разложением на Γ . Соответственно, при записи представления волнового поля во второй компоненте волновода V_2 предлагается перейти от разложения

$$u_2^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) = \sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} \psi_p^{(2)}(x_3^{(2)}) \cdot \exp(-ik_p^{(2)} x_1^{(2)}) = \sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}),$$

$$(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \in G_2, \quad (3.29)$$

$$\psi_n^{(2)}(x_3) = \exp(-iv_{2n}h_2) \cdot \exp(iv_{2n}x_3) + \exp(iv_{2n}h_2) \cdot \exp(-iv_{2n}x_3),$$

по функциональному базису $\{F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})\}_{p=1}^{\infty}$ к разложению по гранично ортогонализованному функциональному базису $\{G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})\}_{p=1}^{\infty}$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3) = \sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}), \quad (x_1, x_3) \in G_2 \quad (3.30)$$

со скалярным произведением

$$c_{pq} = \int_{-h_1}^{h_1} ((c_{66}^{(2)})^2 (\partial G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) / \partial x_1^{(2)})_{\Gamma} \cdot \overline{(\partial G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) / \partial x_1^{(2)})_{\Gamma}} dx_3^{(2)}, \quad (3.31)$$

вводимым с учетом представления

$$\begin{aligned} \{(F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} &= \{(\psi_p^{(2)}(x_3^{(2)}) \cdot \exp(-ik_p^{(2)} x_1^{(2)}))_{\Gamma}\}_{p=1}^{\infty} = \\ &= \{\psi_p^{(2)}(x_3^{(2)}) \exp((-ik_p^{(2)} / \operatorname{tg} \alpha) \cdot x_3^{(2)})\}_{p=1}^{\infty}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Применяемый алгоритм граничной ортогонализации описывается соотношениями

$$G_1^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) = s_{11}^{-1} F_1^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}), \quad (3.33)$$

$$G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) = (F_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) - \sum_{k=1}^{p-1} s_{pk} G_k^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})) \cdot s_{pp}^{-1} \quad (p \geq 2), \quad (3.34)$$

в которых

$$s_{pk} = (c_{pk} - \sum_{k=1}^{p-1} s_{kj} s_{pj}) \cdot s_{kk}^{-1} \quad (k < p), \quad (3.35)$$

$$s_{pp} = (c_{pp} - \sum_{k=1}^{p-1} |s_{pk}|^2)^{1/2}. \quad (3.36)$$

После реализации данной процедуры и подстановки получаемых таким образом представлений $u_2^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})$ и $u_2^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})$ в граничные условия (3.23), (3.24), обе части соотношения (3.23) поочередно умножаются на функции $\overline{(F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}))_{\Gamma}}$, обе части соотношения (3.24) поочередно умножаются на

функции $\overline{(\partial_1 G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}))}_\Gamma$, и полученные соотношения интегрируются по $x_3^{(1)}$ на интервале $x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1]$. В результате применения данного приема алгебраизации функциональные граничные условия (3.23), (3.24) сводятся к парной системе линейных алгебраических уравнений порядка $N_1 + N_2$ относительно коэффициентов $A_p^{(1)}$, $A_q^{(2)}$

$$\begin{aligned} A_p^{(1)} + \sum_{q=1}^{N_2} \lambda_{pq}^{(2)} A_q^{(2)} &= \delta_p^{(1)} \quad (p = \overline{1, N_1}), \\ A_q^{(2)} + \sum_{p=1}^{N_1} \lambda_{qp}^{(2)} A_p^{(1)} &= \delta_q^{(2)} \quad (q = \overline{1, N_2}); \end{aligned} \quad (3.37)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{qp}^{(1)} &= \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right)_\Gamma dx_3^{(1)} \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(F_p^{(1)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right)_\Gamma dx_3^{(1)} \right)^{-1}, \\ \lambda_{qp}^{(2)} &= \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} \partial_1 F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \overline{\partial_1 G_q^{(2)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right)_\Gamma dx_3^{(1)} \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(2)} \partial G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})} \right)_\Gamma dx_3^{(1)} \right)^{-1}, \\ \delta_p^{(1)} &= \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(\tilde{F}_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \overline{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right)_\Gamma dx_3^{(1)} \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(F_p^{(1)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right)_\Gamma dx_3^{(1)} \right)^{-1}, \\ \delta_q^{(2)} &= \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} \partial_1 \tilde{F}_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \overline{\partial_1 G_q^{(2)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right)_\Gamma dx_3^{(1)} \right) \times \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\times \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(2)} \partial G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \overline{G_q^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})} \right)_{\Gamma} dx_3^{(1)} \right)^{-1},$$

$$\tilde{F}_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \varphi_s^{(1)}(x_3^{(1)}) \exp(-ik_s^{(1)} x_1^{(1)}).$$

Система полученной структуры обладает комплексом преимуществ по показателям точности численного решения и удобству применения методики качественного анализа свойств квазирегулярности.

В качестве еще одного модифицированного приема алгебраизации функциональных граничных условий (3.23), (3.24) предлагается итерационный алгоритм, в рамках которого система линейных алгебраических уравнений (3.37) рассматривается совместно с нелинейным квадратичным по коэффициентам $A_p^{(1)}$, $A_q^{(2)}$ условием баланса средних за период суммарных потоков мощности для волновых полей в стыкуемых фрагментах составного волновода на контактной площадке Γ

$$\int_{-h_1}^{h_1} (c_{66}^{(1)} \partial_1 u_2^{(1)} \cdot \overline{u_2^{(1)}} - c_{66}^{(2)} \partial_1 u_2^{(2)} \cdot \overline{u_2^{(2)}})_{\Gamma} dx_3^{(1)} = 0. \quad (3.39)$$

На первом шаге алгоритма коэффициент $A_{N_1}^{(1)}$ полагается равным нулю, а оставшееся множество коэффициентов определяется из системы линейных уравнений вида (3.37), имеющей порядок $N_1 + N_2 - 1$ и получаемой из (3.37) отбрасыванием уравнения с номером N_1 . Далее с учетом полученных значений коэффициентов $A_p^{(1)}$ ($p = \overline{1, N_1 - 1}$), $A_q^{(2)}$ ($q = \overline{1, N_2}$) соотношение энергетического баланса (3.39) трансформируется в нелинейное алгебраическое уравнение относительно величины $A_{N_1}^{(1)} = A_R + iA_I$, имеющее вид

$$A_{N_1}^{(1)} \overline{A_{N_1}^{(1)}} + M^{(1)} A_{N_1}^{(1)} + M^{(2)} \overline{A_{N_1}^{(1)}} = Q, \quad (3.40)$$

с коэффициентами

$$M^{(1)} = M_R^{(1)} + iM_I^{(1)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} F_{N_1}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \left(\overline{F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} + \sum_{p=1}^{N_1-1} \overline{A_p^{(1)} F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right) \right) dx_3^{(1)}, \\
&M^{(2)} = M_R^{(2)} + iM_I^{(2)} = \\
&= (ik_{N_1}^{(1)})^{-1} \int_{-h_1}^{h_1} \left(\overline{F_{N_1}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \left(\partial_1 F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) + \sum_{p=1}^{N_1-1} A_p^{(1)} \partial_1 F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \right) \right) dx_3^{(1)}, \\
&Q = Q_R + iQ_I = \left[\int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(1)} \left(\partial_1 F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) + \sum_{p=1}^{N_1-1} A_p^{(1)} \partial_1 F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) \right) \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\overline{F_s^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} + \sum_{p=1}^{N_1-1} \overline{A_p^{(1)} F_p^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})} \right) \right) dx_3^{(1)} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{-h_1}^{h_1} \left(c_{66}^{(2)} \left(\sum_{p=1}^{N_2} A_p^{(2)} \partial_1 G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) \right) \cdot \left(\sum_{p=1}^{N_2} \overline{A_p^{(2)} G_p^{(2)}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})} \right) \right) dx_3^{(1)} \right] [ic_{66}^{(1)} k_{N_1}^{(1)}]^{-1}.
\end{aligned}$$

Равенства реальных и мнимых частей в комплекснозначном соотношении (3.40) могут быть записаны в виде

$$A_R^2 + A_I^2 + A_R(M_R^{(1)} + M_R^{(2)}) + A_I(M_I^{(2)} - M_I^{(1)}) - Q_R = 0, \quad (3.41)$$

$$A_R(M_I^{(1)} + M_I^{(2)}) + A_I(M_R^{(1)} - M_R^{(2)}) - Q_I = 0, \quad (3.42)$$

откуда используя следствие из (3.42) в виде

$$A_I = (Q_I - A_R(M_I^{(1)} + M_I^{(2)})) / (M_R^{(1)} - M_R^{(2)}) = \alpha - \beta A_R \quad (3.43)$$

можно получить квадратное уравнение относительно A_R

$$\begin{aligned}
(1 - \beta^2)A_R^2 + (M_R^{(1)} + M_R^{(2)} - \beta(M_I^{(2)} - M_I^{(1)})) - 2\alpha\beta A_R + \\
+(\alpha(M_I^{(2)} - M_I^{(1)}) + \alpha^2 - Q_I) = 0
\end{aligned} \quad (3.44)$$

и таким образом определить возможные значения $A_{N_1}^{(1)}$. Эти значения на следующем шаге циклического алгоритма используются при последующем определении множества коэффициентов из системы линейных уравнений порядка $N_1 + N_2 - 1$, за которым вновь следует процедура определения значений $A_{N_1}^{(1)}$.

Вариант выбора корня квадратного уравнения (3.44) связан с использованием

информации о тенденциях поведения значений в последовательности коэффициентов $A_p^{(1)}$ ($p = \overline{1, N_1}$) и с отслеживанием фактора практической сходимости итерационного алгоритма.

3.2. Методика учета особенностей поля напряжений на границе области контакта компонентов волновода

В исследованиях по актуальной проблеме применения численно-аналитических методов для анализа закономерностей распространения акустических и упругих волн по составным волноводам кусочно-однородной структуры [30, 39], описываемых краевыми задачами для уравнений динамического деформирования с однородными и контактными граничными условиями на различных участках границ рассматриваемых тел, важным аспектом является учет возможного появления особенностей в представлениях полей механических напряжений для краевых точек поверхностей сопряжения разнородных компонентов. Различные аспекты проблемы возникновения таких особенностей для ряда вариантов задач механики деформирования неоднородных составных тел и элементов конструкций рассмотрены в работах [31–34]. Роль полученных в этих работах результатов заключается, помимо прочего, в последующем использовании данных о наличии и типе вышеуказанных особенностей для эффективного корректного решения задачи удовлетворения краевым условиям на контактных поверхностях составных тел [2, 30–34, 39].

В контексте представленных соображений, целью представляемых в данном подразделе исследований является описание теоретического алгоритма решения задачи о распространении сдвиговых нормальных упругих волн в волноводе из состыкованных под углом прямолинейно ортотропных полуслоев с учетом возможного возникновения особенностей степенного типа в угловых точках его продольного сечения, отвечающих границам отрезка контакта сопрягаемых элементов.

Как указано выше, элементом исследования свойств стационарных волн деформаций в кусочно-однородных волноводах является учет возможностей появления особенностей полей напряжений в угловых точках их сопрягаемых составных элементов, и данные об особенностях поведения волновых полей в окрестности таких точек представляют интерес в дальнейшем процессе анализа соответствующих краевых задач [2, 30–34, 39].

Исследуемый волновод рассматривается как составное ортотропное упругое тело из полуслоя V_1 толщины $2h_1$ с ортогональным к граням плоским торцом Γ_1 и полуслоя V_2 толщины $2h_2$, где $h_2 = h_1 \cdot \cos \alpha$, с плоской торцевой границей Γ_2 . Полуслоем V_2 наклонен на угол α по отношению к V_1 . Торцевые поверхности Γ_1 и Γ_2 при стыковочном наложении образуют плоскость Γ идеального механического контакта полуслоев V_1 и V_2 .

В процессе применения для решения рассматриваемой задачи численно-аналитического метода рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн для каждой компонент волновода, в телах V_1 и V_2 вводятся локальные координатные системы $Ox_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)} (j = \overline{1,2})$, имеющие общий полюс O , расположенный в центре Γ . Соответственно, ось $Ox_1^{(2)}$ наклонена на угол α по отношению к $Ox_1^{(1)}$. Во введенных координатных системах составные части волновода занимают области

$$V_1 = \{-\infty < x_1^{(1)} \leq 0, x_3^{(1)} \in [-h_1, h_1], x_2^{(1)} \in (-\infty, \infty)\} \quad (3.45)$$

$$V_2 = \{x_3^{(2)} / \operatorname{tg} \alpha \leq x_1^{(2)} < \infty, x_3^{(2)} \in [-h_2, h_2], x_2^{(2)} \in (-\infty, \infty)\}$$

причем на контактной поверхности Γ выполняется условие $x_3^{(1)} = x_3^{(2)} / \cos \alpha$. Плоские граничные поверхности $x_3^{(1)} = \pm h_1$, $x_3^{(2)} = \pm h_2$ составных частей рассматриваемого волновода считаются свободными от напряжений.

Материалы рассматриваемых слоев, по предположению, являются ортотропными. Упруго-эквивалентные направления для материалов полуслоев V_j

коллинеарны осям локальных координатных систем $Ox_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$ и характеризуются при антиплоской деформации упругими постоянными $c_{44}^{(j)}$, $c_{66}^{(j)}$.

При этом, в координатной системе $Ox_1^{(1)}x_3^{(1)}$ свойства материала V_2 характеризуются совокупностью постоянных

$$\begin{aligned} c_{44}^{(2\alpha)} &= c_{44}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{66}^{(2)} \sin^2 \alpha, & c_{66}^{(2\alpha)} &= c_{66}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{44}^{(2)} \sin^2 \alpha, \\ c_{46}^{(2\alpha)} &= (c_{44}^{(2)} - c_{66}^{(2)}) \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.46)$$

В рассматриваемом случае распространения волн сдвигового типа заключение о возможности появления особенностей для характеристик поля напряжений в крайних точках Γ , данные об их характере и порядке, могут быть получены на основе методик асимптотического анализа задач статического антиплоского деформирования составных клиновидных тел, изложенных в публикациях [2, 122].

Для применения в данной работе рассматриваются следующие варианты постановки и анализа задачи об определении характера асимптотического поведения характеристик поля сдвиговых перемещений и касательных напряжений в окрестности угловой точки составного анизотропного упругого клина при антиплоской деформации [122]. Базовой является задача об антиплоской деформации составного клина из двух разнотипных однородных анизотропных клиновидных элементов, внутренние поверхности которых находятся в идеальном механическом контакте друг с другом, а на внешних граничных поверхностях могут быть заданы краевые условия отсутствия напряжений, отсутствия перемещений, либо комбинированные условия одной свободной и закрепленной второй поверхности.

Анализ вопроса о существовании особенности полей напряжений в вершине клина применительно к описанным случаям представлен в работе [122] и сведен к определению показателя ζ особенности степенного типа из соответствующего трансцендентного уравнения. В ней исследуется антиплоская задача для составного кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина с сечением,

представленным в координатной плоскости Ox_1x_2 двумя контактирующими секторными областями

$$S_1 = \{0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \theta_1\} \quad (3.47)$$

с границами

$$\Gamma_0 = \{0 \leq r < \infty, \theta = 0\}, \Gamma_1 = \{0 \leq r < \infty, \theta = \theta_1\} \quad (3.48)$$

и

$$S_2 = \{0 \leq r < \infty, -\theta_2 \leq \theta \leq 0\} \quad (3.49)$$

с границами

$$\Gamma_0 = \{0 \leq r < \infty, \theta = 0\}, \Gamma_2 = \{0 \leq r < \infty, \theta = -\theta_2\}. \quad (3.50)$$

Рассматривается случай идеального механического контакта составляющих по границе Γ_0 , задания на Γ_1 и Γ_2 условий отсутствия напряжений либо задания на Γ_1 и Γ_2 условий отсутствия упругих перемещений, а также случай отсутствия на Γ_1 напряжений, а на Γ_2 – перемещений.

Устанавливаемые в [122] асимптотические представления для напряжений $\sigma_{13}^{(j)}$, $\sigma_{23}^{(j)}$ ($j=1, 2$) в окрестности вершины составного клина в областях с сечениями S_j его компонентов из материалов с упругими постоянными

$c_{44}^{(j)}$, $c_{55}^{(j)}$, $c_{45}^{(j)}$ имеют вид

$$\sigma_{13}^{(j)} = A_j \mu_j (x_1 + \mu_j x_2)^{\zeta-1} + B_j \bar{\mu}_j (x_1 + \bar{\mu}_j x_2)^{\zeta-1}, \quad (3.51)$$

$$\sigma_{13}^{(j)} = -A_j (x_1 + \mu_j x_2)^{\zeta-1} - B_j \bar{\mu}_j (x_1 + \bar{\mu}_j x_2)^{\zeta-1};$$

$$\mu_j = (c_{45}^{(j)} / c_{55}^{(j)}) + i(c_{44}^{(j)} / c_{55}^{(j)} - c_{45}^{(j)} c_{45}^{(j)} / c_{55}^{(j)})^{1/2}, \quad (3.52)$$

где A_j, B_j – произвольные постоянные коэффициенты.

В перечисленных случаях задания граничных условий на внешних поверхностях составного клина показатели особенности ζ соответственно подлежат определению из уравнений

$$(\chi + 1) \sin \zeta (\phi_1 + \phi_2) + (\chi - 1) \sin \zeta (\phi_1 - \phi_2) = 0, \quad (3.53)$$

$$(\chi + 1) \sin \zeta (\phi_1 + \phi_2) - (\chi - 1) \sin \zeta (\phi_1 - \phi_2) = 0, \quad (3.54)$$

$$(\chi + 1) \cos \zeta(\phi_1 + \phi_2) + (\chi - 1) \cos \zeta(\phi_1 - \phi_2) = 0. \quad (3.55)$$

В приведенных уравнениях в общем случае

$$\chi = ((c_{44}^{(2)} c_{55}^{(2)} - (c_{45}^{(2)})^2) / (c_{44}^{(1)} c_{55}^{(1)} - (c_{45}^{(1)})^2))^{1/2}; \quad (3.56)$$

$$\phi_1 = \arg(\cos \theta_1 + \mu_1 \sin \theta_1), \quad \phi_2 = \arg(\cos \theta_2 - \bar{\mu}_2 \sin \theta_2).$$

При этом асимптотическое поведение функций сдвиговых упругих перемещений в окрестности вершины составного клина для областей S_j описывается представлениями

$$u_3^{(j)}(x_1, x_2) = A_j m_j (x_2 + \mu_j x_1)^\zeta + B_j \bar{m}_j (x_2 + \bar{\mu}_j x_1)^\zeta, \quad (3.57)$$

где

$$m_j = c_{55}^{(j)} \mu_j - c_{45}^{(j)}, \quad \bar{m}_j = c_{55}^{(j)} \bar{\mu}_j - c_{45}^{(j)}. \quad (3.58)$$

В случае существования действительных корней $0 < \zeta < 1$ уравнений (3.53) – (3.55) анализируемые поля динамических напряжений $\sigma_{13}^{(j)}$, $\sigma_{23}^{(j)}$ будут иметь особенность в вершине составного клина.

Применение этого результата для анализа возможного появления и учета особенностей полей напряжений в угловых точках сопрягаемых составных элементов описанного выше кусочно-однородного волновода, образованного состыкованными под углом анизотропными полуслоями, реализуется следующим образом.

Для рассматриваемого составного тела крайние угловые точки $x_3^{(1)} = h_1$ и $x_3^{(1)} = -h_1$ контактного отрезка Γ границы могут быть в асимптотическом смысле интерпретированы как вершины составного клина со свободными границами Γ_1 и Γ_2 из двух описанных выше анизотропных тел с упругими постоянными $c_{44}^{(1)}$, $c_{66}^{(1)}$, $c_{46}^{(1)} = 0$; $c_{44}^{(2)}$, $c_{66}^{(2)}$, $c_{46}^{(2)} = 0$ и соответствующими значениями упругих постоянных $c_{44}^{(2\alpha)}$, $c_{66}^{(2\alpha)}$, $c_{46}^{(2\alpha)}$ для тела V_2 в координатах, введенных в V_1 . В случае клина с вершиной в точке $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = h_1$ соответствующие угловые параметры равны $\theta_1 = \pi / 2 + \alpha$, $\theta_2 = \pi / 2$, а в случае клина с вершиной в точке $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = -h_1$

эти параметры равны $\theta_1 = \pi/2 - \alpha$, $\theta_2 = \pi/2$. При использовании в рассматриваемом случае соотношений (3.52)–(3.55) для фигурирующих в них модулей упругости $\hat{c}_{44}^{(j)}$, $\hat{c}_{55}^{(j)}$, $c_{45}^{(j)}$ необходимо произвести формальные замены $\hat{c}_{44}^{(1)} \rightarrow c_{44}^{(2\alpha)}$, $\hat{c}_{55}^{(1)} \rightarrow c_{66}^{(2\alpha)}$, $\hat{c}_{45}^{(1)} \rightarrow c_{46}^{(2\alpha)}$, $\hat{c}_{44}^{(2)} \rightarrow c_{44}^{(1)}$, $\hat{c}_{55}^{(2)} \rightarrow c_{66}^{(1)}$, $\hat{c}_{55}^{(2)} \rightarrow 0$.

Параметр ζ асимптотического поведения полей напряжений в угловой точке клина в данном случае соответственно подлежат определению из уравнения

$$(\chi + 1) \sin \zeta (\phi_1 + \phi_2) + (\chi - 1) \sin \zeta (\phi_1 - \phi_2) = 0, \quad (3.59)$$

в котором

$$\chi = ((c_{44}^{(1)} c_{66}^{(1)}) / ((c_{44}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{66}^{(2)} \sin^2 \alpha)(c_{66}^{(2)} \cos^2 \alpha + c_{44}^{(2)} \sin^2 \alpha) - ((c_{44}^{(2)} - c_{66}^{(2)}) \sin \alpha \cos \alpha)^2)^{1/2}, \quad (3.60)$$

$$\mu_1 = (c_{46}^{(2\alpha)} / c_{66}^{(2\alpha)}) + i(c_{44}^{(2\alpha)} / c_{66}^{(2\alpha)} - (c_{46}^{(2\alpha)} / c_{66}^{(2\alpha)})^2)^{1/2}, \quad \mu_2 = i(c_{44}^{(1)} / c_{66}^{(1)})^{1/2},$$

а также $\phi_1 = \arg(-\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)$, $\phi_2 = \arg(-\bar{\mu}_2)$ для клина с вершиной в точке $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = h_1$ и $\phi_1 = \arg(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)$, $\phi_2 = \arg(-\bar{\mu}_2)$ для клина с вершиной в точке $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = -h_1$.

В случае выявления степенной особенности поля напряжений с показателем $\zeta_1 - 1 < 0$ в окрестности точки $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = h_1$, решение краевой задачи о прохождении по волноводу нормальной сдвиговой волны с заданной симметрией по толщине, с заданной частотой и длиной, на основе применения метода рядов по базисному множеству бегущих и краевых стоячих нормальных волн [103] реализуется следующим образом.

Некоторые результаты расчетов, связанных с анализом уравнения (3.59) представлены в таблице 3.1, в которой содержатся значения параметра особенности ζ для точки $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = h_1$; для точки $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = h_1$ значения ζ меньше единицы при указанных в таблице параметрах отсутствуют.

В предположении о том, что исходная, приходящая к поверхности Γ из глубины V_1 сдвиговая гармоническая волна является симметричной нормальной

волной круговой частоты ω , принадлежит моде с номером p из соответствующего дисперсионного спектра и характеризуется амплитудой u_0 , первичное

Таблица 3.1

Характеристики показателей особенностей поля напряжений в точке внутреннего угла зоны контакта стыкуемых с наклоном полуслоев

Угловой параметр ϕ	Параметры $\tilde{c}_{ij}^{(m)} = c_{ij}^{(m)} / c_*$, ζ	Вариант расчета					
		1	2	3	4	5	6
$\pi / 6$	$\tilde{c}_{44}^{(1)}$	1	1	1	2	2	2
	$\tilde{c}_{66}^{(1)}$	2	2	2	1	1	1
	$\tilde{c}_{44}^{(2)}$	2	1	3	1	1	3
	$\tilde{c}_{66}^{(2)}$	1	3	1	2	3	1
	ζ	0.9398	0.7561	1.0	0.7979	0.7561	1.0
$\pi / 4$	$\tilde{c}_{44}^{(1)}$	1	1	1	2	2	2
	$\tilde{c}_{66}^{(1)}$	2	2	2	1	1	1
	$\tilde{c}_{44}^{(2)}$	2	1	3	1	1	3
	$\tilde{c}_{66}^{(2)}$	1	3	1	2	3	1
	ζ	0.8362	0.7332	0.8453	0.7668	0.7332	0.8453
$\pi / 3$	$\tilde{c}_{44}^{(1)}$	1	1	1	2	2	2
	$\tilde{c}_{66}^{(1)}$	2	2	2	1	1	1
	$\tilde{c}_{44}^{(2)}$	2	1	3	1	1	3
	$\tilde{c}_{66}^{(2)}$	1	3	1	2	3	1
	ζ	0.7455	0.7224	0.7224	0.7456	0.7224	0.7224

представление для волнового поля в V_1 выбирается в виде суммы падающей и отраженной от Γ составляющих

$$\begin{aligned}
 u_2^{(1)} = & u_0 \cos(\alpha_p^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t - k_{1p}^{(s)} x_1^{(1)})} + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1}^{(1)} \cos(\alpha_n^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t + k_{1n}^{(s)} x_1^{(1)})} + A_{n2}^{(1)} \sin(\beta_n^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t + k_{1n}^{(a)} x_1^{(1)})})
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

а для прошедшей в V_2 волны в виде

$$u_2^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1}^{(2)} \cos(\alpha_n^{(2)} x_3^{(2)}) e^{-i(\omega t - k_{3n}^{(s)} x_1^{(2)})} + A_{n2}^{(2)} \sin(\beta_n^{(2)} x_3^{(2)}) e^{-i(\omega t - k_{3n}^{(a)} x_1^{(2)})}), \quad (3.62)$$

где

$$\beta_n^{(j)} = \frac{(2n+1)\pi}{2h^{(j)}}, \quad k_{jn}^{(a)} = \left(\rho^{(j)} \omega^2 - c_{44}^{(j)} \left(\frac{(2n+1)\pi}{2h^{(j)}} \right)^2 / c_{66}^{(j)} \right)^{1/2}, \quad (3.36)$$

$$\alpha_n^{(j)} = \frac{n\pi}{2}, \quad k_{jn}^{(s)} = \left(\rho^{(j)} \omega^2 - c_{44}^{(j)} \left(\frac{n\pi}{h^{(j)}} \right)^2 / c_{66}^{(j)} \right)^{1/2},$$

$A_{n1}^{(1)}, A_{n2}^{(1)}, A_{n1}^{(3)}, A_{n2}^{(3)}$, – неизвестные коэффициенты, $k_{jn}^{(s)}, k_{jn}^{(a)}$ – волновые числа для симметричных (s) и антисимметричных (a) нормальных волн моды n в слое.

Далее, при наличии особенности полей напряжений в точке $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = h_1$, для полуслоя V_1 записывается разложение функции $\tau_1(x_3^{(1)}) = (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1}$ по образуемому граничными представлениями на Γ для комплексных амплитудных функций базисных нормальных сдвиговых волн в V_1

$$\{u_{2p}^{(1)}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})\} = \{\cos(q_{sp1} x_3^{(1)}) \exp(ik_{sp1} x_1^{(1)})\} \cup \{\sin(q_{cp1} x_3^{(1)}) \exp(ik_{cp1} x_1^{(1)})\} \quad (3.64)$$

множеству базисных функций

$$\{\cos q_{sp1} x_3^{(1)}, \sin q_{cp1} x_3^{(1)}\}_{p=0}^{\infty}, \quad q_{cp1} = (2p+1)\pi / (2h_1), \quad q_{sp1} = (p+1)\pi / h_1. \quad (3.65)$$

Данное разложение имеет вид

$$\tau_1(x_3^{(1)}) = (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1} = \sum_{p=0}^{\infty} (\xi_{cp1} \cos q_{sp1} x_3^{(1)} + \xi_{sp1} \sin q_{cp1} x_3^{(1)}), \quad (3.66)$$

$$\xi_{cp1} = (2h_1)^{-1} \left(\int_{-h_1}^{h_1} (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1} \cos q_{sp1} x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right), \quad (3.67)$$

$$\xi_{sp1} = (2h_1)^{-1} \left(\int_{-h_1}^{h_1} (h_1 - x_3^{(1)})^{\zeta_1} \sin q_{cp1} x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right),$$

и на его основе формируется представление для учитывающего наличие особенности специального частного однородного решения вида

$$u_{2\zeta_1}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \sum_{p=0}^{\infty} (\xi_{sp1} \cos q_{sp1} x_3^{(1)} \exp(ik_{sp1} x_1^{(1)}) + \xi_{sp1} \sin q_{cp1} x_3^{(1)} \exp(ik_{cp1} x_1^{(1)})). \quad (3.68)$$

Соответственно, для полуслоя V_2 , в котором угловой точке $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = h_1$, отвечает точка $x_1^{(2)} = h_2 \operatorname{tg} \alpha = h_1 \sin \alpha$, $x_3^{(2)} = h_2$, в этом случае формируется представление для специального частного однородного решения вида

$$\begin{aligned} \hat{u}_{2\zeta_1}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) = & \sum_{p=0}^{\infty} (\hat{\xi}_{sp1} \cos q_{sp2} x_3^{(2)} \exp(ik_{sp2}(x_1^{(2)} - h_1 \sin \alpha)) + \\ & + \hat{\xi}_{sp1} \sin q_{cp2} x_3^{(2)} \exp(ik_{cp2}(x_1^{(2)} - h_1 \sin \alpha))), \end{aligned} \quad (3.69)$$

где

$$q_{cp2} = (2p + 1)\pi / (2h_2), \quad q_{sp2} = (p + 1)\pi / h_2, \quad (3.70)$$

$$\hat{\xi}_{cp1} = (2h_2)^{-1} \left(\int_{-h_2}^{h_2} (h_2 - x_3^{(2)})^{\zeta_1} \cos q_{sp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right), \quad (3.71)$$

$$\hat{\xi}_{sp1} = (2h_2)^{-1} \left(\int_{-h_2}^{h_2} (h_2 - x_3^{(2)})^{\zeta_1} \sin q_{cp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right).$$

Аналогично, если степенная особенность поля напряжений с параметром $\zeta_2 - 1 < 0$ выявляется в окрестности точки $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = -h_1$ для полуслоя V_1 , то формируется представление для специального частного однородного решения вида

$$u_{2\zeta_2}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)}) = \sum_{p=0}^{\infty} (\xi_{cp2} \cos q_{sp1} x_3^{(1)} \exp(ik_{sp1} x_1^{(1)}) + \xi_{sp2} \sin q_{cp1} x_3^{(1)} \exp(ik_{cp1} x_1^{(1)})), \quad (3.72)$$

в котором

$$\xi_{cp2} = (2h_1)^{-1} \left(\int_{-h_1}^{h_1} (x_3^{(1)} + h_1)^{\zeta_1} \cos q_{sp1} x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right), \quad (3.73)$$

$$\xi_{sp2} = (2h_1)^{-1} \left(\int_{-h_1}^{h_1} (x_3^{(1)} + h_1)^{\zeta_1} \sin q_{cp1} x_3^{(1)} dx_3^{(1)} \right).$$

В этом случае для полуслоя V_2 , в котором угловой точке $x_1^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = -h_1$, отвечает точка $x_1^{(2)} = -h_1 \sin \alpha$, $x_3^{(2)} = -h_2$, формируется представление для специального частного однородного решения вида

$$\hat{u}_{2\zeta_2}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)}) = \sum_{p=0}^{\infty} (\hat{\xi}_{cp2} \cos q_{sp2} x_3^{(2)} \exp(ik_{sp2}(x_1^{(2)} + h_1 \sin \alpha)) + \hat{\xi}_{sp2} \sin q_{cp2} x_3^{(2)} \exp(ik_{cp2}(x_1^{(2)} + h_1 \sin \alpha))), \quad (3.74)$$

где $q_{cp2} = (2p + 1)\pi / (2h_2)$, $q_{sp2} = (p + 1)\pi / h_2$, (3.75)

$$\hat{\xi}_{cp2} = (2h_2)^{-1} \left(\int_{-h_2}^{h_2} (x_3^{(2)} + h_2)^{\zeta_2} \cos q_{sp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right), \quad (3.76)$$

$$\hat{\xi}_{sp2} = (2h_2)^{-1} \left(\int_{-h_2}^{h_2} (x_3^{(2)} + h_2)^{\zeta_2} \sin q_{cp2} x_3^{(2)} dx_3^{(2)} \right).$$

В ситуациях наличия устанавливаемых особенностей, отвечающие им специальные частные однородные решения $u_{2\zeta_1}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})$, $u_{2\zeta_2}(x_1^{(1)}, x_3^{(1)})$, $\hat{u}_{2\zeta_1}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})$, $\hat{u}_{2\zeta_2}(x_1^{(2)}, x_3^{(2)})$ с множителями в виде подлежащих определению коэффициентов $D_{2\zeta_1}$, $D_{2\zeta_2}$, $F_{2\zeta_1}$, $F_{2\zeta_2}$, добавляются к соответствующим представлениям (3.61) и (3.62).

Дальнейший этап реализации алгоритма исследования волн сдвига в волноводе из состыкованных под углом ортотропных полуслоев состоит в нахождении значений коэффициентов редуцируемых разложений (3.61), (3.62) из алгебраизируемых на базе метода ортогональных рядов функциональных граничных условий на контактной поверхности Γ

$$\left(u_2^{(1)} \right)_{\Gamma_{12}} = \left(u_2^{(2)} \right)_{\Gamma_{12}}, \quad \left(\sigma_{12}^{(1)} \right)_{\Gamma_{12}} = \left(\sigma_{n2}^{(2)} \right)_{\Gamma_{12}}, \quad (3.77)$$

записываемых с учетом соотношений связи координат

$$(x_1^{(2)})_{\Gamma} = x_3^{(1)} \sin \alpha, \quad (x_3^{(2)})_{\Gamma} = x_3^{(1)} \cos \alpha. \quad (3.78)$$

В соотношениях (3.77) представление

$$\left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}} = \sigma_{12}^{(2)} \cos\left(\bar{n}_{\Gamma_{12}} \wedge O_2 x_1^{(2)}\right) + \sigma_{32}^{(2)} \cos\left(\bar{n}_{\Gamma_{12}} \wedge O_2 x_3^{(2)}\right)$$

описывает касательные динамические напряжения на контактной площадке Γ с нормалью $\bar{n}_{\Gamma_{12}}$.

В процессе алгебраизации осуществляется домножение соотношений граничных условий (3.77) на элементы функциональной системы

$$\{\cos q_{sp1} x_3^{(1)}, \sin q_{cp1} x_3^{(1)}\}_{p=0}^{\infty},$$

$$q_{cp1} = (2p+1)\pi / (2h_1), \quad q_{sp1} = (p+1)\pi / h_1, \quad (3.79)$$

и интегрирование по $x_3^{(1)}$ в пределах от $-h_1$ до h_1 . При этом выполняется согласование пределов редукции в разложениях (3.61), (3.62) и количество выбираемых элементов функциональной системы (3.79) для получения относительно искомым коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей.

Представленная методика применена, в частности, для исследования энергетических характеристик прохождения симметричной нормальной волны из низшей моды дисперсионного спектра по волноводу рассматриваемого типа. В таблице 3.2 приведены данные базирующихся на решениях соответствующих краевых задач расчетов для величин приведенных относительных показателей \tilde{P}_j суммарных по сечению величин средних за период потоков мощности в волнах, отражающихся от плоскости раздела компонентов волновода и переходящих через наклонную контактную поверхность сопряжения во вторую компоненту волновода при варьировании механических свойств компонентов, имеющих равную плотность, а также при варьировании угла стыковки компонентов. Относительная длина исходной падающей на контактную плоскость волны равна $2\pi h_1$. Рассматриваемые при этом варианты задания механических свойств компонентов представлены в таблице 3.1. Расчетные соотношения для исследуемых энергетических характеристик отраженной \tilde{P}_1 и прошедшей \tilde{P}_2 составляющих имеют вид

$$\tilde{P}_1 = P_1 / P_0, \quad \tilde{P}_2 = P_2 / P_0,$$

$$P_0 = \int_{-h_1}^{h_1} (c_{66}^{(1)} \partial_1 u_{2I}^{(1)} \overline{u_{2I}^{(1)}}) dx_3^{(1)}, \quad P_1 = \int_{-h_1}^{h_1} (c_{66}^{(1)} \partial_1 u_{2R}^{(1)} \overline{u_{2R}^{(1)}}) dx_3^{(1)}, \quad P_2 = \int_{-h_2}^{h_2} (c_{66}^{(2)} \partial_1 u_2^{(2)} \overline{u_2^{(2)}}) dx_3^{(2)};$$

$u_{2I}^{(1)}$, $u_{2R}^{(1)}$ – соответственно падающая и отраженная составляющие для первой компоненты волновода.

Описываемые в таблице 3.2 результаты показывают, что наряду с ожидаемым эффектом нарастания относительных показателей отражения при увеличении наклона и соответствующего уменьшения толщины стыкуемой под углом второй компоненты составного волновода, при определенных вариантах анизотропии компонентов возникают эффекты почти полного прохождения энергетического потока через контактную плоскость при определенных промежуточных значениях углов наклона.

Таблица 3.2

Характеристики энергетических показателей прохождения симметричной нормальной волны из низшей моды дисперсионного спектра по волноводу из состыкованных под углом анизотропных полуслоев

Вариант задания параметров $\tilde{c}_{ij}^{(m)} = c_{ij}^{(m)} / c_*$ по таблице 3.1.	Относительные энергетические характеристики \tilde{P}_j	Значения углового параметра стыковки полуслоев (град.)				
		15	30	45	60	75
1	\tilde{P}_1	0.12	0.16	0.23	0.36	0.59
	\tilde{P}_2	0.88	0.84	0.77	0.64	0.41
2	\tilde{P}_1	0.03	0.02	0.00	0.02	0.19
	\tilde{P}_2	0.97	0.98	1.00	0.98	0.81
3	\tilde{P}_1	0.12	0.16	0.32	0.36	0.59
	\tilde{P}_2	0.88	0.84	0.77	0.64	0.41
4	\tilde{P}_1	0.11	0.07	0.03	0.00	0.12
	\tilde{P}_2	0.89	0.93	0.97	1.00	0.88

3.3. Модифицированная схема алгебраизации функциональных граничных условий задачи о поперечных упругих волнах в Γ -образном волноводе

Настоящий подраздел диссертационной работы посвящен разработке, базирующейся на концепции частичных областей методики решения задачи о распространении сдвиговых гармонических упругих волн по Γ -образному волноводу из двух ориентированных под прямым углом стыкуемых ортотропных полуслоев со свободными от напряжений внешними граничными поверхностями. Полагается, что рассматриваемый волновод занимает в прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3, \quad (3.80)$$

$$V_1 = \{x_1 \leq -h_2, x_2 \in (-\infty, \infty), -h_1 \leq x_3 \leq h_1\},$$

$$V_2 = \{-h_2 \leq x_1 \leq h_2, x_2 \in (-\infty, \infty), -h_1 \leq x_3 \leq h_1\},$$

$$V_3 = \{-h_2 \leq x_1 \leq h_2, x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \leq -h_1\}.$$

В качестве определяющих эффективность процесса численной реализации элементов представляемой методики следует указать процедуру алгебраизации функциональных граничных условий идеального механического сопряжения выделенных фрагментов V_i . Основная схема применения в этих целях метода ортогональных рядов не является безальтернативной и может быть заменена модифицированными подходами, открывающими возможности для решения актуальной проблемы дальнейшего повышения точности расчетов. В качестве такой модифицированной версии приема алгебраизации функциональных граничных условий сопряжения фрагментов рассматриваемого Γ -образного волновода в предлагается комплексная процедура совместного применения метода коллокаций и метода наименьших квадратов с добавлением нелинейных соотношений баланса средних за период потоков мощности для волновых полей в стыкуемых фрагментах, которая классифицируется ниже как модифицированная итерационная методика алгебраизации.

Исследуемая задача заключается в определении характеристик волновых полей в выделяемых фрагментах V_i кусочно-однородного составного волновода с вводимыми в рассмотрение подобластями сечений $G_j = (V_j)_{x_2=0}$. Полагается, что из глубины $x_1 \rightarrow -\infty$ составляющей V_1 вдоль положительного направления оси Ox_1 к зоне контакта V_1 и V_2 движется нормальная сдвиговая гармоническая волна круговой частоты ω с комплексной функцией колебательных перемещений

$$\tilde{u}_2^{(1,s)}(x_1, x_3, t) = \phi_s^{(1)}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k_s^{(1)} x_1)) \quad (3.81)$$

из моды с номером s объединенного спектра симметричных и антисимметричных нормальных волн антиплоской деформации в свободном ортотропном слое. Поля волновых упругих перемещений, последовательно генерируемые в составных элементах V_i волновода, в рамках рассматриваемой методики представляются редуцированными разложениями по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных сдвиговых волн с неопределенными постоянными коэффициентами $A_q^{(i)}$, а амплитудные характеристики этих полей в частичных подобластях сечения G_i соответственно имеют вид:

$$u_2^{(1)}(x_1, x_3) = \phi_s^{(1)}(x_3) \cdot \exp(ik_s^{(1)} x_1) + \sum_{p=1}^{N_1} A_p^{(1)} \phi_p(x_3) \cdot \exp(-ik_p^{(1)} x_1) \quad (x_1, x_3) \in G_1; \quad (3.82)$$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3) = \sum_{q=-N_{21}}^{N_{21}} [A_{1q}^{(2)} \phi_q^{(2)}(x_3) \psi_{1q}^{(2)}(x_1) + A_{2q}^{(2)} \phi_q^{(2)}(x_3) \psi_{2q}^{(2)}(x_1)] + \quad (3.83)$$

$$+ \sum_{m=-N_{22}}^{N_{22}} [A_{3m}^{(2)} \phi_m^{(2)}(x_3) \psi_m^{(2)}(x_1) + A_{4m}^{(2)} \phi_{2m}^{(2)}(x_3) \psi_m^{(2)}(x_1)] \quad (x_1, x_3) \in G_2;$$

$$u_2^{(3)}(x_1, x_3) = \sum_{n=1}^{N_3} A_n^{(3)} \psi_n^{(3)}(x_1) \cdot \exp(ik_n^{(3)} x_3) \quad (x_1, x_3) \in G_3, \quad (3.84)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_s^{(1)}(x_3) &= u_0 (\exp(-iv_{1s} h_3) \cdot \exp(iv_{1s} x_3) + \exp(iv_{1s} h_3) \cdot \exp(-iv_{1s} x_3)), \\ \phi_p(x_3) &= \exp(-iv_{1p} h_3) \cdot \exp(iv_{1p} x_3) + \exp(iv_{1p} h_3) \cdot \exp(-iv_{1p} x_3), \\ \phi_q^{(2)}(x_3) &= \exp(iq\pi x_3 / h_3), \quad \psi_{1q}^{(2)}(x_1) = \exp(\lambda_q x_1), \quad \psi_{2q}^{(2)}(x_1) = \exp(-\lambda_q x_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_m^{(2)}(x_1) &= \exp(im\pi x_1 / h_1), \quad \phi_{1m}^{(2)}(x_3) = \exp(\mu_m x_3), \quad \phi_{2m}^{(2)}(x_3) = \exp(-\mu_m x_3), \\
\psi_n^{(3)}(x_1) &= \exp(-iv_{3n} h_1) \cdot \exp(iv_{3n} x_1) + \exp(iv_{3n} h_1) \cdot \exp(-iv_{3n} x_1), \\
v_{1p} &= (p-1)\pi / (2h_3), \quad \lambda_q = i((\Omega_2^2 + (q\pi / h_3)c_{44}^{(2)}) / c_{66}^{(2)})^{1/2}, \quad v_{3n} = (n-1)\pi / (2h_1), \\
\mu_m &= i((\Omega_2^2 + (m\pi / h_1)c_{66}^{(2)}) / c_{44}^{(2)})^{1/2}, \quad k_p^{(1)} = ((\Omega_1^2 - c_{44}^{(1)}v_{1p}^2) / c_{66}^{(1)})^{1/2}, \\
k_n^{(3)} &= ((\Omega_2^2 - c_{44}^{(2)}v_{3p}^2) / c_{66}^{(2)})^{1/2}, \quad \Omega_q^2 = \rho_q \omega^2 h_*^2 / c_*,
\end{aligned}$$

ρ_q и $c_{ij}^{(q)}$ – плотности и упругие постоянные анизотропных материалов составляющих V_i ; h_* и c_* – нормирующие параметры. Все введенные представления удовлетворяют уравнениям волнового деформирования для составляющих рассматриваемого тела, а представления $u_2^{(1)}(x_1, x_3)$, $u_2^{(3)}(x_1, x_3)$ удовлетворяют также краевым условиям на свободных полубесконечных боковых поверхностях. Остающиеся функциональные граничные условия для амплитудных характеристик рассматриваемых полей имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_2^{(1)}(-h_2, x_3) &= u_2^{(2)}(-h_2, x_3) \quad x_3 \in [-h_1, h_1]; & (3.85) \\
(c_{66}^{(1)} \partial_1 u_2^{(1)}(x_1, x_3))_{x_1=-h_2} &= (c_{66}^{(2)} \partial_1 u_2^{(2)}(x_1, x_3))_{x_1=-h_2} \quad x_3 \in [-h_1, h_1]; \\
(\partial_1 u_2^{(2)}(x_1, x_3))_{x_1=h_2} &= 0 \quad x_3 \in [-h_1, h_1]; \\
(\partial_3 u_2^{(2)}(x_1, x_3))_{x_3=h_1} &= 0 \quad x_1 \in [-h_2, h_2]; \\
u_2^{(2)}(x_1, -h_1) &= u_2^{(3)}(x_1, -h_1) \quad x_1 \in [-h_2, h_2]; \\
(\partial_3 u_2^{(2)}(x_1, x_3))_{x_3=-h_1} &= (\partial_3 u_2^{(3)}(x_1, x_3))_{x_3=-h_1} \quad x_1 \in [-h_2, h_2].
\end{aligned}$$

Данные соотношения порождают систему функциональных уравнений относительно $A_q^{(i)}$, подлежащую алгебраизации на следующем этапе исследований. В рамках предлагаемого модифицированного алгоритма предлагается процедура алгебраизации, согласно которой на интервалах $x_i \in [-h_i, h_i]$ ($i=1;3$) выбираются множества точек коллокации $\{x_{im}\}_{m=1}^{Q_i}$, для которых записываются $3 \cdot (Q_1 + Q_3)$ алгебраических соотношений, порождаемых

граничными условиями задачи. На базе граничных условий формулируются также несколько групп из шести соотношений условий минимизации квадратичных невязок

$$\begin{aligned} \partial \left(\int_{-h_1}^{h_1} \left| u_2^{(1)}(-h_2, x_3) - u_2^{(2)}(-h_2, x_3) \right|^2 dx_3 \right) / \partial A_q^{(i)} = 0, \dots, \quad (3.86) \\ \partial \left(\int_{-h_2}^{h_2} \left| (\partial_3 u_2^{(2)}(x_1, x_3))_{x_3=-h_1} - (\partial_3 u_2^{(3)}(x_1, x_3))_{x_3=-h_1} \right|^2 dx_1 \right) / \partial A_q^{(i)} = 0, \end{aligned}$$

и записываются два нелинейных относительно коэффициентов $A_q^{(i)}$ соотношения балансов средних за период суммарных по площадкам контакта потоков мощности для волновых полей в стыкуемых фрагментах

$$\begin{aligned} \int_{-h_1}^{h_1} (c_{66}^{(1)} \partial_1 u_2^{(1)} \cdot \bar{u}_2^{-(1)} - c_{66}^{(2)} \partial_1 u_2^{(2)} \cdot \bar{u}_2^{-(2)})_{x_1=-h_2} dx_3 = 0, \\ \int_{-h_2}^{h_2} (\partial_1 u_2^{(2)} \cdot \bar{u}_2^{-(2)} - \partial_1 u_2^{(3)} \cdot \bar{u}_2^{-(3)})_{x_3=-h_1} dx_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Далее реализуется итерационный алгоритм определения $N_s = N_1 + 2 \cdot N_{21} + 2 \cdot N_{22} + N_3 + 2$ искомым коэффициентов $A_q^{(i)}$, согласно которому на первом шаге коэффициенты $A_{N_1}^{(1)}$ и $A_{N_3}^{(3)}$ полагаются равными нулю, а оставшееся множество $N_s - 2$ коэффициентов определяются из системы линейных уравнений, порождаемой охарактеризованными выше соотношениями в точках коллокации и $N_s - 3 \cdot (Q_1 + Q_3) - 2$ условиями минимизации квадратичных невязок при варьировании выбора коэффициентов, по которым в этих условиях осуществляется дифференцирование. Затем два ранее полагавшиеся нулевыми коэффициента $A_{N_1}^{(1)}$ и $A_{N_3}^{(3)}$ определяются из нелинейных соотношений балансов потоков мощности и фиксируются на следующем итеративном шаге отыскания $N_s - 2$ остающихся коэффициентов.

3.4. Сдвиговые волны в упругом слое с участком зигзагообразного излома

Данный подраздел диссертационной работы посвящен построению решения задачи о распространении сдвиговых упругих волн антиплоской деформации в закрепленном анизотропном упругом слое с участком локального зигзагообразного излома.

Рассматривается составной волновод, имеющий геометрическое строение, показанное на рисунке 3.1, и представляющий собой составное упругое тело, в котором можно выделить три фрагмента.

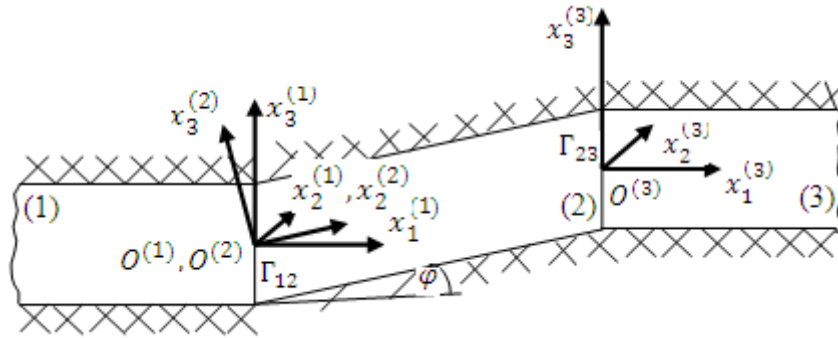


Рис. 3.1

Фрагмент (1) отнесен к системе координат $O^{(1)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}$ и занимает область $V^{(1)} = \{-\infty < x_1^{(1)} \leq 0; -\infty < x_2^{(1)} < \infty; -h^{(1)} \leq x_3^{(1)} \leq h^{(1)}\}$. Фрагмент (2) представляет собой участок слоя с толщиной $2h^{(2)}$ и длины L , ограниченный плоскостями, наклоненными по отношению к граням полуслоя $V^{(1)}$ под углом φ . Его полутолщина при описываемом варианте стыковки фрагментов составного волновода имеет величину $h^{(2)} = h^{(1)} \cos \varphi$. Фрагмент (2) в координатах $O^{(2)}x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(2)}$ занимает область

$$V^{(2)} = \left\{ x_3^{(2)} \operatorname{tg} \varphi \leq x_1^{(2)} \leq x_3^{(2)} \operatorname{tg} \varphi + L; -\infty < x_2^{(2)} < \infty; -h^{(2)} \leq x_3^{(2)} \leq h^{(2)} \right\}.$$

Фрагмент (3) в системе координат $O^{(3)}x_1^{(3)}x_2^{(3)}x_3^{(3)}$ занимает область $V^{(3)} = \{x_1^{(3)} < \infty; -\infty < x_2^{(3)} < \infty; -h^{(3)} \leq x_3^{(3)} \leq h^{(3)}\}$. Его плоские грани $x_3^{(3)} = \pm h^{(3)}$ жестко закреплены.

Полагается, что в бесконечно удаленной области $x_1^{(1)} \rightarrow -\infty$ фрагмента $V^{(1)}$ волновода генерируется бегущая свободная симметричная нормальная волна SH-типа, которая распространяется вдоль положительного направления координатной оси $O^{(1)}x^{(1)}$ и имеет амплитудную характеристику u_0 . На границе контакта Γ_{12} фрагмента $V^{(1)}$ и фрагмента $V^{(2)}$ рассматриваемого составного тела при падении данной волны генерируется поле отраженных в $V^{(1)}$ волн и поле преломленных в $V^{(2)}$ волн. Преломленные волны, распространяясь вдоль направления $O^{(2)}x_1^{(2)}$ в составном элементе $V^{(2)}$ рассматриваемого тела, достигают граничной поверхности Γ_{23} контакта составляющих $V^{(2)}$ и $V^{(3)}$, в результате чего генерируется поле отраженных от данной границы раздела волн и поле преломленных в $V^{(3)}$ волн. Задача заключается в том, чтобы по данным об исходной падающей нормальной волне, физико-механических свойствах фрагментов волновода и угле их стыковки φ , определить характеристики отраженных и преломленных волн.

Рассматриваемая проблема в математической постановке сводится к определению функций волновых перемещений $u_2^{(j)}(x_1, x_3, t)$ в нормальных волнах, составляющих поля падающих, отраженных и преломленных волн в фрагментах волновода из краевой задачи, включающей:

– уравнения динамической антиплоской деформации для фрагмента $V^{(j)}$

$$\mu(\partial_1^2 + \partial_3^2)u_2^{(j)} - \rho\partial_t^2 u_2^{(j)} = 0, \quad \text{где } \partial_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial_t = \partial/\partial t; \quad (3.88)$$

– краевые условия на плоских гранях волновода

$$\partial_3 u_2^{(j)} = 0 \Rightarrow \left(u_{20} \left(x_3^{(j)} \right) \right)_{x_3^{(j)} = \pm h^{(j)}} = 0; \quad (3.89)$$

- краевые условия на границах Γ_{12} и Γ_{23} фрагментов волновода

$$\begin{aligned} \left(u_2^{(1)}\right)_{\Gamma_{12}} &= \left(u_2^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}}, \quad \left(\sigma_{12}^{(1)}\right)_{\Gamma_{12}} = \left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}}; \\ \left(u_2^{(2)}\right)_{\Gamma_{23}} &= \left(u_2^{(3)}\right)_{\Gamma_{23}}, \quad \left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{23}} = \left(\sigma_{12}^{(3)}\right)_{\Gamma_{23}}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

в которых $\left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}}$, $\left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{23}}$ – касательные динамические напряжения на контактных площадках Γ_{12} и Γ_{23} с соответствующими нормальными $\bar{n}_{\Gamma_{12}}$ и $\bar{n}_{\Gamma_{23}}$, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{12}} &= \sigma_{12}^{(2)} \cos\left(\bar{n}_{\Gamma_{12}} \wedge O_2 x_1^{(2)}\right) + \sigma_{32}^{(2)} \cos\left(\bar{n}_{\Gamma_{12}} \wedge O_2 x_3^{(2)}\right), \\ \left(\sigma_{n2}^{(2)}\right)_{\Gamma_{23}} &= \sigma_{12}^{(2)} \cos\left(\bar{n}_{\Gamma_{23}} \wedge O_2 x_1^{(2)}\right) + \sigma_{32}^{(2)} \cos\left(\bar{n}_{\Gamma_{23}} \wedge O_2 x_3^{(2)}\right). \end{aligned} \quad (3.91)$$

Решения краевых задач (3.88) – (3.90) описывают исследуемые волновые поля. Численно-аналитические методики их решения базируются на использовании концепции разложения волновых полей по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн.

Исходные представления для комплексных функций волновых перемещений в каждом из фрагментов составного упругого тела в случае, когда падающая симметричная нормальная волна принадлежит моде с номером p из соответствующего дисперсионного спектра и характеризуется амплитудой u_0 , имеют вид

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= u_0 \cos(\alpha_p^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t - k_{1p}^{(s)} x_1^{(1)})} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{n1}^{(1)} \cos(\alpha_n^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t + k_{1n}^{(s)} x_1^{(1)})} + A_{n2}^{(1)} \sin(\beta_n^{(1)} x_3^{(1)}) e^{-i(\omega t + k_{1n}^{(a)} x_1^{(1)})} \right), \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_{n1}^{(2+)} \cos(\alpha_n^{(2)} x_3^{(2)}) e^{-i(\omega t + k_{2n}^{(s)} x_1^{(2)})} + A_{n2}^{(2+)} \sin(\beta_n^{(2)} x_3^{(2)}) e^{-i(\omega t + k_{2n}^{(a)} x_1^{(2)})} + \right. \\ &\left. + A_{n1}^{(2-)} \cos(\alpha_n^{(2)} x_3^{(2)}) e^{-i(\omega t - k_{2n}^{(s)} x_1^{(2)})} + A_{n2}^{(2-)} \sin(\beta_n^{(2)} x_3^{(2)}) e^{-i(\omega t - k_{2n}^{(a)} x_1^{(2)})} \right), \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$u_2^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n1}^{(3)} \cos(\alpha_n^{(3)} x_3^{(3)}) e^{-i(\omega t - k_{3n}^{(s)} x_1^{(3)})} + A_{n2}^{(3)} \sin(\beta_n^{(3)} x_3^{(3)}) e^{-i(\omega t - k_{3n}^{(a)} x_1^{(2)})}), \quad (3.94)$$

где

$$\alpha_n^{(j)} = \frac{(2n+1)\pi}{2h^{(j)}}, \quad k_{jn}^{(s)} = \left(\rho^{(j)} \omega^2 - c_{44}^{(j)} \left(\frac{(2n+1)\pi}{2h^{(j)}} \right)^2 / c_{66}^{(j)} \right)^{1/2},$$

$$\beta_n^{(j)} = \frac{n\pi}{2}, \quad k_{jn}^{(a)} = \left(\rho^{(j)} \omega^2 - c_{44}^{(j)} \left(\frac{n\pi}{h^{(j)}} \right)^2 / c_{66}^{(j)} \right)^{1/2},$$

$A_{n1}^{(1)}, A_{n2}^{(1)}, A_{n1}^{(2+)}, A_{n2}^{(2+)}, A_{n1}^{(2-)}, A_{n2}^{(2-)}, A_{n1}^{(3)}, A_{n2}^{(3)}$, – неизвестные коэффициенты, $k_{jn}^{(s)}, k_{jn}^{(a)}$ – волновые числа для нормальных симметричных (s) и антисимметричных (a) волн моды n в фрагментах $V^{(j)}$ рассматриваемого слоя с зигзагообразным изломом.

Таким образом, получены все представления, обладающие в совокупности достаточной степенью функционального произвола для удовлетворения краевых условий на границах контакта выделенных фрагментов волновода.

Система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложений по базисным нормальным волнам формируется как следствие из условия минимизации квадратичного функционала невязки граничных условий

$$\partial I / \partial A_{np}^{(j)} = 0, \quad (3.95)$$

$$I(A_{np}^{(j)}) = \int_{-h^{(1)}}^{h^{(1)}} (|u_2^{(1)} - u_2^{(2)}|^2 + |\sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{n2}^{(2)}|^2)_{\Gamma_{12}} dx_3^{(1)} + \int_{-h^{(3)}}^{h^{(3)}} (|u_2^{(2)} - u_2^{(3)}|^2 + |\sigma_{n2}^{(2)} - \sigma_{12}^{(3)}|^2)_{\Gamma_{23}} dx_3^{(3)}.$$

Решение системы строится с использованием приема редуцирования бесконечных матриц и параллельным контролем точности удовлетворения краевых условий контакта составляющих волновода.

3.5. Распространение волн сдвига по волноводу с изломом дугообразной формы

Исследование закономерностей распространения упругих волн сдвигового типа по однородному либо составному ортотропному волноводу меандровой (змеевидной) геометрической структуры наряду с фундаментальными аспектами имеет прикладное значение, связанное с совершенствованием методологий расчета линий задержки акустоэлектронных устройств. Построение численно-аналитических решений краевых задач этого типа в области змеевидно-ступенчатого продольного сечения упругого слоя в точной постановке представляет собой открытую проблему и является предметом рассмотрения в данной работе.

В данном подразделе диссертационной работы рассматривается численно-аналитическое решение граничной задачи о движении стационарных упругих волн сдвига по геометрически неоднородному слою с участком искривления, переориентирующим направление распространения за счет наличия структурных фрагментов с сечениями в виде кольцевых секторов полукруговой либо четвертькруговой угловой меры.

Решение строится на базе концепции численно-аналитического метода частичных областей и предполагает выделение в продольном сечении волновода подобластей в виде двух полуполос, а также стыкующейся с ними подобласти в форме кольцевого сектора соответствующей угловой меры.

Постановка рассматриваемой задачи, как отмечено выше, связана с потребностями развития численно-аналитических методологий расчета линий задержки информационных сигналов в акустоэлектронных устройствах, в частности, с разработкой и изучением круга моделей, описывающих распространение упругих волн сдвигового типа по однородному либо составному кусочно-однородному волноводу меандровой (змеевидной) геометрической структуры с различными вариантами геометрии участков искривления и излома.

Вопросы создания и применения теоретических численно-аналитических методик исследования волновых процессов в волноводах данного типа с

минимизированным кругом упрощающих соответствующие модели предположений, несмотря на повышенный уровень внимания к данной проблеме, сохраняют свою актуальность и требуют дальнейшего анализа.

В этой связи, представляемое исследование посвящено проблемам детализированного описания численно-аналитической методики анализа процессов трансформации волновых сигналов при прохождении участков искривления в структурах, образуемых двумя параллельно либо ортогонально ориентированными фрагментами волновода – полуслоями, соответственно сопрягаемыми с помощью структурных фрагментов кольцевого цилиндрического слоя с полукруглыми либо четвертькруговыми дугообразными сечениями.

Рассматриваются граничные задачи о движении стационарных упругих волн сдвига вдоль геометрически неоднородного изотропного слоя с участком излома, переориентирующим направление распространения на 90 либо на 180 градусов за счет наличия искривленных фрагментов волновода с сечениями в виде кольцевых секторов четвертькруговой либо полукруговой угловой меры. Сечения рассматриваемых волноводов в окрестности участков изгиба и способы введения в сечении локальных и глобальной координатных систем представлены на рисунке 3.2.

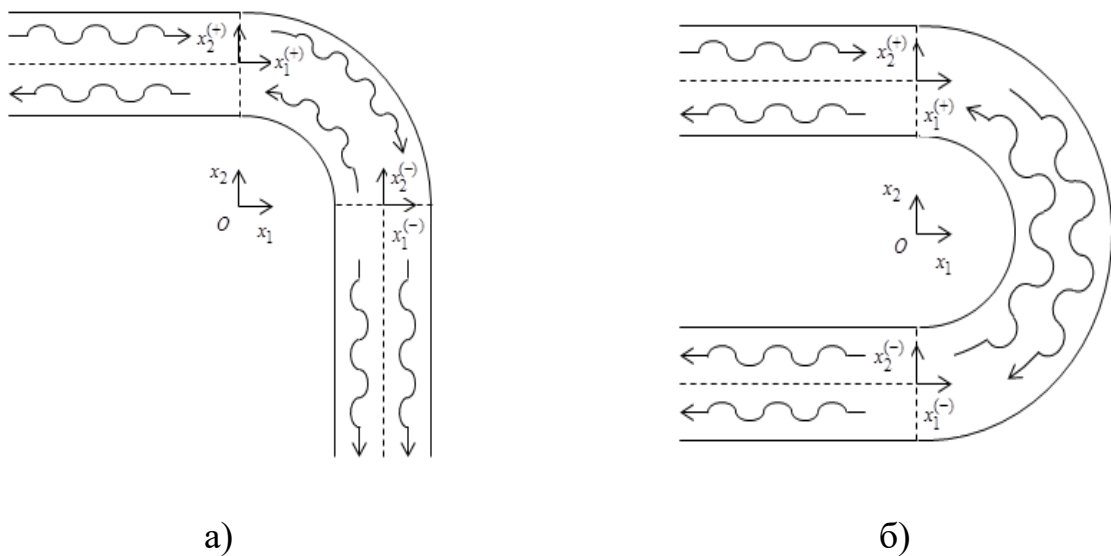


Рис. 3.2. Геометрия сечений рассматриваемых волноводов в окрестности зоны изгиба.

Распространение исследуемых волн в подобластях сечения с прямолинейной и кольцевой геометрией соответственно описывается дифференциальными уравнениями

$$\mu D^2 u_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3 = 0, \quad (3.96)$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad x_1 + ix_2 = re^{i\theta}.$$

Решение задачи применительно к волноводу с сечением представленной на рисунке 3.2 формы строится на базе концепции численно-аналитического метода частичных областей и предполагает выделение в продольном сечении волновода подобластей в виде двух полуполос толщины $2h$, имеющих в во введенных локальных координатных системах описания

$$V_L^{(+)} = \{x_1^{(+)} \leq 0, -h \leq x_2^{(+)} \leq h\}, \quad V_L^{(-)} = \{x_1^{(-)} \leq 0, -h \leq x_2^{(-)} \leq h\},$$

а также стыкующейся с ними подобласти в форме кольцевого сектора соответствующей угловой меры. Радиальная толщина кольцевого сектора и толщины полуслоев полагаются равными, а внутренний радиус кольцевого сектора R является произвольной варьируемой величиной. В частности, для сечения с геометрией, представленной на рисунке 3.2 б), данная подобласть имеет описание

$$V_R = \{R \leq r \leq R + 2h, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

Внутренние и внешние грани участков в виде полуслоя, а также внутренняя и внешняя поверхности цилиндрического фрагмента полагаются жестко закрепленными либо свободными от напряжений, а на поверхностях контакта выделяемых составных частей волновода предполагается выполнение условий идеального механического сопряжения. Полагается также, что из глубины полуслоя $V_L^{(+)}$ к границе его контакта с кольцевым сектором V_R движется падающая нормальная волна, имеющая в общем случае комбинированный тип по характеру толщиной симметрии волновых колебаний.

Для характеристик напряженности волновых полей в полубесконечных составляющих продольного сечения вводятся представления рядами с неопределенными коэффициентами по базисным множествам симметричных и антисимметричных нормальных волн сдвига для упругого слоя со свободными либо жесткозакрепленными гранями в зависимости от задаваемого типа краевых условий на внешних границах рассматриваемого волновода:

$$u_3^{(+)}(x_1^{(+)}, x_3^{(+)}, t) = \tilde{u}_3^{(+)} + \sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(+)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(+)})) + b_p^{(+)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(+)}))], \quad (3.97)$$

$$u_3^{(-)}(x_1^{(-)}, x_3^{(-)}, t) = \sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(-)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(-)})) + b_p^{(-)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(-)}))],$$

где $\tilde{u}_3^{(+)}$ – представление комплексной функции напряженности для падающей монохроматической сдвиговой волны с круговой частотой ω ; $a_p^{(+)}$, $b_p^{(+)}$, $a_p^{(-)}$, $b_p^{(-)}$ – произвольные постоянные коэффициенты, подлежащие определению из функциональных краевых условий контакта выделенных составных частей волновода; $\alpha_p^{(c)} = (2p-1)\pi / 2h$, $\alpha_p^{(s)} = p\pi / h$ ($p = \overline{1, \infty}$) – в случае волновода с закрепленными границами и $\alpha_p^{(c)} = (p-1)\pi / h$, $\alpha_p^{(s)} = (2p-1)\pi / 2h$ ($p = \overline{1, \infty}$) – в случае волновода со свободными границами; $k_p^{(c)} = (\Omega^2 - (\alpha_p^{(c)})^2)^{1/2}$, $k_p^{(s)} = (\Omega^2 - (\alpha_p^{(s)})^2)^{1/2}$, $\Omega^2 = \rho\omega^2 / \mu$.

Для составляющей в виде фрагмента кольцевого цилиндрического слоя исходные представления волновых полей имеют форму разложений в ряды с неопределенными коэффициентами по базисным множествам нормальных волн сдвига, распространяющихся вдоль окружного направления в сечении протяженного полого цилиндра со свободными либо жестко закрепленными граничными поверхностями

$$\begin{aligned}
u_3^{(R)}(r, \theta, t) = & \sum_{p=1}^{\infty} [(a_p^{(R+)}) J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R+)} Y_{k_p}(\Omega r)) \exp(-i(\omega t + k_p \theta)) + \\
& + (a_p^{(R-)} J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R-)} Y_{k_p}(\Omega r)) \exp(-i(\omega t - k_p \theta))],
\end{aligned} \tag{3.98}$$

где k_p – корни дисперсионного уравнения

$$J_{k_p}(\Omega R) Y_{k_p}(\Omega(R + 2h)) - Y_{k_p}(\Omega R) J_{k_p}(\Omega(R + 2h)) = 0. \tag{3.99}$$

Представлениям (3.97) соответствуют выражения для контактных напряжений

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{(+)}(x_1^{(+)}, x_3^{(+)}, t) = & \mu \frac{\partial}{\partial x_3^{(+)}} \tilde{u}_3^{(+)} - i\mu \sum_{p=1}^{\infty} [k_p^{(c)} a_p^{(+)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(+)}) + \\
& + k_p^{(s)} b_p^{(+)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(+)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(+)}))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^{(-)}(x_1^{(-)}, x_3^{(-)}, t) = & -i\mu \sum_{p=1}^{\infty} [k_p^{(c)} a_p^{(-)} \cos \alpha_p^{(c)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(c)} x_1^{(-)}) + \\
& + k_p^{(s)} b_p^{(-)} \sin \alpha_p^{(s)} x_3^{(-)} \exp(-i(\omega t + k_p^{(s)} x_1^{(-)}))],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta 3}^{(R)}(r, \theta, t) = & i \frac{\mu}{r} \sum_{p=1}^{\infty} [-k_p (a_p^{(R+)}) J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R+)} Y_{k_p}(\Omega r)) \exp(-i(\omega t + k_p \theta)) + \\
& + k_p (a_p^{(R-)} J_{k_p}(\Omega r) + b_p^{(R-)} Y_{k_p}(\Omega r)) \exp(-i(\omega t - k_p \theta))].
\end{aligned}$$

Полученные представления используются при формулировке функциональных краевых условиях на участках идеального механического контакта стыкующихся подобластей

$$\begin{aligned}
u_3^{(+)}(0, x_3^{(+)}, t) &= u_3^{(R)}(x_3^{(+)} + R + h, \pi / 2, t), \\
\sigma_{13}^{(+)}(0, x_3^{(+)}, t) &= \sigma_{\theta 3}^{(R)}(x_3^{(+)} + R + h, \pi / 2, t)
\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$x_3^{(+)} \in [-h, h];$$

$$\begin{aligned}
u_3^{(-)}(0, x_3^{(-)}, t) &= u_3^{(R)}(x_3^{(-)} + R + h, -\pi / 2, t), \\
\sigma_{13}^{(-)}(0, x_3^{(-)}, t) &= \sigma_{\theta 3}^{(R)}(x_3^{(-)} + R + h, -\pi / 2, t)
\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$x_3^{(-)} \in [-h, h].$$

На базе алгоритма алгебраизации функциональных краевых условий (3.100), (3.101) с применением метода ортогональных рядов эти условия приводятся к редуцированным системам линейных алгебраических уравнений порядка $8 \cdot N$ относительно коэффициентов введенных разложений, имеющих структуру

$$\sum_{p=1}^N [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(cuc+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(cus+)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRY++)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRY--)}] = \zeta_j^{(cu+)} \quad (j = \overline{1, N}), \quad (3.102)$$

$$\sum_{p=1}^N [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(suc+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(sus+)} + a_p^{(R++)} \Delta_{jp}^{(suRJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(suRY++)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRY--)}] = \zeta_j^{(su+)} \quad (j = \overline{N+1, 2N}),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma c+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma s+)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY++)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY--)}] = \zeta_j^{(c\sigma+)} \quad (j = \overline{2N+1, 3N}),$$

$$\sum_{p=1}^N [a_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma c+)} + b_p^{(+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma s+)} + a_p^{(R++)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ++)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY++)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY--)}] = \zeta_j^{(s\sigma+)} \quad (j = \overline{3N+1, 4N}),$$

$$\sum_{p=1}^N [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(cuc-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(cus-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(cuRY+-)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(cuRY--)}] = 0 \quad (j = \overline{4N+1, 5N}),$$

$$\sum_{p=1}^N [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(suc-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(sus-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(suRJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(suRY+-)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(suRY--)}] = 0 \quad (j = \overline{5N+1, 6N}),$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma c-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma s-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY+-)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(c\sigma RY--)}] = 0 \quad (j = \overline{6N+1, 7N}),$$

$$\sum_{p=1}^N [a_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma c-)} + b_p^{(-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma s-)} + a_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ+-)} + b_p^{(R+)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY+-)} + a_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RJ--)} + b_p^{(R-)} \Delta_{jp}^{(s\sigma RY--)}] = 0 \quad (j = \overline{7N+1, 8N}).$$

Элементы блочно-ленточной матрицы системы имеют представления, получаемые в результате процедуры алгебраизации с использованием системы функций $\{\sin(n\pi x_3^{(\pm)}/h), \cos((n-1)\pi x_3^{(\pm)}/h)\}_{n=1}^{\infty}$.

Представленная методика позволяет осуществить углубленный анализ эффектов прохождения гармонических и периодических импульсных сигналов по волноводу меандровой структуры с дугообразными соединениями звеньев и показала эффективность при численной реализации.

3.6. Выводы по разделу 3

1. Дано общее описание теоретической численно-аналитической методики решения задачи о распространении сдвиговых волн в составном волноводе из двух состыкованных под углом ортотропных полуслоев со свободными плоскими гранями, один из которых имеет наклоненную по отношению к плоским граням торцевую граничную поверхность, а торцевая поверхность второго ортогональна плоским граням. Предложенный подход базируется на методе представления волновых полей в сопрягаемых компонентах составного волновода рядами по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн. Искомые комплексные амплитудные функции для волновых перемещений в падающих, отраженных и преломленных волнах определяются из соответствующих спектральных краевых задач для уравнений стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации материалов полуслоев. Алгебраизация функциональных краевых условий механического сопряжения составных частей волновода осуществляется методом наименьших квадратов и сводит исходную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

2. Для получения систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений волновых полей по базисным системам нормальных волн в задаче о прохождении стационарной сдвиговой волны по составному волноводу из состыкованных под углом полуслоев предложены также комбинированная методика, включающая алгоритм обобщенной граничной ортогонализации систем базисных функций, описывающих множества бегущих и краевых стоячих нормальных волн в компонентах волновода, и прием учета в качестве контактного условия соотношения баланса средних за период потоков мощности через поверхность сопряжения компонентов волновода, трансформирующегося в нелинейное алгебраическое уравнение и добавляемого к совокупности линейных алгебраических уравнений системы. Для получения решений систем алгебраических уравнений с данной комбинированной структурой предложен итерационный алгоритм.

3. В качестве приема алгебраизации функциональных граничных условий для исследуемой методом частных областей задачи о поперечных упругих волнах в составном кусочно-однородном Г-образном волноводе предложен итерационный численно-аналитический алгоритм, базирующийся на сочетании метода коллокаций, метода наименьших квадратов и использования нелинейных соотношений баланса средних за период потоков мощности в волновых полях для стыкуемых фрагментов волновода.

4. Рассмотрена задача о распространении сдвиговых упругих волн в составном поперечно-анизотропном волноводе с участком зигзагообразного излома, образованном двумя параллельными полуслоями, соединенными наклонным участком излома в виде фрагмента слоя со скошенными торцевыми поверхностями. Численно-аналитическая методика решения поставленной задачи разработана на основании метода рядов по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн. С применением разработанного подхода задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений по нормальным волнам для

выделяемых фрагментов волновода, подлежащей редукции при численной реализации решения.

5. Предложена методика численно-аналитического решения граничной задачи о движении стационарных упругих волн сдвига по геометрически неоднородному слою с участком искривления, переориентирующим направление распространения за счет наличия структурных фрагментов с сечениями в виде кольцевых секторов полукруговой либо четвертькруговой угловой меры. Решение строится на базе концепции численно-аналитического метода частичных областей и предполагает выделение в продольном сечении волновода подобластей в виде двух полуполос, а также стыкующейся с ними подобласти в форме кольцевого сектора соответствующей угловой меры. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений по нормальным волнам для каждого из фрагментов волновода, подлежащей редукции при численной реализации решения.

6. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [21, 50, 96–97, 16 – 19, 99–101, 103, 111, 113, 125–126].

РАЗДЕЛ 4

СДВИГОВЫЕ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ ИЗ КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОЛУСЛОЕВ В СЛУЧАЕ УСЛОЖНЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА ЛИБО УСЛОЖНЕННЫХ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СТЫКУЕМЫХ КОМПОНЕНТОВ

4.1. Сдвиговые волны в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями

К числу задач, по рассматриваемой в диссертационной работе проблематике относятся задачи о рассеянии нормальных упругих волн в составном упругом слое со свободными либо закрепленными гранями, образованном из разнородных по свойствам полубесконечных фрагментов, стыкуемых по боковым поверхностям усложненной геометрии. В этой связи, в данном подразделе представлена разработка численно-аналитической методики анализа модели взаимодействия симметричной нормальной волны сдвига с полуцилиндрической поверхностью контакта фрагментов составного волновода из различающихся по свойствам трансверсально-изотропных полуслоев со свободными плоскими гранями. Идеально контактирующие боковые поверхности полуслоев соответственно имеют взаимодополняющую выпуклую и вогнутую полуцилиндрические поверхности одинакового радиуса с центрами, лежащими на одной горизонтали.

В первом исследуемом случае, один из контактирующих полуслоев занимает в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область

$$V_{L1} = \{-\infty < x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \setminus V_G,$$

$$V_G = \{x_1^2 + x_3^2 \leq h^2, x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty\},$$

а дополняющий полуслой – область

$$V_{L2} = \{0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \cup V_G.$$

Поверхностью контакта полуслоев является полуцилиндрическая поверхность $\Gamma = \{x_1^2 + x_3^2 = h^2, x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty\}$. На свободных плоских гранях $x_3 = \pm h$ обоих полуслоев задаются краевые условия $(\sigma_{32})_{x_3=\pm h} = 0$, а граничные условия на контактной поверхности Γ соответственно имеют вид

$$(u_2^{(1)})_{\Gamma} = (u_2^{(2)})_{\Gamma}, (\sigma_{r2}^{(1)})_{\Gamma} = (\sigma_{r2}^{(2)})_{\Gamma},$$

где $u_2^{(j)}(x_1, x_3, t)$, $\sigma_{r2}^{(j)}(x_1, x_3, t)$ – характеристики волновых колебательных перемещений и контактных механических напряжений в полуслое V_{Lj} .

С центром сечения $x_2 = 0$ полуцилиндра V_G связываются локальные цилиндрические координаты $Or\theta x_2$, $r \exp(i\theta) = x_1 + ix_3$, в которых контактная поверхность имеет описание $\Gamma = \{r = h, (\pi/2) \leq \theta \leq (3\pi/2), -\infty < x_2 < \infty\}$.

Полагается, что из глубины полуслоя V_{L1} на поверхность Γ вдоль положительного координатного направления Ox_1 падает нормальная симметричная поляризованная в плоскости Ox_1x_2 сдвиговая волна с циклической частотой ω , характеризуемая представлением

$$u_{2*}^{(1)}(x_1, x_3, t) = u_0 \cdot \cos \alpha_m x_3 \cdot \exp(-i(\omega t - k_m^{(1)} x_1)), \quad (4.1)$$

и при ее взаимодействии с Γ в V_{L1} формируется поле отраженных, а в V_{L2} – поле преломленных сдвиговых упругих волн. Указанные поля описываются суперпозициями удовлетворяющих волновым уравнениям в соответствующих подобластях представлений для базисных отраженных бегущих и краевых стоячих нормальных волн с неопределенными коэффициентами

$$u_{2*}^{(1)}(x_1, x_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} \cos \alpha_n x_3 \exp(-i(\omega t - k_n^{(1)} x_1)), \quad (4.2)$$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} \cos \alpha_n x_3 \exp(-i(\omega t - k_n^{(2)} x_1)),$$

где $\alpha_n = (n-1)\pi / h$, $k_n^{(j)} = (2(\rho_j \omega^2 - c_{44j} \alpha_n^2) / (c_{11j} - c_{12j}))^{1/2}$, ρ_j – плотность и $c_{11j}, c_{12j}, c_{44j}$ – модули упругости материала слоя V_{Lj} .

Описание характеристик полей отраженных и преломленных волн $u_{2^{**}}^{(1)}(x_1, x_3, t)$, $u_2^{(2)}(x_1, x_3, t)$ связано с определением коэффициентов $A_n^{(j)}$ из функциональных контактных граничных условий на Γ . В процессе решения данной задачи исходные выражения для составляющих отраженных и преломленных волн в $u_2^{(j)} \sigma_{r2}^{(j)} = c_{44j} (\partial u_2^{(j)} / \partial r)$ с учетом соотношения

$$\partial / \partial r = (1/2)[(\partial_1 - i\partial_3)\exp(i\theta) + (\partial_1 + i\partial_3)\exp(-i\theta)] \quad (4.3)$$

и представлений рядами по базисным нормальным волнам преобразуются к виду

$$\begin{aligned} u_2^{(j)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(j)} / 2) [\exp(v_{1nj}x_1 + v_{3nj}x_3) + \exp(v_{1nj}x_1 - v_{3nj}x_3)], \\ \sigma_{r2}^{(j)} &= c_{44j} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(j)} / 4) \{ [\bar{\eta}_{nj} \exp(i\theta) + \eta_{nj} \exp(-i\theta)] \exp(v_{1nj}x_1 + v_{3nj}x_3) + \\ &+ [\eta_{nj} \exp(i\theta) + \bar{\eta}_{nj} \exp(-i\theta)] \exp(v_{1nj}x_1 - v_{3nj}x_3) \}, \\ \eta_{nj} &= v_{1nj} + iv_{3nj}, \quad v_{1n} = (-1)^j ik_n, \quad v_{3nj} = i\alpha_n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Найденные представления с учетом полученных в [71] граничных разложений на круговом контуре Γ радиуса h

$$(\exp(v_{1nj}x_1 + v_{3nj}x_3))_{\Gamma} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_{pnj}(v_{1nj}, v_{3nj}) \exp(ip\theta), \quad (4.5)$$

$$Q_{pnj}(v_{1nj}, v_{3nj}) = ((v_{3nj} - iv_{1nj}) / (v_{1nj}^2 + v_{3nj}^2)^{1/2})^p J_p(-ih(v_{1nj}^2 + v_{3nj}^2)^{1/2}),$$

в которых $J_p(z)$ – цилиндрические функции Бесселя с индексом p и аргументом z , после преобразований могут быть представлены в виде функциональных рядов

$$\begin{aligned} u_2^{(j)} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(j)} / 2) [Q_{pnj}(v_{1nj}, v_{3nj}) + Q_{pnj}(v_{1nj}, -v_{3nj})] \exp(ip\theta), \\ \sigma_{r2}^{(j)} &= c_{44j} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(j)} / 4) [\bar{\eta}_{nj} Q_{p-1,nj}(v_{1nj}, v_{3nj}) + \eta_{nj} Q_{p+1,nj}(v_{1nj}, v_{3nj}) + \\ &+ \eta_{nj} Q_{p-1,nj}(v_{1nj}, -v_{3nj}) + \bar{\eta}_{nj} Q_{p+1,nj}(v_{1nj}, -v_{3nj})] \exp(ip\theta). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Аналогичным образом, контурные представления $(u_{2*}^{(1)})_{\Gamma}$, $(\sigma_{r2*}^{(1)})_{\Gamma}$ для перемещений и напряжений в падающей нормальной волне могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} u_{2*}^{(1)} &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} (u_0 / 2) [Q_{pm1}(v_{1m1}, v_{3m1}) + Q_{pm1}(v_{1m1}, -v_{3m1})] \exp(ip\theta), \\ \sigma_{r2*}^{(1)} &= c_{441} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (u_0 / 4) [\bar{\eta}_{m1} Q_{p-1,m1}(v_{1m1}, v_{3m1}) + \eta_{m1} Q_{p+1,m1}(v_{1m1}, v_{3m1}) + \\ &+ \eta_{m1} Q_{p-1,m1}(v_{1m1}, -v_{3m1}) + \bar{\eta}_{m1} Q_{p+1,m1}(v_{1m1}, -v_{3m1})] \exp(ip\theta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

В итоге, для определения значений постоянных коэффициентов $A_n^{(j)}$ из контактных граничных условий на $\Gamma = \{r = h, (\pi / 2) \leq \theta \leq (3\pi / 2), -\infty < x_2 < \infty\}$ с использованием полученных граничных разложений на базе применения метода ортогональных рядов может быть записана бесконечная система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} &\sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_{pq} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(2)} / 2) [Q_{pn2}(v_{1n2}, v_{3n2}) + Q_{pn2}(v_{1n2}, -v_{3n2})] - \\ &- \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_{pq} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)} / 2) [Q_{pn1}(v_{1n1}, v_{3n1}) + Q_{pn1}(v_{1n1}, -v_{3n1})] = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_{pq} (u_0 / 2) [Q_{pm1}(v_{1m1}, v_{3m1}) + Q_{pm1}(v_{1m1}, -v_{3m1})], \quad (4.8) \\ &c_{442} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_{pq} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(2)} / 4) [\bar{\eta}_{n2} Q_{p-1,n2}(v_{1n2}, v_{3n2}) + \eta_{n2} Q_{p+1,n2}(v_{1n2}, v_{3n2}) + \\ &+ \eta_{n2} Q_{p-1,n2}(v_{1n2}, -v_{3n2}) + \bar{\eta}_{n2} Q_{p+1,n2}(v_{1n2}, -v_{3n2})] - \\ &- c_{441} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_{pq} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)} / 4) [\bar{\eta}_{n1} Q_{p-1,n1}(v_{1n1}, v_{3n1}) + \eta_{n1} Q_{p+1,n1}(v_{1n1}, v_{3n1}) + \\ &+ \eta_{n1} Q_{p-1,n1}(v_{1n1}, -v_{3n1}) + \bar{\eta}_{n1} Q_{p+1,n1}(v_{1n1}, -v_{3n1})] = \\ &= c_{441} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda_{pq} (u_0 / 4) [\bar{\eta}_{m1} Q_{p-1,m1}(v_{1m1}, v_{3m1}) + \eta_{m1} Q_{p+1,m1}(v_{1m1}, v_{3m1}) + \end{aligned}$$

$$+ \eta_{m1} Q_{p-1, m1}(v_{1m1}, -v_{3m1}) + \bar{\eta}_{m1} Q_{p+1, m1}(v_{1m1}, -v_{3m1})],$$

$$\lambda_{pq} = (-i)^{p+q} - i^{p+q}, \quad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N, \dots, \pm \infty).$$

При численной реализации представленной методики полученная система редуцируется до произвольного порядка $2N + 1$, устанавливаемого на основании критерия задаваемой точности удовлетворения граничным условиям.

4.2. Энергетические характеристики нормальных волн сдвига в составном волноводе из изотропного и ортотропного полуслоев

В исследуемой модели рассматривается составной кусочно-однородный волновод, занимающий в прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = V_1 \cup V_2 =$$

$$= \{x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \cup \{x_1 > 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}. \quad (4.9)$$

Составляющая V_1 волновода представляет собой изотропный полуслой из материала с механическим параметром Ламе μ и плотностью ρ_1 ; полуслой V_2 составлен из ортотропного материала с модулями упругости c_{44}, c_{66} и плотностью ρ_2 ; грани полуслоев $x_3 = \pm h$ свободны от напряжений; в плоскости сопряжения между полуслоями имеется идеальный механический контакт.

Полагается, что из глубины V_1 вдоль положительного координатного направления Ox_1 на поверхность $\Gamma = \{x_1 = 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}$ контакта полуслоев падает нормальная SH волна с амплитудой u круговой частотой ω из моды n соответствующего дисперсионного спектра, и ее волновое число $k_n^{(1)}$ соответственно описывается выражением $k_n^{(1)} = ((\rho_1 / \mu)\omega^2 - (n\pi / h)^2)^{1/2}$.

При взаимодействии падающей волны с поверхностью контакта полуслоев в V_1 формируется поле принадлежащих моде n отраженных волн, а в V_2 – поле принадлежащих моде n преломленных волн с волновыми числами $k_n^{(2)} = ((\rho_2\omega^2 - c_{44}(n\pi / h)^2) / c_{66})^{1/2}$. Амплитуды отраженной u_{1n} и преломленной

u_{2n} волн, получаемые на основе решения рассматриваемой краевой задачи, соответственно имеют вид

$$u_{1n} = u(\beta_n - \alpha_n) / (\beta_n + \alpha_n), \quad u_{2n} = 2u\beta_n / (\beta_n + \alpha_n), \quad \alpha_n = c_{66}k_n^{(2)}, \quad \beta_n = \mu k_n^{(1)}, \quad (4.10)$$

а парциальные величины средних за период суммарных по сечению потоков мощности в отраженных P_{1n} и преломленных P_{2n} волнах описываются представлениями

$$P_{1n} = -\mu k_n^{(1)} ((\beta_n - \alpha_n) / (\beta_n + \alpha_n))^2 u^2, \quad P_{2n} = 4c_{66}k_n^{(2)} (\beta_n / (\beta_n + \alpha_n))^2 u^2. \quad (4.11)$$

Полученные представления, с учетом выражения для суммарного по сечению потока мощности P_0 в падающей волне

$$P_0 = \mu k_n^{(1)} u^2, \quad (4.12)$$

удовлетворяют условию энергетического баланса $P_{2n} - P_{1n} = P_0$.

Численно-аналитические исследования параметрических зависимостей для потоков мощности приводят к следующим результатам. В высокочастотном $\omega \rightarrow \infty$, $\omega \gg n$ коротковолновом диапазоне для относительных величин P_{jn} / P_0 в долях потока падающей волны могут быть получены аналитические оценки, базирующиеся на асимптотических представлениях

$$k_n^{(1)} \approx (\rho_1 / \mu)^{1/2} \omega, \quad k_n^{(2)} \approx (\rho_2 / c_{66})^{1/2} \omega, \quad \alpha_n \approx (\rho_2 c_{66})^{1/2} \omega, \quad \beta_n \approx (\rho_1 \mu)^{1/2} \omega, \quad (4.13)$$

откуда следует

$$P_{1n} \approx -(\rho_1 \mu)^{1/2} ((\rho_1 \mu)^{1/2} - (\rho_2 c_{66})^{1/2}) / ((\rho_1 \mu)^{1/2} + (\rho_2 c_{66})^{1/2}), \quad (4.14)$$

$$P_{2n} \approx 2(\rho_2 c_{66}) / ((\rho_1 \mu)^{1/2} + (\rho_2 c_{66})^{1/2}),$$

причем полученные асимптотические представления также удовлетворяют условию энергетического баланса $P_{2n} / P_0 - P_{1n} / P_0 = 1$. Как видно, в асимптотической высокочастотной коротковолновой версии относительные величины $\tilde{P}_{jn} = P_{jn} / P_0$ выражаются через импеданс сдвиговой волны в материале полуслоя V_1 и импеданс сдвиговой горизонтально поляризованной волны в материале полуслоя V_2 .

Результаты численного исследования некоторых свойств определяемых соотношениями (4.11) параметрических зависимостей $P_{jn}(\omega, \rho_1, \rho_2, \mu, c_{44}, c_{66}, h, n)$ в частотном диапазоне

$$\omega \in [1.7 \cdot 10^6 \text{ [рад/с]}, 5.0 \cdot 10^6 \text{ [рад/с]}] \quad (4.15)$$

проведены для случая задания параметров

$$\begin{aligned} n = 1, \rho_1 = 4\rho_*, \rho_2 = 2.5\rho_*, \mu = 1.5c_*, c_{44} = 6c_*, h = 0.01l_*, \\ \rho_* = 10^3 \text{ [кг/м}^3\text{]}, c_* = 10^{10} \text{ [Па]}, l_* = 1 \text{ [м]}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

и варьирования параметра c_{66} со значениями $c_{66} = 3c_*$, $c_{66} = c_*$, $c_{66} = 0.5c_*$, $c_{66} = 0.1c_*$ с целью анализа характера влияния относительного количественного показателя поперечной анизотропии материала компоненты V_2 на анализируемые энергетические характеристики.

Результаты расчетов частотных зависимостей для $|\tilde{P}_{jn}|$ соответственно описываются линиями с номером j на рисунках 4.1 – 4.4 при вышеуказанных вариантах задания c_{66} .

Варианты варьирования расчетных параметров, в свою очередь, отражают фактор роста относительной степени толщиной анизотропии для материала трансверсально-изотропного полуслоя V_2 , обусловленного уменьшением его сдвиговой жесткости в горизонтальной плоскости.

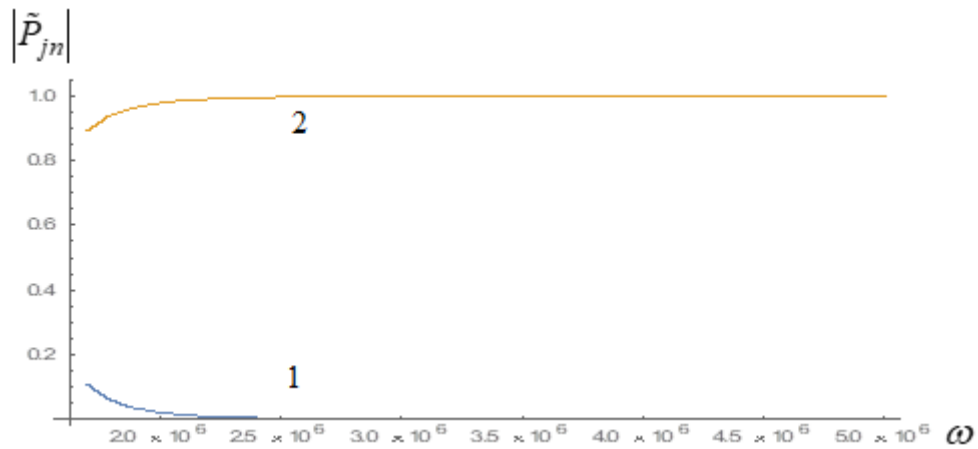


Рис. 4.1. Распределения $|\tilde{P}_{jn}|$ при $c_{44} / c_{66} = 2$

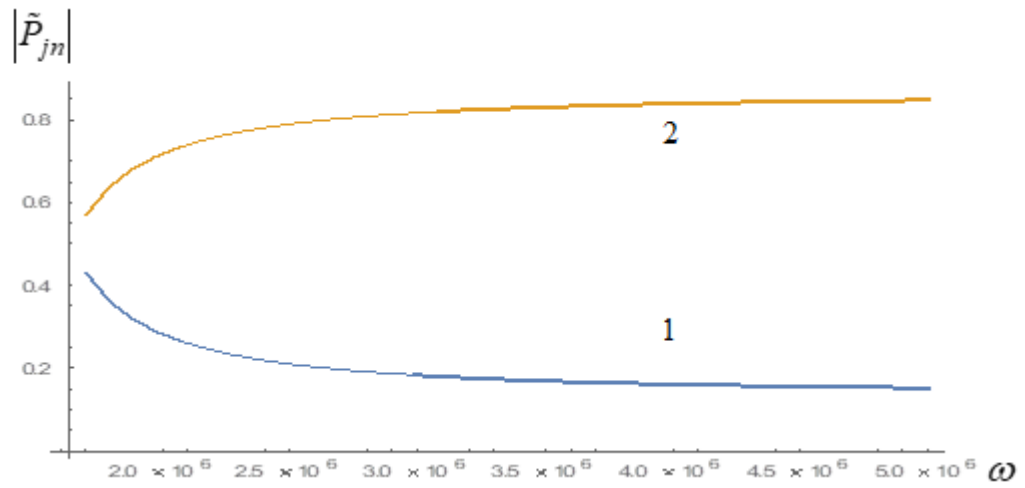


Рис. 4.2. Распределения $|\tilde{P}_{jn}|$ при $c_{44}/c_{66} = 6$

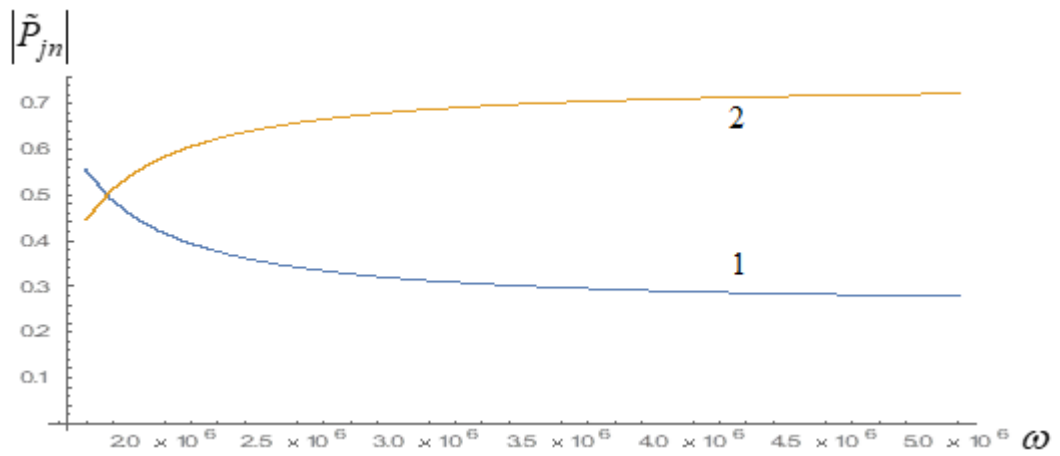


Рис. 4.3. Распределения $|\tilde{P}_{jn}|$ при $c_{44}/c_{66} = 12$

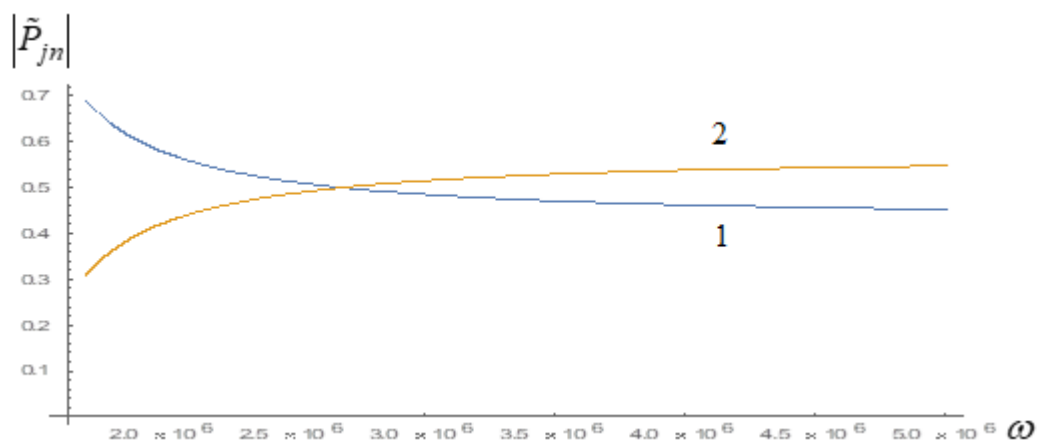


Рис. 4.4. Распределения $|\tilde{P}_{jn}|$ при $c_{44}/c_{66} = 60$

Так, если для случаев $c_{44}/c_{66} = 2$ и $c_{44}/c_{66} = 6$ в рассматриваемом частотном диапазоне существенно преобладают энергетические потоки в преломленных волнах, то по мере увеличения показателя c_{44}/c_{66} исследуемый частотный диапазон подразделяется на «низкочастотный» отрезок преобладания потока в отраженной волне и диапазон высоких частот, в котором восстанавливается свойство преобладания потока в преломленной волне и реализуется выход соотношения потоков на асимптотические значения.

4.3. Трансформация нормальных упругих волн сдвига при падении на поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев

Исследование эффектов трансформация нормальных упругих волн в составных плоскопараллельных волноводах при их падении на поверхность контакта компонентов в виде неоднородных по толщине полуслоев из формируемых с применением аддитивных технологий функционально-градиентных трансверсально-изотропных материалов на данный момент остается неисследованной задачей волновой динамики деформируемых сред. В данном контексте, целью представляемого в настоящем подразделе диссертации исследования является разработка численно-аналитической методики исследования модели трансформации нормальных упругих волн сдвига в составном волноводе при их падении на поверхность контакта одинаковых по толщине трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев.

Рассматривается составной упругий волновод, область которого во вводимой прямоугольной координатной системе $Ox_1x_2x_3$ описывается представлением

$$V = V_1 \cup V_2 = \\ = \{x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \cup \{x_1 > 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}. \quad (4.17)$$

Компонента волновода V_j является трансверсально-изотропным функционально градиентным телом с осью изотропии, коллинеарной координатному направлению Ox_3 , а ее физико-механические характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} c_{11}^{(j)} &= c_{011}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), & c_{12}^{(j)} &= c_{012}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), & c_{13}^{(j)} &= c_{013}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), \\ c_{33}^{(j)} &= c_{033}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), & c_{44}^{(j)} &= c_{044}^{(j)} \cdot \exp(\lambda_j x_3), & \rho_j &= \rho_{0j} \cdot \exp(\lambda_j x_3). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Определяющие соотношения для трансверсально-изотропных материалов имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \partial_1 u_1 + c_{12} \partial_2 u_2 + c_{13} \partial_3 u_3, & \sigma_{22} &= c_{12} \partial_1 u_1 + c_{11} \partial_2 u_2 + c_{13} \partial_3 u_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13} \partial_1 u_1 + c_{13} \partial_2 u_2 + c_{33} \partial_3 u_3, & \sigma_{23} &= c_{44} (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2), \\ \sigma_{13} &= c_{44} (\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1), & \sigma_{12} &= (c_{11} - c_{12}) / 2 (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2), \end{aligned}$$

Плоские граничные поверхности рассматриваемого составного волновода

$$\Gamma_{\pm} = \{-\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = \pm h\}, \quad (4.19)$$

по предположению, являются жестко закрепленными. Граница раздела разнородных компонентов в составном волноводе

$$\Gamma = \{x_1 = 0, -\infty < x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\} \quad (4.20)$$

является плоскостью идеального механического контакта его компонентов.

Исследованию подлежит модель распространения в рассматриваемом составном волноводе вдоль координатного направления Ox_1 нормальной сдвиговой горизонтально поляризованной упругой волны (нормальной упругой волны SH типа) с циклической частотой ω . Для комплексной функции волновых упругих перемещений $u_{2m}^{(*)}(x_1, x_2, t)$ в падающей волне с учетом представленных элементов постановки рассматриваемой задачи вводится исходное представление вида

$$u_{2m}^{(*)}(x_1, x_2, t) = \phi_{m0}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k_{m^*} x_1)). \quad (4.21)$$

В выражении (4.21) $\phi_{m0}(x_3)$ – комплексная амплитудная функция, t – параметр времени, k_{m^*} – параметр волнового числа исходной распространяющейся волны.

Полагается, что рассматриваемая нормальная волна в области V_1 падает на плоскость контакта компонентов, в результате чего формируются поля отраженных от Γ и прошедших Γ упругих волн, характеризуемые, соответственно, комплексными

функциями волновых упругих перемещений $u_2^{(1)}(x_1, x_2, t)$ и $u_2^{(2)}(x_1, x_2, t)$. В соответствии с принимаемой концепцией численно-аналитического исследования рассматриваемой проблемы, для искомых полей отраженных и прошедших волн вводятся представления в виде разложений по базисным множествам бегущих и краевых стоячих волн в соответствующих компонентах составного волновода

$$u_2^{(1)}(x_1, x_2, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_{1p}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t + k_p^{(1)} x_1)), \quad (4.22)$$

$$u_2^{(2)}(x_1, x_2, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_{2p}(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - k_p^{(2)} x_1)). \quad (4.23)$$

В целом рассматриваемая краевая задача включает уравнения волновых движений для компонент с исходной формой

$$\partial_1 \sigma_{12}^{(j)} + \partial_3 \sigma_{32}^{(j)} - \rho_j \partial_t^2 u_2^{(j)} = 0; \quad (4.24)$$

краевые условия на плоских гранях Γ_{\pm}

$$[u_2^{(j)}(x_1, x_3, t)]_{\Gamma_{\pm}} = 0; \quad (4.25)$$

а также краевые условия идеального механического контакта компонентов на плоскости Γ

$$[u_2^{(1)}(x_1, x_2, t) + u_{2m}^{(*)}(x_1, x_2, t)]_{\Gamma} = [u_2^{(2)}(x_1, x_2, t)]_{\Gamma}; \quad (4.26)$$

$$[\sigma_{12}^{(1)}(x_1, x_2, t) + \sigma_{12m}^{(*)}(x_1, x_2, t)]_{\Gamma} = [\sigma_{12}^{(2)}(x_1, x_2, t)]_{\Gamma}. \quad (4.27)$$

Для определения амплитудных функций в представлениях падающих, отраженных и прошедших (преломленных) волн, из соотношений (4.21) – (4.24) следуют обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\phi_{jp}''(x_3) + \lambda_j \phi_{jp}'(x_3) + \beta_{jp}^2 \phi_{jp}(x_3) = 0, \quad (4.28)$$

$$\phi_{m0}''(x_3) + \lambda_j \phi_{m0}'(x_3) + \beta_{m0}^2 \phi_{m0}(x_3) = 0, \quad (4.29)$$

с постоянными коэффициентами, которые совместно с краевыми условиям (4.25) образуют спектральную краевую задачу для определения представлений базисных нормальных волн. Удовлетворяющие краевым условиям (4.25) базисные частные решения (4.28), записываются в форме

$$\phi_{jp}(x_3) = a_{pj}(\exp(\gamma_{1pj}x_3) + \delta_{pj}\exp(\gamma_{2pj}x_3)), \quad (4.30)$$

где

$$\delta_{pj} = -[\exp(\gamma_{1pj}h) / \exp(\gamma_{2pj}h)], \quad (4.31)$$

$$\gamma_{qpj} = -(\lambda_j / 2) - (-1)^q((\lambda_j^2 / 4) - \beta_{jp}^2)^{1/2}, \quad (4.32)$$

$$\beta_{jp}^2 = [\rho_j \omega^2 - c_{066}^{(j)} k_{jp}^2] / c_{044}^{(j)}, \quad c_{066}^{(j)} = (c_{011}^{(j)} - c_{012}^{(j)}) / 2, \quad (4.33)$$

$$k_{jp} = [(\rho_j \omega^2 - c_{044}^{(j)} (\lambda_j^2 + p^2 \pi^2 / h^2) / 4) (c_{066}^{(j)})^{-1}]^{1/2}, \quad (4.34)$$

a_{pj} – неопределенные постоянные коэффициенты, которые характеризуют вклад базисных бегущих и краевых стоячих волн в формирующиеся в компонентах V_j волновые поля.

Аналогичный по структуре вид имеет представление $\phi_{m0}(x_3)$:

$$\phi_{m0}(x_3) = a_0(\exp(\gamma_{1m0}x_3) + \delta_{m0}\exp(\gamma_{2m0}x_3)),$$

$$\delta_{m0} = -[\exp(\gamma_{1m0}h) / \exp(\gamma_{2m0}h)], \quad \gamma_{qm0} = -(\lambda_1 / 2) - (-1)^q((\lambda_1^2 / 4) - \beta_{1m0}^2)^{1/2}, \quad (4.35)$$

$$\beta_{1m0}^2 = [\rho_1 \omega^2 - c_{066}^{(1)} k_{1m0}^2] / c_{044}^{(1)},$$

$$k_{1m0} = [(\rho_1 \omega^2 - c_{044}^{(1)} (\lambda_1^2 + m^2 \pi^2 / h^2) / 4) (c_{066}^{(1)})^{-1}]^{1/2}.$$

При этом, величина m в представлении (4.35) является номером моды исходной бегущей нормальной волны в компоненте V_1 рассматриваемого составного волновода – одним из значений из диапазона $m = \overline{0, m_{\max}}$, при котором для заданной частоты рассматриваемого волнового процесса параметр k_{1m0} является действительной величиной; a_0 – задаваемая величина амплитудного коэффициента исходной падающей волны.

Представления (4.21) – (4.23), в которых комплексные амплитудные функции имеют вид (4.30), (4.35), удовлетворяют волновым уравнениям (4.24) и однородным краевым условиям (4.25).

Следующая фаза анализа рассматриваемой модели заключается в алгебраизации функциональных краевых условий идеального механического контакта компонентов волновода, в удовлетворении функциональных краевых

условий (4.26), (4.27), на основе использования представлений (4.21) – 4.23) и применения одного из альтернативных приемов сведения функциональных уравнений (4.26), (4.27) к редуцируемой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов a_{pj} .

На данном этапе соотношения (4.26), (4.27) первоначально приводятся к виду

$$\begin{aligned} & F_u(x_3, a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{p2}, \dots) = \\ & = \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} (\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3)) - \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} (\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3)) + \\ & + a_0 (\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3)) = 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & F_\sigma(x_3, a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, a_{22}, a_{32}, \dots, a_{p2}, \dots) = \\ & = c_{066}^{(1)} \cdot \exp(\lambda_1 x_3) \sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} (-ik_{1p}) (\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3)) - \\ & - c_{066}^{(2)} \cdot \exp(\lambda_2 x_3) \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} (ik_{2p}) (\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3)) + \\ & + a_0 c_{066}^{(1)} \cdot (ik_{1m0}) \exp(\lambda_1 x_3) (\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3)) = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

и в рамках концепции метода Бубнова-Галеркина формулируются условия ортогональности $F_u(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots)$, $F_\sigma(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots)$ к элементам полной ортогональной на отрезке $x_3 \in [-h, h]$ системы тригонометрических функций $\{\sin \zeta_n x_3, \cos \zeta_n x_3\}$:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h F_u(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \sin \zeta_n x_3 dx_3 = 0 \quad (n = \overline{1, \infty}); \\ & \int_{-h}^h F_u(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \cos \zeta_n x_3 dx_3 = 0 \quad (n = \overline{0, \infty}); \\ & \int_{-h}^h F_\sigma(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \sin \zeta_n x_3 dx_3 = 0 \quad (n = \overline{1, \infty}); \\ & \int_{-h}^h F_\sigma(x_3, a_{11}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots) \cdot \cos \zeta_n x_3 dx_3 = 0 \quad (n = \overline{0, \infty}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

В результате, относительно коэффициентов a_{pj} получена система линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pns1}^{(u)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pns2}^{(u)} &= \mathcal{G}_{ns}^{(u)} \quad (n = 1, \infty); \\
\sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pnc1}^{(u)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pnc2}^{(u)} &= \mathcal{G}_{nc}^{(u)} \quad (n = 0, \infty); \\
\sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pns1}^{(\sigma)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pns2}^{(\sigma)} &= \mathcal{G}_{ns}^{(\sigma)} \quad (n = 1, \infty); \\
\sum_{p=0}^{\infty} a_{p1} \Delta_{pnc1}^{(\sigma)} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{p2} \Delta_{pnc2}^{(\sigma)} &= \mathcal{G}_{nc}^{(\omega)} \quad (n = 0, \infty);
\end{aligned} \tag{4.39}$$

в которых введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\Delta_{pns1}^{(u)} &= \int_{-h}^h \left(\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3) \right) \sin \zeta_n x_3 dx_3, \\
\Delta_{pns2}^{(u)} &= - \int_{-h}^h \left(\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3) \right) \sin \zeta_n x_3 dx_3, \\
\mathcal{G}_{ns}^{(u)} &= -a_0 \int_{-h}^h \left(\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3) \right) \sin \zeta_n x_3 dx_3, \\
\Delta_{pnc1}^{(u)} &= \int_{-h}^h \left(\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3) \right) \cos \zeta_n x_3 dx_3, \\
\Delta_{pnc2}^{(u)} &= - \int_{-h}^h \left(\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3) \right) \cos \zeta_n x_3 dx_3, \\
\mathcal{G}_{nc}^{(u)} &= -a_0 \int_{-h}^h \left(\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3) \right) \cos \zeta_n x_3 dx_3, \\
\Delta_{pns1}^{(\sigma)} &= -ik_{1p} c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) \left(\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3) \right) \sin \zeta_n x_3 dx_3, \\
\Delta_{pns2}^{(\sigma)} &= -ik_{2p} c_{066}^{(2)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_2 x_3) \left(\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3) \right) \sin \zeta_n x_3 dx_3,
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{ns}^{(\sigma)} = -a_0 i k_{1m0} c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) \left(\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3) \right) \sin \zeta_n x_3 dx_3,$$

$$\Delta_{pnc1}^{(\sigma)} = -i k_{1p} c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) \left(\exp(\gamma_{1p1} x_3) + \delta_{p1} \exp(\gamma_{2p1} x_3) \right) \cos \zeta_n x_3 dx_3,$$

$$\Delta_{pnc2}^{(\sigma)} = -i k_{2p} c_{066}^{(2)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_2 x_3) \left(\exp(\gamma_{1p2} x_3) + \delta_{p2} \exp(\gamma_{2p2} x_3) \right) \cos \zeta_n x_3 dx_3,$$

$$\mathcal{G}_{nc}^{(\sigma)} = -a_0 i k_{1m0} c_{066}^{(1)} \int_{-h}^h \exp(\lambda_1 x_3) \left(\exp(\gamma_{1m0} x_3) + \delta_{m0} \exp(\gamma_{2m0} x_3) \right) \cos \zeta_n x_3 dx_3.$$

При численных исследованиях система уравнений (4.39) подлежит редукции до порядков, обеспечивающих установленную точность удовлетворения граничным условиям (4.26), (4.27).

Разработанная и компьютерно реализованная методика исследования рассматриваемой задачи применена к случаю падения нормальной сдвиговой волны на границу идеального механического контакта полуслоя V_1 из функционально-градиентного материала с физико-механическими характеристиками $c_{0mn}^{(1)} / c_*$, ρ_{01} / ρ_* , характерными для керамики титаната бария [71], и полуслоя V_2 из функционально-градиентного материала с физико-механическими характеристиками $c_{0mn}^{(2)} / c_*$, ρ_{02} / ρ_* , характерными для монокристаллическому кадмию [71]. Значения соответствующих физико-механических постоянных представлены в таблице 4.1, а нормирующие параметры имеют величины $c_* = 10^{10} [Па]$, $\rho_* = 10^3 [кг / м^3]$.

Таблица 4.1.

Характеристики компонент волновода

Компонента волновода	Физико-механические постоянные					
	$c_{0mn}^{(j)} / c_*$, ρ_{0j} / ρ_*					
V_j	$c_{011}^{(j)} / c_*$	$c_{012}^{(j)} / c_*$	$c_{013}^{(j)} / c_*$	$c_{033}^{(j)} / c_*$	$c_{044}^{(j)} / c_*$	ρ_{0j} / ρ_*
V_1	16.6	7.66	7.75	16.2	4.29	5.5
V_2	12.1	4.81	4.42	5.13	1.85	8.64

Компоненты V_j имеют варьируемые значения параметров неоднородности λ_j . В расчетах рассматривался случай падающей нормальной волны из моды $p=1$ в слое материала компоненты V_1 с частотой $\omega=2\pi f$, $f=730$ Гц. Для различных сочетаний параметров λ_1 и λ_2 на контактной поверхности $\Gamma: \{x_1=0, x_3 \in [-h, h]\}$ исследовались распределения показателей относительных амплитуд отраженной от Γ в V_1 нормальной волны $u^{(refl)}(x_3) = \left| u_2^{(1)}(0, x_3, t) / u_{2m}^{(*)}(0, x_3, t) \right|$ и преломленной в V_2 нормальной волны $u^{(refr)}(x_3) = \left| u_2^{(2)}(0, x_3, t) / u_{2m}^{(*)}(0, x_3, t) \right|$ по толщинной координате $x_3 \in [-h, h]$.

На рисунках 4.5 – 4.11 представлены анализируемые распределения для случаев задания значения $\lambda_1=0.6$ параметра неоднородности материала V_1 и варьирования значений λ_2 . Кривые «1» на рисунках описывают распределения $u^{(refl)}(x_3)$, а кривые «2» – распределения $u^{(refr)}(x_3)$. Некоторые распределения аналогичного типа для $\lambda_1=0.9$ приведены на рисунках 4.12 – 4.14.

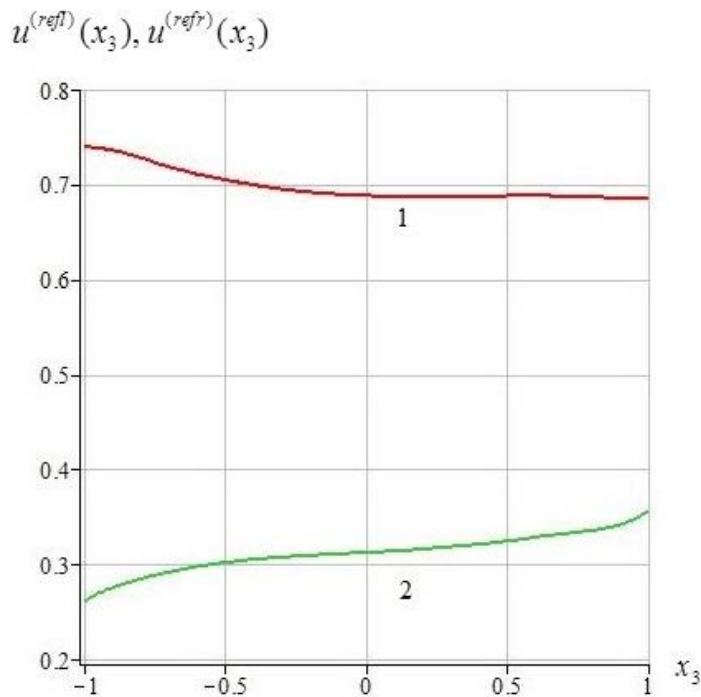


Рис. 4.5. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1=0.6$, $\lambda_2=-0.6$.

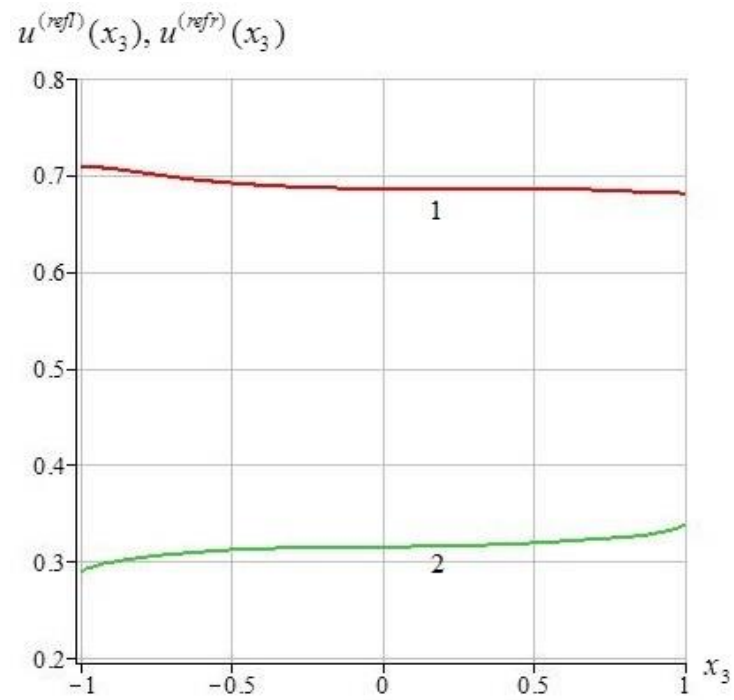


Рис. 4.6. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = -0.1$.

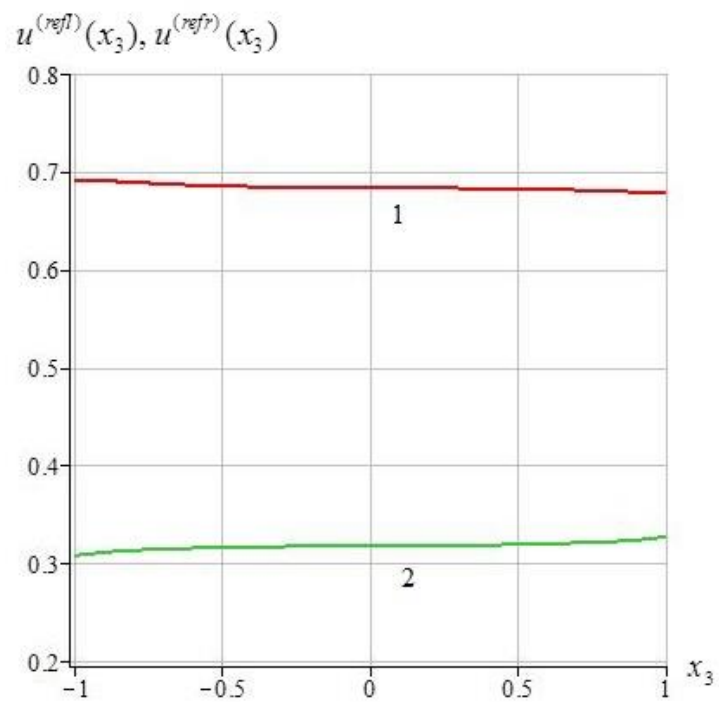


Рис. 4.7. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 0.3$.

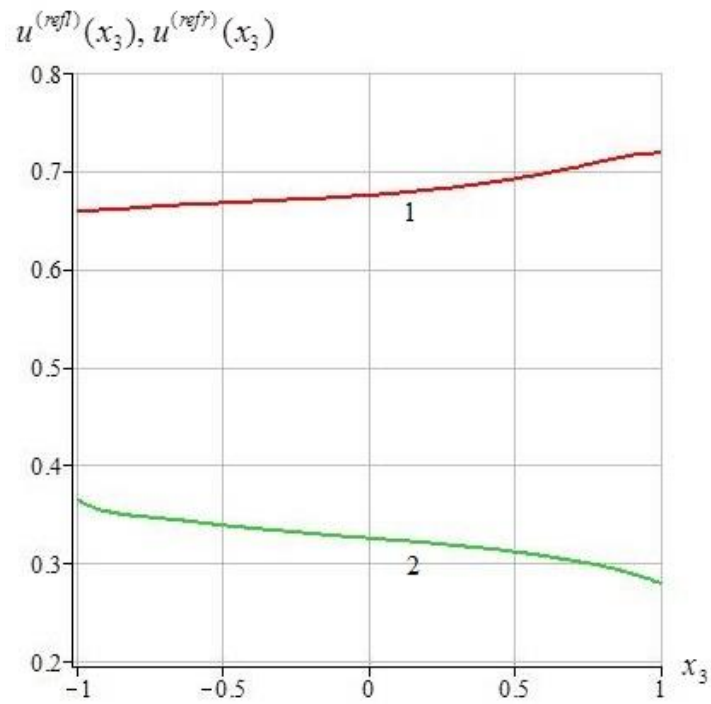


Рис. 4.8. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 1.5$.

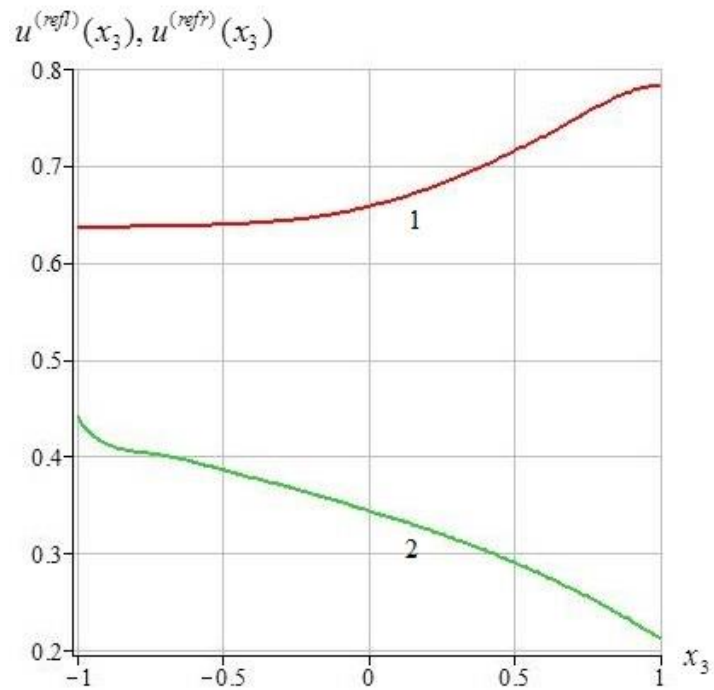


Рис. 4.9. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 2.5$.

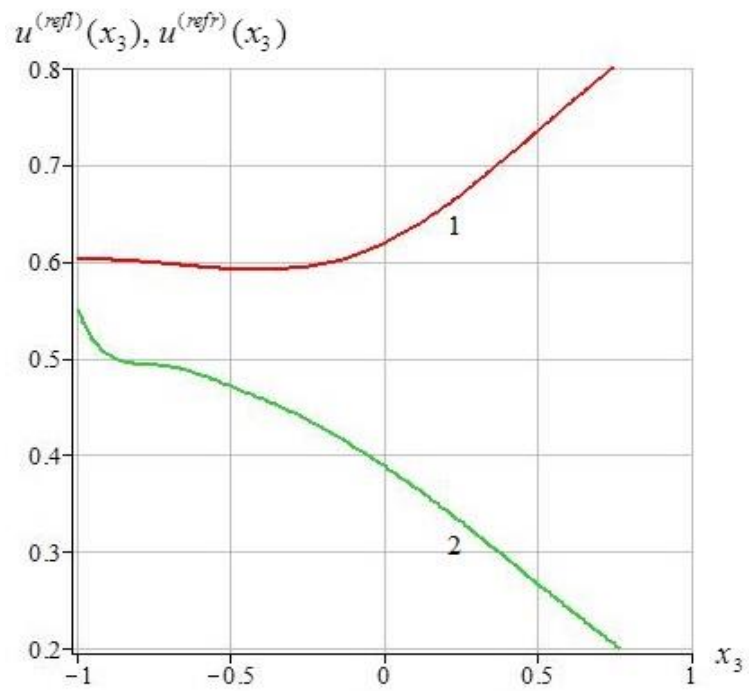


Рис. 4.10. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 3.5$.

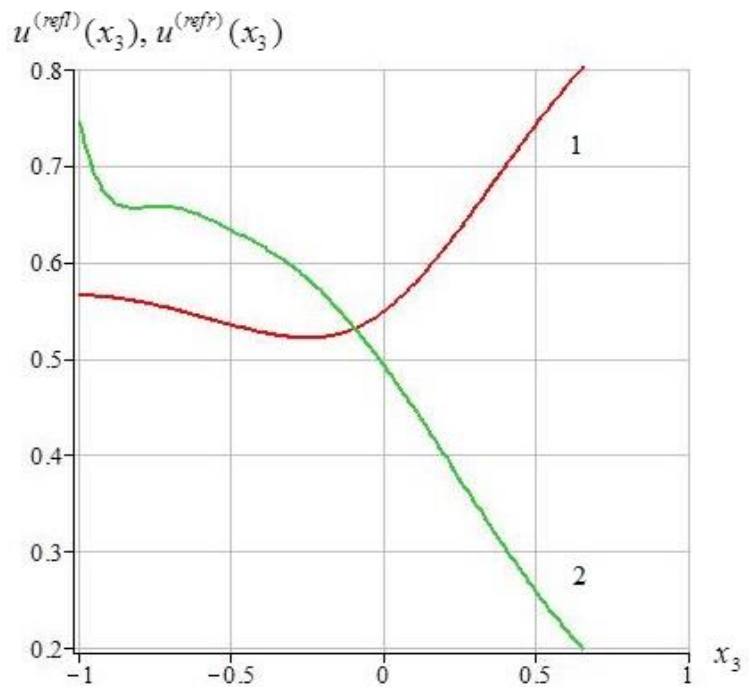


Рис. 4.11. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.6$, $\lambda_2 = 4.5$.

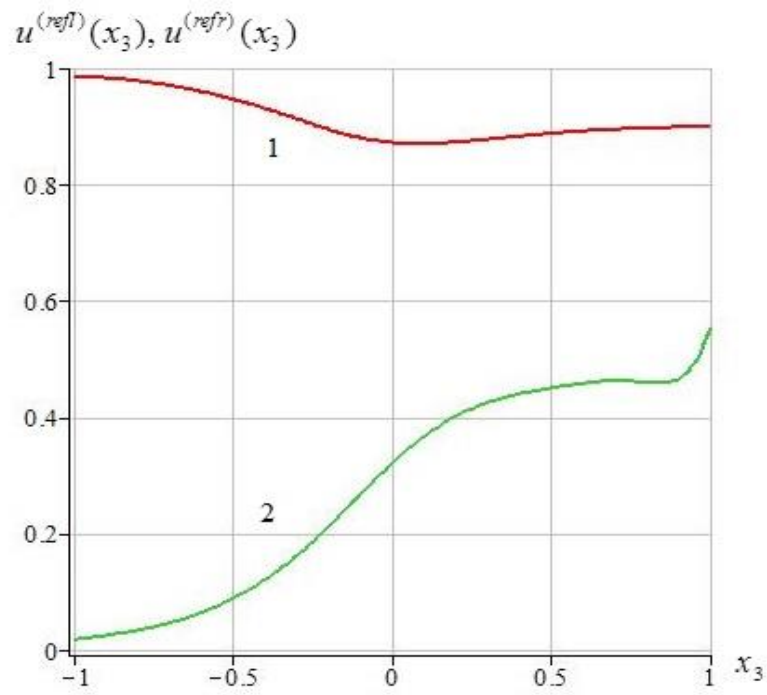


Рис. 4.12. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = -5.3$.

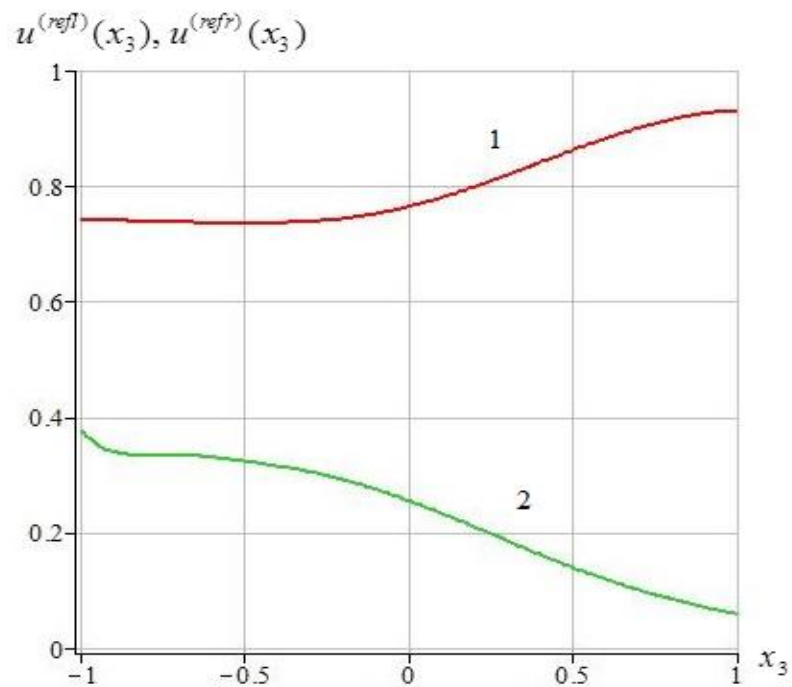


Рис.4.13. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 4.6$.

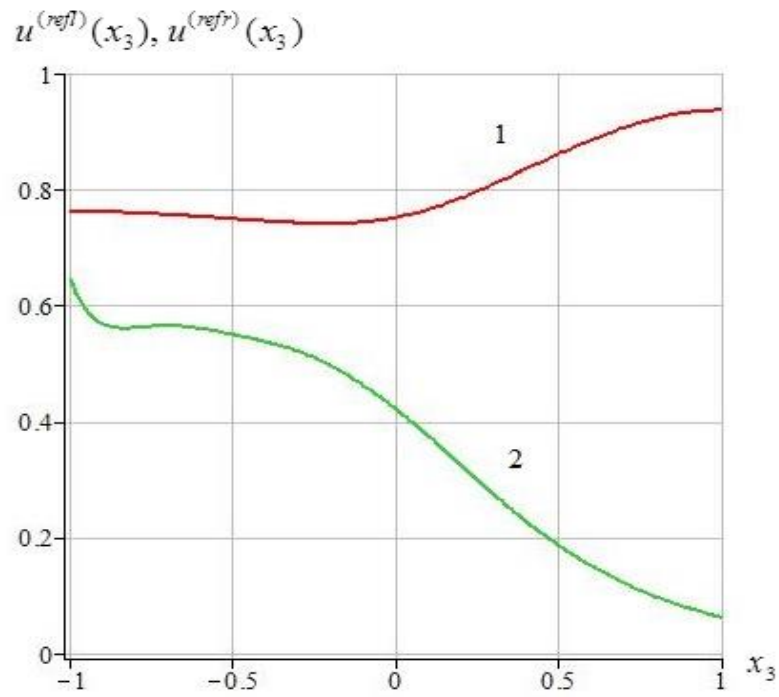


Рис. 4.14. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 5.3$.

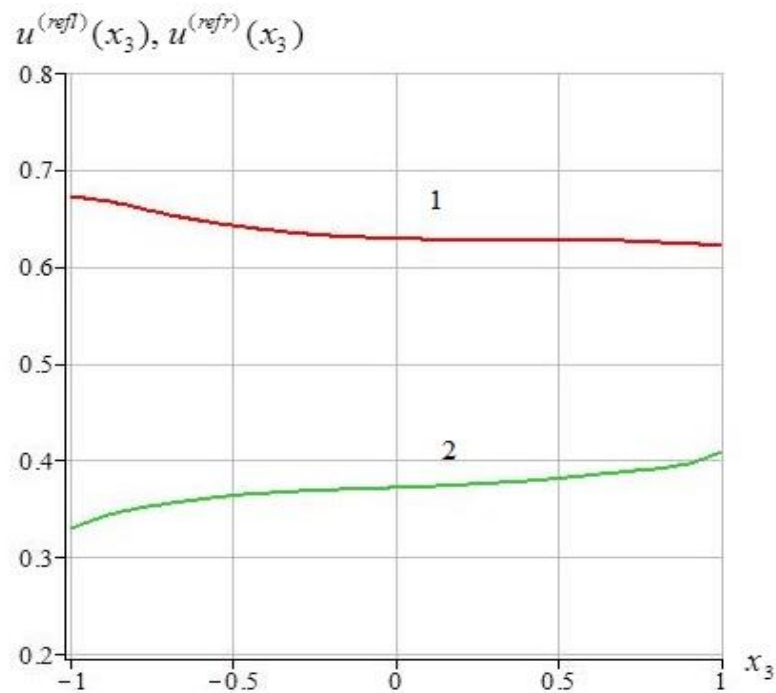


Рис. 4.15. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = -0.6$.

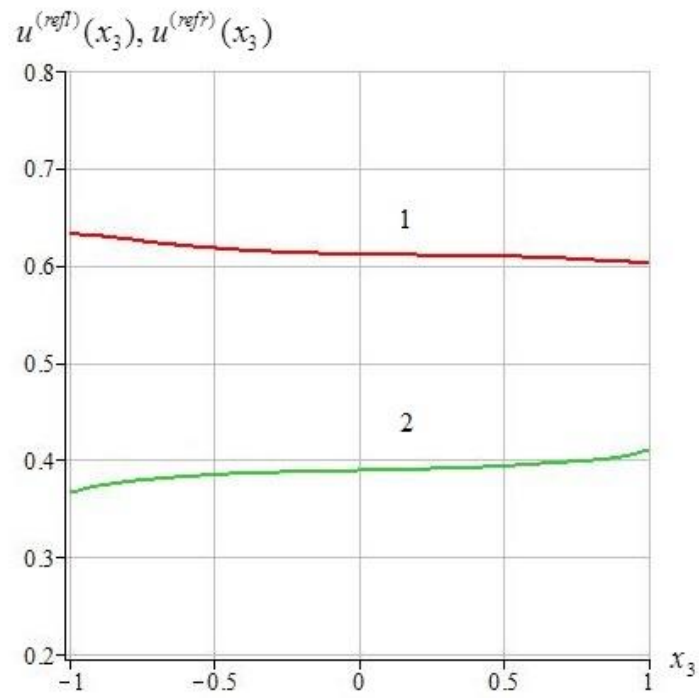


Рис. 4.16. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = -0.1$, $\lambda_2 = -0.6$.

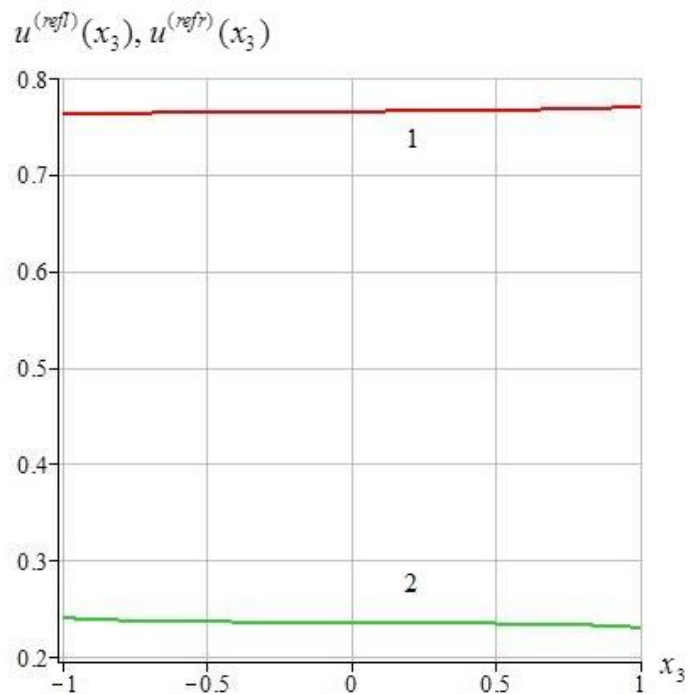


Рис. 4.17. Распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при $\lambda_1 = -0.8$, $\lambda_2 = -0.6$.

Анализ результатов, представленных на рисунках 4.5 – 4.7 указывает на количественное доминирование эффектов отражения нормальных волн и относительно невысокую степень неравномерности распределения $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при доминировании абсолютного значения λ_1 над абсолютной величиной λ_2 . Рисунки 4.8 – 4.10 описывают изменение тенденции в распределениях $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ в случае положительных значений λ_2 , превышающих λ_1 , а также сближение показателей $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ у нижней грани слоя. На рисунке 4.11 представлен эффект формирования различных соотношений между величинами $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ у противоположных граней слоя при наращивании положительного значения λ_2 . Изменение тенденций в распределениях $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при изменении знака и абсолютной величины λ_2 при постоянном показателе λ_1 иллюстрируют и рисунки 4.12 – 4.14.

Наконец, на рисунках 4.15 – 4.17 представлены результаты расчетов для случая фиксации отрицательного показателя $\lambda_2 = -0.6$ для компоненты волновода V_2 и варьирования величины λ_1 от относительно небольших по модулю положительных значений до $\lambda_1 = -0.8$. Расчеты указывают на сохранение ситуации с доминированием $u^{(refl)}(x_3)$, и на сглаживание зависимостей $u^{(refl)}(x_3)$ и $u^{(refr)}(x_3)$ при наращивании в рассматриваемых пределах модуля λ_1 .

4.4. Выводы по разделу 4

1. Разработана теоретическая численно-аналитическая методика анализа модели прохождения сдвиговых упругих волн по составному поперечно-анизотропному волноводу из отличающихся по физико-механическим характеристикам, контактирующих по взаимодополняющим выпуклой и вогнутой полуцилиндрическим поверхностям одинакового радиуса с центрами, лежащими

на одной горизонтали. На основе представленной методики рассматриваемая задача сведена к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений для коэффициентов в представлениях волновых полей рядами по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн для каждого из полуслоев.

2. Представлены описание и результаты численной реализации методики анализа влияния фактора меры поперечной механической анизотропии на соотношения между потоками мощности в падающей, отраженной и преломленной нормальных волнах SH типа в составном волноводе из идеально контактирующих изотропного и трансверсально-изотропного полуслоев со свободными плоскими гранями.

3. Разработана численно-аналитическая методика исследования модели трансформации нормальных упругих волн сдвига в составном волноводе при их падении на поверхность идеального механического контакта одинаковых по толщине и отличающихся по физико-механическим параметрам трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев. В итоге реализованных вычислительных экспериментов исследованы и систематизированы эффекты влияния соотношения показателей экспоненциальной неоднородности материалов полуслоев на амплитудные показатели отражения и преломления волн из низшей моды дисперсионного спектра для первой компоненты волновода при прохождении плоскости контакта полуслоев.

4. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [114, 116 – 118].

РАЗДЕЛ 5

ВОЛНОВЫЕ ДЕФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЕРФОРИРОВАННОМ СЛОЕ

5.1. Методика анализа модели волнового деформирования свободного по граням слоя с локализованной внутренней туннельной полостью либо включением

К числу задач рассматриваемого в диссертационной работе типа относятся усложненные варианты задач о дифракции нормальных волн напряжений на расположенных внутри тела в виде упругого слоя протяженных цилиндрических полостях и включениях туннельного типа при учете факторов криволинейного сечения полостей и анизотропии материала слоя. Применительно к этим типам задач в качестве варианта теоретического алгоритма решения проблем рассеивания сдвиговых волн может быть применен метод зеркальных изображений (метод многократных отражений), общая схема которого излагается в работах [59, 60]. Этим методом в работе [146] получено дисперсионное уравнение для сдвиговых волн в изотропном упругом слое, содержащем периодический ряд параллельных плоским граням и ортогональных направлению распространения волны внутренних круговых цилиндрических туннельных полостей неограниченной протяженности, в которых могут содержаться идеально контактирующие по границе полости протяженные цилиндрические упругие включения аналогичного поперечного сечения. Методика анализа дифракционных полей в закрепленном по граням изотропном слое с уединенной цилиндрической круговой туннельной полостью либо туннельным включением кругового сечения описана в работах [59, 60]. Аналогичные исследования применительно к случаю рассеяния нормальных симметричных волн сдвига на уединенной туннельной полости и упругом ортотропном включении эллиптического сечения в ортотропном слое являются предметом рассмотрения в настоящем разделе работы.

В связи с вышеизложенным, целью представляемых в подразделе исследований является разработка теоретического алгоритма исследования задачи о дифракционном рассеянии симметричных нормальных волн сдвига на туннельной внутренней цилиндрической полости произвольного эллиптического сечения в прямолинейно ортотропном деформируемом слое со свободными от механических напряжений плоскими гранями без каких либо предположений о наличии связи между соотношением полуосей эллиптического контура сечения полости и соотношением между значениями сдвиговых упругих постоянных ортотропного материала слоя с коллинеарными полуосям сечения направлениями механической симметрии.

Разрабатываемый алгоритм базируется на аффинном преобразовании координат для сведения дифференциального уравнения двумерных гармонических колебаний антиплоской деформации в ортотропной деформируемой среде к классическому метагармоническому уравнению, а также на представлении амплитудной функции волновых перемещений в дифракционном поле суперпозицией рядов по системам базисных решений метагармонических уравнений во вспомогательных локальных аффинно-преобразованных координатных системах с зеркально размещаемыми относительно плоских границ слоя полюсами.

Рассматривается прямолинейно ортотропный упругий слой толщины $2h$, отнесенный к прямоугольным координатам $O\xi_1\xi_2\xi_3$, и внутри слоя имеется закрепленная по границе туннельная цилиндрическая полость эллиптического поперечного сечения $V_2 = \{\xi_1^2/a^2 + \xi_2^2/b^2 \leq 1\}$ с полуосями (a, b) и контуром, имеющим параметрическое представление $\Gamma = \{\xi_1 = a \cos \phi, \xi_2 = b \sin \phi, \phi \in [0, 2\pi]\}$. Слой с полостью соответственно занимает во введенных координатах область

$$V_1 = \{|\xi_1| < h, -\infty < \xi_2 < \infty, -\infty < \xi_3 < \infty, \} / \{V_2 \times [-h, h]\}. \quad (5.1)$$

Полагается, что упруго-эквивалентные направления материала слоя коллинеарны координатным осям, а его физико-механические свойства при динамической антиплоской деформации, связанной с распространением волн сдвига вдоль координатных направлений в плоскости $O\xi_1\xi_2$, характеризуются упругими

постоянными c_{44} , c_{55} и параметром плотности ρ . Плоские грани слоя $\Gamma_{\pm} : \xi_2 = \pm h$ согласно предположению свободны от механических напряжений.

Рассматривается случай, когда в слое вдоль положительного координатного направления $O\xi_1$ распространяется характеризующаяся комплексной функцией упругих перемещений $U_3^{(\text{пад})}(\xi_1, \xi_2, t)$ нормальная симметричная по поперечной толщинной координате ξ_2 и поляризованная вдоль $O\xi_3$ упругая волна продольного сдвига с круговой частотой ω , принадлежащая произвольной моде соответствующего дисперсионного спектра.

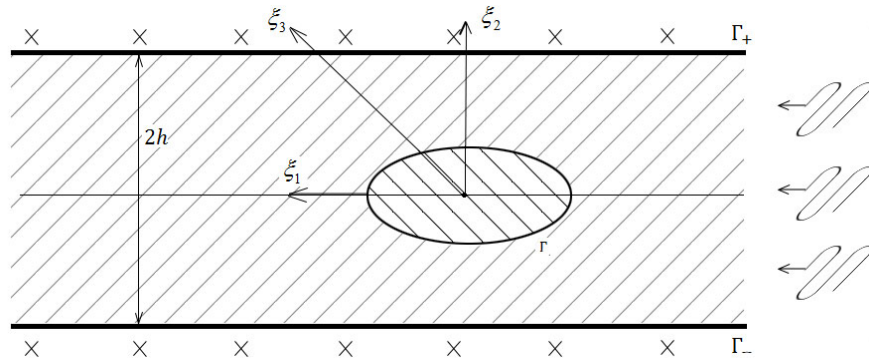


Рис. 5.1. Сечение свободного ортотропного слоя с туннельным цилиндрическим упругим включением эллиптического сечения

В этом случае комплексные амплитудные функции для волновых перемещений $U_3^{(\text{отр})}(\xi_1, \xi_2, t)$ в отраженных и огибающих полость волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации для материала слоя. При отнесении всех характеристик задачи с размерностью расстояний к нормирующему параметру h это уравнение может быть записано в виде

$$(c_{55}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 - \rho h^2\partial_t^2)U_3^{(1)} = 0, \quad (5.2)$$

где

$$\partial_j = \partial / \partial \xi_j \quad (j=1,2), \quad \partial_t = \partial / \partial t, \quad U_3^{(1)} = U_3^{(\text{пад})} + U_3^{(\text{отр})}, \quad (5.3)$$

а граничные условия задачи на свободных плоских гранях слоя Γ_{\pm} и на закрепленной границе внутренней полости имеют форму

$$(\partial_2 U_3^{(1)})_{\xi_2 = \pm h} = 0, \quad (5.4)$$

$$(U_3^{(1)})_{\Gamma} = 0. \quad (5.5)$$

Для падающей нормальной упругой SH-волны с круговой частотой ω из моды n дисперсионного спектра бегущих симметричных SH-волн в свободном по граням слое задается удовлетворяющее краевым условиям (5.4) исходное представление вида

$$U_3^{(\text{пад})}(\xi_1, \xi_2, t) = U_{30} \cos(\tilde{\alpha}_n \xi_2) \cdot \exp(-i(\omega t - k_n \xi_1)), \quad (5.6)$$

где
$$\tilde{\alpha}_n = n\pi / h, \quad k_n = \left(\Omega_1^2 - \tilde{\alpha}_n^2 \right)^{1/2}, \quad \Omega_1^2 = \rho \omega^2 h^2 / c_*,$$

c_* – нормирующий параметр для величин с размерностями механических напряжений.

На первом этапе получения аналитического описания для поля рассеиваемых волн выполняется процедура перехода от координат $O\xi_1\xi_2$ к координатам Ox_1x_2 на основе аффинного преобразования

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \mu \xi_2, \quad \mu = (c_{44} / c_{55})^{1/2}, \quad (5.7)$$

а в плоскости Ox_1x_2 вводится полярная координатная система $Or\theta$ на основе соотношений

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (5.8)$$

В процессе преобразований (5.8) эллиптический контур Γ сечения туннельной полости становится эллипсом $\tilde{\Gamma}$ с полуосями $(a, \mu b)$ и параметрическим представлением

$$(x_1)_{\tilde{\Gamma}} = a \cos \varphi, \quad (x_2)_{\tilde{\Gamma}} = \mu b \sin \varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (5.9)$$

а уравнение (5.2) и краевые условия (5.3), (5.4) на свободных гранях слоя $\tilde{\Gamma}_{\pm} : x_2 = \pm \tilde{h}, \tilde{h} = \mu h$ и на трансформированном контуре полости $\tilde{\Gamma}$ соответственно принимают вид

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 - \rho h^2 c_*^{-1} \partial_t^2) U_3^{(1)} = 0, \quad (5.10)$$

$$(\partial U_3^{(1)} / \partial x_2)_{x_2 = \pm \tilde{h}} = 0, \quad (5.11)$$

$$(U_3^{(1)})_{\tilde{\Gamma}} = 0. \quad (5.12)$$

Далее, в рамках концепции метода изображений [59, 60, 71] для записи амплитудной составляющей поля рассеиваемых полостью и удовлетворяющих краевому условию на свободных гранях слоя $\tilde{\Gamma}_{\pm}$ волн вводится счетное множество локальных вспомогательных прямоугольных и полярных координатных систем с имеющими в Ox_1x_2 координаты $x_{1,k} = 0$, $x_{2,k} = 2k\tilde{h}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) полюсами O_k . После этого вводится удовлетворяющее краевым условиям (5.3) на $\tilde{\Gamma}_{\pm}$ представление с неизвестными подлежащими определению коэффициентами A_n :

$$U_3^{(omp)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) \cos(n\theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_n^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos(n\theta_k) + H_n^{(1)}(\Omega_1 r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})). \quad (5.13)$$

На основе использования модифицированных соотношений сложения цилиндрических функций [59, 60, 71] представление (5.13) записывается при $r_0 < \tilde{h}$ в координатной системе (r_0, θ_0) в виде

$$U_3^{(omp)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 r_0) \sum_{k=1}^{\infty} [H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 \tilde{h}k) + H_{n+p}^{(1)}(2\Omega_1 \tilde{h}k)]] \cos(n\theta_0) \quad (5.14)$$

и после введения обозначения $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} H_{p-n}^{(1)}(2\Omega_1 \tilde{h}k)$ принимает форму

$$U_3^{(omp)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega_1 r_0) (S_{p,n} + S_{p,-n})] \cos(n\theta_0). \quad (5.15)$$

Далее представление (5.15) с применением полученных в работе [71] соотношений

$$(J_n(\Omega_1 r_0) e^{in\theta_0})_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) e^{ip\varphi}, \quad (5.16)$$

$$(H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) e^{in\theta_0})_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) e^{ip\varphi}, \quad (5.17)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) &= \delta_{np} J_{(n+p)/2}(\Omega_1 |\eta_1|) \tilde{\eta}_1^{(n+p)/2} J_{(n-p)/2}(\Omega_1 |\eta_2|) \tilde{\eta}_2^{(n-p)/2}, \\ Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) &= \delta_{np} H_{(n+p)/2}^{(1)}(\Omega_1 |\eta_1|) \tilde{\eta}_1^{(n+p)/2} J_{(n-p)/2}(\Omega_1 |\eta_2|) \tilde{\eta}_2^{(n-p)/2}, \\ \eta_1 &= R(a_0 + \varepsilon b_0), \quad \eta_2 = R(\varepsilon a_0 + b_0), \quad \tilde{\eta}_j = \eta_j / |\eta_j| \quad (j = \overline{1,2}); \\ a_0 &= (\mu + 1) / (2\mu), \quad b_0 = (\mu - 1) / (2\mu), \quad R = (a + \mu b) / 2, \quad \varepsilon = (a - \mu b) / (a + \mu b), \\ \delta_{np} &= \begin{cases} 1, & n + p = 2s \\ 0, & n + p \neq 2s \end{cases} \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned}$$

после приведения (5.15), (5.16) к виду

$$(J_n(\Omega_1 r_0) \cos n\theta_0)_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2)) e^{ip\varphi}, \quad (5.18)$$

$$(H_n^{(1)}(\Omega_1 r_0) \cos n\theta_0)_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} (Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2)) e^{ip\varphi}, \quad (5.19)$$

преобразуется в следующее ортогональное контурное разложение для $(U_3^{(omp)})_{\tilde{\Gamma}}$

$$\begin{aligned} (U_3^{(omp)})_{\tilde{\Gamma}} &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_n (Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2)) + \\ &+ \delta_n^0 \sum_{q=0}^{\infty} A_q (i^{q-n} + i^{-q+n}) (S_{p,n} + S_{p,-n}) (Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + \\ &+ (-1)^n Q_{-n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2))] e^{ip\varphi} \end{aligned} \quad (5.20)$$

В свою очередь, для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне контурное представление на $\tilde{\Gamma}$ с применением формулы обобщенного разложения Якоби [71]

$$(\exp(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2))_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} Q_p^{(\varepsilon)}(\nu_1, \nu_2) e^{ip\varphi}, \quad (5.21)$$

$$Q_p^{(\varepsilon)}(\nu_1, \nu_2) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} [J_s(-i\varepsilon R \nu_{12}) J_{p-s}(-iR \nu_{12}) e^{i(p-s)\delta_1} e^{is\delta_2}],$$

$$(v_1 x_1 + v_2 x_2)_{\bar{\Gamma}} = R v_{12} (\sin(\varphi + \delta_1) + \varepsilon \sin(\varphi + \delta_2)),$$

$$R = (a + \mu b) / 2, \quad \varepsilon = (a - \mu b) / (a + \mu b), \quad v_{12} = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2},$$

$$e^{i\delta_1} = (v_2 + i v_1) / v_{12}, \quad e^{i\delta_2} = (v_2 - i v_1) / v_{12},$$

также может быть получено в форме ортогонального ряда на основе последовательных преобразований вида

$$\tilde{U}_3^{(\text{пад})} = U_{30} \cos(\tilde{\alpha}_n \xi_2) \cdot \exp(i k_n \xi_1) = U_{30} \cos(\alpha_n x_2) \cdot \exp(i k_n x_1), \quad \alpha_n = \tilde{\alpha}_n / \mu; \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{U}_3^{(\text{над})})_{\bar{\Gamma}} &= (U_{30} / 2) (\exp(i k_n x_1 + i \alpha_n x_2) + \exp(i k_n x_1 - i \alpha_n x_2)) = \\ &= (U_{30} / 2) \sum_{p=-\infty}^{\infty} (Q_p^{(\varepsilon)}(i k_n, i \alpha_n) + Q_p^{(\varepsilon)}(i k_n, -i \alpha_n)) e^{i p \varphi}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Таким образом, из функционального уравнения, порождаемого граничным условием (5.4), на основе его алгебраизации с применением метода ортогональных рядов для неизвестных коэффициентов A_n в представлении поля $U_3^{(\text{отр})}$ рассеиваемых полостью волн следует бесконечная система линейных алгебраических уравнений, имеющая вид

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} [A_n (Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2)) + \\ &+ \delta_n^0 \sum_{q=0}^{\infty} A_q (i^{q-n} + i^{-q+n}) (S_{p,n} + S_{p,-n}) (Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + \\ &+ (-1)^n Q_{-n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2))] = -U_{30} (Q_p^{(\varepsilon)}(i k_n, i \alpha_n) + Q_p^{(\varepsilon)}(i k_n, -i \alpha_n)) \\ &\quad (p = \overline{-\infty, \infty}). \end{aligned} \quad (5.24)$$

После определения коэффициентов A_n кинематические характеристики анализируемого волнового поля в произвольной точке (ξ_1, ξ_2) области сечения слоя рассчитываются с применением формул (5.6), (5.13), а для определения силовых характеристик в полях падающих и рассеиваемых волн дополнительно применяются вспомогательные соотношения

$$\partial_1 (H_n^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos(n\theta)) = \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}
&= (\Omega / 2)(H_{n-1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos((n-1)\theta) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos((n+1)\theta)), \\
&\quad \partial_2(H_n^{(1)}(\Omega r) \cdot \cos(n\theta)) = \\
&= -\mu(\Omega / 2)(H_{n-1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \sin((n-1)\theta) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega r) \cdot \sin((n+1)\theta)),
\end{aligned} \tag{5.26}$$

на базе использования которых расчетные соотношения принимают вид

$$\sigma_{13}^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t) = c_{55}(\partial_1 U_3^{(nad)}) = ik_n c_{55} U_{30} \cos(\tilde{\alpha}_n \xi_2) \exp(-i(\omega t - ik_n \xi_1)), \tag{5.27}$$

$$\sigma_{23}^{(nad)}(\xi_1, \xi_2, t) = c_{44}(\partial_2 U_3^{(nad)}) = -\tilde{\alpha}_n c_{44} U_{30} \sin(\tilde{\alpha}_n \xi_2) \exp(-i(\omega t - ik_n \xi_1)), \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{13}^{(omp)} = c_{55}(\partial_1 U_3^{(omp)}) = \\
&= c_{55}(\Omega_1 / 2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \cos((n-1)\theta_0) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \cos((n+1)\theta_0)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos((n-1)\theta_k) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos((n+1)\theta_k) + \right. \\
&\quad \left. + H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_{-k}) \cos((n-1)\theta_{-k}) - H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \cos((n+1)\theta_k) \right],
\end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{23}^{(omp)} = c_{44}(\partial_2 U_3^{(omp)}) = \\
&= -\mu c_{44}(\Omega_1 / 2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \sin((n-1)\theta_0) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_0) \sin((n+1)\theta_0)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \sin((n-1)\theta_k) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \sin((n+1)\theta_k) + \right. \\
&\quad \left. + H_{n-1}^{(1)}(\Omega_1 r_{-k}) \sin((n-1)\theta_{-k}) + H_{n+1}^{(1)}(\Omega_1 r_k) \sin((n+1)\theta_k) \right].
\end{aligned} \tag{5.30}$$

С учетом симметрии исследуемых полей относительно оси $O\xi_1$ расчет их характеристик может осуществляться для точек (ξ_1, ξ_2) с $\xi_2 \geq 0$, и при этом

$$r_0 = (\xi_1^2 + (\mu\xi_2)^2)^{1/2}, \tag{5.31}$$

$$\theta_0 = \begin{cases} \arctg(\mu\xi_2 / \xi_1), & \xi_1 > 0; \\ \arctg(\mu\xi_2 / \xi_1) + \pi, & \xi_1 < 0; \\ \pi / 2, & \xi_1 = 0; \end{cases} \quad r_{\pm k} = (\xi_1^2 + (\mu(\xi_2 + 2kh))^2)^{1/2},$$

$$\theta_{\pm k} = \begin{cases} \arctg(\mu(\xi_2 + 2kh) / \xi_1), & \xi_1 > 0, \xi_2 + 2kh \geq 0; \\ \arctg(\mu(\xi_2 + 2kh) / \xi_1) + \pi, & \xi_1 < 0, \xi_2 + 2kh \geq 0; \\ \arctg(\mu(\xi_2 + 2kh) / \xi_1), & \xi_1 > 0, \xi_2 + 2kh \leq 0; \\ \arctg(\mu(\xi_2 + 2kh) / \xi_1) + \pi, & \xi_1 < 0, \xi_2 + 2kh \leq 0; \end{cases}$$

$$\theta_{\pm k} = \begin{cases} \arctg(\mu(\xi_2 + 2kh) / \xi_1), & \xi_1 = 0, \xi_2 + 2kh > 0; \\ \arctg(\mu(\xi_2 + 2kh) / \xi_1), & \xi_1 = 0, \xi_2 + 2kh < 0. \end{cases}$$

Применение полученных расчетных соотношений является заключительным этапом реализации предлагаемого теоретического алгоритма для слоя с полостью.

Для случая, когда в полости внутри слоя имеется идеально контактирующее со слоем упругое прямолинейно ортотропное туннельное цилиндрическое включение эллиптического поперечного сечения, занимающее область $V_2 = \{x_1^2 / a^2 + x_2^2 / b^2 \leq 1, -\infty < x_3 < \infty\}$, а контур сечения упругого включения имеет параметрическое представление $\Gamma = \{x_1 = a \cos \varphi, x_2 = b \sin \varphi, \varphi \in [0, 2\pi]\}$, краевые условия рассматриваемой задачи на границе контакта материалов слоя и включения соответственно имеют вид

$$(U_3^{(1)})_{\Gamma} = (U_3^{(2)})_{\Gamma}, \quad (\sigma_{n3}^{(1)})_{\Gamma} = (\sigma_{n3}^{(2)})_{\Gamma}, \quad (5.32)$$

где $(\sigma_{n3}^{(j)})_{\Gamma}$ – отнесенные к нормирующему параметру $c_* = c_{55}^{(1)}$ амплитудные характеристики касательных напряжений на площадках вдоль поверхности с направляющей Γ . Далее полагается, что физико-механические свойства материалов слоя и включения при рассматриваемом варианте деформирования соответственно характеризуются упругими постоянными $\{c_{44}^{(1)}, c_{55}^{(1)}\}$, $\{c_{44}^{(2)} = \delta \cdot c_{44}^{(1)}, c_{55}^{(2)} = \delta \cdot c_{55}^{(1)}\}$ и параметрами плотности ρ_1 и ρ_2 .

Для амплитудной составляющей функции волновых перемещений в преломленных во включении волнах записывается представление

$$U_3^{(\text{прел})} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_n(\Omega_2 r_0) \cos(n\theta_0), \quad (5.33)$$

в котором B_n – подлежащие определению коэффициенты разложения поля преломленных во включении волн в ряд по базисным цилиндрическим стоячим волнам; $J_n(\Omega_2 r_0)$ – цилиндрические функции Бесселя первого рода индекса n ; $\Omega_2^2 = \rho \omega^2 h^2 / (\delta c_*) = \Omega_1^2 / \delta$. Далее представление (5.33) в точках контура Γ с учетом перераспределения (5.18) преобразуется к виду

$$(U_3^{(\text{прел})})_\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sum_{p=-\infty}^{\infty} (Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2)) e^{ip\varphi}. \quad (5.34)$$

В итоге, при использовании представлений (5.18) – (5.20), (5.23) и (5.34) для записи функциональных уравнений, следующих из краевых условий (5.32) на контактной поверхности $\tilde{\Gamma}$, и в результате их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов, для определения неизвестных коэффициентов в указанных представлениях получена бесконечная система из двух групп линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(2)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2))] + \\ & + \delta_n^0 \sum_{q=0}^{\infty} A_q (i^{q-n} + i^{-q+n}) (S_{p,n} + S_{p,-n}) (Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2) + \\ & + (-1)^n Q_{-n,p}^{(1)}(\Omega_1, R, \eta_1, \eta_2)) - B_n (Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2)) = \\ & = -U_{30} (Q_p^{(\varepsilon)}(ik_n, i\alpha_n) + Q_p^{(\varepsilon)}(ik_n, -i\alpha_n)) \quad (p = \overline{-\infty, \infty}); \\ & B_n \delta(n/R) (Q_{n,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2)) - \\ & - B_n \delta \Omega_2 (Q_{n+1,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n+1,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2)) - \\ & - A_n (n/R) (Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(2)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2)) + \\ & + A_n \Omega_1 (Q_{n+1,p}^{(2)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n+1,p}^{(2)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2)) - \\ & - \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p ((i^{p-n} + i^{-p+n}) ((n/R) (Q_{n,p}^{(2)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n,p}^{(2)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2)) - \\ & - \Omega_1 (Q_{n+1,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2) + (-1)^n Q_{-n+1,p}^{(1)}(\Omega_2, R, \eta_1, \eta_2))) \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega_1 \cdot h \cdot k) \right] = \\ & = U_{30} \delta_n^0 \left(\frac{n}{R} J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) \times \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\times i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right).$$

После определения искомым коэффициентов из приведенной алгебраической системы может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных полям преломляющихся во включении и рассеиваемых им волн.

Анализ ряда эффектов распределения волновых перемещений в исследуемых дифракционных полях с применением описанной методики реализован применительно к задаче о рассеянии симметричных нормальных волн сдвига с варьируемой относительной длиной $\lambda = (2\pi/k_n)h^{-1}$ из низшей моды $n=0$ дисперсионного спектра в свободном по граням ортотропном слое с включением, имеющем сечение с полуосями $a = R, b = (c_{55}^{(1)} / c_{44}^{(1)})^{1/2} R$. Механические свойства, форму и размеры включения фактически определяет набор варьируемых параметров $\{c_{44}^{(1)}, c_{55}^{(1)}, R, \delta\}$. Полагается, что плотности материалов слоя и включения равны.

На рисунках 5.2 – 5.10 в виде тонированных изображений, на которых переход от светлых тонов к темным отвечает нарастанию показателей интенсивности характеризуемых величин, представлены картины распределения уровней волновых перемещений внутри эллиптических включений с различными полуосями, а также в подобластях слоя $\xi_1 \in [-h, h], \xi_2 \in [-4h, 8h]$ вне включения для моментов времени, соответствующих началу периодов волновых колебаний. Варьируемыми расчетными параметрами являются также показатель δ соотношения модулей сдвига для материалов слоя и включения, а также относительная длина падающей волны λ . В качестве ряда основных выводов, следующих из анализа данных распределений, можно указать на следующие эффекты.

В случае слоя с модулями упругости $c_{55}^{(1)} = c_*$, $c_{44}^{(1)} = 2c_*$ и ортотропного включения из материала пониженной жесткостью ($\delta = 0,25$) с полуосями сечения $a = 0.5h, b = 0.35h$ при падении волны относительно малой длины $\lambda = 0.25h$ (рис. 5.2)

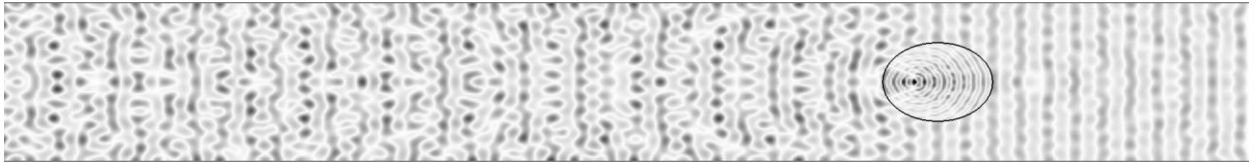


Рис. 5.2. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,25h, \delta = 0,25.$$

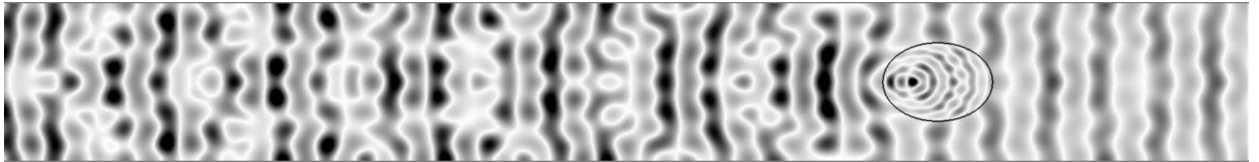


Рис. 5.3. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,5h, \delta = 0,25.$$

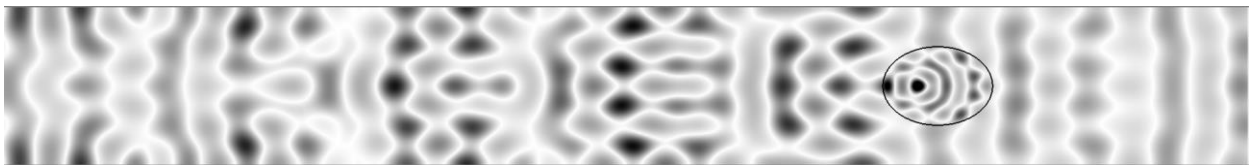


Рис. 5.4. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,7h, \delta = 0,25.$$

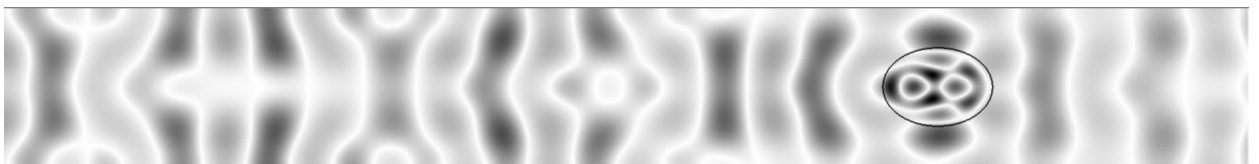


Рис. 5.5. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = h, \delta = 0,25.$$

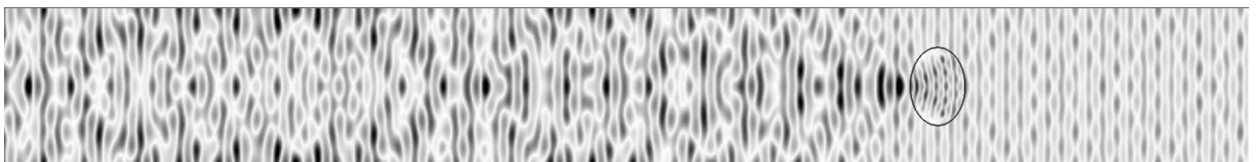


Рис. 5.6. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,25h, \delta = 0,25.$$

во включении формируется поле волновых перемещений с выраженной точкой фокуса внутренней концентрации. В направлении теневой области включение выполняет роль рассеивателя; интенсивность отраженных волн в этом случае очень мала. В случае волны с относительной длиной $\lambda = 0,5h$ (рис. 5.3) интенсивность отраженных волн незначительно возрастает и при этом наблюдается существенно более выраженное нарастание интенсивности волновых колебаний в зоне за включением; основные охарактеризованные свойства картины волновых перемещений сохраняются и для случая падения волны с $\lambda = 0,7h$ (рис. 5.4). Максимальная интенсивность рассеянных волн в теневой области для случая $\lambda = 0,5h$ выше по сравнению со случаем падения волны с $\lambda = 0,7h$.

При падении волны с $\lambda = h$ во включении рассматриваемой геометрии возникают более обширные зоны фокусирования (рис. 5.5), а также наблюдаются зоны выраженного фокусирования огибающих волн вне включения в точках у верхнего и нижнего краев включения. Также возрастает интенсивность и размеры зоны возмущений, обусловленных отраженными волнами в области перед включением.

При изменении соотношения модулей упругости $c_{55}^{(1)} = 0.5c_*$, $c_{44}^{(1)} = c_*$, а также геометрии сечения включения с заданием $a = 0.25h$, $b = 0.35h$, $R = 0.5h$, $\delta = 0,25$ для случая относительно малой длины $\lambda = 0,25h$ падающей волны (рис. 5.6) включение выступает концентратором волновых колебаний, и вблизи контура за включением формируется контрастная фокусная зона.

В случаях задания параметров $\lambda = 0,5h$ и $\lambda = 0,7h$ (рис. 5.7, 5.8) наблюдаются выраженные качественные и количественные изменения в структуре волновых полей как в зоне внутри включения, так и в рассматриваемой подобласти слоя.

Так, при $\lambda = 0,5h$ возникает контрастный эффект концентрации волновых перемещений во включении с несколькими фокусными точками. Формируются зоны фокусирования огибающих волн вне включения в точках у верхнего и

нижнего краев включения, а эффекты возмущений в областях перед включением и за неоднородностью достаточно незначительны. Но при $\lambda = 0,5h$ возникают эффекты существенных возмущений в полях отраженных и огибающих включение волн; наблюдается существенная концентрация уровней волновых перемещений на некотором удалении от включения в теневой зоне взаимодействия, а повышенный уровень волновых перемещений возникает и на больших расстояниях от включения в теневой области. Во включении при этом наблюдается только одна точка фокусировки преломленных волн.

При $\lambda = h$ – наблюдается трансформация зон концентрации волновых перемещений с изменением их формы и увеличением общих размеров; в зоне непосредственно за включением возникает область фокусирования интенсивности огибающих волн; искажения волнового поля падающих волн в области перед включением существенно снижаются по сравнению со случаем $\lambda = 0,7h$.

В случаях рассмотрения включений с повышенной жесткостью при $\delta = 4$ и геометрических параметрах $a = 0,5h$, $b = 0,35h$, $R = 0,5h$, эффекты трансформации волновых полей для варьируемых относительных длин падающей нормальной волны $\lambda = 0,25h$, $\lambda = 0,5h$, $\lambda = 0,7h$ и $\lambda = h$ соответственно представлены на рисунках 5.10 – 5.13.

В качестве ведущих свойств рассматриваемых волновых полей можно отметить малую степень проникания волновых колебаний во включение ($\lambda = 0,25h$, $\lambda = 0,5h$) и эффекты «продолжаемости волновых полей» во включениях ($\lambda = 0,7h$, $\lambda = h$); существенно растет также интенсивность эффектов отражения во фронтальной зоне взаимодействия падающей волны с включением; зоны фокусировки огибающих включение волн отодвигаются от границы включения вглубь слоя. Подобная специфика поля рассеянных волн может быть использована для идентификации формы и свойств рассеивающего препятствия.

Наконец, эффекты падения нормальных волн различной относительной длины на включения с повышенной жесткостью при $\delta = 4$ и геометрических параметрах $a = 0,25h$, $b = 0,35h$, $R = 0,5h$, представляют рисунки 5.14 – 5.17.

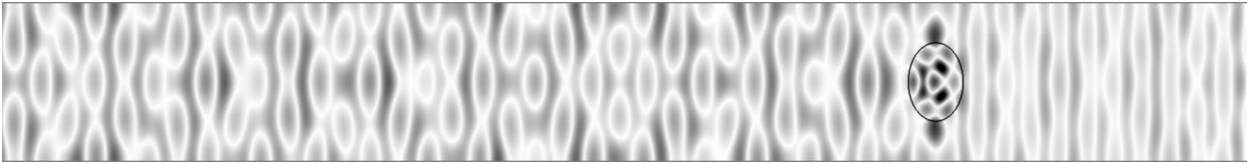


Рис. 5.7. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,5h, \delta = 0,25.$$

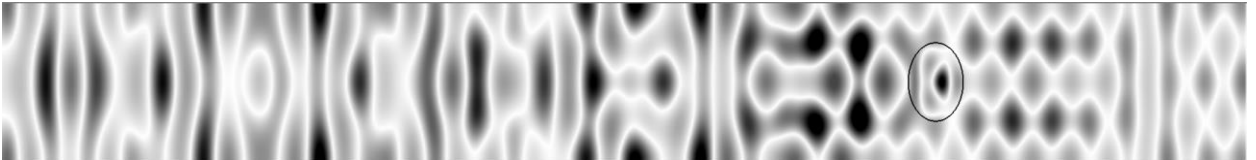


Рис. 5.8. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,7h, \delta = 0,25.$$

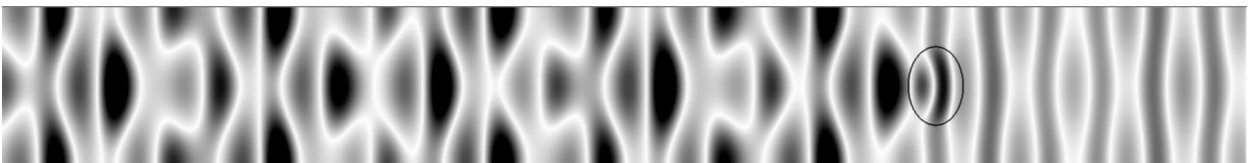


Рис. 5.9. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = h, \delta = 0,25.$$

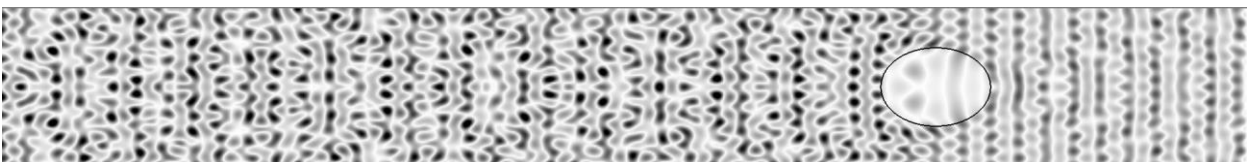


Рис. 5.10. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,25h, \delta = 4$$

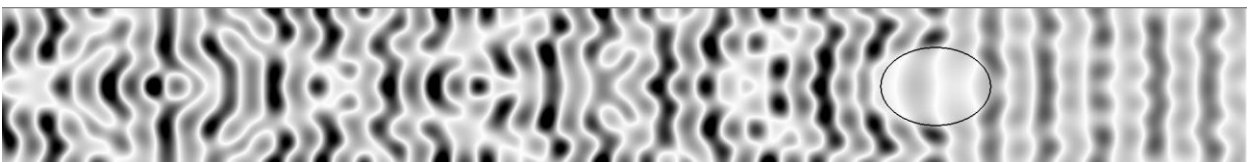


Рис. 5.11. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,5h, \delta = 4$$

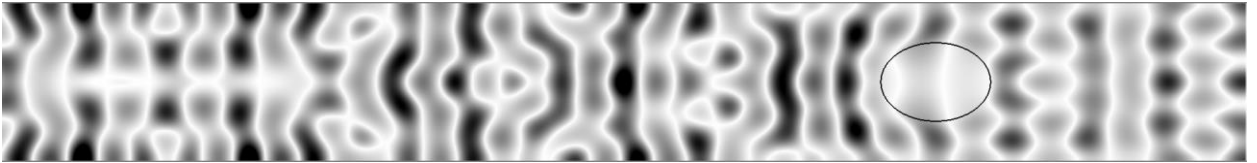


Рис. 5.12. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,7h, \delta = 4$$

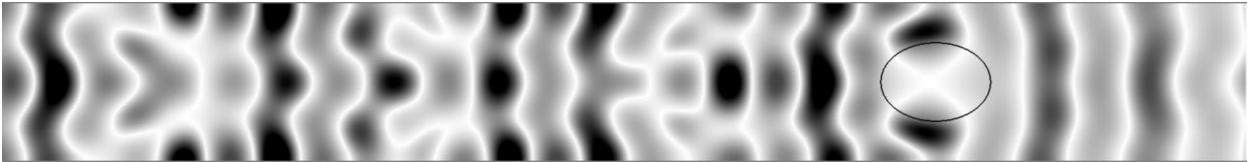


Рис. 5.13. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 2c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = h, \delta = 4.$$

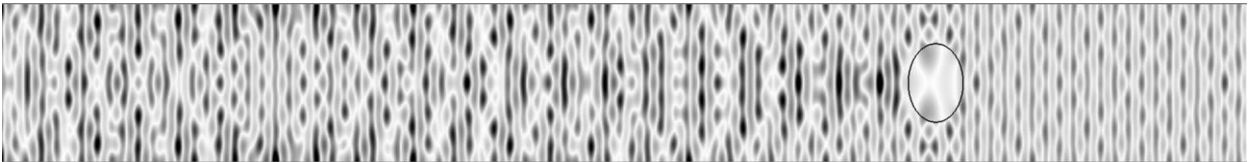


Рис. 5.14. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,25h, \delta = 4$$

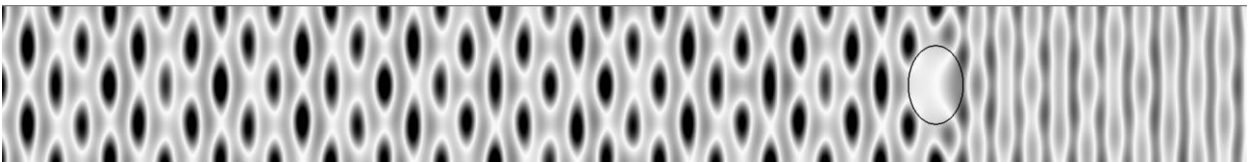


Рис. 5.15. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,5h, \delta = 4$$

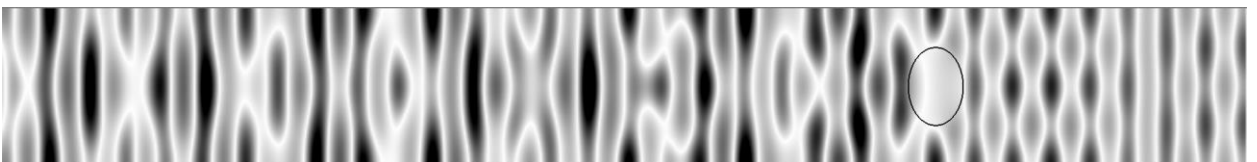


Рис. 5.16. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = 0,7h, \delta = 4$$

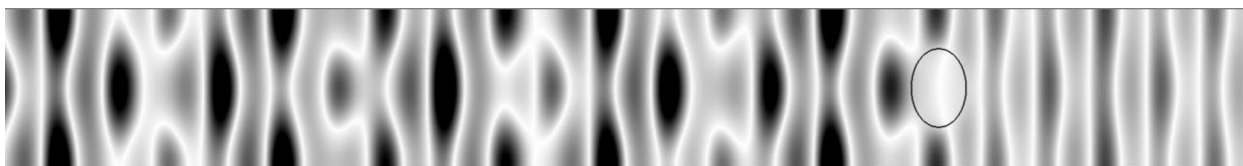


Рис. 5.17. Картина распределения волновых перемещений для случая

$$c_{44} = 0,5c_*, c_{55} = c_*, R = 0,5h, \lambda = h, \delta = 4$$

Можно сделать выводы о том, что при $\lambda = 0,25h$ (рис. 5.14) минимально проявляются эффекты обусловленных отражением от включения искажений в поле падающих волн во фронтальной зоне взаимодействия и наблюдается слабая фокусировка обогнувших включение волн в теневой зоне; при $\lambda = 0,5h$ (рис. 5.15) также практически отсутствуют следствия эффектов отражения, а поле обогнувших включение волн имеет по протяженности всей выделенной исследуемой зоны за включением регулярную структуру; при $\lambda = 0,7h$ и $\lambda = h$ (рис. 5.16 и 5.17) поля перемещений во включениях являются практически равномерными и имеют крайне низкую интенсивность, а за включением формируются поля с подобными по топологии для обеих относительных длин волн картинами периодической фокусировки, отличающимися расстояниями между чередующимися зонами.

Анализируемые картины распределений подтверждают также априорные свойства относительного уменьшения длин преломляющихся волн для случаев «мягких» включений и увеличения длины таких волн в относительно более жестких включениях. Во всех случаях более контрастно выраженными являются изменения топологии исследуемых полей в теневых зонах взаимодействия.

5.2. Методика исследования полей сдвиговых волн в функционально-градиентном изотропном упругом слое с туннельной цилиндрической полостью

Целью исследований, представляемых в данном подразделе, является построение теоретической численно-аналитической методики решения задач о дифракционном рассеянии сдвиговых волн, нормально падающих на параллельную

граням внутреннюю туннельную цилиндрическую полость с закрепленной или свободной поверхностью в фиксированном по граням слое, изготовленном из изотропного материала с однотипной экспоненциальной неоднородностью вдоль толщинной координаты по всем физико-механическим характеристикам.

В основу разрабатываемой методики положена концепция представления дифракционных волновых полей разложениями по базисным системам решений волнового уравнения во вспомогательных локальных координатных системах с полюсами, зеркально расположенными относительно границ слоя.

Рассматривается изотропный функционально-градиентный упругий слой толщины $2h$ (рис. 5.18), занимающий в прямоугольных координатах $Ox_1x_2x_3$ область $V_L = \{-\infty < x_1, x_3 < \infty, |x_2| \leq h\}$. Грани слоя $x_2 = \pm h$ жестко фиксированы, а внутри слоя имеется туннельная круговая цилиндрическая полость с параллельной граням образующей и областью сечения $V_I = \{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, -\infty < x_3 < \infty\}$. Контур полости свободен от напряжений либо жестко закреплен.

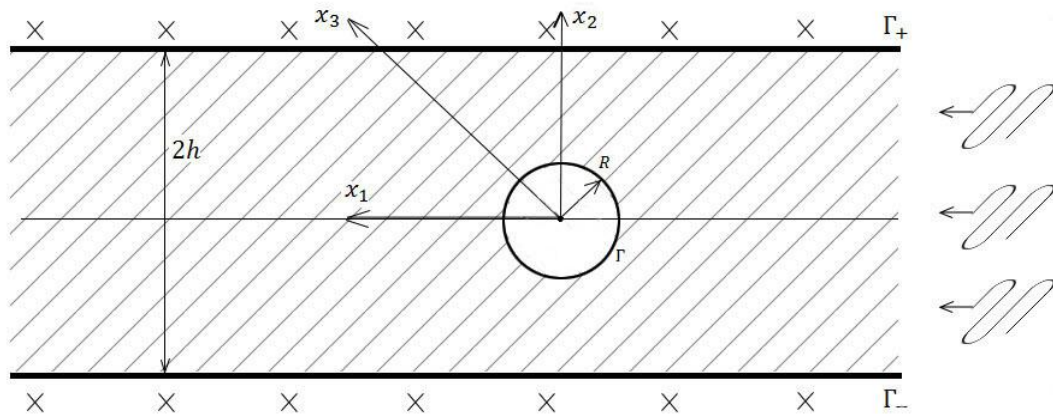


Рис. 5.18. Сечение функционально-градиентного слоя с туннельной цилиндрической полостью.

Неоднородный материал слоя в рамках рассматриваемой модели характеризуется параметрами плотности $\tilde{\rho}(x_2)$ и модуля сдвига $\tilde{\mu}(x_2)$, имеющими представления

$$\tilde{\rho}(x_2) = \rho \exp(\lambda x_2), \quad \tilde{\mu}(x_2) = \mu \exp(\lambda x_2). \quad (5.36)$$

Полагается, что в слое вдоль положительного координатного направления x_1 распространяется нормальная поляризованная вдоль Ox_3 волна продольного сдвига с круговой частотой ω из произвольной моды соответствующего дисперсионного спектра, характеризующаяся функцией упругих волновых перемещений $U^{(\text{пад})}(x_1, x_2, t)$.

Искомые комплексные амплитудные функции для динамических перемещений $U^{(\text{отр})}(x_1, x_2, t)$ в рассеиваемых полостью волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнения стационарных сдвиговых упругих колебаний материала слоя, которое после отнесения всех характеристик к линейной размерности к нормирующему параметру h принимает вид

$$\partial_1^2 U^{(1)} + \lambda \partial_2 U^{(1)} + \partial_2^2 U^{(1)} + \Omega_*^2 U^{(1)} = 0, \quad \Omega_* = (\rho \omega^2 h^2 / \mu)^{1/2}, \quad (5.37)$$

где

$$U^{(1)} = U^{(\text{над})} + U^{(\text{отр})}. \quad (5.38)$$

При подстановке $U^{(1)} = \exp(-(\lambda/2)x_2)U(x_1, x_2)$ уравнение (5.37) преобразуется к виду двумерного метатармонического уравнения

$$\Delta^2 U + \Omega^2 U = 0, \quad \Delta^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \Omega = (\rho \omega^2 h^2 / \mu - \lambda^2 / 4)^{1/2}, \quad (5.39)$$

которое в процессе разработки представляемой методики интегрируется в прямоугольных и полярных координатах.

В соответствии с оговоренным выше, краевые условия рассматриваемой задачи имеют альтернативные варианты, соответствующие закрепленной цилиндрической граничной поверхности Γ

$$(U)_{x_2=\pm 1} = 0, \quad (U)_{\Gamma} = 0, \quad (5.40)$$

или свободной от механических напряжений цилиндрической граничной поверхности Γ

$$(U)_{x_2=\pm 1} = 0, \quad (\sigma_{r3})_{\Gamma} = 0, \quad (5.41)$$

где $(\sigma_{r3})_{\Gamma}$ – отнесенные к нормирующему параметру μ амплитудные характеристики динамических касательных напряжений на поверхности Γ .

На исходном этапе, для функции волновых упругих перемещений U_I в падающей нормальной упругой SH-волне из моды с номером n из дисперсионного спектра рассматриваемого волновода вводится представление

$$U_I = u_0 (\exp(-\alpha_n h) \exp(\alpha_n x_2) - \exp(\alpha_n h) \exp(-\alpha_n x_2)) \exp(-i(\omega t - k_n x_1)), \quad (5.42)$$

в котором k_n – волновое число нормальной волны из моды с номером n , $k_n = (\alpha_n^2 + \Omega^2)^{1/2}$ ($\text{Re} k_n \geq 0$); α_n – корни трансцендентного дисперсионного уравнения

$$sh(2\alpha_n h) = 0; \quad (5.43)$$

n – номер моды нормальных бегущих симметричных SH-волн в закрепленном на плоских гранях слое.

Представление (5.42) априори удовлетворяет первому из краевых условий на закрепленных плоских гранях слоя в парах (5.40) и (5.41).

Для записи поля волн, рассеиваемых полостью и удовлетворяющих краевому условию на закрепленных гранях слоя, согласно концепции метода зеркальных изображений вводится счетное множество вспомогательных локальных прямоугольных и полярных координатных систем с полюсами O_k , имеющими в плоскости Ox_1x_2 координаты $x_{1,k} = 0, x_{2,k} = 2kh$, ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Соответственно, записывается представление

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(\Omega r_0) \cos(n\theta_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-1)^k (H_n(\Omega r_k) \cos(n\theta_k) + H_n(\Omega r_{-k}) \cos(n\theta_{-k})). \quad (5.44)$$

где $H_n^{(1)}(\Omega r)$ – цилиндрические функции Ханкеля первого рода индекса n ; (r_k, θ_k) – локальные полярные координаты с полюсами O_k . После применения теорем сложения цилиндрических функций, для точек на контуре полости представление (5.44) преобразуется к виду

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \right] \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] \cos(n\theta), \quad (5.45)$$

и при использовании обозначения $S_{p,n} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k)$ контурное представление (5.44) приобретает окончательную форму записи в полярных координатах, связанных с центром полости

$$U_3^{(\text{отр})} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) (S_{p,n} + S_{p,-n}) \right] \cos(n\theta). \quad (5.46)$$

Контурное представление на Γ для комплексной амплитудной составляющей функции перемещений в падающей волне записывается с использованием формулы обобщенного разложения Якоби

$$e^{v_1 x_1 + v_2 x_2} = \sum_{(p)} Q_p e^{ip\theta}, \quad Q_p = J_p \left(-iR(v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \right) \left(\frac{(iv_1 + v_2)}{(v_1^2 + v_2^2)^{1/2}} \right)^p, \quad (5.47)$$

и после ряда преобразований принимает вид

$$\tilde{U}_3^{(\text{отр})} = U_{30} \sum_{p=0}^{\infty} \delta_p^0 J_p \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^p \cdot \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{p/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{p/2} \right) \cos(p\theta), \quad (5.48)$$

$$\delta_p^0 = \begin{cases} 1/2, & p = 0; \\ 1, & p \neq 0. \end{cases}$$

При использовании представлений (5.46) и (5.48) для записи функциональных уравнений, следующих краевых условий (5.40) и (5.41) на поверхности Γ , и их последующей алгебраизации с применением метода ортогональных рядов, для неизвестных коэффициентов в указанных представлениях получены бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. В случае полости с закрепленной границей Γ эта система имеет вид

$$A_n H_n^{(1)}(\Omega R) + \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p (i^{p-n} + i^{-p+n}) J_n(\Omega R) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] = \quad (5.49)$$

$$= U_{30} \delta_n^0 J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right),$$

а в случае полости со свободной границей Γ – соответственно имеет вид

$$\begin{aligned} & A_n \left(\frac{n}{R} H_n^{(1)}(\Omega R) - \Omega H_{n+1}^{(1)}(\Omega R) \right) + \\ & \delta_n^0 \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(i^{p-n} + i^{-p+n} \right) \left(\frac{n}{R} J_n(\Omega R) - \Omega J_{n+1}(\Omega R) \right) \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[H_{p-n}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) + H_{n+p}^{(1)}(2 \cdot \Omega \cdot h \cdot k) \right] = \quad (5.50) \\ & = U_{30} \delta_n^0 \left(\frac{n}{R} J_n \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) - \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} J_{n+1} \left(R \sqrt{k_n^2 + \alpha_n^2} \right) \right) \times \\ & i^n \left(\left(\frac{k_n + i\alpha_n}{k_n - i\alpha_n} \right)^{n/2} + \left(\frac{k_n - i\alpha_n}{k_n + i\alpha_n} \right)^{n/2} \right). \end{aligned}$$

После определения искоемых коэффициентов из приведенных алгебраических систем может быть реализована фаза численного анализа основных закономерностей, свойственных полям рассеиваемых полостью волн.

5.3. Методика анализа модели формирования поля стоячих волн в перфорированном слое с полостями или включениями

В данном подразделе диссертации представлена разработка теоретической численно-аналитической методики анализа модели формирования поля стоячих волн в деформируемом слое, контактирующем с акустическими средами слоя и содержащем периодический ряд однотипных параллельных плоским граням внутренних протяженных туннельных цилиндрических полостей. Конструкция данного типа исследуется с точки зрения использования ее в качестве плоского гидроакустического экрана. Применительно к объектам данной структуры актуальная проблема анализа процессов волнового деформирования может быть

исследована с применением представляемой в данной работе численно-аналитической методики, которая базируется на введении представлений потенциалов волнового поля для многосвязного слоя в виде суперпозиций разнотипных базисных решений в основных координатах и в локальных цилиндрических координатных системах с полюсами в центрах сечений перфорирующих полостей. Используются теория Флоке, теоремы сложения цилиндрических функций, разложения Якоби, а также метод ортогональных рядов, с использованием которого задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов в рядах по базисным частным решениям волновых уравнений.

Полагается, что рассматриваемая конструкция гидроакустического экрана в модели представляет собой перфорированный изотропный слой с параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ , содержит бесконечный периодический ряд отстоящих друг от друга на расстояние $2l$ туннельных цилиндрических полостей радиуса R ($R < h$) с центрами на оси Ox_1 и занимает в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область

$$V_L = \{-h \leq x_3 \leq h, (x_1, x_2) \in R^2\} \setminus \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} V_p, \quad (5.51)$$

где $V_p = \{(x_1 - 2pl)^2 + x_3^2 \leq R^2, -\infty < x_2 < \infty\}$ – подобласти-полости с граничными поверхностями $\Gamma_p = \{(x_1 - 2pl)^2 + x_3^2 = R^2, -\infty < x_2 < \infty\}$, в сечениях которых плоскостью Ox_1x_3 введены локальные полярные координатные системы $O_p r_p \theta_p$, $r_p \cdot \exp(i\theta_p) = x_1 - 2pl + ix_3$, с центрами в точках $O_p(2pl, 0)$.

Полубесконечные области $V_+ = \{h < x_3, (x_1, x_2) \in R^2\}$ и $V_- = \{x_3 < -h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ полагаются заполненными идеальной слабо сжимаемой жидкостью. Процессы распространения гидроакустических волн в этих областях соответственно описываются уравнениями для потенциалов ϕ_+, ϕ_- акустических полей, а также соотношениями связи указанных потенциалов с полями скоростей

\vec{v}_+ , \vec{v}_- волновых колебательных смещений частиц акустической среды и волновыми акустическими давлениями p_+ , p_- :

$$\Delta\phi_{\pm} = (c_0^{(\pm)})^{-2} \partial_t^2 \phi_{\pm}, \quad \vec{v}_{\pm} = -\text{grad } \phi_{\pm}, \quad p_{\mp} = \rho_0^{(\pm)} \partial_t \phi_{\pm}, \quad (5.52)$$

где $c_0^{(\pm)} = (\kappa^{(\pm)} \rho^{(\pm)})^{-2}$ – скорости объемных акустических волн в жидкостях, $\kappa^{(\pm)}$ – адиабатические модули сжимаемости для акустических сред, $\rho_0^{(\pm)}$ – плотности акустических сред в невозмущенном состоянии. В рассматриваемом случае полагается, что из глубины полубесконечной области V_- вдоль положительного направления оси Ox_3 на поверхность $\Gamma_- = \{x_3 = -h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ нормально падает плоская монохроматическая волна гидроакустического давления с циклической частотой ω и комплексным потенциалом $\phi_-^{(0)} = P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)} x_3))$, в котором $P_0^{(-)}$ – задаваемый амплитудный параметр, $k_f^{(-)}$ – волновое число. При этом в заполняющей V_- акустической среде возникает отраженная волна с потенциалом $\phi_-^{(1)} = P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)} x_3))$, а в области V_+ с граничной поверхностью $\Gamma_+ = \{x_3 = h, (x_1, x_2) \in R^2\}$ генерируется прошедшая экранирующий слой V_L акустическая волна с потенциалом $\phi_+ = P_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)} x_3))$. На поверхностях контакта слоя V_L с жидкостными полупространствами V_+ и V_- задаются условия

$$\begin{aligned} (\sigma_{33} + p_{\pm})_{x_3=\pm h} = 0, \quad (\sigma_{3j})_{x_3=\pm h} = 0 \quad (j=1,2), \\ (\partial_t u_3 - v_{3\pm})_{x_3=\pm h} = 0, \end{aligned} \quad (5.53)$$

где $v_{3\pm}$ – соответствующие компоненты векторов \vec{v}_+ , \vec{v}_- скоростей движения частиц акустических сред.

В слое V_L экранирующего элемента при рассматриваемых воздействиях формируется поле двухпарциальных упругих волн, описываемых посредством введения соответствующих потенциалов $\Phi(x_1, x_3, t)$, $\Psi(x_1, x_3, t)$ для комплексного вектора волновых упругих перемещений

$$\bar{u}(x_1, x_3, t) = (u_1(x_1, x_3, t), u_3(x_1, x_3, t)) = \text{grad } \Phi(x_1, x_3, t) + \text{rot } \Psi(x_1, x_3, t) \cdot e_2. \quad (5.54)$$

Вводимые потенциалы подлежат определению из уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)D^2\Phi(x_1, x_3, t) - \rho\partial^2 / \partial t^2\Phi(x_1, x_3, t) &= 0, \\ \mu D^2\Psi(x_1, x_3, t) - \rho\partial^2 / \partial t^2\Psi(x_1, x_3, t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

При указанном характере воздействий экранирующий слой V_L находится в состоянии динамической плоской деформации в плоскостях, коллинеарных Ox_1x_3 . Соответственно, в случае введения комплексных амплитудных характеристик волновых упругих перемещений $\{u_{r_p}^{(L)}(r_p, \theta_p), u_{\theta_p}^{(L)}(r_p, \theta_p)\}$ и динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(L)}(r_p, \theta_p)$ ($\alpha, \beta = r_p, \theta_p$) для материала слоя V_L , граничные условия на свободных от напряжений поверхностях Γ_p записываются в виде

$$(\sigma_{rr}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} = 0, (\sigma_{r\theta}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} = 0. \quad (5.56)$$

В рамках разрабатываемой методики для потенциалов волнового поля в V_L , с учетом свойства периодичности упругих перемещений и напряжений вдоль Ox_1 с периодом $2l$, обеспечивающего возможность применения теории Флоке [59, 60], вводятся представления в виде суперпозиций разнотипных базисных решений в основных координатах Ox_1x_3 и в локальных координатных системах $O_p r_p \theta_p$ с подлежащими определению группами постоянных коэффициентов $A_{n\pm}, C_{n\pm}, B_q, G_q$:

$$\begin{aligned} \Phi = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \\ + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\alpha r_p) \exp(iq\theta_p)] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \Psi = [\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + C_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \\ + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\beta r_p) \exp(iq\theta_p)] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\alpha = (\rho\omega^2 / (\lambda + 2\mu))^{1/2}, \beta = (\rho\omega^2 / \mu)^{1/2}, a = (\lambda + 2\mu) / \mu \quad (5.59)$$

$$\zeta_{n\pm} = \pm(\rho\omega^2 / (\lambda + 2\mu) + n^2\pi^2 / l^2)^{1/2}, \quad \xi_{n\pm} = \pm(\rho\omega^2 / \mu + n^2\pi^2 / l^2)^{1/2},$$

в которых $H_q^{(1)}(z)$ - цилиндрические функции Ханкеля первого рода с индексом q и аргументом z . В окрестностях граничных поверхностей Γ_+ , Γ_- с использованием описываемых в работе [146] соотношений введенные потенциалы могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm} = & \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \right. \\ & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q (2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \times \\ & \left. \times \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) \right] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm} = & \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + C_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \right. \\ & + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q (2/l)(-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \times \\ & \left. \times \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) \right] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (5.61)$$

где выбор знака \pm зависит от значения координатной переменной x_3 и соответствует $\text{sgn}(x_3)$, а остальные используемые обозначения совпадают с приведенными приведены в работе [146]. Граничные представления, получаемые из соотношений (5.59), (5.60) на Γ_+ и Γ_- , представляют собой ортогональные ряды по переменной x_1 . В свою очередь, представления (5.57), (5.58) могут быть записаны на контуре Γ_0 в центральной локальной координатной системе как ортогональные разложения по переменной θ_0 с использованием теорем сложения цилиндрических функций в форме, приводимой в работах [59, 60], а также с применением полученных в [71] соотношений

$$\begin{aligned} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n\pm}x_3) = & \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^s ((\zeta_{n\pm} - n\pi l^{-1}) / (\zeta_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2}) \times \\ & \times J_s(((\zeta_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r) \cdot \exp(is\theta), \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n\pm}x_3) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} i^s ((\xi_{n\pm} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \times \quad (5.63)$$

$$\times J_s(((\xi_{n\pm}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r) \cdot \exp(is\theta),$$

на основе которых преобразуемые представления (5.57), (5.58) последовательно принимают вид

$$\Phi = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} i^q ((\xi_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \times \quad (5.64)$$

$$\times J_q(((\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) +$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n-} i^q ((\xi_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \times$$

$$\times J_q(((\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\alpha r_p) \exp(iq\theta_p) \cdot \exp(i\omega t),$$

$$\Psi = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} i^q ((\xi_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \times \quad (5.65)$$

$$\times J_q(((\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) +$$

$$+ \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n-} i^q ((\xi_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \times$$

$$\times J_q(((\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) \cdot \exp(iq\theta_0) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_q^{(1)}(\beta r_p) \exp(iq\theta_p) \cdot \exp(i\omega t),$$

$$\Phi = \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+} i^q ((\xi_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} \cdot J_q(((\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n-} i^q ((\xi_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} J_q(((\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) +$$

$$+ B_q H_q^{(1)}(\alpha r_0) + S_q J_q(\alpha r_0)] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t) = \quad (5.66)$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n+} \chi_{nq+} J_q(\gamma_{n+} r_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n-} \chi_{nq-} J_q(\gamma_{n-} r_0) +$$

$$+ B_q H_q^{(1)}(\alpha r_0) + S_q J_q(\alpha r_0)] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\omega t),$$

$$\begin{aligned}
\Psi &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n+} i^q ((\xi_{n+} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} J_q(((\xi_{n+}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n-} i^q ((\xi_{n-} - n\pi l^{-1}) / (\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2))^{1/2} J_q(((\xi_{n-}^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2} r_0) + \right. \\
&\quad \left. + G_q H_q^{(1)}(\beta r_0) + P_q J_q(\beta r_0) \right] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\alpha t) = \tag{5.67} \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n+} \eta_{nq+} J_q(\delta_{n+} r_0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n-} \eta_{nq-} J_q(\delta_{n-} r_0) + \right. \\
&\quad \left. + G_q H_q^{(1)}(\beta r_0) + P_q J_q(\beta r_0) \right] \exp(iq\theta_0) \cdot \exp(i\alpha t), \\
S_q &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} B_p (H_{q-p}^{(1)}(2\alpha kl) + H_{p-q}^{(1)}(2\alpha kl)), \\
P_q &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} G_p (H_{q-p}^{(1)}(2\varphi kl) + H_{p-q}^{(1)}(2\beta kl)).
\end{aligned}$$

Заключительный этап реализации представляемой численно-аналитической методики заключается в получении и использовании найденных в виде разложений в ортогональные ряды контурных представлений для характеристик волновых деформационных полей в экранирующем слое на центральной цилиндрической поверхности:

$$\sigma_{rr} = (-2\mu) \times \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
&\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \chi_{nq+} (a\gamma_{n+}^2 J_q(\gamma_{n+} r_0) + \gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+} r_0) + q(\gamma_{n+} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) - \right. \\
&\quad \left. - (q/r_0)^2 J_q(\gamma_{n+} r_0)) + A_{n-} \chi_{nq-} (a\gamma_{n-}^2 J_q(\gamma_{n-} r_0) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-} r_0) + q(\gamma_{n-} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\gamma_{n-} r_0)) - \right. \\
&\quad \left. - C_{n+} \eta_{nq+} iqr_0^{-1} (\delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+} r_0) + q(\delta_{n+} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n+} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n+} r_0)) - \right. \\
&\quad \left. - C_{n-} \eta_{nq-} iqr_0^{-1} (\delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-} r_0) + q(\delta_{n-} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n-} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n-} r_0)) \right] + \\
&+ B_q (a\alpha^2 H_q^{(1)}(\alpha r_0) + \alpha (-H_{q+1}^{(1)}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) - (q/r_0)^2 H_q^{(1)}(\alpha r_0)) + \\
&+ S_q (a\alpha^2 J_q(\alpha r_0) + \alpha (-J_{q+1}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} J_q(\alpha r_0)) - (q/r_0)^2 J_q(\alpha r_0)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -G_q i q r_0^{-1} (\beta (-H_{q+1}^{(1)}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) + r_0^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) - \\
& -P_q i q r_0^{-1} (\beta (-J_{q+1}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} J_q(\beta r_0)) + r_0^{-1} J_q(\beta r_0)) \exp(i q \theta_0) \cdot \exp(i \omega t), \\
& \sigma_{r\theta} = (2\mu) \times \tag{5.69}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} \{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \eta_{nq+} ((\delta_{n+}^2 / 2) J_q(\delta_{n+} r_0) + \delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+} r_0) + q(\delta_{n+} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n+} r_0)) - \\
& \quad - (q / r_0)^2 J_q(\delta_{n+} r_0)) + C_{n-} \eta_{nq-} ((\delta_{n-}^2 / 2) J_q(\delta_{n-} r_0) + \\
& \quad + \delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-} r_0) + q(\delta_{n-} r_0)^{-1} J_q(\delta_{n-} r_0)) - (q / r_0)^2 J_q(\delta_{n-} r_0)) - \\
& \quad - A_{n+} \chi_{nq+} i q r_0^{-1} (\gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+} r_0) + q(\gamma_{n+} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\gamma_{n+} r_0)) - \\
& \quad - A_{n-} \chi_{nq-} i q r_0^{-1} (\gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-} r_0) + q(\gamma_{n-} r_0)^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) + r_0^{-1} J_q(\gamma_{n-} r_0)) \} + \\
& + G_q ((\beta^2 / 2) H_q^{(1)}(\beta r_0) + \beta (-H_{q+1}^{(1)}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\beta r_0)) - (q / r_0)^2 H_q^{(1)}(\beta r_0)) + \\
& + P_q ((\beta^2 / 2) J_q(\beta r_0) + \beta (-J_{q+1}(\beta r_0) + q(\beta r_0)^{-1} J_q(\beta r_0)) - (q / r_0)^2 J_q(\beta r_0)) + \\
& - B_q i q r_0^{-1} (\alpha (-H_{q+1}^{(1)}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) + r_0^{-1} H_q^{(1)}(\alpha r_0)) - \\
& - P_q i q r_0^{-1} (\alpha (-J_{q+1}(\alpha r_0) + q(\alpha r_0)^{-1} J_q(\alpha r_0)) + r_0^{-1} J_q(\alpha r_0)) \} \exp(i q \theta_0) \cdot \exp(i \omega t).
\end{aligned}$$

Соответственно, для точек на плоских гранях Γ_+ , Γ_- экранирующего слоя записываются представления для характеристик напряженного состояния:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{31}^{(\pm)} = 2\mu \partial_1 \partial_3 \Phi_{\pm} + \mu (\partial_1^2 - \partial_3^2) \Psi_{\pm} = \tag{5.70} \\
& = [2\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} i n \pi l^{-1} \zeta_{n+} \cdot \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \zeta_{n+} x_3) + A_{n-} i n \pi l^{-1} \zeta_{n-} \cdot \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \zeta_{n-} x_3)) + \\
& \quad + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q (2/l) (-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q \pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q \pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \times \\
& \quad \times (i q \pi l^{-1}) (\mp \zeta_{qp}) \cdot \exp(i q \pi l^{-1} x_1 \mp \zeta_{qp} x_3)] + \\
& \quad + \mu [\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \zeta_{n+} x_3) + \\
& \quad + C_{n-} ((i n \pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(i n \pi l^{-1} x_1 + \zeta_{n-} x_3)) + \\
& \quad + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q (2/l) (-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q \pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q \pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \times
\end{aligned}$$

$$\times((iq\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{qp})^2) \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] \cdot \exp(i\omega t),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(\pm)} &= (\lambda \partial_1^2 + (\lambda + 2\mu) \partial_3^2) \Phi_{\pm} + 2\mu \partial_1 \partial_3 \Psi_{\pm} = \quad (5.71) \\ &= [\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} (\lambda (in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu) (\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + \\ &\quad + A_{n-} (\lambda (in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu) (\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \\ &+ \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q (2/l) (-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q (\lambda (iq\pi l^{-1})^2 + \\ &\quad + (\lambda + 2\mu) (\mp \zeta_{qp})^2) \cdot \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] + \\ &\quad + 2\mu \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} (in\pi l^{-1}) (\zeta_{n+}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + \\ &\quad + C_{n-} (in\pi l^{-1}) (\zeta_{n-}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \\ &\quad + 2\mu \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q (2/l) (-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \times \\ &\quad \times (iq\pi l^{-1}) (\mp \zeta_{qp}) \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

$$\partial_t \mu_3 = \partial_t (\partial_3 \Phi_{\pm} + \partial_1 \Psi_{\pm}) = \quad (5.72)$$

$$\begin{aligned} &[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \zeta_{n+} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n+}x_3) + A_{n-} \zeta_{n-} \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \zeta_{n-}x_3)) + \\ &\quad + \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_q (2/l) (-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q \times \\ &\quad \times (\mp \zeta_{qp}) \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3) + \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} (in\pi l^{-1}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n+}x_3) + C_{n-} (in\pi l^{-1}) \exp(in\pi l^{-1}x_1 + \xi_{n-}x_3)) + \\ &\quad + \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_q (2/l) (-i)^{q+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm q\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (q\pi l^{-1})^2)^{1/2})^q (iq\pi l^{-1}) \times \\ &\quad \times \exp(iq\pi l^{-1}x_1 \mp \zeta_{qp}x_3)] \cdot \exp(i\omega t), \end{aligned}$$

а также для характеристик поля гидроакустических волн

$$v_{3-} = (ik_f^{(-)})(-P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)}x_3)) + P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)}x_3))), \quad (5.73)$$

$$v_{3+} = (-ik_f^{(+)})P_0^{(+)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)}x_3)),$$

$$p_- = \rho_0^{(-)} \partial_t \phi_- = (-i\omega \rho_0^{(-)}) \cdot (P_0^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(-)}x_3)) + P_1^{(-)} \cdot \exp(-i(\omega t + k_f^{(-)}x_3))),$$

$$p_+ = \rho_0^{(+)} \partial_t \phi_+ = P_0^{(+)} \rho_0^{(+)} (-i\omega) \cdot \exp(-i(\omega t - k_f^{(+)}x_3)).$$

При этом, ввиду учтенного свойства периодичности, из серии краевых условий на цилиндрических поверхностях рассматриваются только условия для центральной контурной поверхности Γ_0 .

Свойства ортогональности контурных представлений позволяют эффективно трансформировать функциональные краевые условия в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $A_{n\pm}$, $C_{n\pm}$, B_q , G_q , $P_1^{(-)}$, $P_0^{(+)}$ в представлениях характеристик волновых полей, имеющую вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \chi_{nq+} (a\gamma_{n+}^2 J_q(\gamma_{n+}R) + \gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+}R) + \\ & + q(\gamma_{n+}R)^{-1} J_q(\gamma_{n+}R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n+}R)) + \\ & + A_{n-} \chi_{nq-} (a\gamma_{n-}^2 J_q(\gamma_{n-}R) + \gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-}R) + q(\gamma_{n-}R)^{-1} J_q(\gamma_{n-}R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n-}R)) - \\ & - C_{n+} \eta_{nq+} i q R^{-1} (\delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+}R) + q(\delta_{n+}R)^{-1} J_q(\delta_{n+}R)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n+}R)) - \\ & - C_{n-} \eta_{nq-} i q R^{-1} (\delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-}R) + q(\delta_{n-}R)^{-1} J_q(\delta_{n-}R)) + R^{-1} J_q(\delta_{n-}R)) + \\ & + B_q (a\alpha^2 H_q^{(1)}(\alpha R) + \alpha (-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) - (q/R)^2 H_q^{(1)}(\alpha R)) + \\ & + S_q (a\alpha^2 J_q(\alpha R) + \alpha (-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} J_q(\alpha R)) - (q/R)^2 J_q(\alpha R)) + \\ & - G_q i q R^{-1} (\beta (-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) + R^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) - \\ & - P_q i q R^{-1} (\beta (-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} J_q(\beta R)) + r_0^{-1} J_q(\beta R)) = 0 \\ & (q = -\infty, \infty); \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \eta_{nq+} ((\delta_{n+}^2 / 2) J_q(\delta_{n+}R) + \delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+}R) +$$

$$\begin{aligned}
& +q(\delta_{n+}R)^{-1}J_q(\delta_{n+}R) - (q/R)^2J_q(\delta_{n+}R) + \\
& +C_{n-}\eta_{nq-}((\delta_{n-}^2/2)J_q(\delta_{n-}R) + \delta_{n-}(-J_{q+1}(\delta_{n-}R) + \\
& +q(\delta_{n-}R)^{-1}J_q(\delta_{n-}R) - (q/R)^2J_q(\delta_{n-}R)) - \\
& -A_{n+}\chi_{nq+}iqR^{-1}(\gamma_{n+}(-J_{q+1}(\gamma_{n+}R) + q(\gamma_{n+}R)^{-1}J_q(\gamma_{n+}R)) + R^{-1}J_q(\gamma_{n+}R)) - \\
& -A_{n-}\chi_{nq-}iqR^{-1}(\gamma_{n-}(-J_{q+1}(\gamma_{n-}R) + q(\gamma_{n-}R)^{-1}J_q(\gamma_{n-}R)) + R^{-1}J_q(\gamma_{n-}R)) + \\
& +G_q((\beta^2/2)H_q^{(1)}(\beta R) + \beta(-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1}H_q^{(1)}(\beta R)) - (q/R)^2H_q^{(1)}(\beta R)) + \\
& +P_q((\beta^2/2)J_q(\beta R) + \beta(-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1}J_q(\beta R)) - (q/R)^2J_q(\beta R)) + \\
& -B_qiqR^{-1}(\alpha(-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1}H_q^{(1)}(\alpha R)) + R^{-1}H_q^{(1)}(\alpha R)) - \\
& -P_qiqR^{-1}(\alpha(-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1}J_q(\alpha R)) + R^{-1}J_q(\alpha R)) = 0 \\
& (q = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2[A_{n+}in\pi l^{-1}\zeta_{n+} \cdot \exp(\zeta_{n+}h) + A_{n-}in\pi l^{-1}\zeta_{n-} \cdot \exp(\zeta_{n-}h) + \\
& +B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\
& \times (in\pi l^{-1})(\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(-\zeta_{np}h)] + \\
& +(C_{n+}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2)\exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2)\exp(\xi_{n-}h)) + \\
& +G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\
& \times ((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2)\exp(-\zeta_{np}h) = 0 \\
& (n = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2[A_{n+}in\pi l^{-1}\zeta_{n+} \cdot \exp(-\zeta_{n+}h) + A_{n-}in\pi l^{-1}\zeta_{n-} \cdot \exp(-\zeta_{n-}h) + \\
& +B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1})(\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(\zeta_{np}h)] + \\
& +(C_{n+}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2)\exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2)\exp(-\xi_{n-}h)) + \\
& +G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times
\end{aligned}$$

$$\times((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2) \exp(\zeta_{np} h) = 0$$

$$(n = -\infty, \infty);$$

$$\begin{aligned} & A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n+} h) + \\ & + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n-} h) + \\ & + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + \\ & \quad + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np} h) + \\ & + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(-\xi_{n+} h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(-\xi_{n-} h)) + \\ & + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\ & \quad \times (in\pi l^{-1})(\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{qp} h) = \\ & = v_{n0}(-i\omega\rho_0^{(-)}) \cdot (P_0^{(-)} \cdot \exp(-ik_f^{(-)} h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)} h)), \\ & (v_{00} = 1; v_{n0} = 0, n \neq 0), \quad (n = -\infty, \infty); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(\zeta_{n+} h) + \\ & + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(\zeta_{n-} h) + \\ & + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + \\ & \quad + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np} h) + \\ & + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(\xi_{n+} h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(\xi_{n-} h)) + \\ & + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\ & \quad \times (in\pi l^{-1})(-\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{qp} h) = \\ & = v_{n0}(-i\omega\rho_0^{(+)}) \cdot P_0^{(+)} \exp(ik_f^{(+)} h), \\ & (v_{00} = 1; v_{n0} = 0, n \neq 0), \quad (n = -\infty, \infty); \end{aligned}$$

$$A_{n+} \zeta_{n+} \exp(-\zeta_{n+} h) + A_{n-} \zeta_{n-} \exp(-\zeta_{n-} h) +$$

$$\begin{aligned}
& +B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np} x_3) + \\
& \quad + C_{n+} (in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n+} h) + C_{n-} (in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n-} h) + \\
& +G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{qp} h) = \\
& = v_{n0} (ik_f^{(-)}) (-P_0^{(-)} \cdot \exp(-ik_f^{(-)} h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)} h)) \\
& \quad (n = -\infty, \infty); \\
& \quad A_{n+} \zeta_{n+} \exp(\zeta_{n+} h) + A_{n-} \zeta_{n-} \exp(\zeta_{n-} h) + \\
& +B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (-\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np} x_3) + \\
& \quad + C_{n+} (in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n+} h) + C_{n-} (in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n-} h) + \\
& +G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{qp} h) = \\
& = v_{n0} (-ik_f^{(+)}) P_0^{(+)} \cdot \exp(ik_f^{(+)} h) \\
& \quad (n = -\infty, \infty).
\end{aligned}$$

Полученные системы при численной реализации описываемой методики подлежат редукции, порядок которой определяется на основе контроля качества удовлетворения граничным условиям.

Представленная методика обобщена также на случай, когда внутренние протяженные туннельные цилиндрические полости содержат идеально контактирующие радиально-неоднородные цилиндрические включения из изотропных функционально-градиентных материалов.

Для функционально-градиентного материала цилиндрических включений уравнения гармонического волнового динамического деформирования следуют из системы соотношений

$$[\partial / \partial r + r^{-1}] \sigma_{rr} + [-r^{-1}] \sigma_{\theta\theta} + [r^{-1} \partial / \partial \theta] \sigma_{r\theta} + \rho (\partial^2 / \partial t^2) u_r = 0, \quad (5.75)$$

$$[\partial / \partial r + 2r^{-1}] \sigma_{r\theta} + [r^{-1} \partial / \partial \theta] \sigma_{\theta\theta} + \rho(\partial^2 / \partial t^2) u_\theta = 0;$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \exp(\zeta r) [((\lambda_0 + 2\mu_0) \partial / \partial r + \lambda_0 / r) u_r + ((\lambda_0 / r) \partial / \partial \theta) u_\theta], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \exp(\zeta r) [(\lambda_0 \partial / \partial r + (\lambda_0 + 2\mu_0) / r) u_r + (((\lambda_0 + 2\mu_0) / r) \partial / \partial \theta) u_\theta], \\ \sigma_{r\theta} &= \exp(\zeta r) \mu_0 [(r^{-1} \partial / \partial \theta) u_r + (\partial / \partial r - r^{-1}) u_\theta]. \end{aligned} \quad (5.76)$$

С учетом априорного свойства периодичности u_r, u_θ по угловой координате θ и введения представлений

$$\begin{aligned} u_r &= \tilde{u}_{rn}(r) \cdot \exp(in\theta) \cdot \exp(-i\omega t), \\ u_\theta &= \tilde{u}_{\theta n}(r) \cdot \exp(in\theta) \cdot \exp(-i\omega t), \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \tilde{\sigma}_{\alpha\beta n}(r) \cdot \exp(in\theta) \cdot \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (5.77)$$

а также на основе последующего перехода к модифицированным соотношениям

$$[d / dr + r^{-1}] \tilde{\sigma}_{rrn} + [-r^{-1}] \tilde{\sigma}_{\theta\theta n} + [inr^{-1}] \tilde{\sigma}_{r\theta n} - \rho\omega^2 \tilde{u}_{rn} = 0, \quad (5.78)$$

$$[d / dr + 2r^{-1}] \tilde{\sigma}_{r\theta n} + [inr^{-1}] \tilde{\sigma}_{\theta\theta n} - \rho\omega^2 u_{\theta n} = 0;$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rrn} &= \exp(\zeta r) [((\lambda_0 + 2\mu_0) d / dr + \lambda_0 / r) \tilde{u}_{rn} + (in\lambda_0 / r) \tilde{u}_{\theta n}], \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta n} &= \exp(\zeta r) [(\lambda_0 d / dr + (\lambda_0 + 2\mu_0) / r) \tilde{u}_{rn} + (in(\lambda_0 + 2\mu_0) / r) \tilde{u}_{\theta n}], \\ \tilde{\sigma}_{r\theta n} &= \exp(\zeta r) \mu_0 [(inr^{-1}) \tilde{u}_{rn} + (d / dr - r^{-1}) \tilde{u}_{\theta n}], \end{aligned} \quad (5.79)$$

из (5.78), (5.79) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{u}_{rn}(r), \tilde{u}_{\theta n}(r)$. Ее решения строятся в виде системы базисных функций, представляемых абсолютно сходящимися степенными рядами по радиальной переменной r . Тем самым, описание полей волновых упругих перемещений и динамических напряжений в функционально-градиентных цилиндрических включениях формируются в виде ортогональных рядов по угловой переменной θ с подлежащими определению постоянными коэффициентами. В частности, для характеристик напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}$ в областях включений в каждой из локальных координатных систем записываются представления

$$\sigma_{rr} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} D_q F_{qrr}(r) \exp(in\theta), \quad \sigma_{r\theta} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} D_q F_{qr\theta}(r) \exp(in\theta) \quad (5.80)$$

с произвольными подлежащими определению коэффициентами D_q .

С введением в рассмотрение комплексных амплитудных характеристик волновых упругих перемещений $\{u_{r_p}^{(L)}(r_p, \theta_p), u_{\theta_p}^{(L)}(r_p, \theta_p)\}$ и динамических напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(L)}(r_p, \theta_p)$ ($\alpha, \beta = r_p, \theta_p$) для материала слоя V_L в локальных координатных системах, а также амплитудных характеристик $\{u_{r_p}^{(I)}(r_p, \theta_p), u_{\theta_p}^{(I)}(r_p, \theta_p)\}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(I)}(r_p, \theta_p)$ волнового двумерного напряженно-деформированного состояния цилиндрических включений I_p , граничные условия идеального механического контакта включений и слоя на поверхностях Γ_p записываются в виде

$$\begin{aligned} (u_{r_p}^{(L)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p} &= (u_{r_p}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}, \quad (u_{\theta_p}^{(L)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p} = (u_{\theta_p}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}; \\ (\sigma_{rr}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} &= (\sigma_{rr}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}, \quad (\sigma_{r\theta}^{(L)}(R, \theta_p))_{\Gamma_p} = (\sigma_{r\theta}^{(I)}(r_p, \theta_p))_{\Gamma_p}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

При этом, ввиду учитываемой далее периодичности, контактные краевые условия на цилиндрических границах рассматриваются только для центральной поверхности Γ_0 .

Для решения сформулированной задачи применяется методика, являющаяся обобщением вышеописанной методики анализа гидроакустического экрана в виде слоя с внутренней перфорацией на случай заполнения полостей упругими цилиндрическими функционально-градиентными включениями.

Как и в предыдущем рассмотренном случае, на последнем шаге реализации представляемой методики с использованием свойств ортогональности контурных представлений функциональные краевые условия рассматриваемой задачи трансформируются в подлежащую дальнейшему редуцированию бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $A_{n\pm}, C_{n\pm}, B_q, G_q, D_q, P_1^{(-)}, P_0^{(+)}$, имеющую вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_{n+} \chi_{nq+} (\alpha \gamma_{n+}^2 J_q(\gamma_{n+} R) + \gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+} R) + \\
& \quad + q(\gamma_{n+} R)^{-1} J_q(\gamma_{n+} R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n+} R)) + \\
& + A_{n-} \chi_{nq-} (\alpha \gamma_{n-}^2 J_q(\gamma_{n-} R) + \gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-} R) + q(\gamma_{n-} R)^{-1} J_q(\gamma_{n-} R)) - (q/R)^2 J_q(\gamma_{n-} R)) - \\
& \quad - C_{n+} \eta_{nq+} i q R^{-1} (\delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+} R) + q(\delta_{n+} R)^{-1} J_q(\delta_{n+} R)) + r_0^{-1} J_q(\delta_{n+} R)) - \\
& \quad - C_{n-} \eta_{nq-} i q R^{-1} (\delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-} R) + q(\delta_{n-} R)^{-1} J_q(\delta_{n-} R)) + R^{-1} J_q(\delta_{n-} R)) + \\
& + B_q (\alpha \alpha^2 H_q^{(1)}(\alpha R) + \alpha (-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) - (q/R)^2 H_q^{(1)}(\alpha R)) + \\
& \quad + S_q (\alpha \alpha^2 J_q(\alpha R) + \alpha (-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} J_q(\alpha R)) - (q/R)^2 J_q(\alpha R)) + \\
& \quad - G_q i q R^{-1} (\beta (-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) + R^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) - \\
& \quad - P_q i q R^{-1} (\beta (-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} J_q(\beta R)) + r_0^{-1} J_q(\beta R)) = 0 \\
& \quad (q = -\infty, \infty);
\end{aligned} \tag{5.82}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_{n+} \eta_{nq+} ((\delta_{n+}^2 / 2) J_q(\delta_{n+} R) + \delta_{n+} (-J_{q+1}(\delta_{n+} R) + \\
& \quad + q(\delta_{n+} R)^{-1} J_q(\delta_{n+} R)) - (q/R)^2 J_q(\delta_{n+} R)) + \\
& \quad + C_{n-} \eta_{nq-} ((\delta_{n-}^2 / 2) J_q(\delta_{n-} R) + \delta_{n-} (-J_{q+1}(\delta_{n-} R) + \\
& \quad + q(\delta_{n-} R)^{-1} J_q(\delta_{n-} R)) - (q/R)^2 J_q(\delta_{n-} R)) - \\
& - A_{n+} \chi_{nq+} i q R^{-1} (\gamma_{n+} (-J_{q+1}(\gamma_{n+} R) + q(\gamma_{n+} R)^{-1} J_q(\gamma_{n+} R)) + R^{-1} J_q(\gamma_{n+} R)) - \\
& - A_{n-} \chi_{nq-} i q R^{-1} (\gamma_{n-} (-J_{q+1}(\gamma_{n-} R) + q(\gamma_{n-} R)^{-1} J_q(\gamma_{n-} R)) + R^{-1} J_q(\gamma_{n-} R)) + \\
& + G_q ((\beta^2 / 2) H_q^{(1)}(\beta R) + \beta (-H_{q+1}^{(1)}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} H_q^{(1)}(\beta R)) - (q/R)^2 H_q^{(1)}(\beta R)) + \\
& \quad + P_q ((\beta^2 / 2) J_q(\beta R) + \beta (-J_{q+1}(\beta R) + q(\beta R)^{-1} J_q(\beta R)) - (q/R)^2 J_q(\beta R)) + \\
& \quad - B_q i q R^{-1} (\alpha (-H_{q+1}^{(1)}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) + R^{-1} H_q^{(1)}(\alpha R)) - \\
& \quad - P_q i q R^{-1} (\alpha (-J_{q+1}(\alpha R) + q(\alpha R)^{-1} J_q(\alpha R)) + R^{-1} J_q(\alpha R)) = 0 \\
& \quad (q = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$2[A_{n+} i n \pi l^{-1} \zeta_{n+} \cdot \exp(\zeta_{n+} h) + A_{n-} i n \pi l^{-1} \zeta_{n-} \cdot \exp(\zeta_{n-} h) +$$

$$\begin{aligned}
& +B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1})(\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) + \\
& + (C_{n+}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(\xi_{n-}h)) + \\
& + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\
& \quad \times ((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2) \exp(-\zeta_{np}h) = 0 \\
& \quad (n = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2[A_{n+} in\pi l^{-1} \zeta_{n+} \cdot \exp(-\zeta_{n+}h) + A_{n-} in\pi l^{-1} \zeta_{n-} \cdot \exp(-\zeta_{n-}h) + \\
& + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1})(\mp \zeta_{np}) \cdot \exp(\zeta_{np}h) + \\
& + (C_{n+}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n+})^2) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{n-})^2) \exp(-\xi_{n-}h)) + \\
& + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\
& \quad \times ((in\pi l^{-1})^2 - (\zeta_{np})^2) \exp(\zeta_{np}h) = 0 \\
& \quad (n = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{n+} (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n+}h) + \\
& + A_{n-} (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(-\zeta_{n-}h) + \\
& + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + \\
& \quad + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) + \\
& + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(-\xi_{n-}h)) + \\
& + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1} ((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\
& \quad \times (in\pi l^{-1})(\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}h) = \\
& = v_{n0}(-i\omega\rho_0^{(-)}) \cdot (P_0^{(-)} \cdot \exp(-ik_f^{(-)}h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)}h)), \\
& \quad (v_{00} = 1; v_{n0} = 0, n \neq 0), \quad (n = -\infty, \infty);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{n+}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n+})^2) \cdot \exp(\zeta_{n+}h) + \\
& + A_{n-}(\lambda(in\pi l^{-1})^2 + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{n-})^2) \cdot \exp(\zeta_{n-}h) + \\
& + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (\lambda(in\pi l^{-1})^2 + \\
& \quad + (\lambda + 2\mu)(\zeta_{np})^2) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) + \\
& + 2\mu(C_{n+}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n+}) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1})(\zeta_{n-}) \exp(\xi_{n-}h)) + \\
& + 2\mu G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \times \\
& \quad \times (in\pi l^{-1})(-\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}h) = \nu_{n0}(-i\omega\rho_0^{(+)}) \cdot P_0^{(+)} \exp(ik_f^{(+)}h), \\
& \quad (\nu_{00} = 1; \nu_{n0} = 0, n \neq 0), \quad (n = -\infty, \infty); \\
& \quad A_{n+}\zeta_{n+} \exp(-\zeta_{n+}h) + A_{n-}\zeta_{n-} \exp(-\zeta_{n-}h) + \\
& + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}x_3) + \\
& \quad + C_{n+}(in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1}) \exp(-\xi_{n-}h) + \\
& + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) = \\
& = \nu_{n0}(ik_f^{(-)}) (-P_0^{(-)} \cdot \exp(-ik_f^{(-)}h) + P_1^{(-)} \cdot \exp(ik_f^{(-)}h)) \quad (n = -\infty, \infty); \\
& \quad A_{n+}\zeta_{n+} \exp(\zeta_{n+}h) + A_{n-}\zeta_{n-} \exp(\zeta_{n-}h) + \\
& + B_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n \cdot (-\zeta_{np}) \exp(-\zeta_{np}x_3) + \\
& \quad + C_{n+}(in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n+}h) + C_{n-}(in\pi l^{-1}) \exp(\xi_{n-}h) + \\
& + G_n(2/l)(-i)^{n+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \zeta_p^{-1}((\zeta_p \pm n\pi l^{-1}) / (\zeta_p^2 - (n\pi l^{-1})^2)^{1/2})^n (in\pi l^{-1}) \cdot \exp(-\zeta_{np}h) = \\
& = \nu_{n0}(-ik_f^{(+)}) P_0^{(+)} \cdot \exp(ik_f^{(+)}h) \quad (n = -\infty, \infty).
\end{aligned}$$

Порядок редукции системы (5.82) определяется в процессе численных экспериментов в соответствии с устанавливаемыми требованиями к относительной точности удовлетворения граничным условиям.

5.4. Выводы по разделу 5

1. Предложен теоретический алгоритм численно-аналитического решения двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих симметричных нормальных волн упругих продольного сдвига в прямолинейно-ортотропном жестко закрепленном либо свободном по плоским граням слое с незаполненной внутренней туннельной цилиндрической полостью либо идеально заполняющим полость внутреннем туннельном ортотропном цилиндрическом включении эллиптического поперечного сечения при произвольном соотношении его полуосей. Разработанная методика базируется на использовании принципа изображений с введением периодических множеств внешних локальных координатных систем, на приеме аффинного преобразования координат для интегрирования обобщенных метатармонических уравнений, на соотношениях для получения ортогональных контурных перераспределений базисных частных решений обобщенных метатармонических уравнений на эллиптических граничных контурах и алгебраизации функциональных краевых условий граничных задач дифракционного рассеяния со сведением исходной проблемы к решению редуцируемых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Получены расчетные соотношения для кинематических и силовых характеристик исследуемых волновых полей.

2. Осуществлено численное исследование задачи о нормальном падении волны из низшей моды дисперсионного спектра на туннельное цилиндрическое ортотропное включение эллиптического сечения с осью, лежащей в срединной плоскости свободного по граням слоя. Установлен и описан ряд ведущих закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании соотношения полуосей эллиптического

сечения включения, относительной длины падающей волны, а также коэффициента пропорциональности модулей сдвига для ортотропных материалов слоя и включения. В частности, описаны эффекты фокусирующей либо рассеивающей функции включения для преломляющихся в нем волн в зависимости от соотношения сдвиговых жесткостей материалов включения и слоя; эффекты усложнения картины распределения волновых перемещений в протяженной теневой зоне за включением и появление зон выраженной фокусировки в полях перемещений в этой зоне; появление зон выраженной фокусировки в полях преломляющихся во включении волн; эффекты малости искажений, вносимых в поле падающих волн отраженными от включения волнами во фронтальной области взаимодействия. Установлено, что специфика топологии поля рассеянных волн является достаточно выраженной и может рассматриваться как обобщенный параметр в обратных задачах по идентификации формы и физико-механических свойств рассеивающего препятствия.

3. На основе применения методического приема введения зеркальных отражений получено численно-аналитическое решение краевой задачи о дифракционном рассеянии бегущих нормальных волн продольного сдвига при их нормальном падении на имеющую свободную либо закрепленную граничную поверхность внутреннюю цилиндрическую туннельную полость кругового сечения в закрепленном по плоским граням деформируемом слое, изготовленном из изотропного материала с однотипной экспоненциальной неоднородностью по всем физико-механическим характеристикам вдоль поперечной координаты по толщине слоя. Решение задачи рассматриваемого типа сведено к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов представлений волновых полей рядами по базисным частным решениям волновых уравнений в области сечения слоя.

4. Разработана методика теоретического численно-аналитического анализа показателей эффективности функционирования плоских элементов систем гидроакустического экранирования в виде многосвязного изотропного

деформируемого слоя с периодическим рядом коллинеарных внутренних туннельных цилиндрических полостей одинакового кругового сечения. Анализ рассматриваемой модели элементов экранирования реализуется с использованием комплекса приемов получения ортогональных контурных представлений в рядах для характеристик волнового деформирования слоя многосвязного поперечного сечения и сведен к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов вводимых рядов по базисным частным решениям волновых уравнений. Полученные системы подлежат редукции при численной реализации представленной методики.

5. Разработана численно-аналитическая методика анализа модели расчета характеристик функционирования плоского гидроакустического экрана в виде многосвязного деформируемого изотропного слоя с периодическим рядом коллинеарных плоским граням внутренних туннельных радиально-неоднородных изотропных цилиндрических включений. Методика базируется на использовании комплекса приемов получения контурных представлений в ортогональных рядах для характеристик волнового деформирования слоя многосвязного поперечного сечения и волнового деформирования функционально градиентных цилиндров-включений. С ее применением исходная рассматриваемая задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов по базисным частным решениям волновых уравнений, которая подлежат редукции в процессе численной реализации методики.

6. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [18–19, 36–37, 98, 104–106, 109–110 119].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В итоге проведенных в работе исследований осуществлены разработка и апробация комплекса численно-аналитических методик анализа полей стационарных сдвиговых волн деформаций в упругих телах в форме слоя из анизотропных однородных и функционально-градиентных материалов при учете особенностей геометрического строения в виде наклонных плоских торцевых поверхностей, изломов, дугообразных искривлений, внутренних туннельных цилиндрических полостей и включений, компьютерная реализация разработанных методик и численные параметрические исследования анализируемых полей с выявлением ведущих закономерностей в их структуре и свойствах.

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработана методика теоретического анализа проблемы отражения нормальных волн сдвига от наклонной торцевой поверхности анизотропного полуслоя при различных вариантах задания краевых условий на отдельных участках его границы.

2. Разработана численно-аналитическая методика исследования процессов распространения нормальных сдвиговых упругих волн вдоль составных волноводов из стыкуемых под углом анизотропных однородных прямолинейных компонентов, включая ортотропные волноводы из состыкованных под углом полуслоев, волноводы Г-образного профиля и анизотропные волноводы, состоящие из двух упругих полуслоев, между которыми расположен стыкующийся с ними под углом прямолинейный участок зигзагообразного излома.

3. Предложен модифицированный алгоритм алгебраизации контактных функциональных граничных условий задачи о сдвиговых упругих волнах в составном волноводе, основывающийся на концепции обобщенной граничной ортогонализации базисных множеств нормальных волн в компонентах волновода.

4. Разработана численно-аналитическая методика исследования процессов распространения сдвиговых упругих волн вдоль трансверсально-изотропных

составных волноводов в форме слоя с искривленными участками полукольцевой либо четвертькольцевой геометрии.

5. Предложен алгоритм построения теоретического численно-аналитического решения задачи о распространении сдвиговых упругих волн в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями, базирующийся на комбинации метода сшиваемых частичных областей и метода рядов по базисным множествам бегущих и стоячих краевых нормальных волн.

6. Изучены процессы трансформации энергетических потоков при распространении сдвиговых нормальных упругих волн по составному волноводу из идеально контактирующих изотропного и ортотропного полуслоев.

7. Получено и численно исследовано решение задачи о трансформации нормальных упругих волн сдвига при падении на ортогональную граням поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев.

8. Предложен теоретический алгоритм численно-аналитического решения двумерной краевой задачи о дифракционном рассеянии сдвиговых нормальных волн в прямолинейно-ортотропном жестко закрепленном либо свободном по граням слое с незаполненной либо содержащей ортотропное упругое включение внутренней туннельной цилиндрической полостью эллиптического поперечного сечения. Установлен и описан ряд закономерностей в распределениях волновых перемещений в ближнем и дальнем дифракционном поле при варьировании соотношения полуосей включения, относительной длины падающей волны, а также коэффициента пропорциональности модулей сдвига для материалов слоя и включения. Описаны эффекты фокусирующей либо рассеивающей функции включения для преломляющихся в нем волн, эффекты малости искажений, вносимых отраженными от включения волнами во фронтальной области взаимодействия, которые могут использоваться в обратных задачах по волновой идентификации свойств рассеивающего препятствия.

9. Получено численно-аналитическое решение краевой задачи о дифракционном рассеянии нормальных волн продольного сдвига при падении на внутреннюю цилиндрическую туннельную полость кругового сечения со свободой либо закрепленной граничной поверхностью в деформируемом слое из изотропного материала с экспоненциальной неоднородностью физико-механических характеристик вдоль поперечной координаты.

10. Разработана методика численно-аналитического исследования элементов систем гидроакустического экранирования в виде многосвязного изотропного слоя с периодическим рядом коллинеарных внутренних туннельных цилиндрических полостей либо радиально-неоднородных туннельных изотропных цилиндрических включений одинакового кругового сечения.

11. Результаты диссертационного исследования, а именно методики синтеза теории динамических однородных решений, принципа частичных областей и принципа отражения для исследования волновых деформационных процессов, внедрены в учебный процесс в ГОУ ВО «Донецкий национальный университет» в качестве материала разделов учебного курса «Методы компьютерно-математического моделирования в задачах волновой механики» для студентов образовательного направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамова О.П. Дисперсия нормальных волн в ортотропном слое с закрепленными границами / О.П. Абрамова, В.И. Сторожев, В.А. Шпак // Акуст. ж. – 1995. – Т. 42, №1. – С. 5 – 9.
2. Аванян В.Т. Характер напряженного состояния в малой окрестности вершины клина, изготовленного из различных анизотропных материалов / В.Т. Аванян, Н.В. Аванян, А.А. Баблоян // Известия Национальной академии наук Армении. – 2000. – Т. 53, № 3. – С. 5 –11.
3. Алтухов Е.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин: Монография. / Е.В. Алтухов, М.В. Фоменко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
4. Анциферов А.В. Об алгоритме сейсмической томографии при прогнозе геологических нарушений угольных пластов / А.В. Анциферов, А.А. Глухов, В.В. Туманов, Д.В. Сон, С.П. Оленюк // Горные науки и технологии. – М.: МИСиС – 2018. – № 4. – С. 1–11.
5. Анциферов А.В. Об автоматизации обработки сейсмических данных при прогнозе геологических нарушений угольных пластов методами отраженных волн и сейсмической локации / А.В. Анциферов, А.А. Глухов // Труды РАНИМИ: сб. научн. трудов. – Донецк, 2018. – № 6 (21). – С. 99–106.
6. Анциферов А.В. Шахтный сейсмический прогноз тектонических нарушений по отраженным волнам методом локации / А.В. Анциферов, А.А. Глухов, В.А. Анциферов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2020. – № 6. – С. 131–139.
7. Анциферов А.В. Программный комплекс обработки результатов сейсмических наблюдений / А.В. Анциферов, А.А. Глухов // 5 Конференция Международной научной школы академика РАН К.Н. Трубецкого: сб. науч. трудов. – Москва: ИПКОН РАН, 2022. – С. 60–63.

8. Белоконь А.В. Распространение волн в изотропной жестко заземленной упругой полосе от движущихся осциллирующих нагрузок / А.В. Белоконь, А.В. Наседкин // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 90–97.
9. Белоконь А.В. Волны в неоднородном по толщине слое, вызванные движущимися нагрузками / А.В. Белоконь, А.В. Наседкин // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, № 2. – С. 305–313.
10. Белоконь А.В. Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками / А.В. Белоконь, А.В. Наседкин // Акустический журнал. – 1993. – Т. 39, № 2. – С. 421–427.
11. Бобакова Р.В. Нормальные волны в радиально неоднородных трансверсально изотропных многослойных цилиндрах / Р.В. Бобакова, И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Матер. IV Междунар. науч. конф. (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Том 1: Физ.-мат. и технические науки. Часть 1. – Донецк: ДонНУ, 2019. – С. 47–49.
12. Бабенкова Е.В. О принципе Сен-Венана в случае низкочастотных колебаний полуполосы / Е.В. Бабенкова, Ю.Д. Каплунов, Ю.А. Устинов // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 3. – С. 445–457.
13. Бабич В.М. Математические методы в теории упругих волн / В.М. Бабич, Л.А. Молотков // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела / ВИНТИ. – 1977. – Т. 10. – С. 5–62.
14. Бобровницкий Ю.И. Взаимность в задаче об отражении и прохождении волн. Ч. I. Симметрия матриц коэффициентов отражения / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 2003. – Т. 49, N 1. – С. 14–23.
15. Бобровницкий Ю.И. Колебания упругой полосы / Ю.И. Бобровницкий, М.Д. Генкин // Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций // – М.: Наука. 1975. – С. 12–42.
16. Бобровницкий Ю.И. Соотношение ортогональности для волн Лэмба / Ю.И. Бобровницкий // Акуст. ж. – 1972. – Т. 17, № 4. – С. 513–515.

17. Бобровницкий Ю.И. Резонансы неоднородных волн в протяженных упругих структурах / Ю.И. Бобровницкий, М.П. Коротков // Акуст. ж. – 1991. – Т. 37, Вып. 5. – С. 872–878.

18. Болнокин В.Е. Анализ модели плоского гидроакустического экрана с периодической системой внутренних туннельных радиально-неоднородных цилиндрических включений / В.Е. Болнокин, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 3-4 (64-65). – С. 24–37.

19. Болнокин В.Е. Методика анализа модели плоского гидроакустического экрана с периодической системой внутренних туннельных цилиндрических полостей / В.Е. Болнокин, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1-2 (62-63). – С. 3–15.

20. Болнокин В.Е. Сдвиговые волны в волноводе из состыкованных под углом функционально-градиентных трансверсально-изотропных полуслоев / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, М.Н. Пачева // Донецкие чтения 2021. Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: материалы VI Международной научной конференции (Донецк, 26 – 27 октября 2021 г.) – Т. 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 30–32.

21. Болнокин В.Е. Трансформация поперечных волн в зоне прямоугольного излома волноводного слоя с сечением меандровой структуры / В.Е. Болнокин, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2016. Образование, наука и вызовы современности: материалы I Международной научной конференции (Донецк, 16 – 18 мая 2016 г.) – Т.1. Физико-математические, технические науки и экология. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 25–27.

22. Бударрагин Р.В. Расчет плавных переходов в круглом экранированном волноводе / Р.В. Бударрагин, А.А. Радионов, А.А. Титаренко // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2000. – Т.3. №2. – С. 27–30.

23. Бударагин Р.В. Дифракция на скачкообразном переходе в экранированном диэлектрическом волноводе / Р.В. Бударагин, В.М. Темнов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2004. – Т.7. №4. – С. 50-55.
24. Ватульян А.О. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами / А.О. Ватульян, А.В. Моргунова // Акустический журнал. – 2015. – Том 61, № 3. – С. 295 – 301.
25. Ватульян А.О. О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Известия РАН МТТ. – 2016. – №5. – С. 85–93.
26. Ватульян А.О. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости / А.О. Ватульян, А.Ю. Кирютенко, А.В. Наседкин // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 135–142.
27. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов – Москва: Наука. – 1966. – 168 с.
28. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука. – 1981. – 287 с.
29. Вовк И.В. Сравнение двух подходов к решению волновых задач методом частичных областей при наличии пересекающихся областей / И.В. Вовк, В.Т. Маципура, Я.П. Троценко // Акуст. віст. – 2015. – 17, №2. – С. 15–22.
30. Вовк Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры. / Л.П. Вовк – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169 с.
31. Вовк Л.П. Исследование локальной особенности волновых характеристик около угловой точки линий раздела составного тела / Л.П. Вовк // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2004. – №2. – С. 38–42.
32. Вовк Л.П. О концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, № 2. – С. 269–278.

33. Вовк Л.П. Особенности динамических напряжений в окрестности точки стыка трех упругих сред / Л.П. Вовк, Б.В. Соболев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. – № 2. – С. 279–289.
34. Вовк Л.П. Особенности локальной концентрации волнового поля на границе раздела упругих сред / Л.П. Вовк – Донецк: Норд-Пресс, 2004. – 267с.
35. Ворович И.И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И.И. Ворович, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
36. Вуколов Д.С. Методика исследования дифракции сдвиговых волн на туннельной цилиндрической полости в функционально-градиентном изотропном упругом слое / Д.С. Вуколов, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Журнал теорет. и прикладной механики. – 2016. – № 1(56). – С. 3–9.
37. Вуколов Д.С. Численно-аналитическая методика анализа дифракционного рассеяния нормальных волн сдвига в ортотропном слое с внутренней туннельной цилиндрической полостью произвольного эллиптического сечения / Д.С. Вуколов, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Журнал теорет. и прикладной механики. – 2016. – № 2(57). – С. 3–13.
38. Гетман И.П. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И.П. Гетман, Ю.А. Устинов. – Ростов–на–Дону: Изд–во РГУ. – 1993. – 144 с.
39. Гетман И.П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух полуполос / И.П. Гетман, О.Н. Лисицкий // Прикл. математика и механика. – 1988. – Т. 52, № 6. – С. 1044–1048.
40. Глухов А.А. 2.5D Моделирование сейсмических волн в массиве горных пород / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 4(69). – С.57–64.
41. Глухов А.А. Об оптимальном расположении системы наблюдений при сейсмоакустическом прогнозе строения горного массива из полевых выработок / А.А. Глухов, Т.И. Скопич // Труды РАНМИИ: сб. научн. трудов. – Донецк, 2020. – № 9 (24). – С. 32–47.

42. Глухов А.А. Об алгоритме сейсмической томографии углепородного массива / А.А. Глухов, В.А. Анциферов, Е.В. Ребенок, Д.В. Кутепов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – №4(73). – С. 49–56.
43. Глухов А.А. Алгоритм метода дифрагированных волн по прогнозу дизъюнктивов угольных пластов / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – №1. – С. 73–83.
44. Глухов А.А. Метод сейсмической томографии углепородного массива. / А.А. Глухов, Е.В. Ребенок, Д.В. Кутепов, Л.Н. Крижановская // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – ИГД СО РАН, Новосибирск, 2021. – Том 8. – № 2. – С. 12–16.
45. Глухов А.А. О влиянии сближенного пласта на структуру волнового поля в задачах шахтной сейсморазведки / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 1(70). – С.61–66.
46. Глухов А.А. Об информативности методов шахтной сейсморазведки в зависимости от ориентации дизъюнктива относительно профиля наблюдений / А.А. Глухов, В.А. Анциферов, Т.И. Скопич // Труды РАНМИ: сб. науч. трудов. – Донецк, 2021. – № 12-13 (27-28). – С. 7–21.
47. Глухов А.А. Об использовании отраженных и дифрагированных волн в подземной сейсморазведке / А.А. Глухов // Труды РАНМИ: сб. науч. трудов. – Донецк, 2022. – № 16-17 (31-32). – С. 67–77.
48. Глухов А.А. Об использовании процедуры многоканальной фильтрации при обработке результатов сейсморазведки / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №2(79). – С. 66–72.
49. Глухов А.А. Локализованные сдвиговые волны в трехслойном поперечно-анизотропном пласте симметричного строения в толще неоднородного геомассива / А.А. Глухов, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2020. Образование, наука и вызовы современности: материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17 – 18 ноября 2020 г.) – Т. 1: Физико-математические и технические науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 49–52.

50. Глухов А.А. Распространение волн сдвига по ортотропному волноводу меандровой геометрической структуры / А.А. Глухов, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: тезисы докладов XIV Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 27-31 мая 2019 г.). – Ростов-на-Дону, Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2019. – С. 31.

51. Гоголадзе В.Г. Упругие волны / В.Г. Гоголадзе // Механика в СССР за тридцать лет. – М.–Л.: ГИТТЛ. – 1950. – С. 206–276.

52. Гончарова Г.Ю. Распространение звука в волноводе с изломом / Г.Ю. Гончарова, В.Т. Мацыпура // Акуст. віст. – 1998. – 1, №2. – С. 57–64.

53. Городецкая Н.С. Дифракция волн Рэлея-Лемба на вертикальной границе в составном упругом волноводе / Н.С. Городецкая // Акуст. віст. – 2000. – Т. 3, №1. – С.23–35.

54. Григолюк Э.И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел / ВИНТИ. – 1973. – Т.5. – С. 1–126.

55. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка. – 1981. – 284 с.

56. Гринченко В.Т. О локализации волновых полей в упругих волноводах / В.Т. Гринченко // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 9. – С. 38–45.

57. Гринченко В.Т. Отражение волн Лемба от границы раздела в составном волноводе / В.Т. Гринченко, Н.С. Городецкая // Прикл. механика.– 1985.– Т. 21. №5.– С.121–125.

58. Гринченко В.Т. Основы акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура – К.: Наук. думка. – 2007. – 640 с.

59. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах / А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. – К.: Наукова думка, 1972. – 254 с.

60. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь., В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – К.: Наукова думка, 1978. – 308 с.

61. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах / Р.М. Дейвис – Москва: Изд-во иностр. лит. – 1961. – 104 с.
62. Дьелесан Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе; пер. с франц. – М.: Наука. – 1982. – 424 с.
63. Жарий О.Ю. Метод разложения по собственным функциям в задачах динамической электроупругости / О.Ю. Жарий // Прикладная математика и механика. – 1990. – Т. 54, № 1. – С. 109–115.
64. Зволинский Н.В. Динамика деформируемых твердых тел / Н.В. Зволинский, М.И. Рейтман, Г.С. Шапиро // Механика в СССР за 50 лет. – М.: Наука. – 1972. – Т. 3. – С. 291–323.
65. Каландия А.И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов / А.И. Каландия // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 1. – С. 132–135.
66. Калинина Т.И. Антиплоские задачи о движении осциллирующей нагрузки по границе упругой изотропной полосы при наличии поверхностных напряжений / Т.И. Калинина, А.В. Наседкин // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2022. – № 1. – С. 12–22. DOI: 10.18522/1026-2237-2022-1-12-22
67. Карпанов Б.И. Акустические методы контроля и диагностики. Часть 1: учебное пособие / Б.И. Капранов, М.М. Коротков. – 2008. – 186 с.
68. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1955. – 192 с.
69. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками / В.А. Кондратьев // Труды Московского математ. об-ва. – 1967. – Т. 16. – С. 209–292.
70. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред с усложненной геометрией / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – Донецк: ДонГУ. – 1983. – 118 с.
71. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка. – 1985. – 176 с.

72. Космодамианский А.С. Спектр симметричных нормальных волн в ортотропном слое / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев, В.А. Шпак // Теорет. и прикл. механика. – 1988. – Вып.19. – С. 116–121.
73. Купрадзе В.Д. Динамические задачи теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.В. Бурчуладзе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики / ВИНТИ. – 1975. – Т.7. – С. 163–294.
74. Лехницкий С.Р. Теория упругости анизотропного тела / С.Р. Лехницкий. – М.:Наука. – 1977. – 416 с.
75. Ляшко А.Д. О регулярности бесконечных систем для установившихся вынужденных колебаний ортотропных прямоугольных призм / А.Д. Ляшко, В.Н. Чехов // Динамические системы. – 2015. – Т. 5(33), №1-2. – С. 103–114.
76. Мацыпура В.Т. Взаимодействие волны с угловой однородностью в волноводе / В.Т. Мацыпура // Электроника и связь. – 1997. – №3, Ч 2. – С. 25–28.
77. Мацыпура В.Т. Прохождение звука через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов / В.Т. Мацыпура // Акуст. віст. – 1999. – Т. 2, №1.– С. 31–41.
78. Мелешко В.В. Упругие волноводы: история и современность. I / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я.Ф. Ван Хейст // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
79. Микер Т. Волноводное распространение в протяжных цилиндрах и пластинках / Т. Микер, А. Мейтцлер // Физическая акустика / Под ред. Мэзона У.П. – М.: Мир. – 1966. – Т. 1. – Ч. А. – С. 140–203.
80. Миттра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М.: Мир, 1974. – 327 с.
81. Моисеенко И.А. Подмножества критических частот нормальных волн в ортотропном призматическом волноводе равностороннего треугольного сечения / И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев, М.Н. Чернов. // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А. Естественные науки. – 2014. – № 2. – С. 49–53.
82. Моисеенко И.А. Решение задач динамики для анизотропных сред с использованием матричной формы базисных решений волновых уравнений /

И.А. Моисеенко. // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: IV Международная научная конференция, посвященная памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского: Донецк – Мелекино, 12-14 июля 2006г.: материалы – Донецк: Юго-Восток, 2006. – С. 265–267.

83. Моисеенко И.А. Нормальные волны в функционально градиентных сплошных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журн. теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1-2(62-63). – С. 16–34.

84. Моисеенко И.А. Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журн. теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1(66). – С. 31–53.

85. Моисеенко И.А. Распространение нормальных волн в функционально-градиентных трансверсально изотропных двухслойных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, Р.В. Бобакова // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3-4. – С. 80–87.

86. Моисеенко И.А. Осесимметричные нормальные упругие волны в кусочно-неоднородных и функционально-неоднородных цилиндрических волноводах кольцевого поперечного сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, А.О. Иванив // Журн. теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 2(75). – С. 30–50.

87. Моисеенко И.А. Сравнительный анализ характеристик нормальных упругих волн для двух моделей неоднородных полых цилиндрических волноводов / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, А.О. Иванив // Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Матер. VI Междунар. научн. конф. (Донецк, 26-27 октября 2021 г.). – Том 1. Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление. – Донецк: ДонНУ, 2021. – С. 50–53.

88. Моисеенко И.А. Осесимметричные упругие продольно-сдвиговые волны в протяженных цилиндрах с учетом многофакторного функционального закона радиальной неоднородности трансверсально изотропного материала / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, Н.Ю. Мельничук // Донецкие чтения 2022. Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: материалы

VII Международной научной конференции (Донецк, 27 – 28 октября 2022 г.) – Т. 1: Механико-математические, компьютерные науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – С. 62–64.

89. Наседкин А.В. Общая форма соотношений ортогональности однородных решений в волноводах / А.В. Наседкин // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2000. – № 3. – С. 104–106.

90. Наседкин А.В. Общие теоремы о переносе энергии однородными волнами / А.В. Наседкин // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т. 57, № 5. – С. 105–112.

91. Наседкин А.В. Определение спектральных характеристик упругих волноводов методом конечных элементов / А.В. Наседкин // Современные проблемы математического моделирования. Тр. VIII Всеросс. шк.-семинара / Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. гос. ун-та, 1999. – С. 181–188.

92. Наседкин А.В. Моделирование и конечно-элементный анализ преобразователя из пористой пьезокерамики в форме диска с плосковогнутой поверхностью / А.В. Наседкин, А.А. Наседкина, А.Н. Рыбьянец // Дефектоскопия. – 2018. – № 6. – С. 23–31.

93. Острик В.И. Динамические задачи магнитоупругости для слоя и полуслоя с туннельными полостями и трещинами продольного сдвига / В.И. Острик, Л.А. Фильштинский // Известия Национальной академии наук республики Армения. Механика. – 1991. – Т. 44, № 4. – С. 34–45.

94. Папков С.О. Регулярные бесконечные системы алгебраических уравнений в случае длиннопериодных деформаций призмы / С.О. Папков, В.Н. Чехов // Учен. зап. Тавр. нац. ун-та. – 2001. – №14 (53). – С. 81–86.

95. Партон В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

96. Пачева М.Н. Алгоритм исследования волн сдвига в волноводе из состыкованных под углом ортотропных полуслоев с учетом сингулярности полей напряжений в крайних точках области контакта составляющих / М.Н. Пачева // Журн. теоретической и прикладной механики. – 2022. – № 2 (79). – С. 31–38.

97. Пачева М.Н. Изгибные волны в волноводе из состыкованных под углом шарнирно опертых полуполос / М.Н. Пачева, Л.В. Дубяго, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2022. Образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: материалы VII Международной научной конференции (Донецк, 27 – 28 октября 2022 г.) – Т. 1: Механико-математические, компьютерные науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – С. 71–73.

98. Пачева М.Н. Методика исследования краевой задачи о спектре нормальных волн напряжений вдоль упругого слоя с туннельной цилиндрической полостью / М.Н. Пачева // Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвяченої 100-річчю Я.Б. Лопатинського. – Донецьк, ДонНУ, 2006.– С. 100–101.

99. Пачева М.Н. Методика исследования процессов распространения упругих SH-волн в закрепленном изотропном слое с участком прямолинейного излома. / М.Н. Пачева // Матеріали наукової конференції Донецького національного університету за підсумками науково-дослідної роботи за період 2011-2012 рр. (15 березня – 25 квітня 2013 р.). – Донецьк: ДонНУ, 2013. – Т. 1. – С. 72.

100. Пачева М.Н. Моделирование волновых процессов в изотропном слое с прямолинейным участком излома. / М.Н. Пачева // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти–2013: матер. II Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. (21 травня 2013 р.). – Донецьк: ДонНУЕТ, 2013. – С. 97–99.

101. Пачева М.Н. Моделирование волновых процессов в изотропном волноводе из состыкованных под углом полуслоев / М.Н. Пачева // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2015: матер. IV Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (25 мая 2015 р.). – Донецк: ДонНУЭТ, 2015. – С. 51–54.

102. Пачева М.Н. Моделирование волновых процессов в ортотропном полуслое на жестком основании с закрепленной наклонной боковой поверхностью / М.Н. Пачева // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2016: матер. V Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (27 мая 2016 г.). – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2016. – С. 13–15.

103. Пачева М.Н. Модифицированная методика алгебраизации краевых условий в задаче о распространении упругой волны сдвига по волноводу из состыкованных под углом полуслоев / М.Н. Пачева, В.И. Сторожев, А.С. Телевной // Журнал теорет. и прикладной механики. – 2017. – № 2(59). – С. 65–74.

104. Пачева М.Н. Нормальные волны в продольно-анизотропном слое с внутренним жестким цилиндрическим включением / М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Тези доповідей акустичного симпозіуму «КОНСОНАНС–2007». – Київ, 2007. – С. 40–41.

105. Пачева М.Н. Нормальные волны в продольно анизотропном свободном слое с периодическим рядом внутренних цилиндрических полостей / М.Н. Пачева // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: матер. VI Междунар. науч. конф. (п. Мелекино, 8–11 июня 2010 г.). – Донецк: Юго-Восток, 2010. – С. 187–190.

106. Пачева М.М. Нормальні хвилі в поздовжньо анізотропному шарі з періодичним рядом внутрішніх циліндричних порожнин / М.М. Пачева // Матеріали наукової конференції професорсько-викладацького складу, наукових співробітників і аспірантів донецького національного університету за підсумками науково-дослідної роботи за період 2007-2008 рр. – Донецьк: Цифрова типографія, 2009. – Т. 1. – С. 83–84.

107. Пачева М.Н. Отражение нормальных сдвиговых волн от наклонной торцевой поверхности полуслоя с закрепленной границей / М.Н. Пачева // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 140–149.

108. Пачева М.Н. Отражение волн сдвига от свободной наклонной боковой поверхности полуслоя на жестком основании / М.Н. Пачева // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций: сб. научн. трудов. – Днепропетровск: Лира, 2015. – Вып. 24. – С. 208–219.

109. Пачева М.Н. Получение дисперсионного соотношения для упругих волн в продольно анизотропном слое с периодическим рядом цилиндрических полостей. / М.Н. Пачева // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти–2012: матер. I Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. (17 травня 2012 р.). – Донецьк: ДонНУСТ, 2012. – С. 120–122.

110. Пачева М.Н. Получение и анализ дисперсионного соотношения для нормальных упругих волн, распространяющихся вдоль жесткого цилиндрического включения в изотропном слое / М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій: тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2007. – С. 277–279.

111. Пачева М.Н. Прохождение сдвиговой волны по ортотропному волноводу из состыкованных под углом полуслоев / М.Н. Пачева // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 25-30 мая 2015 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – С. 86.

112. Пачева М.Н. Рассеяние нормальных сдвиговых волн у наклонной торцевой поверхности свободного полуслоя / М.Н. Пачева, В. И. Сторожев // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 9(55). – С. 82–90.

113. Пачева М.Н. Сдвиговые волны в анизотропном упругом слое с участком зигзагообразного излома / М.Н. Пачева // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: тр. VII Междунар. науч. конф. (п. Мелекино, 11–14 июня 2013 г.). – Донецк: ДонНУ, 2013. – Т. 2. – С. 99–103.

114. Пачева М.Н. Сдвиговые волны в составном поперечно-анизотропном волноводе из полуслоев с контактирующими полуцилиндрическими боковыми поверхностями / М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2018: матер. VII Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (25 мая 2018 г.). – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2018. – С. 46–49.

115. Пачева М.Н. Теоретический анализ проблемы отражения нормальных волн продольного сдвига от наклонной торцевой поверхности трансверсально-изотропного полуслоя со свободными гранями / М.Н. Пачева // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти–2014: матер. III Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. (20 травня 2014 р.). – Донецьк: ДонНУСТ, 2014. – С. 76–77.

116. Пачева М.Н. Трансформация нормальных упругих волн сдвига при падении на поверхность контакта трансверсально-изотропных функционально-

градиентных полуслоев / М.Н. Пачева // Журн. теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 2(75). – С. 5–17.

117. Пачева М.Н. Энергетические характеристики нормальных волн сдвига в составном волноводе из изотропного и ортотропного полуслоев / М.Н. Пачева // Донецкие чтения 2020. Образование, наука и вызовы современности: материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17 – 18 ноября 2020 г.) – Т. 1: Физико-математические и технические науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 90–93.

118. Пачева М.Н. Эффекты прохождения сдвиговых нормальных волн по составному волноводу из контактирующих трансверсально-изотропных функционально-градиентных полуслоев / М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: материалы IV Международной научной конференции (Донецк, 31 октября 2019 г.) –Т. 1: Физико-математические и технические науки. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 68–70.

119. Пачева М.Н. Упругие волны в слое с продольной цилиндрической полостью / М.Н. Пачева // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела», посвященной памяти академика НАН Украины А.С. Космодамианского. – Донецк: ООО «Юго-Восток, Лтд», 2006. – С. 292–294.

120. Пельц С.П. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы / С.П. Пельц, В.М. Шихман // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 295, № 4. – С. 821–824.

121. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 12 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. Т. 5. Динамика упругих тел / В.Т. Головчан, В.Д. Кубенко, Н.А. Шульга и др. – Киев: Наук. думка. – 1986. – 286 с.

122. Саргсян А.М. О влиянии граничных условий на малонапряженность антиплоской задачи кусочно-однородного прямолинейно-анизотропного клина / А.М. Саргсян // Известия Национальной академии наук Армении. – 2002. – Т. 55, № 1. – С. 17–22.

123. Силин Р.А. Периодические волноводы / Р.А. Силин. – М.: Фазис. – 2002. – 436 с.

124. Сторожев В.И. Эффекты отражения и преломления нормальных волн сдвига в анизотропном упругом волноводе из состыкованных под углом полуслоев / В.И. Сторожев, Е.Ю. Павлюшина // Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. – 2008, №2. – С. 69–74.

125. Сторожев В.И. Модифицированная схема алгебраизации функциональных граничных условий задачи о поперечных упругих волнах в Г-образном волноводе / В.И. Сторожев, М.Н. Пачева // Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты–2017: матер. VI Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (26 мая 2017 г.). – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2017. – С. 45–48.

126. Сторожев В.И. Распространение волн сдвига по ортотропному волноводу меандровой геометрической структуры / В.И. Сторожев, М.Н. Пачева, С.А. Прийменко // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов XI Всероссийской школы-семинара (пос. Дивноморское, 23-27 мая 2016 г.). – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2016. – С. 124.

127. Суворова Т.В. О напряжениях в пространственном упругом полуслое с наклонной боковой гранью, возникающих под действием осциллирующей нагрузки / Т.В. Суворова // Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. VIII Междунар. конф.– Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ.– 2002.– С. 178–182.

128. Трофимов В.В. Применимость различных типов волн для обнаружения геологических нарушений / В.В. Трофимов, Д.В. Кутепов, Т.А. Решетняк // Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VI Международной научной конференции (Донецк, 26–27 октября 2021 г.). – Том 2: Физические и технические науки / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 186–189.

129. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов / Г. Хантингтон // Успехи физ. наук. – 1961. – Т.74, № 2. – С. 303 – 352.

130. Шутилов В.А. Основы физики ультразвука / В.А. Шутилов. – Л.: Изд.-во Ленинградского ун-та. – 1980. – 280 с.

131. Abdelhafez H.M. Elimination of the flutter phenomenon in a forced and self-excited nonlinear beam using an improved saturation controller algorithm. / H.M. Abdelhafez, M. Hassan, A.V. Nasedkin, M.E. Nassar // Altenbach, Holm (ed.) et al., Nonlinear wave dynamics of materials and structures. – Cham: Springer. Adv. Struct. Mater. – 2020. – V. 122. – P. 1–23.
132. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach. – North Holland, Amsterdam. – 1973. – 436 p.
133. Al–Mousawi M.M. On experimental studies of longitudinal and flexural wave propagation: an annotated bibliography / M.M. Al–Mousawi // Appl. Mech. Reviews. – 1986. – V. 39. – P. 853–864.
134. Ammosov D. Generalized Multiscale Finite Element Method for piezoelectric problem in heterogeneous media / D. Ammosov, M. Vasilyeva, A. Nasedkin, Y. Efendiev // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2022. – V. 135. – P. 12–25. DOI: 10.1016/j.enganabound.2021.09.014
135. Auld B.A. Acoustic Fields and Waves in Solids / B.A. Auld. – New York: Wiley Intersciences, 1973. – Vol 1. – 423 p. – Vol 2. – 346 p.
136. Cavalcante M. Parametric formulation of the finite–volume theory for functionally graded materials–part i: Analysis / M. Cavalcante, S. Marques, M.–J. Pindera // Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME. – 2007. – V. 74 (5). – P. 935–945.
137. Chadwick P. Foundations of the Theory of Surface Waves in Anisotropic Elastic Materials / P. Chadwick, G.D. Smith // Advances in Appl. Mech. – 1977. – V. 17. – P. 303–376.
138. Cho Y.H. A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves / Y.H. Cho, J.L. Rose // J. Acoust. Soc. Amer. – 1996. – Vol. 99, № 4. – P. 2097–2109.
139. Daniel I.M. Engineering Mechanics of Composite Materials, 2nd ed. / I.M. Daniel, O. Ishai – New York: Oxford University Press, 2006. – 186 p.
140. Datta S.K. Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.

141. England A.H. On Stress Singularities in Linear Elasticity / A.H. England // *Int. J. Eng. Sci.* – 1971. – Vol. 9. – № 6. – P. 571–585.
142. Fang X.-Q. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q. Fang, J.-X. Liu, L.-L. Zhang, Y.-P. Kong // *Mater. Struct.* – 2011. – Vol. 44. – P. 67–75.
143. Fang X.-Q. Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer / X.-Q. Fang // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – Vol. 45. – P. 5716–5729.
144. *Functionally graded materials: design, processing and applications* / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford (Eds.). – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
145. Gasik M. FGM components: PM meets the challenge / M. Gasik, N. Cherradi, A. Kawasaki // *Metal Powder Report.* – 1996. – V. 51. – P. 28 – 32.
146. Golovchan V.T. Shear-wave propagation in an elastic layer perforated by a series of cylindrical cavities / V.T. Golovchan, A.N. Guz // *Soviet Applied Mechanics.* – 1976. – Vol. 12, Iss. 9. – P. 888–892.
147. Graff K.F. *Wave motion in elastic solids* / K.F. Graff. – Oxford: Clarendon press. – 1975. – 649 p.
148. Gregory R.D. The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate / R.D. Gregory, I. Gladwell // *J. Elasticity.* – 1983. – Vol. 13.– P. 185–206.
149. Grinchenko V.T. *Acoustic Wave Problems* / V.T. Grinchenko, I.V. Vovk, V.T. Matsypura. – Connecticut: Begell House, Incorporated, 2018. – 439 p.
150. Itou S. Diffraction of a stress wave by a cylindrical cavity in an infinite elastic strip / S. Itou // *Lett. Appl. Engng. Sci.* – 1984. – Vol. 22, No. 4. – P. 475–490.
151. Khajeh E. *Guided Wave Propagation in Complex Curved Waveguides I: Method Introduction and Verification* / E. Khajeh, L. Breon, J.L. Rose // *Engineering Science & Mechanics Department, The Pennsylvania State University, University Park.* – 2012. – P. 1–23.
152. Koizumi M. *FGM activities in Japan* / M. Koizumi // *Composites Part B: Engineering.* – 1997. – V. 28. – P. 1–4.

153. Kornievsky A.S. Finite element analysis of foam models based on regular and irregular arrays of cubic open cells having uniform or normal distributions / A.S. Kornievsky, A.V. Nasedkin // *Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications*. – 2022. – V. 155. – № 15. – P. 251–269. DOI: 10.1007/978-3-030-81705-3_15
154. Kudimova A.B. Computer simulation of composites consisting of piezoceramic matrix with metal inclusions and pores / A.B. Kudimova, A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina, A. Rajagopal // *Mechanics of Composite Materials*. – 2021. – V. 57, № 5 – P. 657 – 666. DOI: 10.1007/s11029-021-09992-9
155. Meeker T.R. Guided wave propagation in elongated cylinders and plates / T.R. Meeker, A.H. Meitzler // *Physical acoustics. Principles and methods*. – New York: Acad. Press. – 1964. – 1A. – P. 111–167.
156. Miklowitz J. Recent developments in elastic wave propagation / J. Miklowitz // *Appl. Mech. Reviews*. – 1960. – V. 13. – P. 865–878.
157. Miklowitz J. The theory of elastic wave and waveguides / J. Miklowitz. – Amsterdam: North–Holland. – 1978. – 618 p.
158. Musgrave M.J.P. Crystal acoustics. Introduction to the study of elastic waves and vibrations in crystals / M.J.P. Musgrave. – San Francisco. – 1970. – 288 p.
159. Nakamura T. Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation / T. Nakamura, T. Wang, S. Sampath // *Acta Materialia*. – 2000. – V. 48. – P. 4293–4306.
160. Nasedkin A.V. Modeling and finite element analysis of porous piezoceramic disk transducer with plane-concave surface / A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina, A.N. Rybyanets // *Russian Journal of Nondestructive Testing*. – 2018. – V. 54, No. 6. – P. 400–409. DOI: 10.1134/S1061830918060062
161. Nasedkin A.V. Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces / A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina, A.N. Rybyanets // *Material Physics and Mechanics*. – 2018. – V. 40, No. 1. – P. 12–21. DOI: 10.18720/MPM.4012018_3
162. Nasedkin A.V. Analysis of cymbal transducer from porous piezoceramics PZT-4 with various material properties based on ANSYS / A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina,

A. Rajagopal // *Advanced Materials - Proceedings of the International Conference on "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications"*, PHENMA 2017. Springer Proceedings in Physics. – Vol. 207. Eds. I.A. Parinov, S.-H. Chang, V.K. Gupta. Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer Cham. 2018. – Ch. 42. – P. 533–547.

163. Nasedkin A.V. Homogenization of porous piezocomposites with extreme properties at pore boundaries by effective moduli method / A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina, M.E. Nassar // *Mechanics of Solids*. – 2020. – V. 55, No. 6. – P. 827–836. doi: 10.3103/S0025654420050131

164. Nasedkin A.V. Effective properties of piezoceramics with metal inclusions: numerical analysis / A.V. Nasedkin, A.A. Nasedkina, M.E. Nassar, A.N. Rybyanets // *Ferroelectrics*. – 2021. – V. 575, № 1 – P. 84–91. DOI: 10.1080/00150193.2021.1888230

165. Nasedkin A.V. About anomalous properties of porous piezoceramic materials with metalized or rigid surfaces of pores/ A.V. Nasedkin, M.E. Nassar // *Mechanics of Materials*. – 2021. – № 162. – 104040 DOI: 10.1016/j.mechmat.2021.104040

166. Nasedkin A.V. Analysis of Rosen type energy harvesting devices from porous piezoceramics with great longitudinal piezomodulus / A.V. Nasedkin, P.A. Oganessian, A.N. Soloviev // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2021. – V. 101. – № 3. – P. 2–9. DOI: 10.1002/zamm.202000129

167. Nasedkin A.V. A numerical study about effects of metal volume fraction on effective properties of porous piezoelectric composite with metalized pore boundaries / A.V. Nasedkin, M.E. Nassar // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2022. – V. 29(25). – P.1–14. DOI: 10.1080/15376494.2021.1928346

168. Nasedkin A.V. Comprehensive numerical characterization of a piezoelectric composite with hollow metallic inclusions using an adaptable random representative volume / A.V. Nasedkin, M.E. Nassar // *Computers and Structures*. – 2022. – V. 267. – 106799. DOI: 10.1016/j.compstruc.2022.106799

169. Ostriuk V.I. The interaction of a magnetoelastic shear wave with longitudinal cavities in a conducting layer / V.I. Ostriuk, L.A. Filshtinskii // *Journal of Mathematical Sciences*. – 1996. – Vol. 79, Iss. 6. – P. 1450–1454.

170. Pagneux V. Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate / V. Pagneux // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2006. – Vol. 120, № 2. – P. 649–656.
171. Redwood M. Mechanical waveguides. The propagation of sonic and ultrasonic waves in fluids and solids with boundaries / M. Redwood. – Oxford–London–New York–Paris: Pergamon press. – 1960. – 250 p.
172. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis. / G.B. Sinclair. // *Appl. Mech. Rev.* – 2004. – 57. – P. 251–298.
173. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity–II: Asymptotic identification. / G.B. Sinclair. // *Applied Mechanics Reviews.* – 57. – 2004. – 293 P. 385–439.
174. Swaminathan K. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates – A state of-the-art review / K. Swaminathan, D.T. Naveenkumar, A.M. Zenkour, E. Carrera. // *Composite Structures.* – 2015. – № 120. – P. 10–31.
175. Ting T.C.T. Anisotropic elasticity: theory and applications / T.C.T. Ting // University Press, Oxford. – 1996 – 216 p.
176. Torvic P.J. Reflection of wave trains in semiinfinite plates / P.J. Torvic // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1967. – Vol. 41, № 2. – P. 346–353.
177. Weng G.J. Effective bulk moduli of two functionally graded composites / G.J. Weng // *Acta Mechanica.* – 2003. – V. 166. – P. 57–67.
178. Whitham J. Linear and nonlinear waves / J. Whitham. – New York: Wiley–Interscience. – 1974. – 531 p.
179. Williams M.L. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plate in Extension / M.L. Williams // *J. Appl. Mech.* – 1952. – Vol. 19. – № 4. – P. 526–528.
180. Yang Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // *J. Nondestructive Eval.* – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.

ПРИЛОЖЕНИЕ



ДОНЕЦКАЯ НАРОДНАЯ РЕСПУБЛИКА
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

83001, г. Донецк - 01, ул. Университетская, 24,
тел: приемная (062) 302-07-22, справочная служба (062) 302-06-00, факс: (062) 302-07-49
e-mail: rector@donnu.ru

02.12.2022 № 10.22/12.1-34 г 1 Диссертационный совет Д 01.016.03
На № _____ от _____ при ГОУ ВПО «ДОННУ»

СПРАВКА

о внедрении результатов исследований диссертационной работы Пачевой Марины Николаевны на тему «Волновые деформационные процессы в полубесконечном, перфорированном и составном слое с усложненными геометрическими и физико-механическими свойствами», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

Настоящим подтверждается, что новые результаты научных исследований Пачевой М.Н., заключающиеся в разработке комплекса численно-аналитических методик анализа полей сдвиговых волн в упругих телах в форме слоя из анизотропных однородных и функционально-градиентных материалов при учете особенностей геометрического строения в виде наклонных плоских торцевых граничных поверхностей, изломов, дугообразных искривлений, внутренних туннельных цилиндрических полостей и включений, внедрены в учебный процесс в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет» по дисциплине бакалаврского цикла «Методы компьютерно-математического моделирования в волновой механике» для студентов направления подготовки 01.03.02 «Прикладная

математика и информатика» на факультете математики и информационных технологий ГОУ ВПО «ДОННУ».

Справка дана для предъявления в диссертационный совет.

Первый проректор



В.А. Дубровина