

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Глухов Антон Александрович

**ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В
АНИЗОТРОПНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ТЕЛАХ С
РАЗНОФАКТОРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО
ТИПА**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Сторожев Сергей Валериевич

Донецк 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ПУБЛИКАЦИЙ ПО РАССМАТРИВАЕМОЙ ПРОБЛЕМАТИКЕ И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ	19
1.1. Аналитический обзор методов и результатов опубликованных теоретических исследований	19
1.2. Описание физико-механических свойств функционально- градиентных деформируемых сред	22
1.3. Общая формулировка ведущих методологических положений исследования	28
1.4. Выводы по разделу 1	29
РАЗДЕЛ 2. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ИССЛЕДУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ	30
2.1. Описание локализованной приграничной неоднородности полубесконечных функционально-градиентных тел с использованием двойных экспоненциальных функций	30
2.2. Интегрирование уравнения модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с приграничной локализованной зоной неоднородности	36
2.3. Интегрирование системы уравнений распространения упругих волн P-SV типа в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с приграничной локализованной зоной неоднородности	39
2.4. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в	

функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности.	44
2.5. Интегрирование уравнений некоторых вариантов двухфакторных моделей распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной функционально-градиентной среде.	50
2.6. Интегрирование уравнений распространения упругих P-SV волн в среде с разнотипными законами экспоненциальной неоднородности для параметра плотности и модулей упругости.	55
2.7. Интегрирование уравнения модели распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной функционально-градиентной среде с трехфакторной неоднородностью.	57
2.8. Выводы по разделу 2.	59
РАЗДЕЛ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ С ПРИГРАНИЧНОЙ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ЗОНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ.	62
3.1. Анализ модели распространения обобщенных поверхностных волн Лява в составной структуре «однородный изотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве»	63
3.2. Анализ модели распространения волн Лява в составной структуре «функционально-градиентный анизотропный либо изотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве»	85
3.3. Анализ модели распространения поверхностных волн рэлеевского типа в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности.	91
3.4. Выводы по разделу 3.	102
РАЗДЕЛ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СДВИГОВЫХ И ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДНЫХ СТРУКТУРАХ В ВИДЕ	

ДЕФОРМИРУЕМОГО СЛОЯ МЕЖДУ ВМЕЩАЮЩИМИ УПРУГИМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ.	104
4.1. Исследование модели распространения волн сдвига в однородном анизотропном слое между одностипными функционально-градиентными трансверсально-изотропными полупространствами.	105
4.2. Локализованные сдвиговые волны в слое с симметричным законом поперечной неоднородности между одностипными функционально-градиентными трансверсально-изотропными полупространствами.	111
4.3. Анализ модели распространения продольно-сдвиговых волн в анизотропном функционально-градиентном слое с симметричным законом поперечной неоднородности между одностипными пригранично-неоднородными трансверсально-изотропными полупространствами.	121
4.4. Выводы по разделу 4	130
РАЗДЕЛ 5. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ И ПРОДОЛЬНО-СДВИГОВЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ С МНОГОФАКТОРНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ.	132
5.1. Сдвиговые волны в слое с альтернативными вариантами двухфакторной физико-механической неоднородности.	133
5.2. Волны сдвига в трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое с трехфакторной физико-механической неоднородностью.	146
5.3. Выводы по разделу 5.	154
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	156
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.	160

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Анализ процессов волнового деформирования упругих сред и элементов конструкций является многоплановым, в высокой степени актуальным направлением исследований в механике деформируемого твердого тела, представляющим дальнейший теоретический фундаментально-научный интерес и поддерживающим развитие широкого ряда современных наукоемких высокотехнологичных научно-производственных отраслей и критических технологий. При этом масштабной ветвью теоретических разработок по динамике деформируемых сред с разнообразными классами объектов исследований, ориентированных на прикладные запросы твердотельной акустоэлектроники, геоакустики и сейсмологии, технологий неразрушающего ультразвукового контроля, динамики машин, приборов сооружений, горного дела, являются разработка и апробация методов решения задач о распространении нормальных и локализованных упругих волн в волноводных структурах с усложненными физико-механическими свойствами, в том числе образуемых анизотропными неоднородными функционально-градиентными материалами – композиционными или однофазными материалами, функциональные свойства которых равномерно или скачкообразно изменяются хотя бы по одному измерению. Общий подход к анализу таких задач на базе разрабатываемых численно-аналитических методов в основном базируется на введении одного из экспериментально и теоретически обоснованных канонических законов описания пространственной трансформации физико-механических свойств деформируемых материалов – экспоненциального, степенного, сигмоидального и др. При этом актуальный вариант задания свойств неоднородности с применением экспоненциальных функций и его использование в решениях задач распространения локализованных и нормальных упругих волн в волноводных структурах с анизотропными компонентами на данный момент изучены в весьма малой мере. К практически не исследованным на сегодняшний день можно, в частности, отнести задачи распространения нормальных сдвиговых

и продольно-сдвиговых упругих волн в волноводе в виде функционально-градиентного анизотропного упругого слоя с учетом многофакторной экспоненциальной неоднородности – заданием различных экспоненциальных функциональных законов изменения для различных характеристик физико-механических свойств анизотропных материалов. Особой задачей является использование экспоненциальных зависимостей изменения физико-механических характеристик для описания эффектов наличия приповерхностно-локализованных зон выраженной высокоградиентной неоднородности материалов с асимптотическим сглаживанием при отходе от границ вглубь рассматриваемых полубесконечных тел, а также разработка и апробация методик решения задач распространения нормальных и обобщенных поверхностных волн в функционально-градиентных анизотропных волноводах из материалов данного типа. Практически неисследованным остается класс задач о спектрах и свойствах локализованных волн сдвигового и продольно-сдвигового типа в составных структурах в виде упругого слоя, вмещенного между деформируемыми полупространствами при учете свойств непрерывной неоднородности и анизотропии для составляющих указанной структуры.

С учетом представленных соображений, научная проблема разработки и применения численно-аналитических методов исследования моделей распространения локализованных и нормальных упругих волн в анизотропных функционально-градиентных телах с разнофакторной неоднородностью экспоненциального типа, может быть в настоящее время отнесена к актуальному с теоретической и прикладной точек зрения тематическому направлению исследований в механике деформируемого твердого тела.

Степень разработанности темы диссертации. Используемая в работе методология экспоненциального описания неоднородности физико-механических свойств для создаваемых на базе аддитивных технологий функционально-градиентных нанокompозитных материалов, а также модели экспоненциальной неоднородности для некоторых классов геоматериалов, развиты и обоснованы в

достаточно обширном цикле работ [110, 112, 113, 114, 124, 135, 144, 155, 175, 183, 185, 186, 204, 206, 210].

Исследования ряда моделей статического деформирования, моделей распространения и дифракционного рассеяния локализованных и нормальных упругих волн в функционально-градиентных телах с однофакторной, идентичной для всех физико-механических характеристик неоднородностью экспоненциального типа, осуществлены в работах [119, 120, 121, 128, 129, 181, 213, 217, 174, 117].

В публикациях [9, 98, 99, 102, 103–106, 116, 132, 133, 136–138, 153, 155, 157, 159, 165, 166, 147, 148, 150, 151, 161, 167, 172, 173, 177–182, 191, 195, 196, 202, 208, 215] получены решения ряда неклассических вариантов задач о распространении обобщенных локализованных волн Лява и волн рэлеевского типа.

В работах [115, 176] представлены исследования, связанные с получением отдельных форм представлений базисных решений амплитудных волновых уравнений для сдвиговых волн в изотропных телах с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью в рамках моделей различных законов неоднородности для модуля упругости и параметра плотности функционально-градиентного материала.

Рассматриваемые в данной диссертационной работе тематические направления и конкретные задачи, элементами постановки которых являются сочетание факторов анизотропии рассматриваемых функционально-градиентных материалов, учета эффектов формирования приграничных локализованных зон неоднородности физико-механических свойств в телах полубесконечной геометрии, учета свойств многофакторной экспоненциальной неоднородности рассматриваемых материалов, являются открытыми для перспективных научных исследований и не представлены в вышедших в свет научных публикациях других авторов. Отсутствуют также опубликованные разработки по моделям описания локализованной приповерхностной неоднородности полубесконечных

анизотропных функционально-градиентных тел с использованием двойных экспоненциальных функций.

Объектом исследования являются процессы распространения стационарных поверхностных и нормальных упругих волн в волноводах с усложненными физико-механическими свойствами.

Предметом исследования являются математические модели распространения локализованных и нормальных упругих волн в анизотропных функционально-градиентных телах в виде полупространства и слоя с локализованной приповерхностной неоднородностью и многофакторной неоднородностью экспоненциального типа.

Целью диссертационной работы является разработка и апробация комплекса специализированных аналитико-числовых методов теоретического исследования спектров и свойств локализованных и нормальных упругих волн в анизотропных функционально-градиентных телах с описываемой двойными экспоненциальными функциями локализованной приповерхностной неоднородностью и многофакторной неоднородностью экспоненциального типа, а также компьютерная реализация разработанных методов и проведение численных параметрических исследований анализируемых волновых полей с выявлением ведущих закономерностей в их структуре и свойствах.

Для достижения целей исследования подлежат решению следующие научные задания:

– синтез математической модели описания локализованных зон выраженной высокоградиентной приповерхностной неоднородности физико-механических свойств материалов и асимптотического сглаживания их характеристик при отходе от границ вглубь рассматриваемых тел с использованием двойных экспоненциальных функций;

– аналитическое интегрирование уравнений модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями приграничной локализованной зоной

неоднородности, модели распространения упругих волн P-SV типа в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями приграничной локализованной зоной неоднородности, модели распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полубесконечном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями приграничной локализованной зоной неоднородности;

– аналитическое интегрирование уравнений распространения сдвиговых упругих волн в рамках моделей двухфакторной экспоненциальной неоднородности трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды и уравнений распространения сдвиговых упругих волн в рамках модели общей трехфакторной экспоненциальной неоднородности трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды;

– анализ моделей распространения обобщенных поверхностных волн Лява в составных структурах «функционально-градиентный анизотропный слой на однородном анизотропном полупространстве», «однородный анизотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве», «функционально-градиентный экспоненциально-неоднородный анизотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве с приграничной неоднородностью»;

– анализ модели распространения поверхностных волн рэлеевского типа в функционально-градиентном трансверсально-изотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности;

– анализ моделей распространения сдвиговых волн в однородном анизотропном слое между однотипными функционально-градиентными полупространствами с приграничными локализованными зонами неоднородности, локализованных сдвиговых и продольно-сдвиговых волн в слое с симметричным законом поперечной неоднородности между однотипными функционально-

градиентными трансверсально-изотропными полупространствами с приграничными локализованными зонами неоднородности;

– анализ моделей распространения нормальных сдвиговых упругих волн в слое с альтернативными вариантами двухфакторной физико-механической неоднородности и в слое с трехфакторной физико-механической неоднородностью;

– получение дисперсионных соотношений для нормальных продольно-сдвиговых волн в слое с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью физико-механических свойств;

– разработка компьютерных расчетных алгоритмов и программных приложений для численного исследования анализируемых моделей;

– обобщение и систематизация полученных новых данных о закономерностях влияния факторов анизотропии и неоднородности отдельных классов упругих материалов на характеристики их стационарного волнового деформирования.

Методы исследования. Реализуемые в работе исследования базируются на использовании линейных моделей стационарного динамического деформирования неоднородных и однородных анизотропных упругих сред; аппарата теории дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений математической физики; методов последовательных приближений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений; теории разложений в скалярные и векторные функциональные ряды; методов матричной алгебры; методов численного решения трансцендентных уравнений; методов разработки специализированных программных приложений для реализации расчетных алгоритмов в среде C++.

Научная новизна полученных результатов.

1. Предложена и апробирована новая аналитическая модель описания локализованной приповерхностной зоны однофакторной неоднородности физико-механических характеристик функционально-градиентного анизотропного

полупространства, базирующаяся на интерпретации изменений комплекса свойств его материала двойными экспоненциальными функциями.

2. С применением специализированной итерационной методики получены базисные частные решения амплитудного волнового дифференциального уравнения в модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями приграничной локализованной зоной однофакторной неоднородности.

3. С применением специализированной векторно-матричной итерационной методики получены базисные частные решения систем амплитудных волновых дифференциальных уравнений в модели распространения упругих волн P-SV типа в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве и в модели распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полубесконечном массиве с описываемыми двойными экспоненциальными функциями приграничными локализованными зонами однофакторной неоднородности.

4. Получены базисные частные решения амплитудных волновых дифференциальных уравнений, описывающих распространение сдвиговых упругих волн в моделях двухфакторной и трехфакторной экспоненциальной неоднородности трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды.

5. Получены и исследованы решения задач о распространении обобщенных поверхностных волн Лява в составных структурах «функционально-градиентный анизотропный слой на однородном анизотропном полупространстве», «однородный анизотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве с приграничной неоднородностью», «функционально-градиентный экспоненциально-неоднородный анизотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве с приграничной неоднородностью».

6. Получены и исследованы решения задач о распространении поверхностных волн рэлеевского типа в функционально-градиентном трансверсально-изотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности.

7. Получены и исследованы решения задач о распространении локализованных сдвиговых волн в однородном анизотропном слое между однотипными функционально-градиентными полупространствами с приграничными локализованными зонами неоднородности.

8. Получены и исследованы решения задач о распространении локализованных сдвиговых и продольно-сдвиговых волн в анизотропном слое с симметричным законом поперечной экспоненциальной неоднородности, расположенном между однотипными функционально-градиентными полупространствами с приграничными локализованными зонами неоднородности.

9. Реализовано получение и исследование отдельных вариантов дисперсионных соотношений для нормальных сдвиговых волн в слое с альтернативными вариантами двухфакторной экспоненциальной физико-механической неоднородности.

10. Реализован анализ модели распространения нормальных сдвиговых упругих волн в функционально-градиентном слое с трехфакторной экспоненциальной физико-механической неоднородностью.

11. Установлены, систематизированы и обобщены некоторые физико-механические закономерности влияния факторов анизотропии и неоднородности отдельных классов упругих материалов на характеристики их стационарного волнового деформирования.

Теоретическое значение результатов работы заключается в создании, совершенствовании и расширении областей применения эффективных алгоритмизированных численно-аналитических методов решения ранее не исследованных классов задач о спектрах и свойствах обобщенных поверхностных волн Лява и Рэлея в полубесконечных функционально-градиентных телах с приграничной неоднородностью физико-механических характеристик; о спектрах

и свойствах локализованных волн сдвигового и продольно-сдвигового типа в составных структурах в виде упругого слоя, вмещенного между деформируемыми полупространствами при учете свойств непрерывной неоднородности и анизотропии для составляющих указанной структуры; о спектрах и свойствах нормальных упругих волн в анизотропном функционально-градиентном слое с разнофакторной неоднородностью экспоненциального типа, позволивших выявить ряд новых фундаментальных параметрических закономерностей в трансформации свойств исследуемых волн, обусловленной комплексом факторов непрерывной неоднородности физико-механических характеристик среды распространения, и наметить сферы дальнейшего обобщения разработанных в диссертации подходов.

Практическое значение полученных результатов заключается в непосредственной применимости разработанных численно-аналитических методов, алгоритмов их компьютерной реализации, установленных и обобщенных свойств и закономерностей анализируемых волновых процессов в предпроектном моделировании и конструкторских расчетах в области технологий шахтной пластовой сейсморазведки и других видов геоакустических исследований, в области неразрушающего ультразвукового контроля, в области разработки усовершенствованных акустоэлектронных компонентов на поверхностных акустических волнах, в практике прочностных расчетов деталей машин и элементов строительных конструкций из анизотропных функционально-градиентных нанокompозитных материалов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационное исследование соответствует основным направлениям специальности 1.1.8 «Механика деформируемого твёрдого тела»: 3. Задачи теории упругости, теории пластичности, теории вязкоупругости. 4. Механика композиционных материалов и конструкций, механика интеллектуальных материалов. 8. Динамика деформируемого твёрдого тела. Теория волновых процессов в средах различной структуры. 12. Вычислительная механика деформируемого твёрдого тела.

Научные положения, выносимые на защиту:

1. Предложенная и апробированная в работе модель описания локализованной приповерхностной зоны однофакторной неоднородности физико-механических характеристик функционально-градиентного анизотропного полупространства, базирующаяся на интерпретации изменений комплекса свойств его материала двойными экспоненциальными функциями, эффективна для реализации численно-аналитических исследований закономерностей влияния факторов вариаций значений исходных параметров деформационных свойств и плотности анизотропного материала полупространства около его граничной плоскости на дисперсионные, кинематические и энергетические эндогенные характеристики локализованных однопарциальных, двух- и трехпарциальных поверхностных упругих волн, и представляет значительный прикладной интерес в процессах расчетного проектирования технологий и компонентов акустоэлектронной техники и схем реализации сейсмоакустических исследований.

2. Построенные в диссертации аналитические решения амплитудных дифференциальных уравнений моделей распространения обобщенных поверхностных упругих волн SH и P-SV типа в полубесконечных анизотропных функционально-градиентных телах с описываемой двойными экспоненциальными функциями поперечной локализованной физико-механической неоднородностью являются основой эффективного аппарата для вычислительного анализа комплекса свойств обобщенных волн Лява и Рэлея, представляющих фундаментальный интерес и востребованных инженерными приложениями в прочностных строительных расчетах, геоакустике и ультразвуковой диагностике, твердотельной акустоэлектронике.

3. Полученные в работе решения задач построения и анализа дисперсионных соотношений, расчета кинематических, силовых и энергетических характеристик локализованных волн SH и P-SV типа в расположенных между однотипными функционально-градиентными полупространствами с приграничными зонами неоднородности однородном анизотропном слое и в

расположенном аналогичным образом анизотропном слое с симметричным экспоненциальным законом поперечной неоднородности, качественно дополняют фундаментальные представления о влиянии факторов неоднородности и анизотропии компонентов данных волноводных структур на параметры соответствующих волновых процессов, и в прикладном аспекте открывают новые возможности повышения точности исследований в области шахтной сейсמודиагностики пластов полезных ископаемых в разрабатываемых геомассивах.

4. Впервые разработанные и апробированные методики получения дисперсионных уравнений для моделей распространения нормальных SH волн в анизотропном слое с альтернативными вариантами двухфакторной экспоненциальной физико-механической неоднородности, а также для модели распространения нормальных сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое с трехфакторной экспоненциальной физико-механической неоднородностью, помимо вклада в базу фундаментальных знаний об особенностях волновых процессов в функционально-градиентных средах имеют важное значение для практики инженерных расчетов в динамике нанокompозитных конструкций, для сферы проектирования волноводных компонентов устройств радиоэлектроники и акустической диагностики.

Достоверность и обоснованность результатов диссертационной работы подтверждается строгостью и корректностью постановок рассматриваемых задач в рамках математически обоснованных апробированных моделей динамической теории упругости анизотропного твердого тела; использованием при теоретическом исследовании рассматриваемых моделей верифицированных математических методов, включая аппарат теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики; анализом сходимости ряда полученных в работе представлений решений волновых уравнений в функциональных рядах; использованием в процессе численных исследований апробированных

вычислительных алгоритмов решения трансцендентных алгебраических уравнений; сопоставительной проверкой согласованности отдельных полученных разработанными методами результатов диссертационной работы в предельных частных случаях с полученными альтернативными методами опубликованными результатами исследований других авторов.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Представленные в работе исследования связаны с тематикой конкурсных исследовательских проектов: «Методы исследования линейных и нелинейных моделей статического и динамического деформирования анизотропных функционально-градиентных упругих тел» (МОН ДНР, номер государственной регистрации 0120D000014, 2020-2022 г.); «Численно-аналитические методы исследования волнового деформирования, ползучести, концентрации напряжений и сопряжённых полей в новых классах анизотропных композитных и функционально-градиентных сред» (государственное задание Минобрнауки РФ, № госрегистрации 124012400354-0, 2023-2024 г.). Ведущие результаты диссертационной работы включены в отчеты по указанным НИР.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы были представлены, доложены и обсуждены на: III, IV, V, VII, VIII и IX Международных научных конференциях «Донецкие чтения. Образование, наука и вызовы современности» (г. Донецк, Донецкий государственный университет, 2018 г., 2019 г., 2020 г., 2022 г., 2023 г., 2024 г.); XVII и XVIII Всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, Южный федеральный университет, 2023 г., 2024 г.); XXI Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, ЮФУ, 2023 г.); International Conference on Construction and Building Materials (ICCBM) (Vladivostok, Russia, 2024); Международной конференции «XXXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам» (г. Симферополь, Физико-технический институт ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»

2024); Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию ИВМ СО РАН (Красноярск, Институт вычислительной математики СО РАН, 2024).

Работа в целом доложена и обсуждена на объединённом научном семинаре по механике сплошных сред кафедры теории упругости и вычислительной математики им. академика А.С. Космодамианского ГОУ ВПО «Донецкий национальный университет» и отдела аналитической механики горных пород ФГБНУ «Институт прикладной математики и механики» под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А. Калоерова (2024 г.), и на профильном научном семинаре в ФГБНУ «Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела» (2024 г.).

Публикации. По результатам диссертационного исследования опубликованы 22 научные работы, из них 11 работ в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России.

Личный вклад автора. Все основные теоретические и расчетные результаты исследований получены лично соискателем. В совместно проведенных исследованиях и опубликованных работах [8–10, 29–37, 39, 43, 44, 85–87] соавторам В.Е. Болнокину, В.И. Сторожеву, С.В. Сторожеву, В.А. Шалдырвану принадлежат участие в постановке рассматриваемых задач, рекомендации по схемам их анализа, а также направлениям обобщения и практического применения полученных результатов; соавторам М.Н. Пачевой и М.В. Фоменко принадлежат консультационные рекомендации по разработке программных приложений для осуществления численных экспериментов на базе предложенных методов, а также участие в обработке и систематизации их результатов. Журнальные публикации [38, 40–42] подготовлены соискателем самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения с основными выводами и результатами,

списка литературы из 219 источников, представленных на 26 страницах. Работа изложена на 185 страницах, содержит 83 рисунка и 7 таблиц.

РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ПУБЛИКАЦИЙ ПО РАССМАТРИВАЕМОЙ ПРОБЛЕМАТИКЕ И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1. Аналитический обзор методов и результатов опубликованных теоретических исследований

Теоретические исследования по проблемам распространения локализованных и нормальных гармонических волн деформаций в упругих телах и элементах конструкций в последние десятилетия являются одним из наиболее актуальных, масштабных и значимых направлений в спектре научных заданий волновой механики деформируемого твердого тела. Их современное состояние, методы и результаты реализованных исследований, тенденции развития, продиктованные запросами фундаментальной науки и важнейшими инновационными инженерными приложениями, в весьма полной мере характеризуют обобщающие монографии и обзорные публикации Д.И. Бардзокаса, Б.А. Кудрявцева, Н.А. Сеника [3]; С.В. Бирюкова, Ю.В. Гуляева, В.В. Крылова, В.П. Плесского [6]; Л.М. Бреховских, О.А. Година [7]; А.С. Бугаева, В.Ф. Дмитриева, С.В. Кулакова [11]; А.О. Ватульяна [14]; А.О. Ватульяна, А.Н. Соловьева [15]; А.О. Ватульяна [16]; А.О. Ватульяна, А.Н. Нестерова [17]; И.А. Викторова [21, 22]; М.В. Вильде, Ю.Д. Каплунова, Л.Ю. Коссовича [23]; Л.П. Вовка [24]; Р. В. Гольдштейна, А.В. Ильяшенко, С.В. Кузнецова [47]; А.Г. Горшкова, А.Л. Медведского, Л.Н. Рабинского, Д.В. Тарлаковского [48]; В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко [50]; Р.М. Дейвиса [51]; Э. Дьелесана, Д. Руайе [52]; В.И. Ерофеева [53]; С.И. Жаворонка [54, 55]; М.Ш. Исраилова [56]; Г. Кольского [62]; А.С. Космодамианского, В.И. Сторожева [63]; С.В. Кузнецова [64]; В.Д. Купрадзе, Т.В. Бурчуладзе [66]; В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгого, А.Н. Трофимчука, Г.Я. ван Хейст [68]; Ю.П. Назарова [76]; Л.А. Островского, А.И. Потапова [78], С.Г. Пшеничнова [80], В.И. Речицкого [82]; Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик [90]; Н.А. Шульги [95], В.А. Шутилова [96]; S.K. Datta, A.H. Sha

[126]; B.L.N. Kenneth [152]; J. Miklowitz [182]; M. J. P. Musgrave [184]; M. Redwood [192]; J.L. Rose [194]; J. Yang, J. Wang [212]; J.E. White [211].

В контексте целевых заданий настоящего диссертационного исследования, приоритетный интерес представляют численно-аналитические методы и полученные с их применением результаты исследований в области неклассических задач анализа свойств обобщенных поверхностных волн Лява, обобщенных поверхностных волн рэлеевского типа, локализованных волн в структурах «упругий слой между упругими полупространствами» и нормальных волн в волноводах в виде плоскопараллельного слоя при учете в постановках соответствующих задач факторов неоднородности и анизотропии физико-механических свойств, а также ряда других усложняющих факторов рассматриваемых моделей.

Варианты классической постановки и решения задач о распространении поверхностных волн Лява, а также различные направления инженерного применения результатов их анализа, представлены, в частности, в публикациях [1, 21, 22, 50, 52, 79, 96]. В ряде работ рассмотрены вопросы анализа нескольких вариантов неклассических моделей распространения обобщенных локализованных волн Лява. Так, в публикации [9] представлено исследование каналовых волн Лява в многослойном массиве; в работе [98] рассматривается распространение волн Лява в предварительно-напряженном ортотропном зернистом слое, наложенном на полубесконечную зернистую среду; в работе [102] рассмотрены вопросы дисперсии и затухания обобщенных волн Лява в магнитовязкоупругом слое; в работе [103] исследовано распространение обобщенных волн Лява в гидростатически напряженной магнитоупругой трансверсально-изотропной полосе над неоднородной подложкой; в работе [106] исследованы характеристики дисперсии и затухания обобщенных волн Лява в армированном волокнами композите на вязкоупругой подложке; в работе [133] реализован анализ задачи о свойствах волн Лява в насыщенном жидкостью пористом слое с жесткой верхней границей, лежащем на упругом полупространстве под действием силы тяжести; в работе [136] исследовано

распространение волн Лява в неоднородном субстрате на предварительно-напряженном гетерогенном полупространстве; в публикации [137] представлено исследование влияния периодических гофрированных граничных поверхностей на плоские SH-волны в армированной волокнами среде над полубесконечным микрополярным твердым телом под действием магнитного поля.

Ряд других исследований, связанных с вопросами распространения обобщенных волн Лява, описываемых неклассическими моделями, представлен в работах [116, 138, 165, 166, 147, 148, 150, 151, 161, 167, 173, 191, 195, 196, 202, 208, 215].

Решения некоторых вариантов задач о распространении обобщенных волн Лява в рамках моделей, в различной мере учитывающих свойства неоднородности и анизотропии физико-механических свойств компонентов рассматриваемых волноводных структур и сопряженные физические поля, рассматриваются в работе [132], где исследовано распространение ультразвуковых волн Лява в функционально-градиентных пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалах с экспоненциальной неоднородностью; в работе [105], содержащей описание методики и результатов исследования эффектов дисперсии SH-волн в нерегулярном магнитоупругом анизотропном слое над нерегулярным гетерогенным полупространством, а также в публикациях [116, 134, 153, 155, 157, 159, 178, 179].

Вопросы исследования обобщенных поверхностных волн рэлеевского типа представлены в публикациях [99, 104, 172, 180].

Вопросы распространения и дисперсии поверхностных упругих волн в многослойных структурах для различных вариантов постановки соответствующих задач рассматривались в работах [49, 123, 127, 156, 158, 164, 162, 188, 189].

Ряд относящихся к рассматриваемой проблематике неклассических задач теории поверхностных упругих волн в однородных и неоднородных телах исследован также в работах [4, 5, 93, 108, 115, 142, 163, 167, 208].

Исследования по различным аспектам распространения локализованных сдвиговых волн в волноводных структурах в виде деформируемого слоя,

вмещенного между упругими полупространствами, в многообразных вариантах постановки реализованы в работах [45, 46, 57, 65, 101, 111, 117, 125, 145, 146, 149, 160, 177, 193, 203, 205, 207, 209, 219].

Вопросы применения результатов исследования свойств рассматриваемых в диссертации типов локализованных волн в технологиях ультразвуковой диагностики и сейсморазведки представлены в публикациях [11, 28, 77, 141, 176, 131]; при проектировании сенсорной техники – в работе [143].

Исследования спектров и свойств нормальных волн в волноводах в форме слоя при учете факторов неоднородности и анизотропии материала описаны в публикациях [122, 139, 169, 171, 187, 198, 199, 214], а задачам анализа спектров и свойств нормальных волн деформаций в функционально-градиентных цилиндрических телах посвящены работы [13, 19, 20, 70–74, 81, 140, 197, 216]. Некоторые относящиеся к проблематике данной работы вопросы волновой динамики анизотропных неоднородных тел рассмотрены в работах [25–27, 75, 109, 200, 201].

Анализ охарактеризованных выше публикаций позволят определить ряд актуальных в теоретическом и прикладном аспектах исследовательских направлений в области разработки и применения численно-аналитических методов исследования моделей распространения локализованных и нормальных упругих волн в анизотропных функционально-градиентных телах. Уточняющая характеристика этих направлений дается в следующем подразделе работы.

1.2. Описание физико-механических свойств функционально-градиентных деформируемых сред

Как отмечено во вводной части работы и в предыдущем подразделе, вопросы проектирования, изготовления и эксплуатации создаваемых на базе аддитивных технологий 3D печати конструктивных элементов из функционально-градиентных материалов относятся к числу самых современных и актуальных фундаментальных и прикладных проблем в области механико-

математического моделирования. Это обусловлено стремительным расширением областей применения и ростом уровня востребованности результатов таких исследований – от индустрии новых высокоэффективных экономичных конструкционных материалов для машиностроения и строительства, до таких прорывных инновационных направлений как аэрокосмическая техника, электроника и приборостроение, ультразвуковая волновая диагностика, биомедицина. Соответственно, неуклонно растет число научных публикаций в области совершенствования и реализации новых методик исследования задач механики функционально-градиентных материалов, непрерывная неоднородность которых обусловлена химическим составом, микроструктурой или порядком расположения атомов и т.д.

Фундаментальные основы механики функционально-градиентных деформируемых сред, включая основные аспекты технологий их формирования, с достаточной степенью полноты представлены в работах [110, 112, 113, 114, 124, 135, 144, 154, 175, 183, 185, 186, 204, 206, 210]. Весьма информативными в контексте рассматриваемого вопроса являются также обзорные работы [54, 55], в которых дано обобщение основных сведений о моделировании свойств функционально-градиентных сред и подходах к анализу моделей их деформирования.

В указанных работах, помимо прочего, рассматриваются и вопросы математического описания функциональных законов неоднородности функционально-градиентных материалов и конструкций. На данный момент, в доминирующем числе случаев, в исследованиях по статическому и динамическому деформированию функционально-градиентных материалов и конструкций из этих материалов, применяются модели одноосной градиентности с зависимостью физико-механических характеристик материалов – компонент тензоров модулей упругости C^{ijkl} , коэффициентов линейного теплового расширения α_{ij} и параметра плотности ρ от одной пространственной координаты в рассматриваемой среде

$$C^{ijkl}(q) = C^{ijkl}(\xi^3), \quad \alpha_{ij}(q) = \alpha_{ij}(\xi^3), \quad \rho(q) = \rho(\xi^3); \quad (1.1)$$

$$q = q(\xi^3) \in C^{(M)}[h_-, h_+] \quad \xi^3 \in [h_-, h_+] \subset R, \quad (1.2)$$

где в обозначениях работы [54] $q(\xi^j)$ – определяющий характер неоднородности параметр структурного (фазового) состава функционально-градиентного материала, зависящий от пространственных координат $\xi^j \in D_\xi \subset R^3$. В качестве примеров исследований с использованием модели одноосной градиентности можно, в частности, привести работы [119, 120, 121, 129, 128, 181, 213, 217, 174, 117]. Перспективным направлением, представленным в относительно ограниченном числе исследований, является также охарактеризованное в [54] применение моделей двухосной градиентности (биградиентности) физико-механических свойств [107].

Согласно результатам механико-математического моделирования, приведенным в перечисленных выше работах, функционально-градиентные материалы с одноосной градиентностью по критериям соотношения размеров их наибольшего гомогенизированного элемента и наименьшего репрезентативного элемента, подразделяются также на материалы с быстрыми и медленными изменениями свойств. Для исследования проблем деформирования материалов с медленными изменениями свойств, интерпретируемых как изотропные локально-однородные и, вместе с тем, глобально-неоднородные, их физико-механические параметры теоретически определяются как эффективные модули с использованием методов Фойхта, Ройсса, Мори-Танаки, Хилла, соотношения которых обобщенно представлены в работе [54].

При исследовании проблем деформирования функционально-градиентных материалов с быстро изменяющимися свойствами в рамках моделей одноосной и двухосной градиентности, в качестве основных, на данный момент, используются следующие варианты зависимостей с каноническими формоами [54]:

– модели одноосной и двухосной степенной градиентности

$$q(\xi^3) = q_1 + (q_2 - q_1)(1/2 + \xi^3 h^{-1})^n, \quad n \in R; \quad (1.3)$$

$$q(\xi^2, \xi^3) = q_1 + (q_2 - q_1)(1/2 + \xi^2 h^{-1})^{n_2} (\xi^3 a^{-1})^{n_3}, \quad n_{2,3} \in R; \quad (1.4)$$

– модели одноосной и двухосной экспоненциальной градиентности

$$q(\xi^3) = q_t \exp[h^{-1} \ln(q_b / q_t)(\xi^3 + h/2)]; \quad (1.5)$$

$$q(\xi^2, \xi^3) = q_{0,0} \exp[k_2 \beta_2(\xi^2) + k_3 \beta_3(\xi^3)]; \quad (1.6)$$

– модели одноосной и двухосной тригонометрической градиентности

$$q(\xi^3) = C[1/2 - 1/2\alpha \sin(\pi \xi^3 h^{-1} + \phi)]^\gamma, \quad \gamma \in R; \quad (1.7)$$

$$q(\xi^2, \xi^3) = [1 - \sin(\pi_2^{-1} n_2 \xi^2 + \varphi_2) \sin(\pi_3^{-1} n_3 \xi^3 + \varphi_3)]^\gamma, \quad l_{2,3} \in R; \quad (1.8)$$

– модель одноосной сигмоидальной градиентности

$$q(\xi^3) = 1 - [2h^{-1}(h/2 - \xi^3)]^n / 2, \quad \xi^3 \in [0, h/2]; \quad (1.9)$$

$$q(\xi^3) = [2h^{-1}(h/2 - \xi^3)]^n / 2, \quad \xi^3 \in [-h/2, 0];$$

– трех- и четырехпараметрическая одноосные модели Торнабене

$$q(\xi^3) = [1/2 - z/h + b(1/2 + z/h)^c]^p; \quad (1.10)$$

$$q(\xi^3) = [1 - \alpha(1/2 - z/h) + b(1/2 + z/h)^c]^p. \quad (1.11)$$

Вид указанных соотношений указывает на то, что в ряде случаев они сформированы применительно к конструкциям с характерным линейным размером h , но при этом могут быть записаны и в более общей форме с соответствующим образом расшифровываемыми обобщенными параметрами.

Помимо описанных основных типов представлений функций структурного состава $q(\xi^j)$, в реализованных исследованиях рассмотрен также ряд их гибридных вариантов. Так, к примеру, в работах [14–18, 19, 20, 70–74] для описания радиальной неоднородности толстостенных трансверсально-неоднородных цилиндров используются полиномиальные и экспоненциально-степенные функции.

Наряду с представленной соотношениями (1.2)–(1.11) градацией моделей деформирования изотропных и анизотропных функционально-градиентных материалов и конструкционных элементов из этих материалов, отдельным аспектом в структуре этих моделей является число вводимых функций $q(\xi^j)$ структурного состава (функций неоднородности) для описания различных физико-механических характеристик. Число n таких вводимых зависимостей определяет классификационную характеристику « n -факторности» модели с

определенным типом функций неоднородности. Тенденцией в развитии исследований по механике функционально-градиентных материалов и конструкций является переход от доминирующего использования однофакторных моделей, в которых все их физико-механические характеристики изменяются по одному закону, к многофакторным моделям, корректнее описывающим реальные свойства данных материалов.

Необходимо также отметить, что свойства непрерывной неоднородности физико-механических свойств, характерные для искусственных функционально-градиентных сред, проявляются на значимом количественном уровне и для изотропных и анизотропных геоматериалов вулканического либо осадочного происхождения [2, 58, 69, 83, 91, 117], что также целесообразно и важно учитывать в достаточно обширном числе современных моделей статического и волнового динамического деформирования массивов горных пород, механики подземных горно-шахтных сооружений, горной сейсмоакустики [84, 92]. В частности, это актуально для структурированных геомассивов из анизотропных неоднородных геоматериалов в окрестности зон контакта пластов с вмещающими массивами. При этом, в первую очередь представляет интерес исследование случаев формирования локализованных областей выраженной неоднородности в окрестности поверхностей контакта слоя и полупространств.

При наличии охарактеризованного выше достаточно развитого и апробированного аппарата аналитического описания различных вариантов законов трансформации свойств физико-механической неоднородности функционально-градиентных деформируемых тел, специальный интерес представляет моделирование и исследование не охватываемых описаниями (1.2)–(1.11) характерных эффектов формирования локализованных приповерхностных областей выраженной неоднородности свойств материалов в окрестности плоских границ полубесконечных тел и сглаживания темпов трансформации этих свойств (и соответствующих функциональных законов их изменения) с асимптотическим стремлением к параметрам однородных материалов при неограниченном удалении от граничных плоскостей вглубь массивов. Уместно отметить, что

отдельные приемы, предлагавшиеся для решения проблемы учета локализованной неоднородности, в частности, описанная в работе [22] двухфакторная модель динамического сдвигового деформирования изотропного полупространства со слабой поверхностной неоднородностью, базирующаяся на представлениях физико-механических характеристик

$$\mu = \mu_0(1 - (\Delta\mu / \mu_0)\exp(-z / z_0)), \quad (1.12)$$

$$\rho = \rho_0(1 + (\Delta\rho / \rho_0)\exp(-z / z_0)),$$

вместо интерпретации волновода, как полубесконечной области, предполагают введение параметра характерной глубины z_0 выделяемого слоя неоднородности. В работе [115] представлен также вариант модели неоднородности функционально-градиентного полупространства, базирующийся на введении представлений функции неоднородности в виде экспоненциальных рядов.

Таким образом, обобщая результаты содержательного анализа научных разработок по рассматриваемой проблематике, представленного в пп. 1.1 и 1.2, можно сделать выводы о том, что к актуальным малоисследованным на сегодняшний день заданиям относятся задачи описания эффектов наличия приповерхностно-локализованных зон выраженной высокоградиентной неоднородности материалов с асимптотическим сглаживанием при отходе от границ вглубь рассматриваемых тел, а также разработка и апробация включающих этапы численной реализации методик решения задач о распространении обобщенных поверхностных волн в функционально-градиентных анизотропных волноводах из материалов данного типа; задачи о спектрах и свойствах локализованных волн сдвигового и продольно-сдвигового типа в составных волноводных структурах в виде упругого слоя, вмещенного между деформируемыми полупространствами при учете свойств локализованной приграничной неоднородности материалов полупространств и свойств физико-механической анизотропии для всех компонентов указанных волноводов; задачи о распространении нормальных сдвиговых и продольно-сдвиговых упругих волн в волноводах в виде функционально-градиентного анизотропного упругого слоя с

учетом многофакторной экспоненциальной неоднородности – заданием различных экспоненциальных функциональных законов изменения для различных характеристик физико-механических свойств анизотропных материалов.

1.3. Общая формулировка ведущих методологических положений исследования

Базовыми позициями для реализуемого в работе теоретического исследования являются:

– использование линейных моделей стационарного динамического деформирования трансверсально-изотропных и прямолинейно-ортотропных упругих сред различной физической природы [59, 67, 94];

– использование экспоненциальной модели непрерывной однофакторной либо многофакторной поперечной неоднородности анизотропных нанокompозитных функционально-градиентных материалов или анизотропных горных пород при описании волновых процессов в упругом слое, как волноводе для нормальных волн SH или P-SV типов, либо как компоненте составного волновода для локализованных волн, расположенной между упругими полупространствами;

– использование предлагаемой в работе модели описания локализованной приповерхностной однофакторной непрерывной физико-механической неоднородности в волноводных структурах, содержащих компоненты в виде упругих функционально-градиентных полупространств из анизотропных нанокompозитных функционально-градиентных материалов или неоднородных анизотропных горных пород, на базе применения двойных экспоненциальных функций;

– применение концепции решения задач анализа спектральных, кинематических, силовых и энергетических характеристик локализованных и нормальных упругих волн на основе точного аналитического интегрирования

обыкновенных дифференциальных уравнений либо систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных составляющих комплексных функций волновых перемещений в рассматриваемых анизотропных функционально-градиентных телах и получения дисперсионных уравнений для исследуемых волн как следствия из однородных краевых условий на граничных поверхностях рассматриваемых волноводов;

– использование в качестве энергетических характеристик анализируемых волновых движений в исследуемых бегущих локализованных и нормальных волнах функциональных зависимостей компонентов вектора плотности среднего за период потока мощности;

– учет в алгоритмах численного исследования получаемых дисперсионных соотношений повышающих эффективность расчетного анализа методических приемов, представляемых в публикациях [100, 130, 171, 218];

– использование в качестве среды компьютерного программирования при разработке реализующих созданные в диссертации теоретические численно-аналитические методики алгоритмического языка C++.

1.4. Выводы по разделу 1

Результатами представленных в разделе исследований являются:

1. Детализированный обзорный анализ работ, определяющих степень разработанности темы диссертации.

2. Сделанное на основе аналитического обзора публикаций по рассматриваемой проблематике заключение относительно содержания перечня определяющих цели работы актуальных в теоретическом и прикладном отношении исследовательских заданий в области изучения спектров и свойств локализованных и нормальных упругих волн в анизотропных функционально-градиентных телах с разнофакторной неоднородностью экспоненциального типа.

3. Характеристика ведущих методологических положений, лежащих в основе реализуемых в работе численно-аналитических исследований.

РАЗДЕЛ 2. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ АНАЛИТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ИССЛЕДУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

Данный раздел работы, в соответствии с ее целями и заданиями, посвящен разработке аналитико-числовых методик интегрирования амплитудных волновых уравнений для ряда моделей распространения одно-, двух- и трехпарциальных гармонических волн деформаций в функционально-градиентных телах в форме упругого полупространства и упругого слоя с однофакторной, несколькими вариантами двухфакторной и трехфакторной экспоненциальной неоднородностью физико-механических характеристик и однофакторной локализованной приграничной неоднородностью функционально-градиентной среды, описываемой двойными экспоненциальными функциями.

2.1. Описание локализованной приграничной неоднородности полубесконечных функционально-градиентных тел с использованием двойных экспоненциальных функций.

В контакте общих заданий исследования, в данной диссертационной работе предложена новая однофакторная модель описания эффектов локализованной приповерхностной неоднородности в занимающих область $x_3 \geq 0$ полубесконечных функционально-градиентных телах с использованием двойных экспоненциальных функций вида

$$\varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)). \quad (2.1)$$

Безразмерный параметр λ в (2.1) описывает максимальный порядок возмущения (отклонения) соответствующей характеристики у граничной поверхности $x_3 = 0$ от значения, асимптотически достигаемого в глубине полупространства при $x_3 \rightarrow \infty$, а параметр $\beta [м^{-1}]$ описывает форму закона изменения этой характеристики от приграничной зоны вглубь полупространства. Положительные значения λ

характеризуют эффект приграничного «упрочнения» и увеличения плотности материала полупространства, отрицательные – отвечают ситуации «приповерхностного разупрочнения» материала и уменьшения его плотности. Варьирование параметров λ, β позволяет в определенной мере описывать экспериментально обнаруживаемые закономерности изменения свойств материала массива при отходе от его границы на основе предлагаемой теоретической модели. Характер изменения зависимостей вида (1.13) для ряда значений параметров λ, β проиллюстрирован на рисунках 2.1–2.8. и дает представление о возможных вариантах описания этим способом свойств локализованной толщиной неоднородности непрерывно-неоднородных полубесконечных функционально-градиентных тел.

Рисунки 2.1–2.4 соответственно описывают профили $\varphi(\lambda, \beta, x_3)$ при положительных λ и значениях параметра $\beta = 0.5, \beta = 1.0, \beta = 2.0, \beta = 3.0$; сплошные линии на этих графиках отвечают значениям $\lambda = 3.0$, штрихпунктирные – значениям $\lambda = 2.0$, крупный штрих – значениям $\lambda = 1.0$, мелкий штрих – значениям $\lambda = 0.5$. Рисунки 2.5–2.8, в свою очередь, описывают профили $\varphi(\lambda, \beta, x_3)$ при отрицательных λ и значениях параметра $\beta = 0.5, \beta = 1.0, \beta = 2.0, \beta = 3.0$; сплошные линии на этих графиках отвечают значениям $\lambda = 1.0$, крупный штрих – значениям $\lambda = 2.0$, мелкий штрих – значениям $\lambda = 3.0$.

Варьирование двух параметров неоднородности в представлении (2.1) является механизмом достижения достаточной меры адекватности данной модели локализованной неоднородности реальным свойствам функционально-градиентных нанокompозитных и горных материалов в приграничных краевых зонах.

Эффективность предложенной модели описания приповерхностной однофакторной неоднородности с использованием двойных экспоненциальных функций обусловлена не только возможностями более точного учета реальных особенностей в эффектах упрочнения либо разупрочнения полубесконечных деформируемых тел в окрестности их плоских границ, но и, в первую очередь,

реализованной в данной диссертационной работе разработкой методики аналитического интегрирования амплитудных волновых уравнений краевых задач распространения волн в полубесконечных функционально-градиентных телах с неоднородностью данного типа в скалярных и векторных экспоненциальных рядах.

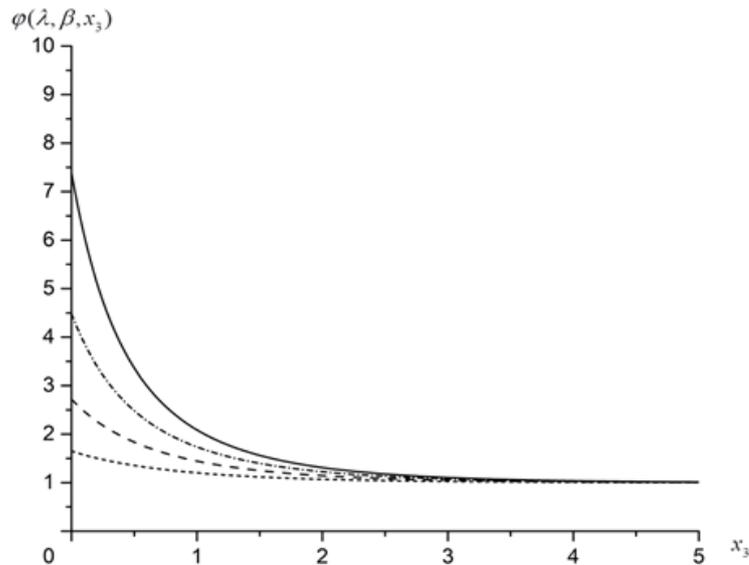


Рисунок 2.1 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 0.5$ от параметра λ принимающего значения {3;2;1;0.5}

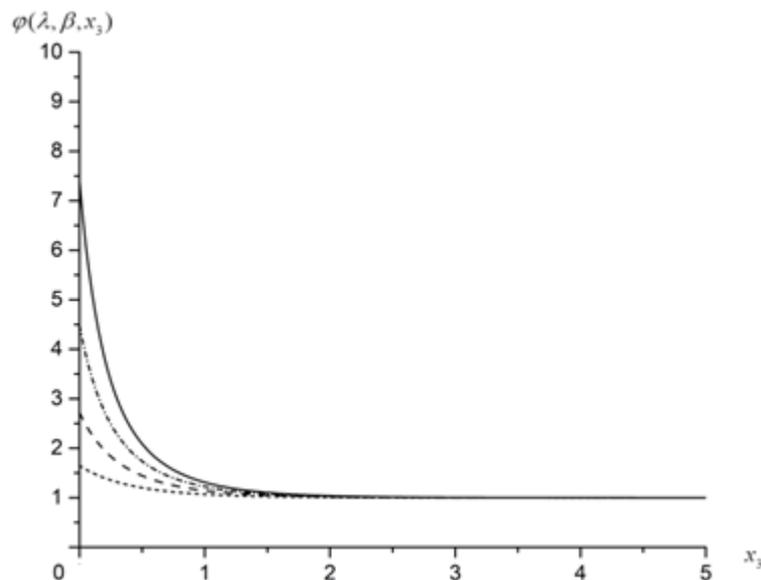


Рисунок 2.2 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 1$ от параметра λ принимающего значения {3;2;1;0.5}

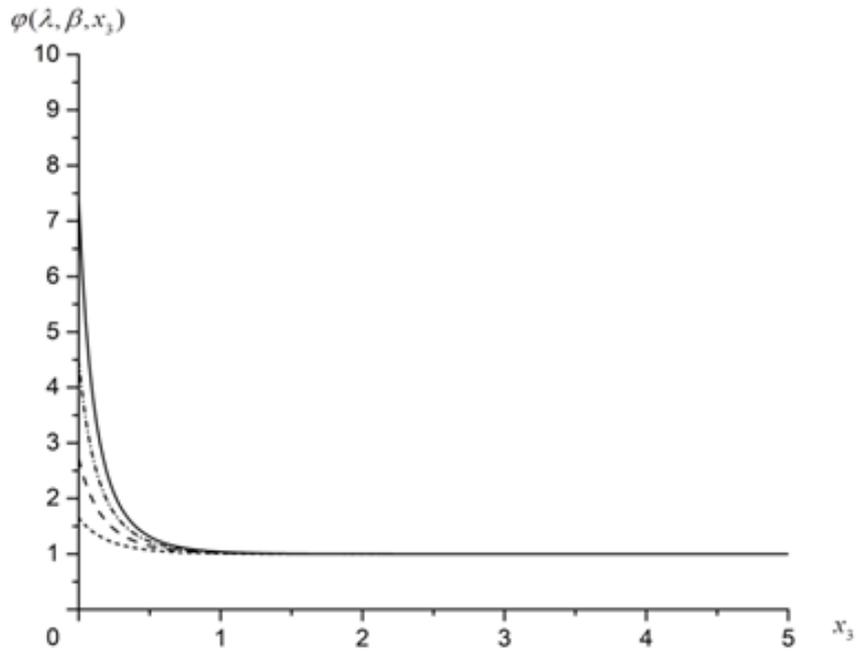


Рисунок 2.3 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 2$ от параметра λ принимающего значения $\{3;2;1;0.5\}$

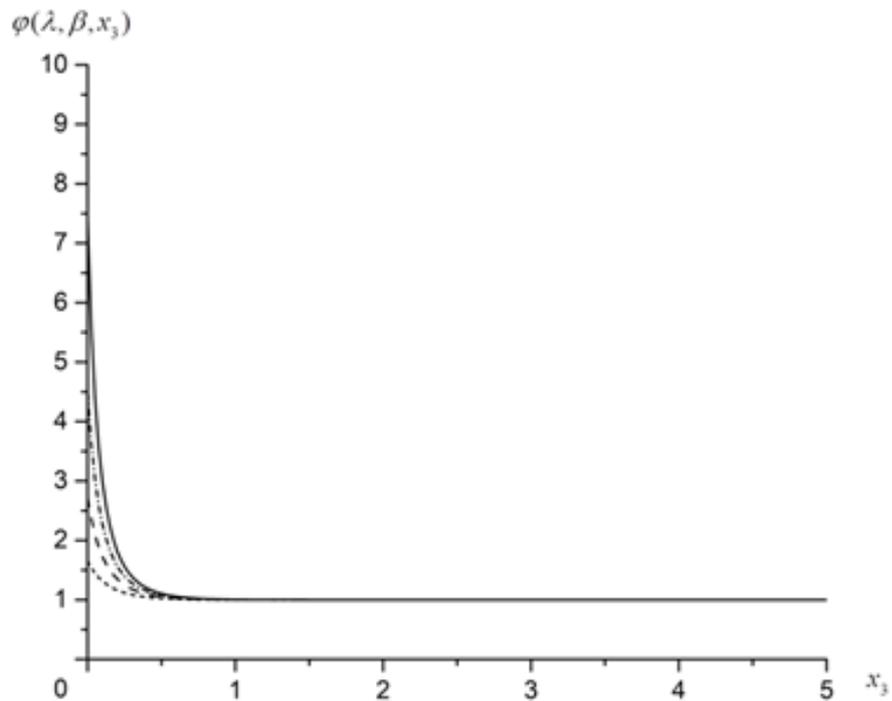


Рисунок 2.4 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 3$ от параметра λ принимающего значения $\{3;2;1;0.5\}$

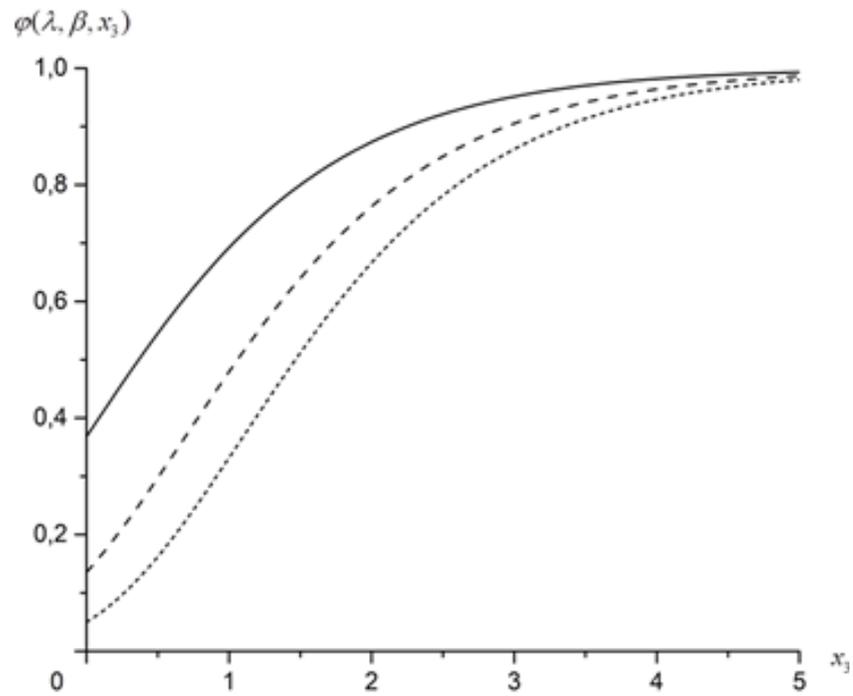


Рисунок 2.5 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 0.5$ от параметра λ принимающего значения $\{-1; -2; -3\}$

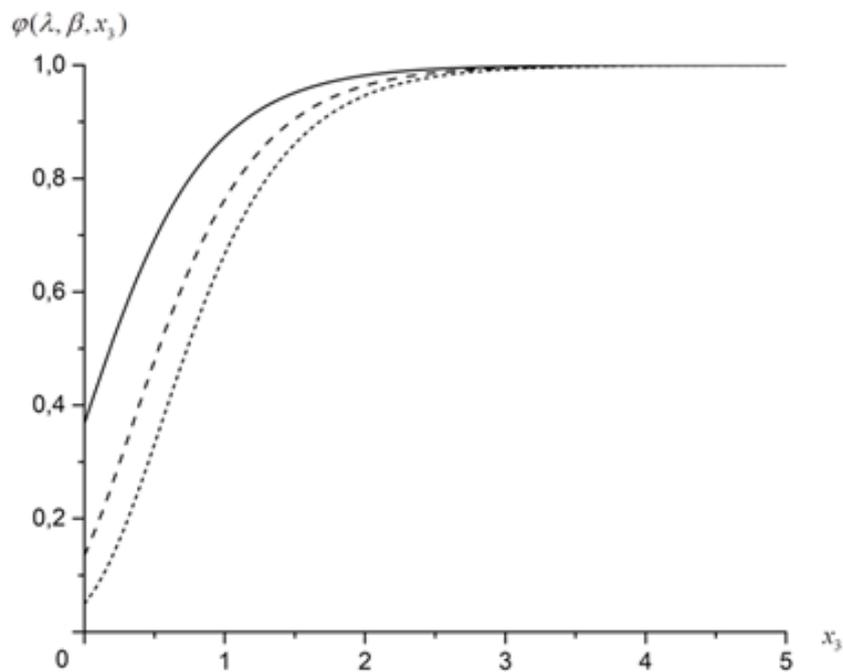


Рисунок 2.6 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 1$ от параметра λ принимающего значения $\{-1; -2; -3\}$

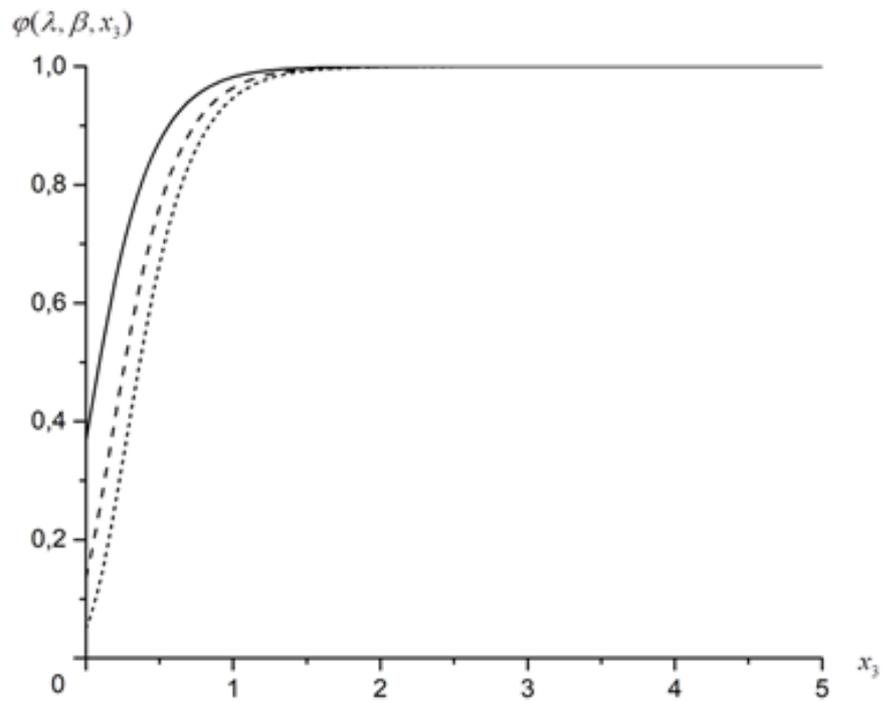


Рисунок 2.7 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 2$ от параметра λ принимающего значения $\{-1; -2; -3\}$

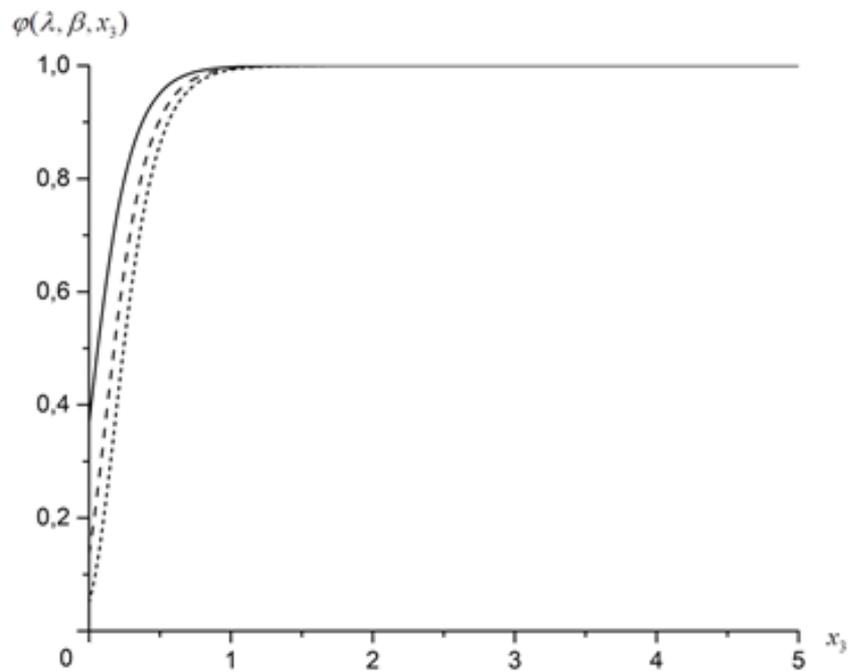


Рисунок 2.8 – Зависимость вида двойной экспоненциальной функции с параметром $\beta = 3$ от параметра λ принимающего значения $\{-1; -2; -3\}$

2.2. Интегрирование уравнения модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с приграничной локализованной зоной неоднородности.

Рассматривается упругий трансверсально-изотропный функционально-градиентный полубесконечный геомассив, занимающий в пространстве безразмерных отнесенных к нормирующему параметру h_* координат $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \geq 0\},$$

с ориентированными вдоль Ox_3 осью изотропии и направлением однофакторной неоднородности. Для описания эффектов существования локализованных у его граничной поверхности $x_3 = 0$ зон непрерывной неоднородности физико-механических свойств со снижающейся при отходе от границы вглубь полупространства количественной мерой изменчивости и с асимптотическим выходом на стабилизированные постоянные значения параметров физико-механических свойств в глубине массива при неограниченном увеличении $|x_3|$, предлагается использование предложенного в подразделе 2.1 двойного экспоненциального функционального закона изменения плотности и упругих постоянных массива с введением представлений вида

$$c_{ij} = c_{ij0} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho = \rho_0 \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3) \quad (ij = 11, 12, 13, 33, 44), \quad (2.2)$$

$$\varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)),$$

в которых c_{ij0} – отнесенные к нормирующему параметру c_* безразмерные параметры упругих свойств; λ, β – охарактеризованные в подразделе 2.1 действительные параметры неоднородности, $\beta > 0$ при $x_3 \geq 0$.

Без ограничения общности, при исследовании задачи о распространении горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости изотропии полупространства, в

качестве которого выбирается координатное направление Ox_1 , представления для отличных от нуля комплексных функций волновых упругих перемещений $u_2(x_1, x_3, t)$ и напряжений σ_{12} , σ_{23} вводятся в виде

$$u_2 = f(x_3) \cdot \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad \sigma_{12} = c_{66} \partial_1 u_2, \quad \sigma_{23} = c_{44} \partial_3 u_2, \quad \partial_j = \partial / \partial x_j, \quad (2.3)$$

где ω – циклическая частота исследуемой волны; k – отнесенное к h_* безразмерное нормированное волновое число.

Подстановка выражений (2.3) в соответствующее динамическое уравнение для упругой среды

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{23} - \rho \ddot{u}_2 = 0, \quad (2.4)$$

с учетом соотношения

$$\partial_3 \sigma_{23} = c_{440} e^{\lambda e^{-\beta x_3}} e^{-\beta x_3} (-\lambda \beta) f' + c_{440} e^{\lambda e^{-\beta x_3}} f'', \quad (2.5)$$

после преобразований приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами относительно функции $f(x_3)$

$$-k^2 c_{660} f(x_3) - c_{440} \lambda \beta e^{-\beta x_3} f' + c_{440} f'' + \rho_0 \omega^2 f = 0, \quad (2.6)$$

которое преобразуется к унифицированному виду

$$f'' + \alpha f = \gamma e^{-\beta x_3} f', \quad (2.7)$$

где

$$\alpha = (\Omega^2 - c_{660} k^2) / c_{440}, \quad \Omega^2 = \rho_0 \omega^2 h_*^2 / c_*, \quad \gamma = \lambda \beta, \quad (2.8)$$

Ω – безразмерный частотный параметр.

Для интегрирования уравнения вида (2.7) используется алгоритм последовательных приближений [9], представляемый соотношениями

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p + \dots, \quad (2.9)$$

$$f_0'' + \alpha f_0 = 0, \quad f_2'' + \alpha f_2 = \gamma e^{-\beta x_3} f_1', \quad \dots, \quad f_p'' + \alpha f_p = \gamma e^{-\beta x_3} f_{p-1}', \quad \dots$$

На начальном этапе реализации этого алгоритма записывается выражение

$$f_0 = c_+ e^{\delta x_3} + c_- e^{-\delta x_3}, \quad \delta = i \alpha^{1/2},$$

с произвольными коэффициентами c_+ , c_- и далее, соответственно, определяются два базисных частных решения (2.7), отвечающие выбору $f_0 = e^{\delta x_3}$ или $f_0 = e^{-\delta x_3}$.

Для первого варианта выбора f_0 в результате применения алгоритма (2.9) могут быть получены представления

$$f_1 = A_1 e^{(\delta-\beta)x_3}, f_2 = A_2 e^{(\delta-2\beta)x_3}, \dots, f_p = A_p e^{(\delta-p\beta)x_3}, \dots, \quad (2.10)$$

в которых

$$A_1 = \gamma\delta((\delta-\beta)^2 + \alpha)^{-1}, A_2 = A_1\gamma(\delta-\beta)((\delta-2\beta)^2 + \alpha)^{-1}, \dots, \quad (2.11)$$

$$A_p = A_{p-1}\gamma(\delta-(p-1)\beta)((\delta-p\beta)^2 + \alpha)^{-1}.$$

Таким образом, для ряда, представляющего первое базисное частное решение (2.7), записывается явное аналитическое представление

$$f_+(x_3) = e^{\delta x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (\delta - (p-1)\beta)((\delta - p\beta)^2 + \alpha)^{-1} \right] e^{(\delta-n\beta)x_3}. \quad (2.12)$$

Второе базисное решение имеет представление вида (2.12) с заменой параметра δ на $-\delta$:

$$f_-(x_3) = e^{-\delta x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\delta - (p-1)\beta)((-\delta - p\beta)^2 + \alpha)^{-1} \right] e^{(-\delta-n\beta)x_3}, \quad (2.13)$$

$$(\delta > 0, \beta > 0).$$

В рассматриваемой области V отвечающее физическим условиям затухания интенсивности волновых движений при $x_3 \rightarrow \infty$ решение (2.7) имеет вид (2.13).

Записывая для (2.13) мажорирующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma|^n \left[\prod_{p=1}^n |(-\delta - (p-1)\beta)| \left| ((-\delta - p\beta)^2 + \alpha)^{-1} \right| \right]$$

в области $x_3 \in [0, \infty]$ и используя признак Даламбера, можно найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_{n+1} / \eta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\gamma| (\delta + n\beta) / ((\delta + (n+1)\beta)^2 + \alpha)) = 0,$$

что обосновывает равномерную абсолютную сходимость данного ряда.

Рассчитанный в качестве примера график зависимости $|f_-(x_3)|$ ($x_3 \in [0, 10]$) при $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.1$ изображен на рисунке 2.9.

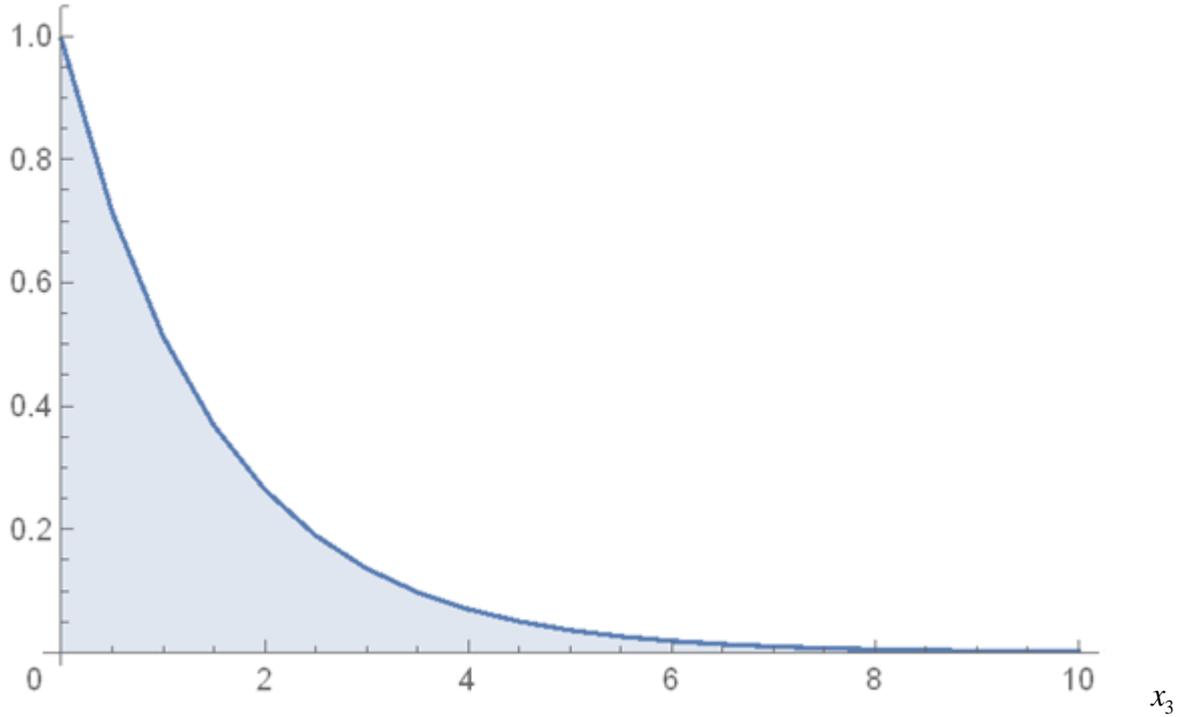


Рис. 2.9. Профиль функции $|f_-(x_3)|$

2.3. Интегрирование системы уравнения распространения упругих волн P-SV типа в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с приграничной локализованной зоной неоднородности

При исследовании проблемы распространения в полупространстве V локализованных волн P-SV типа компоненты комплексного вектора волновых упругих перемещений задаются представлениями

$$u_1(x_1, x_3) = u_{10}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad u_2(x_1, x_3) \equiv 0, \quad (2.14)$$

$$u_3(x_1, x_3) = u_{30}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)).$$

Определяющие соотношения для трансверсально-изотропного материала рассматриваемого полупространства

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \partial_1 u_1 + c_{12} \partial_2 u_2 + c_{13} \partial_3 u_3, \\ \sigma_{22} &= c_{12} \partial_1 u_1 + c_{11} \partial_2 u_2 + c_{13} \partial_3 u_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13} \partial_1 u_1 + c_{13} \partial_2 u_2 + c_{33} \partial_3 u_3, \\ \sigma_{23} &= c_{44} (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\sigma_{13} = ((c_{11} - c_{12})/2)(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1),$$

$$\sigma_{12} = c_{66}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1),$$

с учетом представлений (2.14) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= c_{11}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{13}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{22} &= c_{12}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{23}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{33} &= c_{13}(x_3)\partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{33}(x_3)\partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{13} &= c_{44}(x_3)(\partial_1 u_3(x_1, x_3) + \partial_3 u_1(x_1, x_3)).\end{aligned}\tag{2.16}$$

После их подстановки в систему уравнений движения сплошной среды

$$\begin{aligned}\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} + \partial_3 \sigma_{23} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \partial_1 \sigma_{31} + \partial_2 \sigma_{32} + \partial_3 \sigma_{33} &= \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},\end{aligned}\tag{2.17}$$

с учетом представлений

$$c_{ij}(x_3) = c_{ij}^{(0)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho = \rho^{(0)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad (ij = 11, 12, 13, 33, 44),$$

$$\varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)),$$

записывается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned}&c_{11}^{(0)} \partial_1^2 u_1 + c_{13}^{(0)} \partial_1 \partial_3 u_3 + \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)} \partial_1 u_3 + \\ &+ \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)} \partial_3 u_1 + c_{44}^{(0)} \partial_3 \partial_1 u_3 + c_{44}^{(0)} \partial_3^2 u_1 - \rho^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1 = 0, \\ &c_{44}^{(0)} \partial_1^2 u_3 + c_{44}^{(0)} \partial_1 \partial_3 u_1 + \gamma e^{-\beta x_3} c_{13}^{(0)} \partial_1 u_1 + \\ &+ \gamma e^{-\beta x_3} c_{33}^{(0)} \partial_3 u_3 + c_{13}^{(0)} \partial_3 \partial_1 u_1 + c_{33}^{(0)} \partial_3^2 u_3 - \rho^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_3 = 0,\end{aligned}\tag{2.18}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}&c_{44}^{(0)} u_{10}'' + \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)} u_{10}' + (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2) u_{10} + \\ &+ (c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) (ik) u_{30}' + \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)} (ik) u_{30} = 0, \\ &(c_{44}^{(0)} + c_{13}^{(0)}) (ik) u_{10}' + \gamma e^{-\beta x_3} c_{13}^{(0)} (ik) u_{10} + \\ &+ c_{33}^{(0)} u_{30}'' + \gamma e^{-\beta x_3} c_{33}^{(0)} u_{30}' + (\rho^{(0)} \omega^2 - c_{44}^{(0)} k^2) u_{30} = 0.\end{aligned}\tag{2.19}$$

Далее система (2.19) преобразуется к следующей матричной форме

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{F}(x_3) = 0, \quad (2.20)$$

где $\underline{F}(x_3)$ – вектор-функция решения

$$\underline{F}(x_3) = \begin{pmatrix} u_{10}(x_3) \\ u_{30}(x_3) \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$ – матрицы функциональных коэффициентов при $\partial_3^2 F, \partial_3 F, F$ соответственно

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)} & (c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)})(ik) \\ (c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)})(ik) & \gamma e^{-\beta x_3} c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\underline{A}_3 = \begin{pmatrix} \Omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2 & \gamma e^{-\beta x_3} c_{44}^{(0)}(ik) \\ \gamma e^{-\beta x_3} c_{13}^{(0)}(ik) & \Omega^2 - c_{44}^{(0)} k^2 \end{pmatrix}.$$

С введением следующих разложений матриц

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \underline{A}_1^{(0)} + \underline{A}_1^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3}, \\ \underline{A}_2 &= \underline{A}_2^{(0)} + \underline{A}_2^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3}, \\ \underline{A}_3 &= \underline{A}_3^{(0)} + \underline{A}_3^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

система (2.19) преобразуется к виду

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}(x_3) = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}(x_3), \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{A}_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & (c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)})(ik) \\ (c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)})(ik) & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_3^{(0)} = \begin{pmatrix} c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3^{(0)} &= \begin{pmatrix} \Omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2 & 0 \\ 0 & \Omega^2 - c_{44}^{(0)} k^2 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & c_{44}^{(0)}(ik) \\ c_{13}^{(0)}(ik) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для интегрирования системы (2.24) применяется итерационный алгоритм, представляемый соотношениями

$$\underline{F} = \underline{F}_0 + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_p + \dots, \quad (2.26)$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_0 = 0, \quad (\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_1 = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_0, \dots,$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_p = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_{p-1} \dots$$

Представление \underline{F}_0 определяется в результате интегрирования однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}(x_3) = 0, \quad (2.27)$$

или

$$\begin{aligned} c_{44}^{(0)} u''_{10} + (\Omega^2 - c_{11}^{(0)} k^2) u_{10} + (c_{13}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) (ik) u'_{30} &= 0, \\ (c_{44}^{(0)} + c_{13}^{(0)}) (ik) u'_{10} + c_{33}^{(0)} u''_{30} + (\Omega^2 - c_{44}^{(0)} k^2) u_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

После преобразования (2.28) к виду

$$\begin{aligned} a_1 u''_{01} + b_1 u_{01} + c_1 u'_{30} &= 0, \\ a_2 u'_{10} + b_2 u''_{30} + c_2 u_{30} &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

с применением для интегрирования метода Эйлера на базе подстановки $u_{01} = Q_1 e^{\delta x_3}$, $u_{03} = Q_3 e^{\delta x_3}$ в качестве следствия записывается система алгебраических уравнений относительно неизвестных Q_1, Q_3 :

$$\begin{aligned} (a_1 \delta^2 + b_1) Q_1 + c_1 \delta Q_3 &= 0, \\ a_2 \delta Q_1 + (b_2 \delta^2 + c_2) Q_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

и формулируется характеристическое полиномиальное биквадратное уравнению для определения p

$$\begin{vmatrix} a_1 \delta^2 + b_1 & c_1 \delta \\ a_2 \delta & b_2 \delta^2 + c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.31)$$

$$a_1 b_2 \delta^4 + (a_1 c_2 + b_1 b_2 - c_1 a_2) \delta^2 + b_1 c_2 = 0, \quad (2.32)$$

или

$$A \delta^4 + B \delta^2 + C = 0. \quad (2.33)$$

Отсюда

$$\delta_{1,2} = \left(\frac{-B \pm \sqrt{D}}{2} \right)^{1/2}, \quad \delta_{3,4} = - \left(\frac{-B \pm \sqrt{D}}{2} \right)^{1/2}, \quad D = B^2 - 4AC; \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} u_{01}(x_3) &= Q_1^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_1^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_1^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_1^{(4)} e^{\delta_4 x_3}, \\ u_{03}(x_3) &= Q_3^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_3^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_3^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_3^{(4)} e^{\delta_4 x_3}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В выражениях (2.35)

$$Q_1^{(j)} = Q^{(j)}, \quad Q_3^{(j)} = \Delta_3^{(j)} Q^{(j)}, \quad (2.36)$$

$$\Delta_3^{(j)} = c_1 \delta_j (a_1 \delta_j^2 + b_1)^{-1}; \quad (2.37)$$

$Q^{(j)}$ – произвольные коэффициенты.

В итоге, решение системы (2.28) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_{01}(x_3) &= Q^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q^{(4)} e^{\delta_4 x_3}, \\ u_{03}(x_3) &= Q^{(1)} \Delta_3^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q^{(2)} \Delta_3^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q^{(3)} \Delta_3^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q^{(4)} \Delta_3^{(4)} e^{\delta_4 x_3}; \end{aligned} \quad (2.38)$$

или

$$\underline{F}_0(x_3) = Q^{(1)} \underline{F}_{01} + Q^{(2)} \underline{F}_{02} + Q^{(3)} \underline{F}_{03} + Q^{(4)} \underline{F}_{04}, \quad (2.39)$$

$$\underline{F}_{0j} = \underline{f}_{0j} e^{\delta_j x_3}, \quad \underline{f}_{0j} = (1, \Delta_3^{(j)})^T. \quad (2.40)$$

Соответственно представлению (2.39), согласно (2.26), на основе итерационного алгоритма, строятся 4 базисных частных решения системы (2.19), последовательно отвечающие выбору $\underline{F}_0(x_3) = \underline{F}_{0j}(x_3)$.

В результате применения алгоритма (2.26) при выборе $\underline{F}_0(x_3) = \underline{F}_{0j}(x_3)$ можно получить следующие выражения

$$\underline{F}_{0j}(x_3) = \underline{f}_{0j} e^{\delta_j x_3}, \quad \underline{F}_{1j}(x_3) = \underline{f}_{1j} e^{(\delta_j - \beta)x_3}, \quad \dots \quad \underline{F}_{nj}(x_3) = \underline{f}_{nj} e^{(\delta_j - n\beta)x_3}, \dots, \quad (2.41)$$

где n – номер итерации.

При этом, для вычисления векторных коэффициентов \underline{f}_{nj} получены соотношения

$$\underline{f}_{nj} = -\gamma \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{f}_{n-1,j}, \quad (2.42)$$

или

$$\underline{f}_{nj} = (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{M}_{1n-1,j}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j} \dots \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} \underline{f}_{01},$$

где

$$\underline{M}_{1n,j} = (\delta_j - n\beta)^2 \underline{A}_1^0 + (\delta_j - n\beta) \underline{A}_2^0 + \underline{A}_3^0, \quad (2.43)$$

$$\underline{M}_{2n,j} = (\delta_j - (n-1)\beta) \underline{A}_2^1 + \underline{A}_3^1.$$

С введением обозначений для произведений матриц

$$\underline{Q}_{nj} = \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j}, \quad (2.44)$$

аналитические представления для базисных частных решений системы уравнений

(2.19) \underline{F}_j можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned}
 \underline{F} &= f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{0j} e^{(\delta_j - \beta) x_3} + \gamma^2 \underline{M}_{12,j}^{-1} \underline{M}_{22,j} \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta) x_3} - \dots + \\
 &\quad + (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{M}_{1n-1,j}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j} \dots \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{0j} e^{(\delta_j - n\beta) x_3} + \dots = \\
 &= f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{Q}_{1j} f_{0j} e^{(\delta_j - \beta) x_3} + \gamma^2 \underline{Q}_{2j} \underline{Q}_{1j} f_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta) x_3} - \dots + \\
 &\quad + (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj} \underline{Q}_{n-1,j} \dots \underline{Q}_{1j} f_{0j} e^{(\delta_j - n\beta) x_3} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

По данной формуле получаем каждое из 4 базисных решений.

2.4. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности

Для полупространства V из материала рассматриваемого типа система уравнений пространственного динамического деформирования относительно функций волновых упругих перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 &\left(c_{11}(x_3) \partial_1^2 + c_{66}(x_3) \partial_2^2 + c_{55}(x_3) \partial_3^2 + c'_{55}(x_3) \partial_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_{10} + \\
 &\quad + (c_{12}(x_3) \partial_1 \partial_2 + c_{66}(x_3) \partial_1 \partial_2) u_{20} + \\
 &\quad + (c_{13}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c_{55}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c'_{55}(x_3) \partial_1) u_{30} = 0, \\
 &\quad (c_{12}(x_3) \partial_1 \partial_2 + c_{66}(x_3) \partial_1 \partial_2) u_{10} + \\
 &\quad + \left(c_{66}(x_3) \partial_1^2 + c_{12}(x_3) \partial_2^2 + c_{44}(x_3) \partial_3^2 + c'_{44}(x_3) \partial_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_{20} + \\
 &\quad + (c_{23}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c_{44}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c'_{44}(x_3) \partial_1) u_{30} = 0, \\
 &\quad (c_{55}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c_{13}(x_3) \partial_1 \partial_3 + c'_{13}(x_3) \partial_1) u_{10} + \\
 &\quad + (c_{44}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c_{23}(x_3) \partial_2 \partial_3 + c'_{23}(x_3) \partial_2) u_{20} + \\
 &\quad + \left(c_{55}(x_3) \partial_1^2 + c_{44}(x_3) \partial_2^2 + c_{33}(x_3) \partial_3^2 + c'_{33}(x_3) \partial_3 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_{30} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Для комплексных функций колебательных перемещений в стационарных трехпарциальных локализованных упругих волнах, распространяющихся вдоль произвольного характеризуемого компонентами n_1, n_2 вектора волновой нормали направления в плоскости Ox_1x_2 , вводятся представления

$$u_j(x_1, x_2, x_3, t) = u_{j0}(x_3) \exp(-i(\omega t - k(n_1x_1 + n_2x_2))). \quad (2.47)$$

В результате подстановки представлений (2.47) в уравнения (2.46), относительно амплитудных составляющих $u_{j0}(x_3)$ комплексных функций волновых перемещений может быть получена система обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка, имеющая в матрично-векторной форме вид

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{F} = 0 \quad (2.48)$$

где \underline{F} – вектор решения

$$\underline{F} = (u_{10}, u_{20}, u_{30})^T, \quad (2.49)$$

$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$ – матрицы коэффициентов при $\partial_3^2 F$, $\partial_3 F$, F соответственно

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} c'_{55} & 0 & ikn_1(c_{13} + c_{55}) \\ 0 & c'_{44} & ikn_2(c_{23} + c_{44}) \\ ikn_1(c_{13} + c_{55}) & ikn_2(c_{23} + c_{44}) & c'_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

$$\underline{A}_3 = \begin{pmatrix} \Omega^2 - (c_{11}k^2n_1^2 + c_{66}k^2n_2^2) & -(c_{12} + c_{66})k^2n_1n_2 & ikn_1c'_{55} \\ -(c_{12} + c_{66})k^2n_1n_2 & \Omega^2 - (c_{66}k^2n_1^2 + c_{12}k^2n_2^2) & ikn_2c'_{44} \\ ikn_1c'_{13} & ikn_2c'_{23} & \Omega^2 - (c_{55}k^2n_1^2 + c_{44}k^2n_2^2) \end{pmatrix}.$$

Исходя из представлений

$$c_{ij}(x_3) = c_{ij}^{(0)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho = \rho^{(0)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3)$$

$$(ij = 11, 22, 33, 23, 13, 12, 44, 55, 66),$$

$$\varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)),$$

с учетом

$$c'_{ij}(x_3) = c'_{ij}^{(0)} \gamma e^{-\beta x_3} e^{\lambda e^{-\beta x_3}}, \quad (2.51)$$

и на основе разложения матриц

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_1^{(0)} + \underline{A}_1^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3},$$

$$\underline{A}_2 = \underline{A}_2^{(0)} + \underline{A}_2^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3}, \quad (2.52)$$

$$\underline{A}_3 = \underline{A}_3^{(0)} + \underline{A}_3^{(1)} \gamma e^{-\beta x_3},$$

система (2.46) может быть записана в виде

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F} = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}, \quad (2.53)$$

где $\underline{A}_1^{(0)}, \underline{A}_2^{(0)}, \underline{A}_3^{(0)}, \underline{A}_2^{(1)}, \underline{A}_3^{(1)}$ – матрицы вида

$$\underline{A}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} c_{55}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i k n_1 (c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)}) \\ 0 & 0 & i k n_2 (c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) \\ i k n_1 (c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)}) & i k n_2 (c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)}) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\underline{A}_3^{(0)} = \begin{pmatrix} \Omega^2 - (c_{11}^{(0)} k^2 n_1^2 + c_{66}^{(0)} k^2 n_1 n_2) & -(c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)}) k^2 n_1 n_2 & 0 \\ -(c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)}) k^2 n_1 n_2 & \Omega^2 - (c_{11}^{(0)} k^2 n_1^2 + c_{66}^{(0)} k^2 n_1 n_2) & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 - (c_{11}^{(0)} k^2 n_1^2 + c_{66}^{(0)} k^2 n_1 n_2) \end{pmatrix};$$

$$\underline{A}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} c_{55}^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i k n_1 c_{55}^{(0)} \\ 0 & 0 & i k n_2 c_{44}^{(0)} \\ i k n_1 c_{13}^{(0)} & i k n_2 c_{23}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Для интегрирования системы (2.53) применяется итерационный алгоритм, определяемый соотношениями

$$\underline{F} = \underline{F}_0 + \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \dots + \underline{F}_p + \dots, \quad (2.56)$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_0 = 0, \quad (\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_1 = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_0, \dots,$$

$$(\underline{A}_1^{(0)} \partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(0)}) \underline{F}_p = -\gamma e^{-\beta x_3} (\underline{A}_2^{(1)} \partial_3 + \underline{A}_3^{(1)}) \underline{F}_{p-1}, \dots$$

На исходном этапе его реализации записывается представление для решения однородного уравнения относительно \underline{F}_0 , имеющее вид

$$\underline{F}_0 = c_1 \underline{F}_{01} + c_2 \underline{F}_{02} + c_3 \underline{F}_{03} + c_4 \underline{F}_{04} + c_5 \underline{F}_{05} + c_6 \underline{F}_{06}, \quad (2.57)$$

где c_j произвольные коэффициенты;

$$\underline{F}_{0j} = \underline{f}_{0j} e^{\delta_j x_3}, \quad \underline{f}_{0j} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_{0j} \\ b_{0j} \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Представления (2.57), (2.58) являются результатом применения метода Эйлера к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно \underline{F}_0

$$(\underline{A}_1^{(0)}\partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0)}\partial_3 + \underline{A}_3^{(0)})\underline{F} = 0, \quad (2.59)$$

имеющей в развернутую форму

$$\begin{aligned} & c_{55}^{(0)}u_{01}'' + (\Omega^2 - (c_{11}^{(0)}k^2n_1^2 + c_{66}^{(0)}k^2n_1n_2))u_{01} - \\ & - (c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)})k^2n_1n_2u_{20} + \\ & + ikn_1(c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)})u'_{30} = 0, \\ & - (c_{12}^{(0)} + c_{66}^{(0)})k^2n_1n_2u_{10} + \\ & + c_{44}^{(0)}u_{02}'' + (\Omega^2 - (c_{11}^{(0)}k^2n_1^2 + c_{66}^{(0)}k^2n_1n_2))u_{02} + \\ & + ikn_2(c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)})u'_{30} = 0, \\ & ikn_1(c_{13}^{(0)} + c_{55}^{(0)})u'_{10} + \\ & + ikn_2(c_{23}^{(0)} + c_{44}^{(0)})u'_{20} + \\ & + c_{33}^{(0)}u_{03}'' + (\Omega^2 - (c_{11}^{(0)}k^2n_1^2 + c_{66}^{(0)}k^2n_1n_2))u_{03} = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

В процессе интегрирования система (2.60) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & a_1u_{01}'' + b_1u'_{30} + c_1u_{01} + d_1u_{20} = 0, \\ & a_2u_{02}'' + b_2u'_{30} + c_2u_{01} + d_2u_{02} = 0, \\ & a_3u_{03}'' + b_3u'_{10} + c_3u'_{02} + d_3u_{30} = 0, \end{aligned} \quad (2.61)$$

и на базе подстановки $u_{01} = Q_1e^{\delta x_3}$, $u_{02} = Q_2e^{\delta x_3}$, $u_{03} = Q_3e^{\delta x_3}$ трансформируется в однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных Q_1, Q_2, Q_3 :

$$\begin{aligned} & (a_1\delta^2 + c_1)Q_1 + d_1Q_2 + b_1\delta Q_3 = 0, \\ & (c_2Q_1 + (a_2\delta^2 + d_2)Q_2 + b_2\delta Q_3 = 0, \\ & b_3\delta Q_1 + c_3\delta Q_2 + (a_3\delta^2 + d_3)Q_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Из (2.62) следует полиномиальное характеристическое уравнение для определения значений δ_j и соотношения связи Q_1, Q_2, Q_3 при каждом δ_j :

$$\begin{vmatrix} (a_1\delta^2 + c_1) & d_1 & b_1\delta \\ c_2 & (a_2\delta^2 + d_2) & b_2\delta \\ b_3\delta & c_3\delta & (a_3\delta^2 + d_3) \end{vmatrix} = \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} & = a_1a_2a_3\delta^6 + (a_1a_3c_2 + a_2a_3c_1 + a_1a_2d_3 - a_2b_1b_3 - a_1b_2c_3)\delta^4 + (c_1c_2a_3 + a_1c_2d_3 + c_1a_2d_3 + d_1b_2b_3 + \\ & + b_1c_2c_3 - b_1b_3c_2 - d_1c_2a_3 - b_2c_1c_3)\delta^2 + c_1c_2d_3 - c_2d_1d_3 = 0 \end{aligned}$$

или

$$A\delta^6 + B\delta^4 + C\delta^2 + D = 0, \quad (2.64)$$

откуда по формулам Кардано

$$\delta_1^2 = -\frac{B}{3A} - \frac{(\sqrt[3]{2}(-B^2 + 3AC))}{3AY} + \frac{3AY}{\sqrt[3]{23A}}, \quad (2.65)$$

$$\delta_2^2 = -\frac{B}{3A} + \frac{(1 + i\sqrt{3}(-B^2 + 3AC))}{\sqrt[3]{43AY}} - \frac{(1 - i\sqrt{3})Y}{\sqrt[3]{26A}},$$

$$\delta_2^2 = -\frac{B}{3A} + \frac{(1 - i\sqrt{3}(-B^2 + 3AC))}{\sqrt[3]{43AY}} - \frac{(1 + i\sqrt{3})Y}{\sqrt[3]{26A}},$$

$$Y = (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D + (4(-B^2 + 3AC)^3 + (-2B^3 + 9ABC - 27A^2D)^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}.$$

Отвечающие данному множеству значений $\pm \delta_j$ решения системы дифференциальных уравнений (2.61) записываются в виде

$$u_{01} = Q_1^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_1^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_1^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_1^{(4)} e^{\delta_4 x_3} + Q_1^{(5)} e^{\delta_5 x_3} + Q_1^{(6)} e^{\delta_6 x_3}, \quad (2.66)$$

$$u_{02} = Q_2^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_2^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_2^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_2^{(4)} e^{\delta_4 x_3} + Q_2^{(5)} e^{\delta_5 x_3} + Q_2^{(6)} e^{\delta_6 x_3},$$

$$u_{03} = Q_3^{(1)} e^{\delta_1 x_3} + Q_3^{(2)} e^{\delta_2 x_3} + Q_3^{(3)} e^{\delta_3 x_3} + Q_3^{(4)} e^{\delta_4 x_3} + Q_3^{(5)} e^{\delta_5 x_3} + Q_3^{(6)} e^{\delta_6 x_3},$$

а соотношения связи коэффициентов определяются из систем линейных алгебраических уравнений

$$(a_1\delta^2 + c_1)Q_1^{(j)} + d_1Q_2^{(j)} + b_1\delta Q_3^{(j)} = 0, \quad (2.67)$$

$$(c_2Q_1^{(j)} + (a_2\delta^2 + d_2)Q_2^{(j)} + b_2\delta Q_3^{(j)} = 0,$$

$$b_3\delta Q_1^{(j)} + (c_3\delta Q_2^{(j)} + (a_3\delta^2 + d_3)Q_3^{(j)} = 0$$

в форме

$$Q_1^{(j)} = Q^{(j)}, \quad Q_2^{(j)} = \Delta_2^{(j)} Q^{(j)}, \quad Q_3^{(j)} = \Delta_3^{(j)} Q^{(j)}, \quad (2.68)$$

$$\Delta_2^{(j)} = ((b_2b_3 - c_2a_3)\delta_j^2 - c_2d_3)\chi^{-1},$$

$$\Delta_3^{(j)} = (-a_2b_3\delta_j^2 + c_2c_3 - d_2b_3)\delta_j\chi^{-1},$$

$$\chi = (a_3\delta_j^2 + d_3)(a_2\delta_j^2 + d_2) - b_2c_3\delta_j^2.$$

Таким образом, для однородной системы дифференциальных уравнений (2.60) определяются шесть базисных частных решений $\underline{F}_{0j}(x_3)$, при использовании которых в качестве начальных приближений для итерационного алгоритма (2.56)

соответственно реализуется построение шести базисных частных решений $\underline{F}_j(x)$ системы (2.53).

При выборе $\underline{F}_0(x_3) = \underline{F}_{0j}(x_3)$, $\underline{F}_{0j} = \underline{f}_{0j} e^{\delta_j x_3}$, на основе алгоритма (2.56) можно получить

$$\underline{F}_{1j} = \underline{f}_{1j} e^{(\delta_j - \beta)x_3}, \dots, \underline{F}_{nj} = \underline{f}_{nj} e^{(\delta_j - n\beta)x_3}, \dots, \quad (2.69)$$

где n – номер итерации, а векторные коэффициенты \underline{f}_{nj} имеют вид

$$\underline{f}_{nj} = -\gamma \underline{M}_{1nj}^{-1} \underline{M}_{2nj} \underline{f}_{n-1j}, \quad (2.70)$$

где

$$\underline{M}_{1nj} = (\delta_j - n\beta)^2 \underline{A}_1^0 + (\delta_j - n\beta) \underline{A}_2^0 + \underline{A}_3^0, \quad (2.71)$$

$$\underline{M}_{2nj} = ((\delta_j - \beta) \underline{A}_2^1 + \underline{A}_3^1),$$

и, следовательно,

$$\underline{f}_{nj} = (-\gamma)^n \underline{M}_{1nj}^{-1} \underline{M}_{2nj} \underline{M}_{1n-1j}^{-1} \underline{M}_{2n-1j} \dots \underline{M}_{11j}^{-1} \underline{M}_{21j} \underline{f}_{0j}. \quad (2.72)$$

В итоге, с введением обозначения

$$\underline{Q}_{nj} = \underline{M}_{1nj}^{-1} \underline{M}_{2nj}, \quad (2.73)$$

аналитическое представление для соответствующего базисного частного решения системы (2.59) записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \underline{F}_j(x_3) = & f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{0j} e^{(\delta_j - \beta)x_3} + \\ & + \gamma^2 \underline{M}_{12,j}^{-1} \underline{M}_{22,j} \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta)x_3} - \dots + \\ & (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{M}_{1n-1,j}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j} \dots \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} f_{0j} e^{(\delta_j - n\beta)x_3} + \dots = \\ & f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - \beta)x_3} + \gamma^2 \underline{Q}_{2j} \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta)x_3} - \dots + \\ & + (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj} \underline{Q}_{n-1j} \dots \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - n\beta)x_3} + \dots \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.5. Интегрирование уравнений некоторых вариантов двухфакторных моделей распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной функционально-градиентной среде

В данном подразделе рассматриваются решения некоторых вариантов задач интегрирования амплитудных дифференциальных уравнений, записываемых при исследовании процессов распространения нормальных упругих волн SH-типа с циклической частотой ω и нормированным волновым числом k в слое $V = \{(x_1, x_2) \in R_2, 0 \leq x_3 \leq h\}$ трансверсально-изотропного функционально-градиентного материала с направлением неоднородности и осью изотропии, коллинеарными Ox_3 , в случаях разнотипных законов двухфакторной экспоненциальной неоднородности для параметра его плотности и модулей упругости.

Без ограничения общности полагается, что исследуемая волна распространяется в плоскости слоя вдоль координатного направления Ox_1 , а представления для модулей упругости $c_{ij}(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ материала слоя в первом из рассматриваемых случаев двухфакторной неоднородности соответственно имеют вид

$$c_{ij}(x_3) = c_{ij0} \exp(\lambda_c x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda_\rho x_3), \quad (2.75)$$

где c_{ij0} – нормированные безразмерные характеристики упругих свойств; λ_c, λ_ρ – действительные параметры. Уравнение стационарного динамического деформирования волновода в случае распространяющихся сдвиговых горизонтально поляризованных волн с комплексной функцией напряженности

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad , \quad (2.76)$$

для рассматриваемого случая трансформируются в уравнение для определения комплексной амплитудной функции $u_{20}(x_3)$, имеющее вид

$$e^{\lambda_c x_3} (c_{440} \partial_3^2 u_{20}(x_3) + c_{440} \lambda_c \partial_3 u_{20}(x_3) - c_{660} k^2 u_{20}(x_3)) + e^{\lambda_\rho x_3} \Omega^2 u_{20}(x_3) = 0, \quad (2.77)$$

$$\partial_3 = \partial / \partial x_3,$$

и после введения следующих обозначений

$$u_{20}(x_3) = f(x_3), \quad \alpha = \lambda_c, \quad \beta = -c_{660}k^2 / c_{440}, \quad \gamma = -\Omega^2 / c_{440}, \quad (2.78)$$

$$\Omega^2 = \rho_0 \omega^2 h_*^2 / c_*, \quad \lambda = \lambda_c - \lambda_\rho,$$

записываемое в форме

$$f'' + \alpha f' + \beta f = \gamma e^{-\lambda x_3} f. \quad (2.79)$$

Для интегрирования уравнения (2.79) применяется аналогичная (2.9) схема итерационного алгоритма, в рамках которого

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p + \dots, \quad (2.80)$$

$$f_0'' + \alpha f_0' + \beta f_0 = 0, \quad f_1'' + \alpha f_1' + \beta f_1 = \gamma e^{-\lambda x_3} f_0, \quad \dots, \quad (2.81)$$

$$f_p'' + \alpha f_p' + \beta f_p = \gamma e^{-\lambda x_3} f_{p-1} \quad (p = \overline{1, \infty}).$$

Соответственно, при выборе $f_0(x_3)$ в форме

$$f_0(x_3) = C_1 e^{\delta_1 x_3} + C_2 e^{\delta_2 x_3}, \quad \delta_j = -(\alpha/2) + (-1)^j ((\alpha/2)^2 - \beta)^{1/2} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (2.82)$$

с произвольными коэффициентами c_j , далее в аналитической форме строятся два базисных частных решения $f^{(j)}(x_3)$ уравнения (2.79), отвечающие представлениям $f_{0j} = A_{0j} e^{\delta_j x_3}$, $f_{pj} = A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}$, где, согласно алгоритму (2.80),

$$A_{pj} = \gamma ((\delta_j - p\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - p\lambda) + \beta)^{-1} A_{p-1,j}, \quad A_{0j} = 1,$$

или

$$f^{(j)}(x_3) = e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}, \quad (2.83)$$

$$A_{pj} = \gamma^p \prod_{q=1}^p ((\delta_j - q\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - q\lambda) + \beta)^{-1}. \quad (2.84)$$

Соответствующие выражения для амплитудных функций динамических напряжений в исследуемых волновых полях могут быть записаны в виде

$$\sigma_{12}(x_3) = ikc_{660} \exp(\lambda_c x_3) u_{20}(x_3) = ikc_{660} \exp(\lambda_c x_3) (C_1 f^{(1)}(x_3) + C_2 f^{(2)}(x_3)), \quad (2.85)$$

$$\sigma_{23}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) u'_{20}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) (C_1 (f^{(1)}(x_3))' + C_2 (f^{(2)}(x_3))'), \quad (2.86)$$

$$(f^{(j)}(x_3))' = \delta_j e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} (\delta_j - p\lambda) A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}. \quad (2.87)$$

Вторым рассматриваемым случаем является исследование модели распространения сдвиговых нормальных волн в трансверсально-изотропном слое, представления для модулей упругости $c_{ij}(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ материала которого соответственно имеют вид

$$c_{44}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_1 x_3), \quad c_{66}(x_3) = c_{660} \exp(\lambda_2 x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda_1 x_3), \quad (2.88)$$

где λ_1, λ_2 – действительные параметры неоднородности. Уравнение рассматриваемой модели для координатного направления распространения Ox_1 , при задании представления комплексной функции напряженности

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (2.89)$$

с учетом представлений (2.88) и (2.89) принимает вид

$$\exp(\lambda_1 x_3)(c_{440} \partial_3^2 u_{20}(x_3) + c_{440} \lambda_c \partial_3 u_{20}(x_3) + \Omega^2 u_{20}(x_3)) - \exp(\lambda_2 x_3) c_{660} k^2 u_{20}(x_3) = 0, \quad (2.90)$$

и после введения обозначений

$$u_{20}(x_3) = f(x_3), \quad \alpha = \lambda_1, \quad \beta = \Omega^2 / c_{440}, \quad \gamma = c_{660} k^2 / c_{440}, \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad (2.91)$$

записывается в форме

$$f'' + \alpha f' + \beta f = \gamma \exp(-\lambda x_3) f. \quad (2.92)$$

Для интегрирования (2.92) применима схема итерационного алгоритма, в рамках которого

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p + \dots, \quad (2.93)$$

$$f_0'' + \alpha f_0' + \beta f_0 = 0, \quad f_1'' + \alpha f_1' + \beta f_1 = \gamma e^{-\lambda x_3} f_0, \quad \dots, \quad (2.94)$$

$$f_p'' + \alpha f_p' + \beta f_p = \gamma e^{-\lambda x_3} f_{p-1} \quad (p = \overline{1, \infty}).$$

Соответственно, при выборе $f_0(x_3)$ в форме

$$f_0(x_3) = C_1 e^{\delta_1 x_3} + C_2 e^{\delta_2 x_3}, \quad \delta_j = -(\alpha/2) + (-1)^j ((\alpha/2)^2 - \beta)^{1/2} \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (2.95)$$

с произвольными коэффициентами c_j , далее в аналитической форме строятся два базисных частных решения $f^{(j)}(x_3)$ уравнения (2.92), отвечающие выбору $f_{0j} = A_{0j} e^{\delta_j x_3}$, $f_{pj} = A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}$, где согласно алгоритму (2.94)

$$A_{pj} = \gamma ((\delta_j - p\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - p\lambda) + \beta)^{-1} A_{p-1,j}, \quad A_{0j} = 1, \quad (2.96)$$

или

$$f^{(j)}(x_3) = e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}, \quad (2.97)$$

$$A_{pj} = \gamma^p \prod_{q=1}^p ((\delta_j - q\lambda)^2 + \alpha(\delta_j - q\lambda) + \beta)^{-1}. \quad (2.98)$$

В третьем из рассматриваемых в подразделе случаев распространения нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью, для модулей упругости $c_{ij}(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ материала которого соответственно вводятся представления

$$c_{44}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_1 x_3), \quad c_{66}(x_3) = c_{660} \exp(\lambda_2 x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda_2 x_3), \quad (2.99)$$

где λ_1, λ_2 – действительные параметры неоднородности, амплитудное уравнение стационарного динамического деформирования волновода при распространении волн вдоль координатного направления Ox_1 принимает вид

$$e^{\lambda_1 x_3} (c_{440} \partial_3^2 u_{20}(x_3) + c_{440} \lambda_1 \partial_3 u_{20}(x_3)) + e^{\lambda_2 x_3} (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) u_{20}(x) = 0, \quad \partial_3 = \partial / \partial x_3. \quad (2.100)$$

Уравнение (2.100), после введения обозначений

$$u_{20}(x_3) = f(x_3), \quad \alpha = \lambda_1, \quad \beta = (c_{660} k^2 - \Omega^2) / c_{440}, \quad \lambda = \lambda_2 - \lambda_1, \quad (2.101)$$

записывается в форме

$$f'' + \alpha f' = \beta e^{\lambda x_3} f. \quad (2.102)$$

Для интегрирования (2.102) применяется итерационный алгоритм, в рамках которого

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_p + \dots, \quad (2.103)$$

$$f_0'' + \alpha f_0' = 0, \quad f_1'' + \alpha f_1' = \beta e^{\lambda x_3} f_0, \quad \dots, \quad f_p'' + \alpha f_p' = \beta e^{\lambda x_3} f_{p-1} \quad (p = \overline{1, \infty}). \quad (2.104)$$

Соответственно, при выборе начального приближения решения однородного уравнения $f'' + \alpha f' = 0$ в виде

$$f_0(x_3) = C_{10} e^{-\alpha x_3} + C_{20}, \quad (2.105)$$

с произвольными коэффициентами C_{j0} , реализуется построение в аналитической форме двух базисных частных решения $f^{(j)}(x_3)$ уравнения (2.102), отвечающих выбору

$$f_{01}(x_3) = e^{-\alpha x_3}, \quad f_{02}(x_3) = 1. \quad (2.106)$$

При выборе в качестве начального приближения алгоритма (2.103), (2.104) функции $f_{01}(x_3)$ можно получить

$$f_{p1}(x_3) = A_{p1} e^{(p\lambda - \alpha)x_3}, \quad A_{p1} = \beta^p ((p\lambda - \alpha)^2 + \alpha(p\lambda - \alpha))^{-1} A_{p-1,1}, \quad A_{01} = 1, \quad (2.107)$$

или

$$f^{(1)}(x_3) = e^{-\alpha x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} A_{p1} e^{(p\lambda - \alpha)x_3}, \quad (2.108)$$

$$A_{p1} = \beta^p \prod_{q=1}^p ((q\lambda - \alpha)^2 + \alpha(q\lambda - \alpha))^{-1}. \quad (2.109)$$

В случае выбора начального приближения $f_{02}(x_3)$ определяются величины $f_{p2}(x_3)$, имеющие вид

$$f_{p2} = A_{p2} e^{p\lambda x_3}, \quad A_{p2} = \beta^p (p\lambda)^{-2} A_{p-1,2}, \quad A_{02} = 1, \quad (2.110)$$

или

$$f^{(2)}(x_3) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} A_{p2} e^{p\lambda x_3}, \quad (2.111)$$

$$A_{p2} = \beta^p \prod_{q=1}^p (q\lambda)^{-2}. \quad (2.112)$$

Таким образом, амплитудная функция перемещений, являющаяся решением уравнения (5), записывается в виде

$$u_{20}(x_3) = C_1 f^{(1)}(x_3) + C_2 f^{(2)}(x_3). \quad (2.113)$$

Выражение для амплитудной функции динамического напряжения σ_{23} в исследуемых волновых полях для данного случая может быть записано в форме

$$\sigma_{230}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) u'_{20}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) (C_1 (f^{(1)}(x_3))' + C_2 (f^{(2)}(x_3))'). \quad (2.114)$$

2.6. Интегрирование уравнения распространения упругих P-SV волн в среде с разнотипными законами экспоненциальной неоднородности для параметра плотности и модулей упругости

В данном подразделе задача интегрирования дифференциальных уравнений относительно амплитудных составляющих комплексных функций волновых упругих перемещений в нормальных P-SV волнах рассматривается применительно к волноводу в виде занимающего в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область $V = \{x_3 \in [-h, h], (x_1, x_2) \in R^2\}$ плоскопараллельного слоя из функционально-градиентного ортотропного упругого материала с переменными вдоль координаты Ox_3 физико-механическими свойствами, описываемыми зависимостями вида

$$\begin{aligned} c_{13}(x_3) &= c_{130} \exp(\lambda x_3), \quad c_{33}(x_3) = c_{330} \exp(\lambda x_3), \\ c_{55}(x_3) &= c_{550} \exp(\lambda x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda x_3), \\ c_{11}(x_3) &= c_{110} \exp(\mu x_3). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Для волн данного типа, распространяющихся в рассматриваемом слое вдоль координатного упруго-эквивалентного направления Ox_1 , вводятся комплексные представления

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_3, t) &= u_{10}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad u_2(x_1, x_3, t) \equiv 0, \\ u_3(x_1, x_3, t) &= u_{30}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Определяющие соотношения для материала слоя с учетом (2.115) и (2.116) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{13}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{22} &= c_{12}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{23}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{33} &= c_{13}(x_3) \partial_1 u_1(x_1, x_3) + c_{33}(x_3) \partial_3 u_3(x_1, x_3), \\ \sigma_{13} &= c_{55}(x_3) (\partial_1 u_3(x_1, x_3) + \partial_3 u_1(x_1, x_3)), \end{aligned} \quad (2.117)$$

а система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитудных компонентов вектора динамических перемещений в исследуемых волнах имеет первоначальный вид

$$\begin{aligned}
& (-k^2 c_{11}(x_3) + c_{55}(x_3) \partial_3^2 + \lambda c_{55}(x_3) \partial_3 + \rho(x_3) \omega^2) u_{10} + \\
& + (ik(c_{13}(x_3) + c_{55}(x_3)) \partial_3 + ik \lambda c_{55}(x_3)) u_{30} = 0, \\
& (ik(c_{13}(x_3) + c_{55}(x_3)) \partial_3 + ik \lambda c_{13}(x_3)) u_{10} + \\
& + (-k^2 c_{55}(x_3) + c_{33}(x_3) \partial_3^2 + \lambda c_{33}(x_3) \partial_3 + \rho(x_3) \omega^2) u_{30} = 0.
\end{aligned} \tag{2.118}$$

После преобразований система (2.118) записывается в матричной форме

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}(x_3) = \exp(\gamma x_3) \underline{B} \underline{\Phi}(x_3), \quad \underline{\Phi}(x_3) = (u_{10}(x_3), u_{30}(x_3))^T, \tag{2.119}$$

где

$$\begin{aligned}
\underline{A}_1 &= \begin{pmatrix} c_{550} & 0 \\ 0 & c_{330} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda c_{550} & ik(c_{130} + c_{550}) \\ ik(c_{130} + c_{550}) & \lambda c_{330} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_3 = \begin{pmatrix} \rho \omega^2 & ik \lambda c_{550} \\ ik \lambda c_{130} & \Omega^2 - c_{550} k^2 \end{pmatrix}, \\
\underline{B} &= \begin{pmatrix} k^2 c_{110} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \mu - \lambda.
\end{aligned}$$

Интегрирование уравнения (2.119) реализуется с применением итерационного векторно-матричного алгоритма, описываемого соотношениями

$$\underline{\Phi}(x_3) = \underline{\Phi}_0(x_3) + \underline{\Phi}_1(x_3) + \dots + \underline{\Phi}_n(x_3) + \dots, \tag{2.120}$$

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_0(x_3) = 0, \tag{2.121}$$

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_1(x_3) = \exp(\gamma x_3) \underline{B} \underline{\Phi}_0(x_3), \dots,$$

$$(\underline{A}_1 \partial_3^2 + \underline{A}_2 \partial_3 + \underline{A}_3) \underline{\Phi}_n(x_3) = \exp(\gamma x_3) \underline{B} \underline{\Phi}_{n-1}(x_3) \quad (n = \overline{1, \infty}). \tag{2.122}$$

Представления для базисных частных решений задачи начального приближения (2.121), получаемые методом Эйлера, записываются в виде

$$\underline{\Phi}_{0j}(x_3) = \underline{\zeta}_{0j} \exp(\delta_j x_3), \tag{2.123}$$

$$\underline{\zeta}_{0j} = (ik((c_{130} + c_{550}) \delta_j + \lambda c_{550}), -(c_{550} \delta_j^2 + \lambda c_{550} \delta_j - c_{110} k^2)^T \quad (j = \overline{1, 4}),$$

где δ_j – корни алгебраического характеристического уравнения

$$\det \|\underline{A}_1 \delta^2 + \underline{A}_2 \delta + \underline{A}_3\| = 0. \tag{2.124}$$

Отвечающие $\underline{\Phi}_{0j}(x_3)$ приближения $\underline{\Phi}_{nj}(x_3)$ находятся в виде

$$\underline{\Phi}_{1j}(x_1) = \underline{\zeta}_{1j} \exp((\delta_j + \gamma) x_1), \quad \underline{\Phi}_{2j}(x_1) = \underline{\zeta}_{2j} \exp((\delta_j + 2\gamma) x_1), \dots, \tag{2.125}$$

$$\underline{\Phi}_{nj}(x_1) = \underline{\zeta}_{nj} \exp((\delta_j + n\gamma) x_1), \dots,$$

где

$$\underline{\zeta}_{nj} = \underline{Q}_{nj}^{-1} \underline{B} \underline{\zeta}_{n-1,j}^{(\pm)}, \quad \underline{Q}_{nj} = \underline{A}_1(\delta_j + n\gamma)^2 + \underline{A}_2(\delta_j + n\gamma) + \underline{A}_3. \quad (2.126)$$

В итоге, получаемые на базе описанного итерационного алгоритма базисные решения уравнения (2.119) могут быть записаны в виде аналитических представлений

$$\underline{\Phi}_j(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\zeta}_{nj} \exp((\delta_j + n\gamma)x_3) \quad (j = \overline{1,4}), \quad \underline{\zeta}_{nj} = \underline{Q}_{nj}^{-1} \underline{B} \underline{Q}_{n-1,j}^{-1} \underline{B} \cdots \underline{Q}_{1j}^{-1} \underline{B} \underline{\zeta}_{0j}. \quad (2.127)$$

2.7. Интегрирование уравнений модели распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной функционально-градиентной среде с трехфакторной неоднородностью

В данном подразделе рассматривается задача интегрирования амплитудного волнового уравнения для волн SH-типа, распространяющихся вдоль координатного направления Ox_1 в отнесенном к прямоугольным безразмерным координатам $Ox_1x_2x_3$ с нормирующим параметром $h_* [м]$ трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое $V = \{(x_1, x_2) \in R_2, 0 \leq x_3 \leq h\}$ с коллинеарными Ox_3 направлением неоднородности и осью изотропии, физико-механические характеристики материала которого имеют вид

$$c_{44} = c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3), \quad c_{66} = c_{660} \exp(\lambda_{66}x_3), \quad \rho = \rho_0 \exp(\lambda_{\rho}x_3). \quad (2.128)$$

Уравнение для амплитудной составляющей $u_{20}(x_3)$ в комплексной функция волновых упругих перемещений

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad (2.129)$$

для рассматриваемого случая имеют вид

$$c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3) u_{20}'' + \lambda_{44} c_{440} \exp(\lambda_{44}x_3) u_{20}' + (\Omega^2 \exp(\lambda_{\rho}x_3) - k^2 c_{660} \exp(\lambda_{66}x_3)) u_{20} = 0. \quad (2.130)$$

При разработке алгоритма численно-аналитического интегрирования уравнения вида (2.130) вводятся в рассмотрение следующие представления в виде степенных рядов:

$$u_{20}(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n, \quad u_{20}'(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x_3^n, \quad u_{20}''(x_3) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x_3^n, \quad (2.131)$$

$$\exp(\lambda_{44}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\lambda_{66}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{66}^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\lambda_{\rho}x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho}^m}{m!} x_3^m. \quad (2.132)$$

При формальной подстановке (2.131) и (2.132) в уравнение (2.130), оно принимает форму

$$\begin{aligned} c_{440} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^n x_3^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x_3^n + \lambda_{44}c_{440} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{44}^n}{n!} x_3^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x_3^n + \\ + (\rho_0\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{\rho}^n}{n!} x_3^n - k^2c_{660} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{66}^n}{n!} x_3^n) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n = 0, \end{aligned} \quad (2.133)$$

и далее может быть преобразовано к виду

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Delta_{np} x_3^p = 0, \quad (2.134)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{np} = \sum_{n=0}^p ((n+1)(n+2)c_{440}\lambda_{44}^{p-n}((p-n)!)^{-1}a_{n+2} + (n+1)c_{440}\lambda_{44}^{p-n+1}((p-n)!)^{-1}a_{n+1} + \\ + (\rho_0\omega^2\lambda_{\rho}^{p-n} - c_{660}k^2\lambda_{66}^{p-n})((p-n)!)^{-1}a_n). \end{aligned} \quad (2.135)$$

В результате приравнивания нулю коэффициентов Δ_{np} в представлении (2.134) при варьировании $n = \overline{0, \infty}$ записывается серия соотношений, позволяющих последовательно получить значения a_n для базисных решений дифференциального уравнения (2.130).

При $n=0$ следующее из условия $\Delta_{00}=0$ соотношение связи искомых коэффициентов приводится к виду

$$2c_{440}a_2 + c_{440}a_1 + (\rho_0\omega^2 - c_{660}k^2)a_0 = 0,$$

или

$$a_2 = -(1/2)a_1 - (\rho_0\omega^2 - c_{660}k^2)(2c_{440})^{-1}a_0. \quad (2.136)$$

При альтернативном выборе $a_0^{(1)}=1$, $a_1^{(1)}=0$ либо $a_0^{(2)}=0$, $a_1^{(2)}=1$ в соотношении (2.136) и последующем использовании рекуррентных формул

$$\begin{aligned} a_{p+2} = -((p+1)(p+2)c_{440})^{-1}((p+1)c_{440}\lambda_{44}a_{p+1} + (\rho_0\omega^2 - c_{660}k^2)a_p + \\ + \sum_{n=0}^{p-1} [((n-p)!)^{-1}((n+1)(n+2)c_{440}\lambda_{44}^{p-n}a_{n+2} + (n+1)c_{440}\lambda_{44}^{p-n+1}a_{n+1} + (\rho_0\omega^2\lambda_{\rho}^{p-n} - c_{660}k^2\lambda_{66}^{p-n})a_n]) \end{aligned} \quad (2.137)$$

$$(p = \overline{1, \infty}),$$

могут быть получены две последовательности значений $\{a_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$ ($j=1, 2$), которые определяют два базисных частных решения $\Phi_j(x_3, \omega, k)$ уравнения (2.130) с аналитическими представлениями

$$\Phi_j(x_3, \omega, k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} x_3^n, \quad (2.138)$$

которые в реализуемых численных исследованиях редуцируются на оговариваемом уровне точности расчетов. С их введением при исследовании рассматриваемых волновых процессов используется выражение

$$u_2(x_1, x_3, t) = (C_1 \Phi_1(x_3, \omega, k) + C_2 \Phi_2(x_3, \omega, k)) \exp(-i(\omega t - kx_1)). \quad (2.139)$$

Уместно указать, что

$$\Phi_j(0, \omega, k) = a_0^{(j)}, \quad (\partial_3 \Phi_j(x_3, \omega, k))_{x_3=0} = a_1^{(j)}. \quad (2.140)$$

2.8. Выводы по разделу 2

В результате реализации представленных в разделе исследований предложена новая модель описания локализованной приповерхностной неоднородности в полубесконечных функционально-градиентных телах, а также получены базисные частные решения амплитудных волновых уравнений для ряда моделей распространения одно-, двух- и трехпарциальных гармонических волн деформаций в функционально-градиентных телах в форме упругого полупространства и упругого слоя с однофакторной, несколькими вариантами двухфакторной и трехфакторной экспоненциальной неоднородностью физико-механических характеристик и с однофакторной локализованной приграничной неоднородностью функционально-градиентной среды.

В результате перечисленных исследований получены следующие новые научные результаты:

1. Предложена и апробирована однофакторная модель описания эффектов локализованной приповерхностной неоднородности физико-механических

свойств в полубесконечных функционально-градиентных телах с использованием двойных экспоненциальных функций.

2. В аналитической форме получены базисные частные решения амплитудных волновых уравнений модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями локализованной зоной приповерхностной неоднородности.

3. В аналитической векторно-матричной форме получены базисные частные решения системы амплитудных волновых уравнений модели распространения упругих волн P-SV типа в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями локализованной зоной приповерхностной неоднородности.

4. В аналитической векторно-матричной форме получены базисные частные решения системы амплитудных волновых уравнений модели распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полубесконечном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями локализованной зоной приповерхностной неоднородности.

5. В аналитической форме получены базисные частные решения амплитудных волновых уравнений, описывающих распространение сдвиговых нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном слое в рамках альтернативных моделей двухфакторной экспоненциальной неоднородности трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды – моделей учета отличающихся от общего экспоненциального закона изменения совокупности представленных в соотношениях модели физико-механических постоянных отдельных экспоненциальных функций неоднородности для параметра плотности материала либо для каждого отдельно взятого параметра упругих свойств трансверсально-изотропного материала.

6. В аналитической векторно-матричной форме получены базисные частные решения системы амплитудных волновых уравнений модели распространения нормальных упругих волн P-SV типа в трансверсально-изотропном слое в рамках модели двухфакторной экспоненциальной неоднородности трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды с различными экспоненциальных функций неоднородности для параметра плотности материала и для совокупности параметров упругих свойств трансверсально-изотропного материала.

7. Разработана методика интегрирования амплитудных волновых уравнений, описывающих распространение сдвиговых нормальных упругих волн в трансверсально-изотропном слое в рамках модели учета отдельных экспоненциальных функций неоднородности либо для каждого отдельно взятого параметра упругих свойств и параметра плотности функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала.

8. Представленная в разделе специализированная итерационная методика построения базисных частных решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами распространена в работах [60, 62] на задачи анализа поверхностных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики, а также на задачи анализа нормальных электроупругих сдвиговых волн в функционально-градиентном пьезокерамическом слое с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью.

9. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [9, 10, 32, 38–40, 42–44, 85–87].

РАЗДЕЛ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ С ПРИГРАНИЧНОЙ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ЗОНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Обобщенные локализованные сдвиговые волны Лява в различных модификациях волноводных структур «упругий слой на упругом полупространстве», несмотря на охарактеризованный во вступительном разделе работы достаточно длительный период весьма разностороннего анализа в работах отечественных и зарубежных авторов, по многим аспектам остаются предметом дальнейших актуальных с теоретической и прикладной точек зрения исследований. В частности, это связано как с заданиями относительно расширения фундаментальных представлений о свойствах обобщенных поверхностных волн, так и с разносторонними инновационными применениями волновых движений данного типа в сенсорах, датчиках, измерительных приборах и акустоэлектронных устройствах, а также в сейсмологических и геоакустических исследованиях, и в некоторых других научно-технических отраслях. Для указанных приложений в самой существенной мере представляют интерес неклассические варианты постановки задач о спектре и свойствах обобщенных локализованных волн Лява, связанные с вариациями свойств материалов волноводной структуры, типами граничных условий на внешней поверхности и в плоскости контакта слоя и полупространства.

В данном контексте, целью представляемых в разделе исследований является получение и анализ аналитической формы дисперсионных соотношений, описывающих закономерности распространения обобщенных локализованных волн Лява в ранее не рассматривавшихся волноводных структурах, образуемых идеально контактирующими компонентами в виде однородного либо функционально-градиентного изотропного или анизотропного слоя и однородного либо функционально-градиентного трансверсально-изотропного

полупространства с локализованной приповерхностной неоднородностью по глубине, описываемой двойными экспоненциальными функциями, а также получение и исследование дисперсионного соотношения для обобщенных поверхностных волн рэлеевского типа в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности

3.1. Анализ модели распространения обобщенных поверхностных волн Лява в составной структуре «однородный изотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве»

Рассматривается задача о распространении локализованных SH-волн в отнесенной к нормированным пространственным прямоугольным координатам $Ox_1x_2x_3$ волноводной структуре в виде однородного изотропного упругого слоя $V_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 < x_3 \leq h_*\}$ толщиной h_* , лежащего на неоднородном по глубине функционально-градиентном трансверсально-изотропном полупространстве $V_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \leq 0\}$ (рис. 3.1.). Величина $h_* = H$ служит в последующих соотношениях рассматриваемой модели нормирующим параметром для всех характеристик с линейной размерностью расстояния. Ось изотропии и направление однофакторной непрерывной неоднородности материала полупространства ортогональны граничной плоскости $x_3 = 0$. В качестве направления распространения рассматриваемых волн без ограничения общности выбирается координатное направление Ox_1 .

При описании соотношений исследуемой математической модели колебательного волнового деформирования с циклической частотой ω и нормированным волновым числом k , комплексные функции волновых перемещений

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad (3.1)$$

и напряжений

$$\sigma_{12}(x_1, x_3, t) = \sigma_{120}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (3.2)$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_3, t) = \sigma_{230}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)),$$

их амплитудные характеристики $u_{20}(x_3)$, $\sigma_{120}(x_3)$, $\sigma_{230}(x_3)$ для соответствующих полей, а также физико-механические параметры материалов в слое и полупространстве, соответственно отмечаются далее верхними индексами (с) и (n).

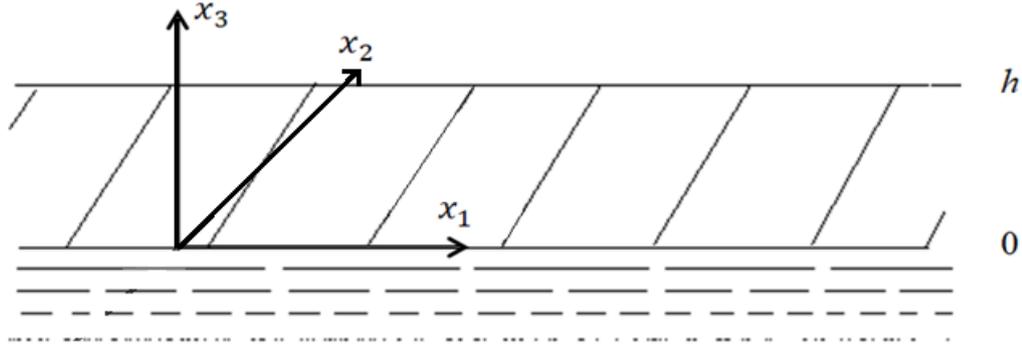


Рисунок 3.1 – Поперечное сечение рассматриваемого волновода

Уравнения волнового деформирования и определяющие соотношения для компонентов волновода в рассматриваемой модели соответственно имеют вид

$$\partial_1 \sigma_{21}^{(c)} + \partial_3 \sigma_{23}^{(c)} - \rho^{(c)} \ddot{u}_2^{(c)} = 0, \quad \sigma_{21}^{(c)} = \mu \partial_1 u_2^{(c)}, \quad \sigma_{23}^{(c)} = \mu \partial_3 u_2^{(c)}; \quad (3.3)$$

$$\partial_1 \sigma_{21}^{(n)} + \partial_2 \sigma_{23}^{(n)} - \rho^{(n)}(x_3) \ddot{u}_2^{(n)} = 0, \quad \sigma_{21}^{(n)} = c_{66n}(x_3) \partial_1 u_2^{(n)}, \quad \sigma_{23}^{(n)} = c_{44n}(x_3) \partial_3 u_2^{(n)}; \quad (3.4)$$

где

$$c_{66n}(x_3) = c_{66}^{(n)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad c_{44n}(x_3) = c_{44}^{(n)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(n)}(x_3) = \rho_0^{(n)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad (3.5)$$

$\mu^{(c)}$, $\rho^{(c)}$ – параметр Ламе и плотность материала слоя; $c_{66}^{(n)}$, $c_{44}^{(n)}$, $\rho_0^{(n)}$ – параметры упругих свойств функционально-градиентного материала полупространства; $\varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3))$, где в данном случае $\beta \leq 0$, – охарактеризованная в пп.

2.1 функция локализованной приграничной неоднородности. Краевые условия на граничных поверхностях волновода имеют вид

$$\sigma_{230}^{(c)}(h_*) = 0, \quad u_{20}^{(c)}(0) = u_{20}^{(n)}(0), \quad \sigma_{230}^{(c)}(0) = \sigma_{230}^{(n)}(0), \quad (3.6)$$

или

$$u_{20}^{(c)'}(h_*) = 0, \quad u_{20}^{(c)}(0) = u_{20}^{(n)}(0), \quad \mu^{(c)} u_{20}^{(c)'}(0) = c_{44n}(0) u_{20}^{(n)'}(0). \quad (3.7)$$

На основе интегрирования амплитудного волнового уравнения (3.3) для материала слоя, принимающего вид

$$u_{20}^{(c)''}(x_3) + \zeta^2 u_{20}^{(c)}(x_3) = 0, \quad (3.8)$$

где

$$\zeta^2 = \Omega_c^2 - k^2, \quad \Omega_c^2 = \rho^{(c)} \omega^2 h_*^2 / c_*, \quad c_* = \mu^{(c)}, \quad (3.9)$$

могут быть записаны представления

$$u_{20}^{(c)}(x_3) = A_1 \cos(k \mathcal{G} x_3) + A_2 \sin(k \mathcal{G} x_3), \quad \sigma_{230}^{(c)} = -A_1 \mu k \mathcal{G} \sin(k \mathcal{G} x_3) + A_2 \mu k \mathcal{G} \cos(k \mathcal{G} x_3) \quad (3.10)$$

$$\mathcal{G}^2 = (c_L / c)^2 - 1,$$

в которых k_L, c_L – соответственно искомые параметры нормированного волнового числа и фазовой скорости обобщенных локализованных волн Лява; $c = (\mu^{(c)} / \rho^{(c)})^{1/2}$ – параметр фазовой скорости объемных волн сдвига в изотропном материале слоя A_1, A_2 – произвольные постоянные. Решение амплитудного волнового уравнения для материала полупространства применительно к рассматриваемому случаю получено в пп. 2.2 и позволяет записать представления

$$u_{20}^{(n)}(x_3) = A_3 f_-(x_3), \quad (3.11)$$

$$\sigma_{230}^{(n)}(x_3) = A_3 c_{44}^{(n)} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) f'_-(x_3), \quad (3.12)$$

где

$$f_-(x_3) = e^{-\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - (p-1)\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}, \quad (3.13)$$

$$f'_-(x_3) = -\alpha e^{-\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - p\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}. \quad (3.14)$$

Подстановка представлений (3.10)–(3.12) в краевые условия (3.7) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов A_1, A_2, A_3

$$-A_1 c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \sin(k \mathcal{G} h_*) + A_2 c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \cos(k \mathcal{G} h_*) = 0, \quad (3.15)$$

$$A_1 - A_3 f_-(0) = 0,$$

$$A_2 c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} - A_3 c_{44}^{(n)} e^\lambda f'_-(0) = 0,$$

равенство нулю определителя которой является формулируемым в аналитической форме дисперсионным уравнением для исследуемых обобщенных локализованных волн Лява в волноводе рассматриваемого типа

$$F(k, \omega) = \begin{vmatrix} -c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \sin(k \mathcal{G} h_*) & c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \cos(k \mathcal{G} h_*) & 0 \\ 1 & 0 & -f_-(0) \\ 0 & c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} & c_{44}^{(n)} e^{\lambda} f'_-(0) \end{vmatrix} = \quad (3.16)$$

$$= -(c_{44}^{(c)} k \beta)^2 \sin(k \beta h_*) f_-(0) - c_{44}^{(c)} c_{44}^{(n)} e k \beta \cos(k \beta h_*) e^{\lambda} f'_-(0) = 0.$$

После определения корней $k(\omega)$ уравнения (3.16), формы соответствующих волновых движений в компонентах волновода с точностью до нормирующего масштабного множителя A рассчитываются по формулам

$$u_{20}^{(c)}(x_3) = A(\cos(k \mathcal{G} x_3) + (c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \sin(k \mathcal{G} h_*) / c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \cos(k \mathcal{G} h_*) \sin(k \mathcal{G} x_3)), \quad (3.17)$$

$$u_{20}^{(n)}(x_3) = A(1 / f_-(0)) f_-(x_3).$$

Распределения амплитуд напряжений в обобщенных волнах Лява по толщине компонентов волновода, в свою очередь, описываются соотношениями

$$\sigma_{230}^{(c)} = -A(\mu k \mathcal{G} \sin(k \mathcal{G} x_3) + (c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \sin(k \mathcal{G} h_*) / c_{44}^{(c)} k \mathcal{G} \cos(k \mathcal{G} h_*) \mu k \mathcal{G} \cos(k \mathcal{G} x_3)), \quad (3.18)$$

$$\sigma_{230}^{(n)}(x_3) = A_3 c_{44}^{(n)} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) f'_-(x_3).$$

При анализе распределений энергетических характеристик исследуемых сдвиговых горизонтально поляризованных волн рассматриваются параметрические зависимости компонентов $\bar{P}_j(x_3)$ вектора плотности среднего за период потока мощности в исследуемых локализованных волнах, для которых с учетом $u_{10} = u_{30} = 0$ и $u_{20} \neq 0$, а также исходя из того, что ненулевыми компонентами тензора напряжений являются только σ_{23} и σ_{21} , записываются исходные представления

$$\bar{P}_1(x_3) = -\frac{i\omega}{4} (\tilde{\sigma}_{120} \tilde{u}_{20}^* - \tilde{\sigma}_{120}^* \tilde{u}_{20}), \quad (3.19)$$

$$\bar{P}_3(x_3) = -\frac{i\omega}{4} (\tilde{\sigma}_{230} \tilde{u}_{20}^* - \tilde{\sigma}_{230}^* \tilde{u}_{20}).$$

В этих представлениях * – знак комплексного сопряжения;

$$\tilde{u}_{20} = u_{20}(x_3) \exp(ikx_3), \quad (3.20)$$

$$\tilde{\sigma}_{230} = c_{44}u'_{20}(x_3)\exp(ikx_3), \quad \tilde{\sigma}_{120} = ikc_{66}u_{20}(x_3)\exp(ikx_3).$$

С учетом (3.20), (3.21) и свойства $\text{Im}u_{20}(x_3) = 0$, выражения (3.19) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &= -\frac{i\omega}{4} (ikc_{66}u_{20}(x_3)\exp(ikx_3) u_{20}^*(x_3)\exp(-ikx_3) + ikc_{66}u_{20}^*(x_3)\exp(-ikx_3) u_{20}(x_3)\exp(ikx_3)) = \\ &= \frac{\omega}{2} (kc_{66}u_{20}(x_3) u_{20}^*(x_3)) = \frac{\omega}{2} (kc_{66}|u_{20}(x_3)|^2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\bar{P}_3(x_3) = -\frac{i\omega}{4} (c_{44}u'_{20}(x_3)\exp(-ikx_3) u_{20}(x_3)\exp(ikx_3) - c_{44}u'_{20}(x_3)\exp(ikx_3) u_{20}^*(x_3)\exp(-ikx_3)) \equiv 0.$$

Численная реализация представленной методики поиска корней дисперсионного уравнения (3.16) и получения картин распределения мод дисперсионных спектров обобщенных волн Лява с варьированием параметров приведенной циклической частоты Ω и неоднородности λ, β , исходя из дополнительной задачи сопоставительной верификации результатов вычислений, осуществлена применительно к частному случаю однородного слоя и полупространства с выбором параметров $h_*, \mu^{(c)}, \rho^{(c)}, c_{66}^{(n)} = c_{44}^{(n)}, \rho_0^{(n)}$, представленных в работе [79]:

$$h_* = 20 \text{ м}, \quad \mu^{(c)} = 14 \text{ МПа}, \quad \rho^{(c)} = 1650 \text{ кг / м}^3, \quad (3.22)$$

$$c_{66}^{(n)} = c_{44}^{(n)} = 38 \text{ МПа}, \quad \rho_0^{(n)} = 1800 \text{ кг / м}^3, \quad (3.23)$$

и, соответственно, $c = 146.18 \text{ м / с}$.

На рисунке 3.2 отражены результаты расчетов нескольких действительных ветвей диаграммы дисперсионного спектра волн Лява для волновода с характеристиками (3.22), (3.23).

В таблице 3.1 приведены результаты расчетов фазовых скоростей $c_L, \text{ м / с}$ бегущих локализованных волн с варьируемыми циклическими частотами из низшей моды спектра с ненулевой частотой запираения в волноводной структуре из материала с параметрами (3.22), (3.23) [79], в которой материал полупространства интерпретируется как приповерхностно-неоднородный при модельном варьировании обоих параметров неоднородности. При $\lambda = 0, \beta = 0$ результаты расчетов скоростей волн Лява (данные из первой строки таблицы 3.1) совпадают с результатами расчетов, приведенными в [79]. Анализируя

представленные в таблице расчетные данные можно сделать вывод, что для более высоких частот влияние параметров неоднородности на скорости обобщенных волн Лява из низшей моды спектра становится все менее выраженным. Относительно существенные изменения скоростей волн низшей моды для рассматриваемого волновода можно наблюдать для диапазона частот от 15 до 20 Гц. Влияние неоднородности на скорости волн более высоких мод является еще менее существенным, что дает повод говорить и об отсутствии, в этом случае, достаточно явных изменений в топологии ветвей дисперсионного спектра. Вместе с тем, численный анализ дисперсионного соотношения для обобщенных поверхностных волн Лява в рассматриваемом неоднородном волноводе обнаруживает ряд параметрических зависимостей, которые могут составить основу для дальнейшего исследования тенденций влияния факторов приповерхностной неоднородности полупространства, а также быть применены в прикладных исследованиях в области сейсмоакустики.

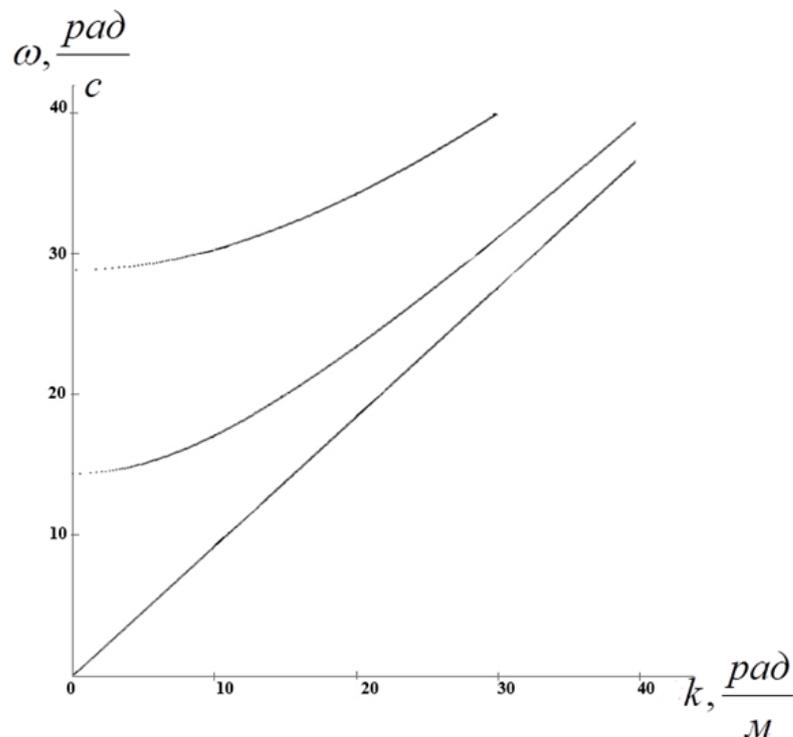


Рисунок 3.2 – Действительные ветви диаграммы дисперсионного спектра волн Лява для волновода с характеристиками $h_* = 20$ м, $\mu^{(c)} = 14$ МПа, $\rho^{(c)} = 1650$ кг/м³,

$$c_{66}^{(n)} = c_{44}^{(n)} = 38 \text{ МПа}, \rho_0^{(n)} = 1800 \text{ кг/м}^3$$

Таблица 3.1 – Значения скоростей волн Лява из низшей моды дисперсионного спектра, м/с.

λ	β	ω , рад/с									
		15	16.5	18	19.5	21	22.5	24	25.5	27	28.5
0	0	349.3	191.6	154.8	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
0.1	0.5	337.27	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	337.28	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.5	337.28	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	2.0	337.29	189.9	154.0	137.4	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
1.0	0.5	279.86	179.4	148.8	137.3	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	278.59	179.0	148.3	137.1	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.5	276.99	178.5	148.1	136.6	126.9	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	2.0	275.28	178.0	143.6	136.0	126.8	120.1	115.4	111.8	109.1	106.9
2.0	0.5	256.32	189.8	144.9	137.2	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	252.32	171.9	143.8	136.5	126.9	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.5	247.50	169.9	142.5	135.4	126.6	120.1	115.3	111.7	109.0	106.8
	2.0	242.54	168.0	141.1	134.2	126.2	119.9	115.2	111.7	109.0	106.8
3.0	0.5	245.63	170.2	144.5	136.9	127.0	120.2	115.4	111.8	109.1	106.9
	1.0	238.15	166.6	142.8	135.7	126.6	120.1	115.3	111.8	109.1	106.9
	1.5	229.46	162.1	140.8	134.1	126.1	119.8	115.2	111.7	109.0	106.8
	2.0	220.81	157.5	138.9	132.4	125.3	119.5	115.0	111.6	108.9	106.8

Зависимость относительных амплитуд смещений $A_{U_2}^*(x_3) = \frac{\text{Re } u_{20}(x_3)}{\text{Re } u_{20}(0)}$ в составляющих волновода от нормированной координаты x_3/h_* для отвечающих началам периодов волновых колебаний моментов времени при распространении обобщенной волны Лява из первой моды с ненулевой частотой запираия, имеющей равную толщине слоя h_* длину 20 м, показана на рисунке 3.3. Аналогичные распределения для характеристики $A_{\sigma_{23}}^* = \frac{\text{Re } \sigma_{230}(x_3)}{\text{Re } \sigma_{230}(0)}$, а также для

компоненты $\bar{P}_1(x_3)$ вектора плотности среднего за период потока мощности в исследуемых локализованных волнах, даны на рисунках 3.4–3.6. Сплошными линиями на этих рисунках изображены графики исследуемых распределений для случая, когда слой и подстилающее полупространство являются однородными с физико-механическими характеристиками (3.22), (3.23), а пунктиром – для случая, когда полупространство с указанными выше параметрами обладает также локализованной неоднородностью, характеризуемой коэффициентами $\lambda = 0.4$, $\beta = 10.0$. По глубине полупространства представляемые распределения приведены до значения x_3/h_* , отвечающего длине волны. Графики изменения $\bar{P}_1(x_3)$ представлены в двух масштабах – для диапазона варьирования x_3/h_* , в котором описаны распределения характеристик $A_{U_2}^*(x_3)$, $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$, а также в масштабе, детализирующем характер изменения $\bar{P}_1(x_3)$ вблизи поверхности контакта слоя и полупространства.

Из анализа результатов расчетов следуют выводы о том, что в рассматриваемых случаях учет приповерхностной неоднородности материала полупространства, отвечающей росту его модулей упругости и параметра плотности у поверхности контакта, приводит к существенному монотонному снижению значений $A_{U_2}^*(x_3)$ в области по толщине слоя от границы контакта с полупространством до свободной верхней грани с минимальным влиянием на эту характеристику в самом полупространстве; приводит к росту значений $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$ в слое, максимальному у контактной поверхности и уменьшающемуся к свободной внешней грани, а также росту $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$ в приграничной области неоднородности полупространства. Распределения $\bar{P}_1(x_3)$ в случае неоднородного полупространства указывают на эффекты существенного роста этой характеристики в зоне слоя с нарастанием при приближении к свободной грани, незначительного роста в приграничной области неоднородности полупространства и в узкой окрестности контактной поверхности.

Далее, на рисунках 3.7–3.9 даны результаты расчетов ветвей диаграмм дисперсионных спектров обобщенных волн Лява для волноводных структур рассматриваемого типа с приведенными нормированными модельными характеристиками $h_* = 1$, $\mu^{(c)} = 1$, $\rho^{(c)} = 1$, $c_{66}^{(n)} = 4$, $c_{44}^{(n)} = 2$, $\rho_0^{(n)} = 1$ в предположении о приповерхностной неоднородности материала полупространства с параметрами, соответственно имеющими значения $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$, $\{\lambda = 2, \beta = 10\}$, $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$. Рисунки 3.10 и 3.14 характеризуют распределения $A_{U_2}^*(x_3)$, $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi/h_*$) из первой моды с ненулевой частотой запираения в соответствующем дисперсионном спектре.

Распределения этих же характеристик для случая, когда охарактеризованная выше волна принадлежит второй моде с ненулевой частотой запираения из соответствующего дисперсионного спектра, даны на рисунках 3.11 и 3.15.

Распределения указанных характеристик для случая параметров неоднородности полупространства $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$ и волны приведенной длины h_* из первой моды спектра с ненулевой частотой запираения описаны на рисунках 3.12 и 3.16, а для такой волны из второй моды спектра – на рисунках 3.13, 3.17.

Рисунки 3.18–3.27 в целом характеризуют эффекты влияния неоднородности материала полупространства на распределения плотности среднего за период потока мощности $\bar{P}_1(x_3)$ в двух масштабах, позволяющих проследить картины изменения этой характеристики по всей толщине слоя и по имеющей такую же толщину зоне полупространства. В частности, рисунки 3.18, 3.19 характеризуют данные распределения для случая полупространства с нулевыми коэффициентами неоднородности; рисунки 3.20, 3.21 отвечают волне из первой моды дисперсионного спектра с ненулевой частотой запираения в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$.

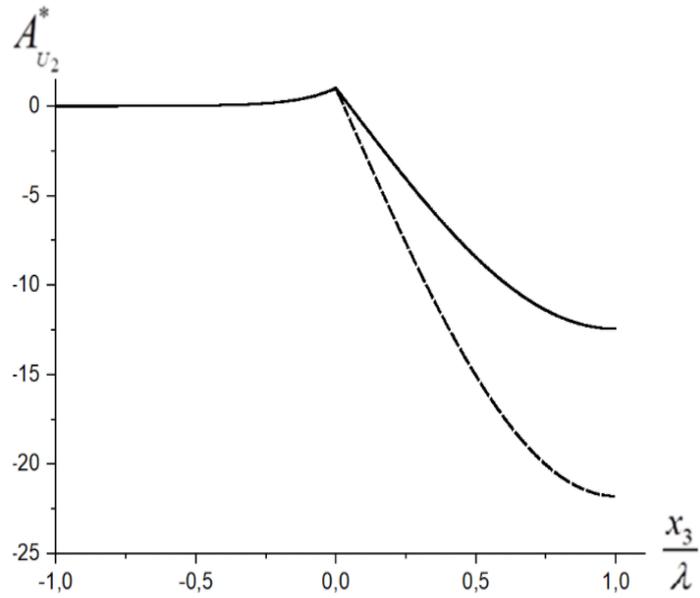


Рисунок 3.3 – Зависимость относительных амплитуд смещений $A_{U_2}^*(x_3)$ от нормированной координаты для волны Лява из первой моды с ненулевой частотой запираия

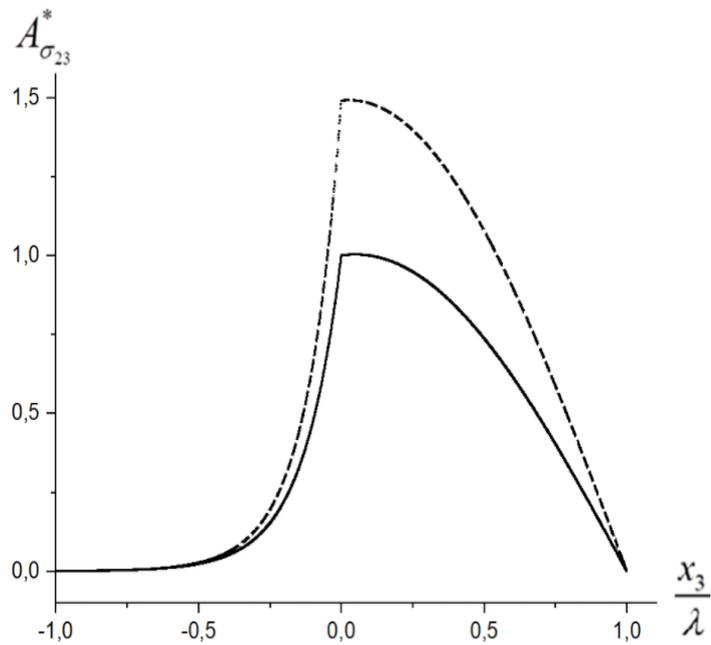


Рисунок 3.4 – Зависимость характеристики $A_{\sigma_{23}}^*$ от нормированной координаты для волны Лява из первой моды с ненулевой частотой запираия

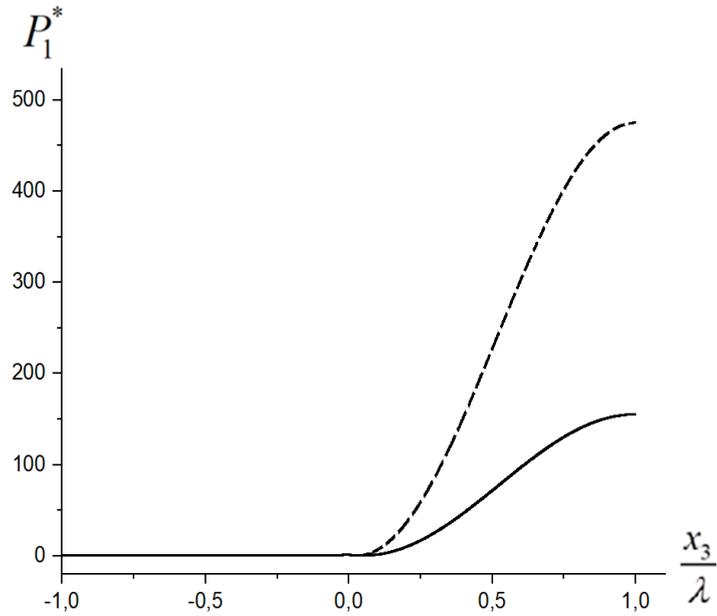


Рисунок 3.5 – Зависимость компоненты $\bar{P}_1(x_3)$ вектора плотности среднего за период потока мощности от нормированной координаты для волны Лява из первой моды с ненулевой частотой запирания

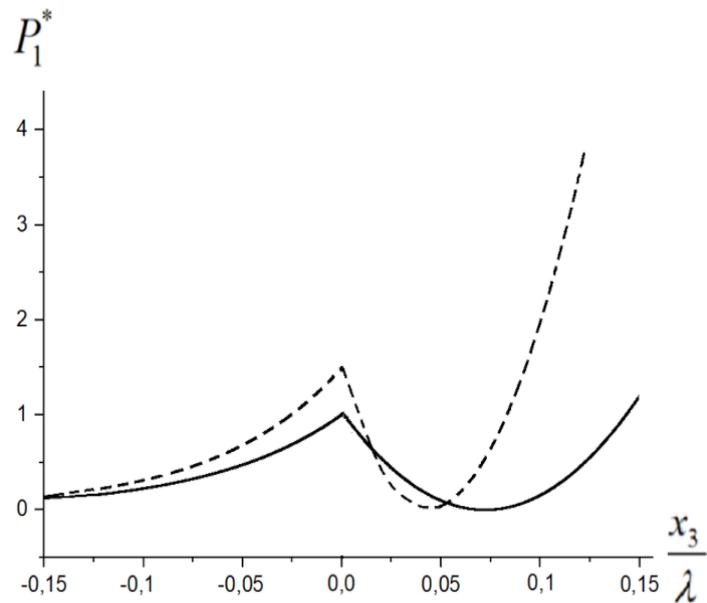


Рисунок 3.6 – Зависимость компоненты $\bar{P}_1(x_3)$ вектора плотности среднего за период потока мощности от нормированной координаты для волны Лява из первой моды с ненулевой частотой запирания вблизи границы раздела слоя и полупространства

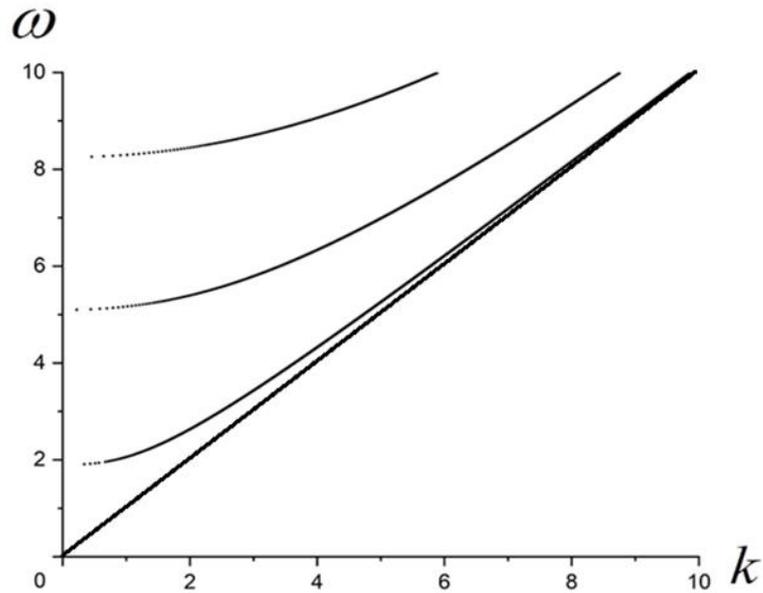


Рисунок 3.7 – Действительные ветви диаграммы дисперсионного спектра обобщенных волн Лява для волноводной структуры рассматриваемого типа с приведенными нормированными модельными характеристиками и параметрами неоднородности $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$

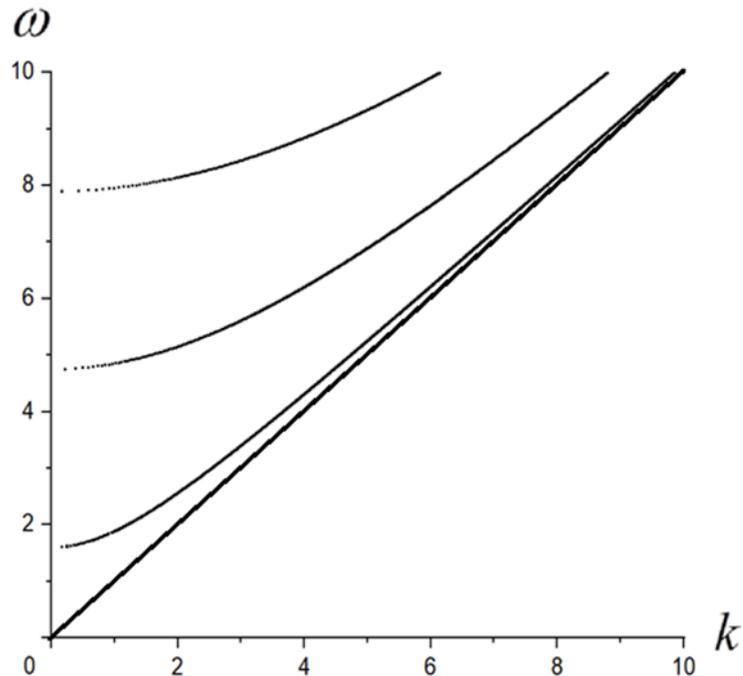


Рисунок 3.8 – Действительные ветви диаграммы дисперсионного спектра обобщенных волн Лява для волноводной структуры рассматриваемого типа с приведенными нормированными модельными характеристиками и параметрами неоднородности $\{\lambda = 2, \beta = 10\}$

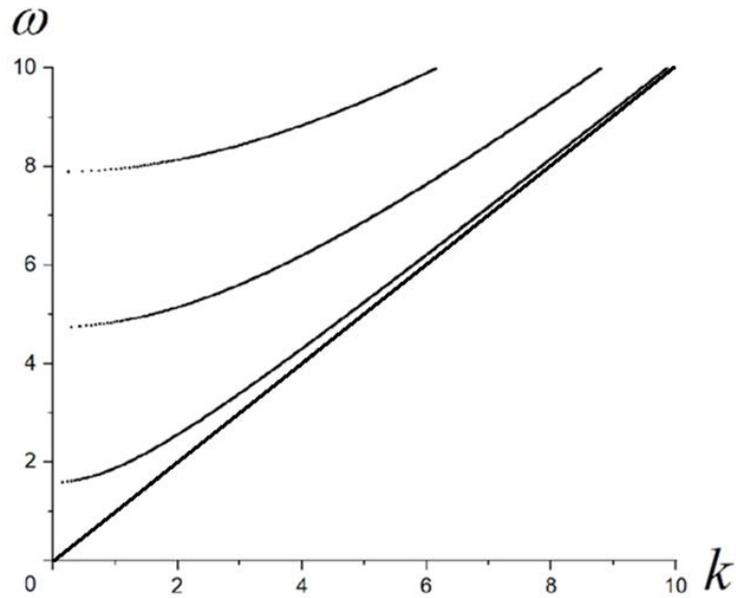


Рисунок 3.9 – Действительные ветви диаграммы дисперсионного спектра обобщенных волн Лява для волноводной структуры рассматриваемого типа с приведенными нормированными модельными характеристиками и параметрами неоднородности $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$

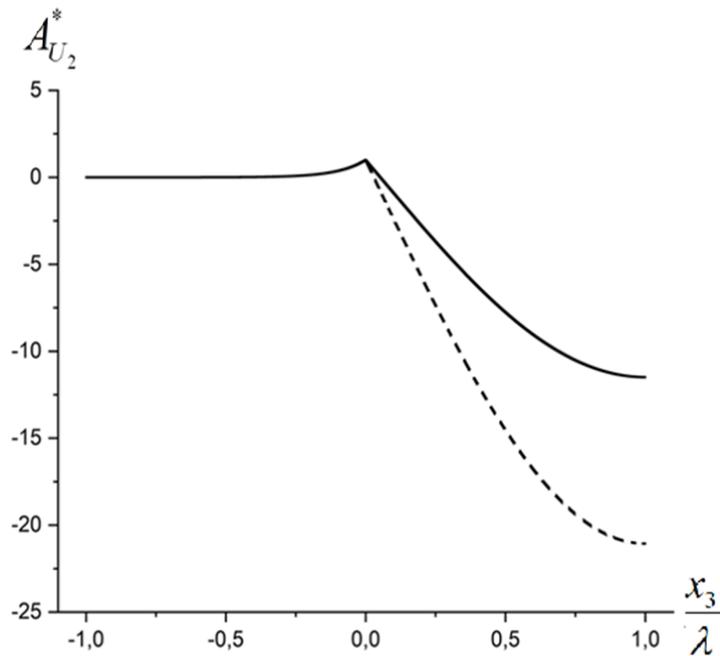


Рисунок 3.10 – Распределения $A_{U_2}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi / h_*$) из первой моды с ненулевой частотой запираия в соответствующем дисперсионном спектре

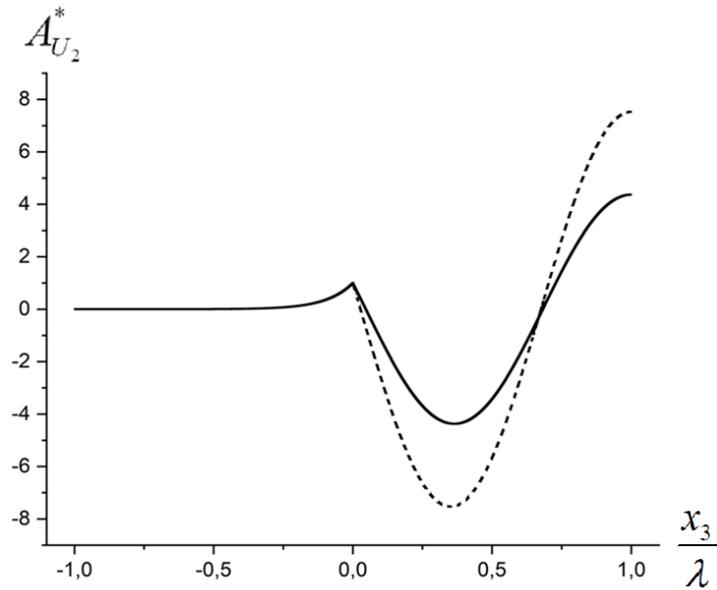


Рисунок 3.11 – Распределения $A_{U_2}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi / h_*$) из второй моды с ненулевой частотой запираия в соответствующем дисперсионном спектре

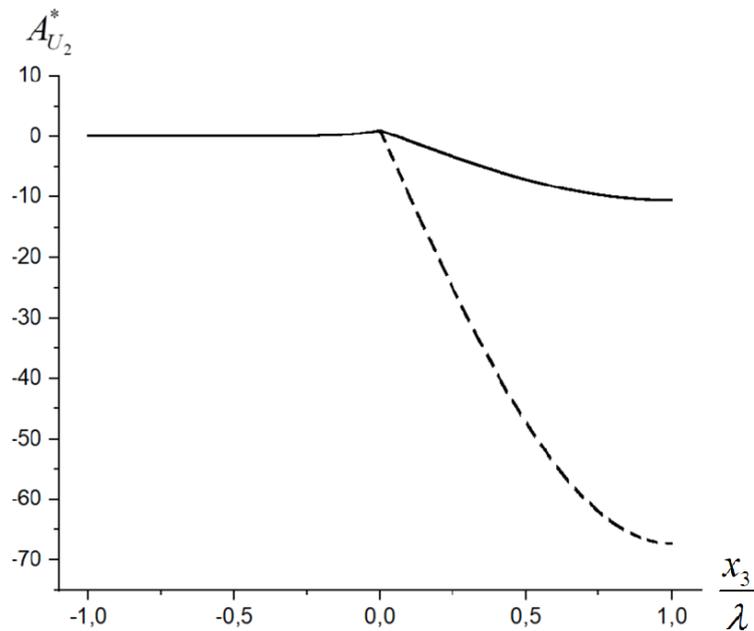


Рисунок 3.12 – Распределения $A_{U_2}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi / h_*$) из первой моды с ненулевой частотой запираия в соответствующем дисперсионном спектре

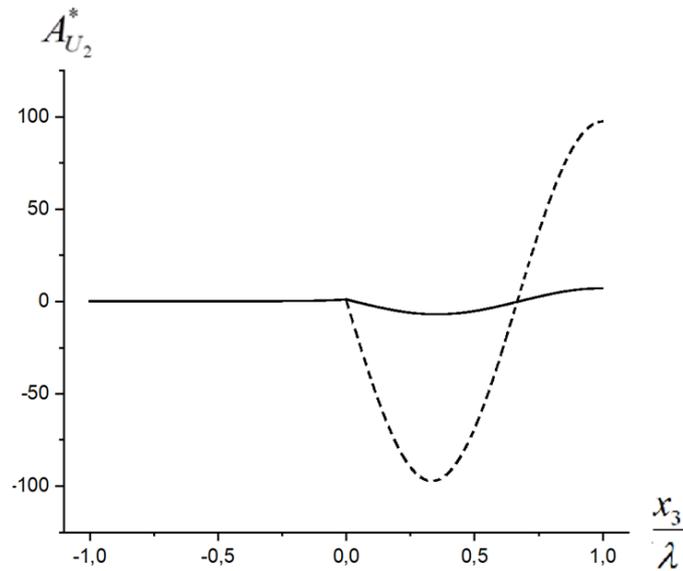


Рисунок 3.13 – Распределения $A_{U_2}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi / h_*$) из второй моды с ненулевой частотой запираия в соответствующем дисперсионном спектре

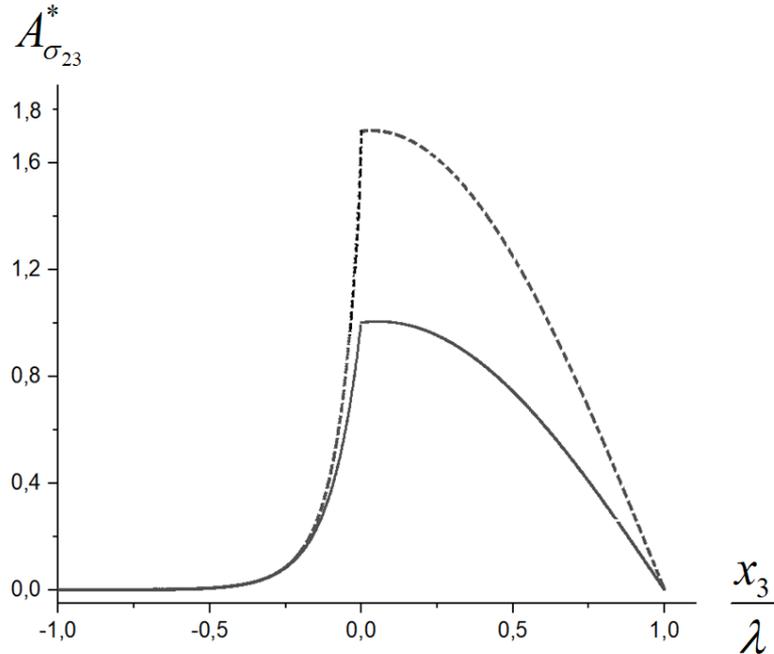


Рисунок 3.14 – Распределения $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi / h_*$) из первой моды с ненулевой частотой запираия в соответствующем дисперсионном спектре

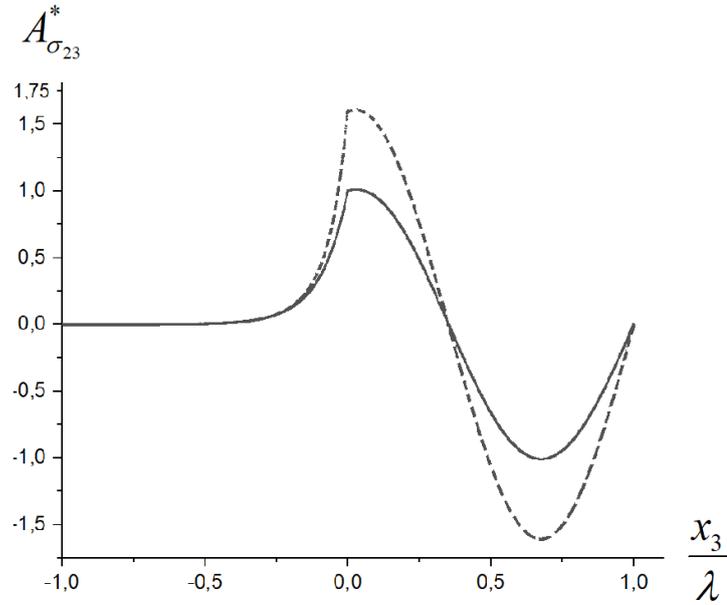


Рисунок 3.15 – Распределения $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi / h_*$) из второй моды с ненулевой частотой запираия в соответствующем дисперсионном спектре

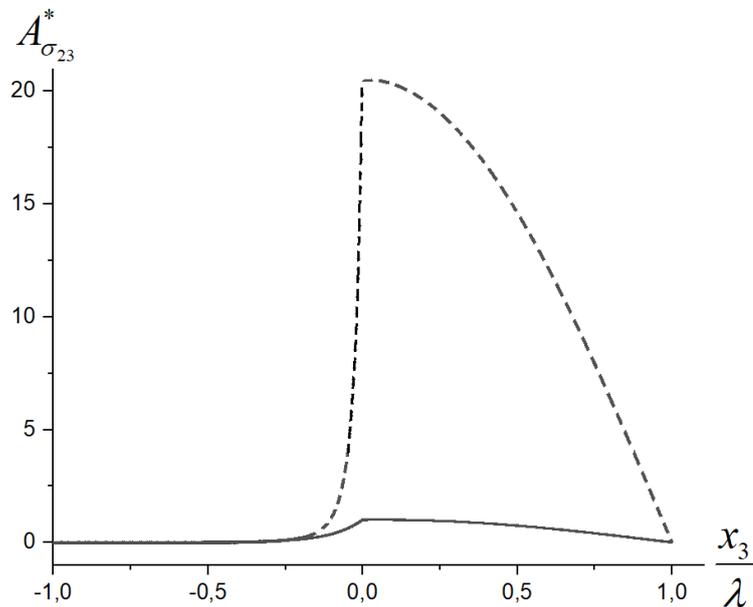


Рисунок 3.16 – Распределения $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi / h_*$) из первой моды с ненулевой частотой запираия в соответствующем дисперсионном спектре

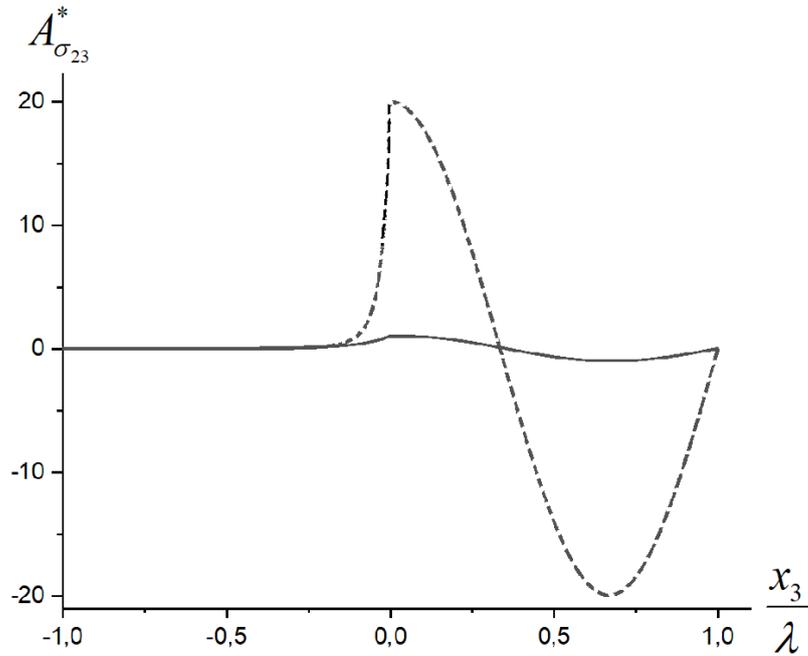


Рисунок 3.17 – Распределения $A_{\sigma_{23}}^*(x_3)$ в случае $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$ для волн приведенной длины h_* (с нормированным волновым числом $k = 2\pi/h_*$) из второй моды с ненулевой частотой запирания в соответствующем дисперсионном спектре

Рисунки 3.22, 3.23 отвечают волне из первой моды спектра с ненулевой частотой запирания в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 1, \beta = 10\}$; рисунки 3.24, 3.25 отвечают волне из первой моды спектра с ненулевой частотой запирания в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 2, \beta = 10\}$; наконец, рисунки 3.26, 3.27 отвечают волне из первой моды спектра с ненулевой частотой запирания в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$.

Таким образом, можно отметить, что приграничная неоднородность полубесконечной компоненты волновода для обобщенных поверхностных волн Лява, описываемая двойной экспоненциальной функцией, в наибольшей мере влияет на кинематические, силовые и энергетические характеристики волны в зоне слоя, в меньшей мере – в области, прилегающей к поверхности контакта слоя и полупространства, и крайне незначительно сказывается на характере убывания исследуемых характеристик при удалении вглубь подстилающего полупространства.

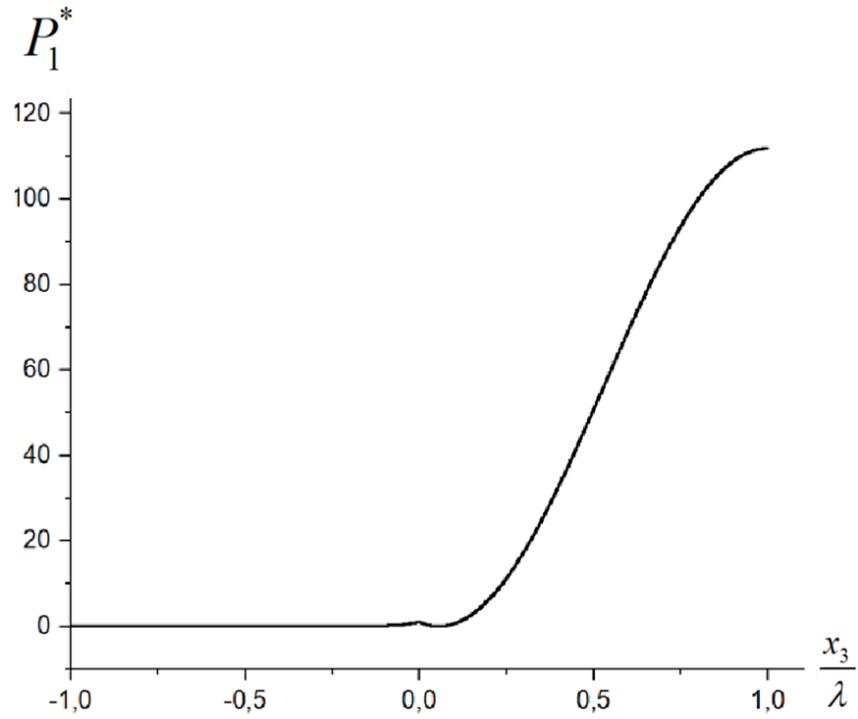


Рисунок 3.18 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для волн из первой моды для случая с нулевыми параметрами неоднородности

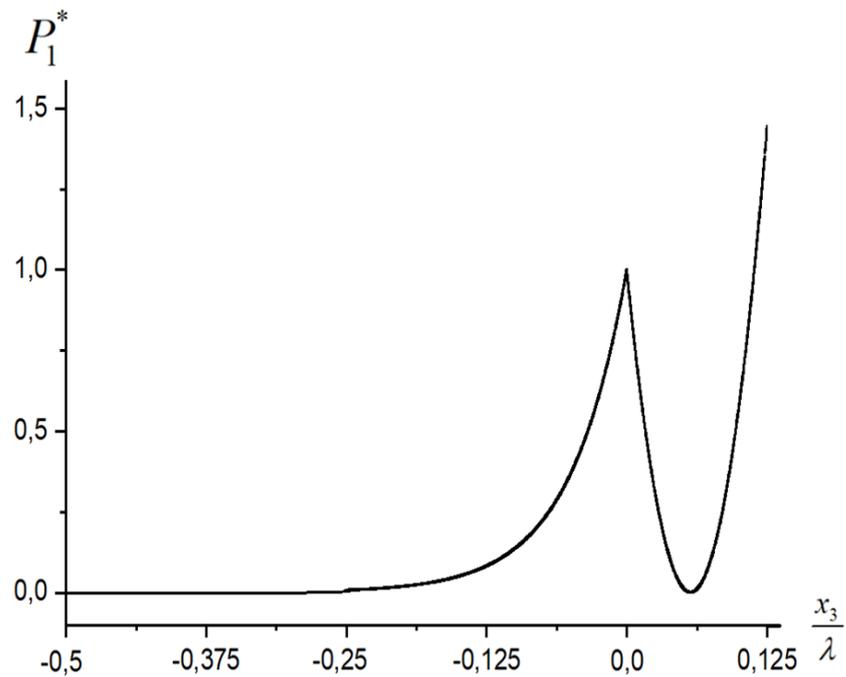


Рисунок 3.19 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для волн из первой моды для случая с нулевыми параметрами неоднородности вблизи границы раздела слоя и полупространства

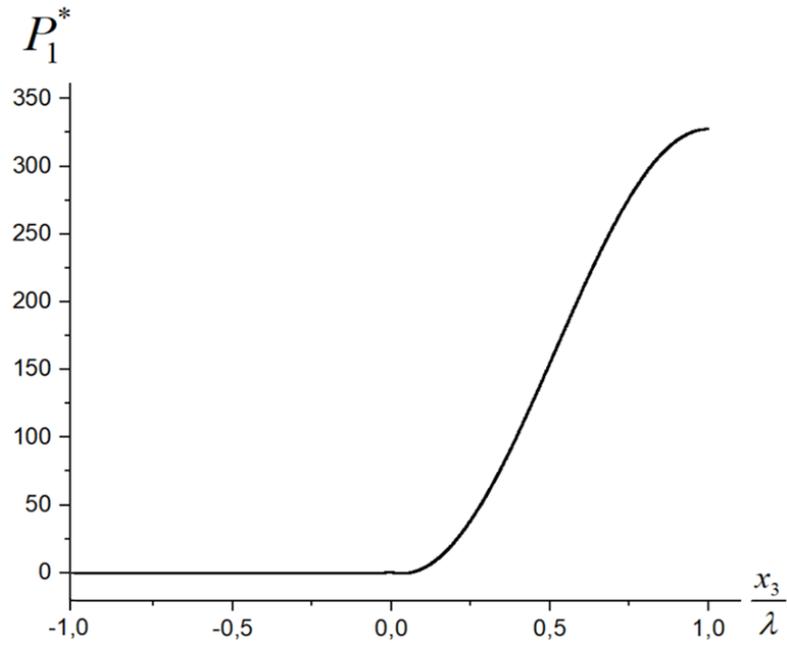


Рисунок 3.20 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для волн из первой моды для случая полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$

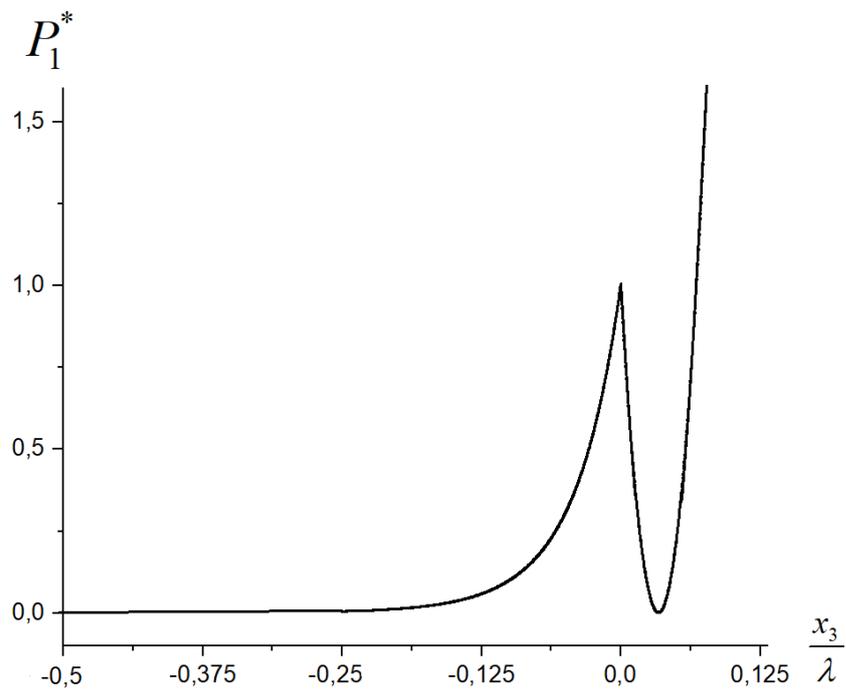


Рисунок 3.21 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для волн из первой моды для случая полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 0.5, \beta = 10\}$ вблизи границы раздела

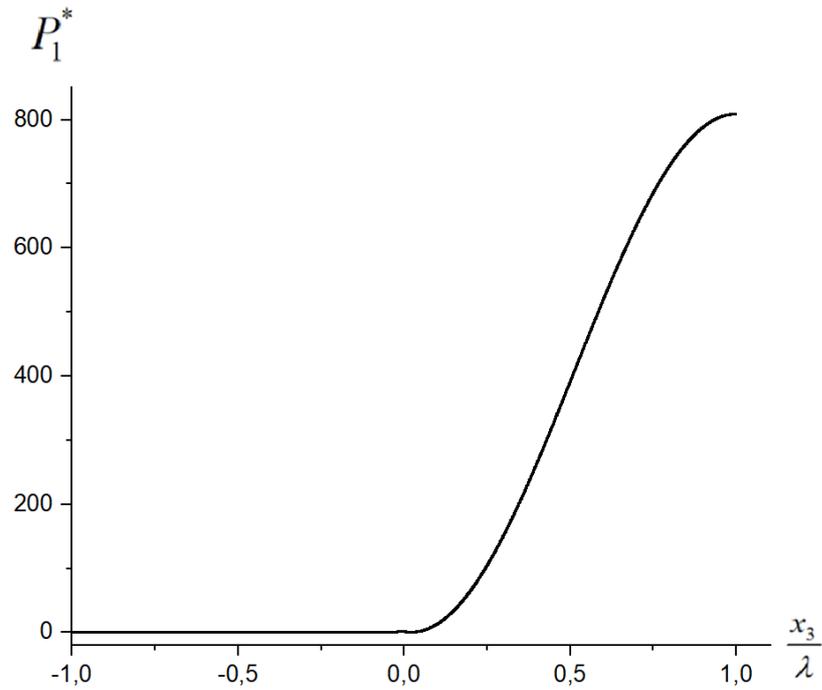


Рисунок 3.22 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для первой моды спектра в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 1, \beta = 10\}$

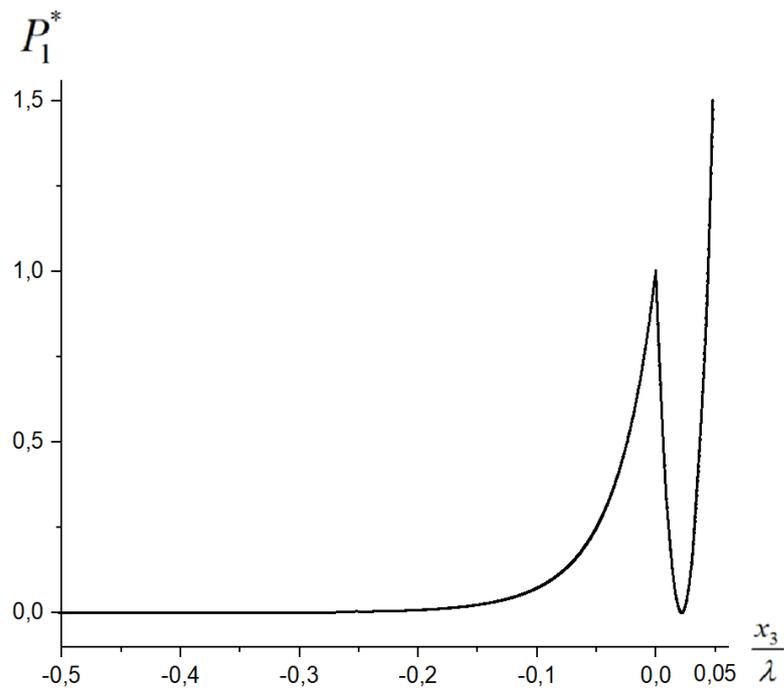


Рисунок 3.23 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для первой моды спектра в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 1, \beta = 10\}$ вблизи границы

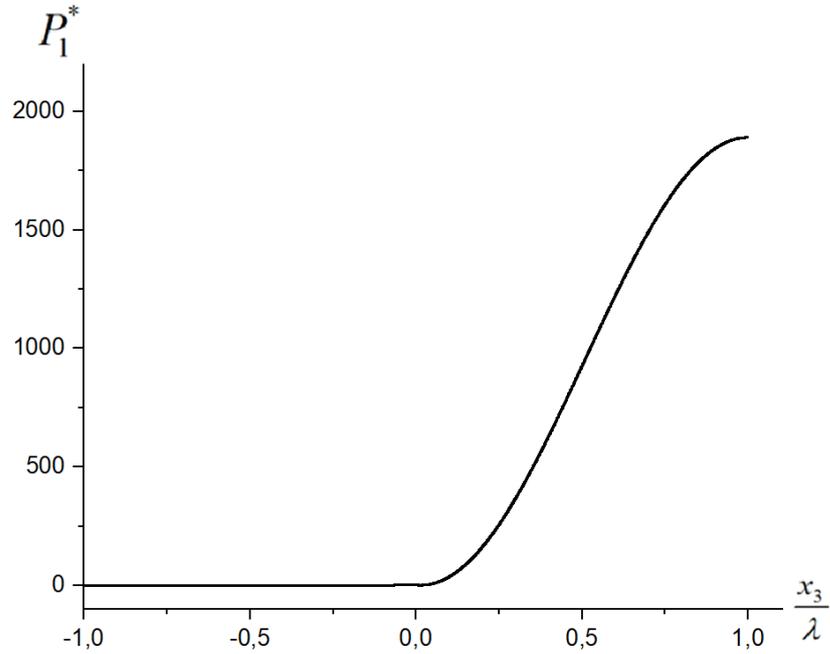


Рисунок 3.24 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для первой моды спектра в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 2, \beta = 10\}$

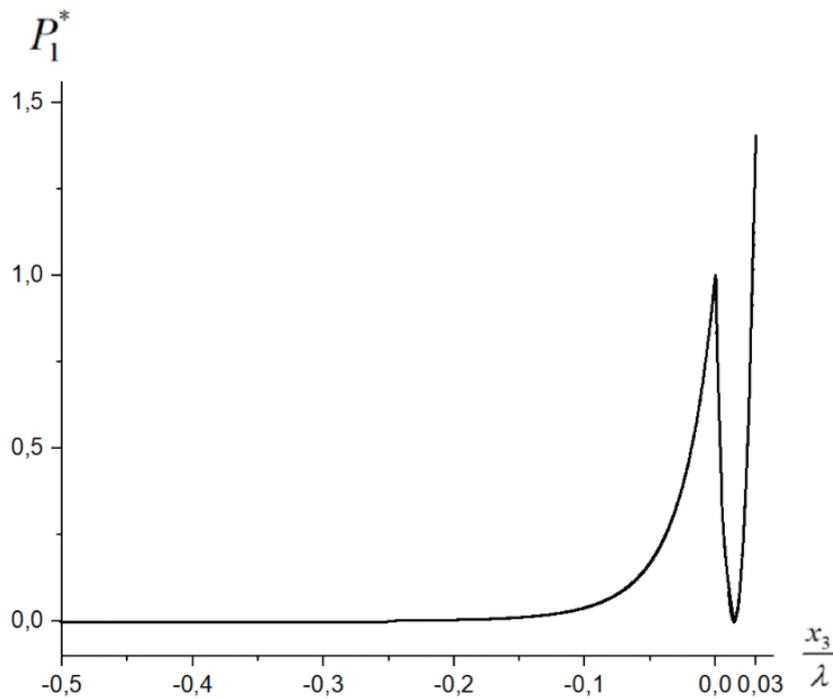


Рисунок 3.25 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для первой моды спектра в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 2, \beta = 10\}$ вблизи границы

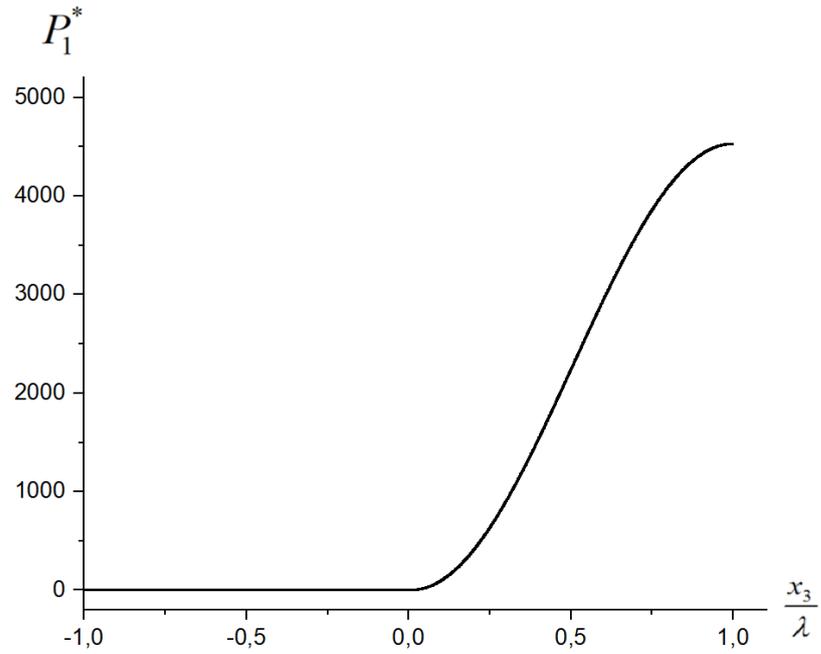


Рисунок 3.26 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для первой моды спектра в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$

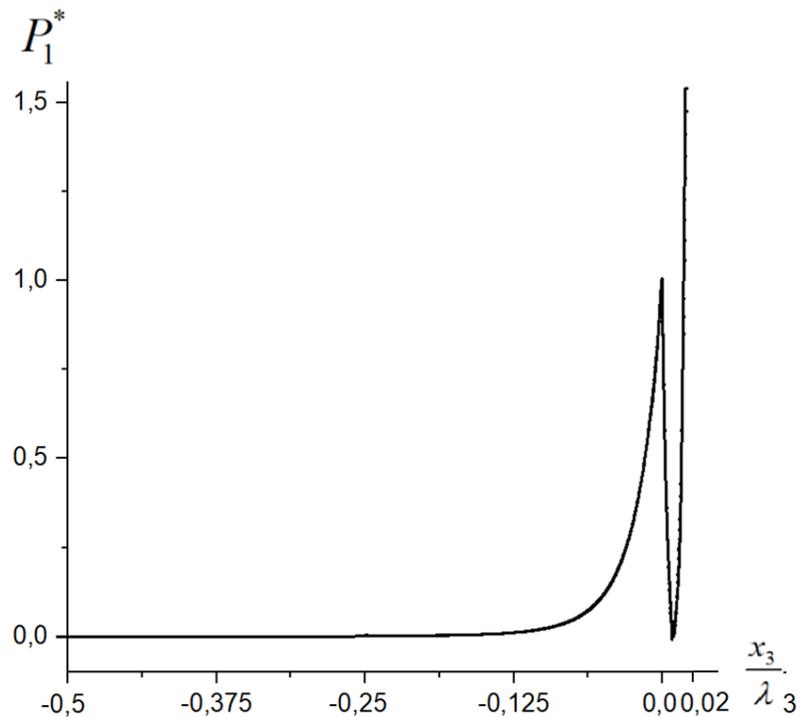


Рисунок 3.27 – Распределение плотности среднего за период потока мощности для первой моды спектра в случае полупространства с коэффициентами неоднородности $\{\lambda = 3, \beta = 10\}$ вблизи границы

3.2. Анализ модели распространения волн Лява в составной структуре «функционально-градиентный анизотропный либо изотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве»

Рассматривается волновод, состоящий из трансверсально-изотропного экспоненциально-неоднородного слоя $V_1 = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 < x_3 \leq h_*\}$ толщиной h_* , расположенного поверх неоднородного по глубине функционально-градиентного трансверсально-изотропного полупространства $V_2 = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \leq 0\}$ с приграничной неоднородностью, описываемой двойным экспоненциальным законом.

Исследуемые в данном подразделе модели базируются на уравнениях волнового деформирования и определяющих соотношениях для материала компоненты волновода в виде полупространства вида (3.4), (3.5) и для компоненты волновода в виде функционально-градиентного слоя с экспоненциальной неоднородностью

$$\partial_1 \sigma_{21}^{(c)} + \partial_2 \sigma_{23}^{(c)} - \rho^{(c)}(x_3) \ddot{u}_2^{(c)} = 0, \quad \sigma_{21}^{(c)} = c_{66c}(x_3) \partial_1 u_2^{(c)}, \quad \sigma_{23}^{(c)} = c_{44c}(x_3) \partial_3 u_2^{(c)}; \quad (3.24)$$

$$c_{44}^{(c)} = c_{440}^{(c)} \exp(\mu x_3), \quad c_{66}^{(c)} = c_{660}^{(c)} \exp(\mu x_3), \quad \rho^{(c)} = \rho_0^{(c)} \exp(\mu x_3). \quad (3.25)$$

Динамические упругие перемещения для исследуемых стационарных обобщенных поверхностных волн Лява SH-типа в компонентах волновода задаются представлениями

$$u_2^{(c)}(x_3) = u_{20}^{(c)}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (3.26)$$

$$u_2^{(n)}(x_3) = u_{20}^{(n)}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)). \quad (3.27)$$

Краевые условия на граничных поверхностях волновода имеют форму (3.6).

При подстановке представлений (3.1), (3.2), (3.26) в (3.24), (3.25) и в краевые условия на граничных поверхностях волновода (3.6) система соотношений рассматриваемой задачи трансформируется в однородную краевую задачу для нормированных амплитудных составляющих $u_{20}^{(c)}(x_3)$, $u_{20}^{(n)}(x_3)$, включающую уравнения

$$u_{20}^{(c)''} + \eta u_{20}^{(c)'} + \theta u_{20}^{(c)} = 0, \quad \eta = \mu, \quad \theta = (\rho_0^{(c)} \omega^2 - c_{660}^{(c)} k^2) / c_{440}^{(c)}. \quad (3.28)$$

$$u_{20}^{(n)''}(x_3) - \alpha^2 u_{20}^{(n)}(x_3) = \gamma \exp(-\beta x_3) u_{20}^{(n)'}(x_3), \quad (3.29)$$

$$\gamma = \lambda \beta, \quad \alpha^2 = (\rho_0^{(n)} \omega^2 - c_{660}^{(n)} k^2) / c_{440}^{(n)},$$

и граничные условия вида

$$u_{20}^{(c)'}(h_*) = 0, \quad u_{20}^{(c)}(0) = u_{20}^{(n)}(0), \quad c_{440}^{(c)} u_{20}^{(c)'}(0) = e^{\lambda} c_{440}^{(n)} u_{20}^{(n)'}(0). \quad (3.30)$$

Решение уравнения (3.28) при интегрировании методом Эйлера может быть представлено в форме

$$u_{20} = A_1 \exp(\xi_1 x_3) + A_2 \exp(\xi_2 x_3), \quad (3.31)$$

$$\xi_{1,2} = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\theta}}{2},$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные, $\xi_1(\omega, k), \xi_2(\omega, k)$ – функции искомых параметров волнового числа и циклической частоты обобщенных локализованных волн Лява.

Распределение амплитуд напряжений по толщине слоя, в свою очередь, описывается соотношениями

$$\sigma_{23} = A_1 c_{440}^{(c)} \exp(\mu x_3) \xi_1 \exp(\xi_1 x_3) + A_2 c_{440}^{(c)} \exp(\mu x_3) \xi_2 \exp(\xi_2 x_3). \quad (3.32)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами вида (3.29) построено в подразделе 2.2, и для рассматриваемого случая его решение может быть записано в аналитической форме

$$u_{20}^{(n)}(x_3) = A_3 f_-(x_3), \quad (3.33)$$

где

$$f_-(x_3) = e^{-\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - (p-1)\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}. \quad (3.34)$$

При этом выражение для напряжения $\sigma_{230}^{(n)}(x_3)$ принимает вид

$$\sigma_{230}^{(n)}(x_3) = A_1 c_{44}^{(n)} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) f_-'(x_3), \quad (3.35)$$

$$f_-'(x_3) = -\alpha e^{-\alpha x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\alpha \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha - p\beta) ((-\alpha - p\beta)^2 + \alpha^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha - n\beta)x_3}.$$

Подстановка представлений (3.31)–(3.35) в краевые условия (3.30) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов A_1, A_2, A_3

$$-A_1 c_{440}^{(c)} \exp(\mu h_*) \xi_1 \exp(\xi_1 h_*) + A_2 c_{440}^{(c)} \exp(\mu h_*) \xi_2 \exp(\xi_2 h_*) = 0, \quad (3.36)$$

$$A_1 + A_2 - A_3 f_-(0) = 0,$$

$$A_1 c_{440}^{(c)} \xi_1 + A_2 c_{440}^{(c)} \xi_2 - A_3 c_{440}^{(n)} \exp(\lambda) f'_-(0) = 0.$$

Равенство нулю определителя системы (3.36) и является формулируемым в аналитической форме дисперсионным уравнением для исследуемых обобщенных локализованных волн Лява в структуре «функционально-градиентный трансверсально-изотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве»

$$F(k, \omega) = \begin{vmatrix} -c_{440}^{(c)} \exp(\mu h_*) \xi_1 \exp(\xi_1 h_*) & c_{440}^{(c)} \exp(\mu h_*) \xi_2 \exp(\xi_2 h_*) & 0 \\ 1 & 1 & -f_-(0) \\ c_{440}^{(c)} \xi_1 & c_{440}^{(c)} \xi_2 & -c_{440}^{(n)} \exp(\lambda) f'_-(0) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.37)$$

В частном случае функционально-градиентного экспоненциально-неоднородного изотропного слоя V_1 , для которого $c_{440}^{(c)} = c_{660}^{(c)}$, при анализе рассматриваемой модели применимы полученные выше соотношения (3.31)–(3.37), в которых фигурирующая в (3.28) величина θ может быть представлена выражением

$$\theta = (\rho_0^{(c)} \omega^2 / c_{440}^{(c)} - k^2) = k^2 ((\tilde{c}_L / \tilde{c})^2 - 1), \quad (3.38)$$

где \tilde{c}_L – искомый параметр фазовой скорости обобщенных локализованных волн Лява, \tilde{c} – параметр фазовой скорости объемных волн сдвига в изотропном материале слоя без учета неоднородности.

Результаты расчетных исследований данного подраздела касаются вопроса об особенностях влияния значений параметра экспоненциальной неоднородности функционально-градиентного материала слоя μ на характеристики мод с ненулевыми частотами запираения в дисперсионных спектрах обобщенных поверхностных волн Лява.

Рассмотрен частный случай изотропного материала слоя. Физико-механические параметры для рассматриваемой волноводной структуры в расчетах имеют приведенные модельные значения $h_* = 1$, $c_{440}^{(c)} = 1$, $\rho_0^{(c)} = 1$, $c_{660}^{(n)} = 4$, $c_{440}^{(n)} = 2$, $\rho_0^{(n)} = 1$. Для материала полупространства выбирались фиксированные значения параметров приповерхностной неоднородности $\lambda = 0.5$, $\beta = 10$, а параметр неоднородности материала слоя μ в расчетах имел значения $\mu = -4$ (рис. 3.28), $\mu = -2$ (рис. 3.29), $\mu = 2$ (рис. 3.30), $\mu = 4$ (рис. 3.31).

Анализ представленных на рисунках фрагментов диаграмм дисперсионных кривых позволяет сделать вывод относительно снижения частот запираания для представленных на диаграммах мод при наращивании величины параметра неоднородности материала слоя μ , и соответствующее снижение фазовых скоростей обобщенных локализованных волн Лява из мод одного порядка. Для низшей моды с ненулевой частотой запираания темпы уменьшения этой частоты при варьировании μ с наращиванием в диапазоне $-4 \leq \mu \leq 4$ снижаются, и на соответствующей дисперсионной кривой для $\mu = 4$ появляется участок с отрицательным наклоном, отвечающий обратным волнам с противоположными по знаку значениями фазовых и групповых скоростей, что является качественно новым эффектом для спектральных характеристик обобщенных поверхностных волн Лява.

Вывод о снижении темпов уменьшения частот запираания с ростом значения μ может быть сделан и в отношении последующих рассчитанных и представленных на графиках мод.

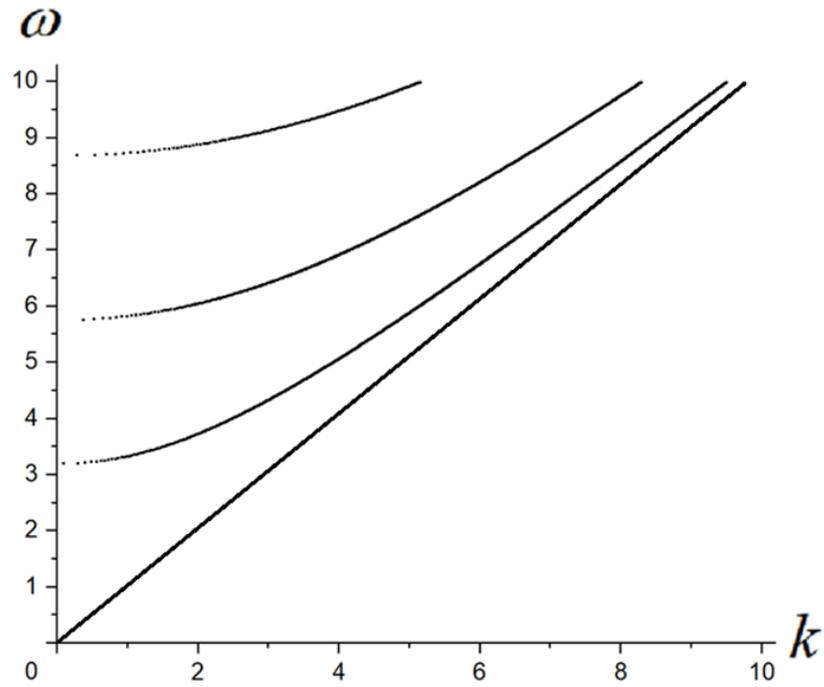


Рисунок 3.28 – Действительные ветви дисперсионного спектра для модельных параметров $h_* = 1$, $c_{440}^{(c)} = 1$, $\rho_0^{(c)} = 1$, $c_{660}^{(n)} = 4$, $c_{440}^{(n)} = 2$, $\rho_0^{(n)} = 1$ и $\mu = -4$

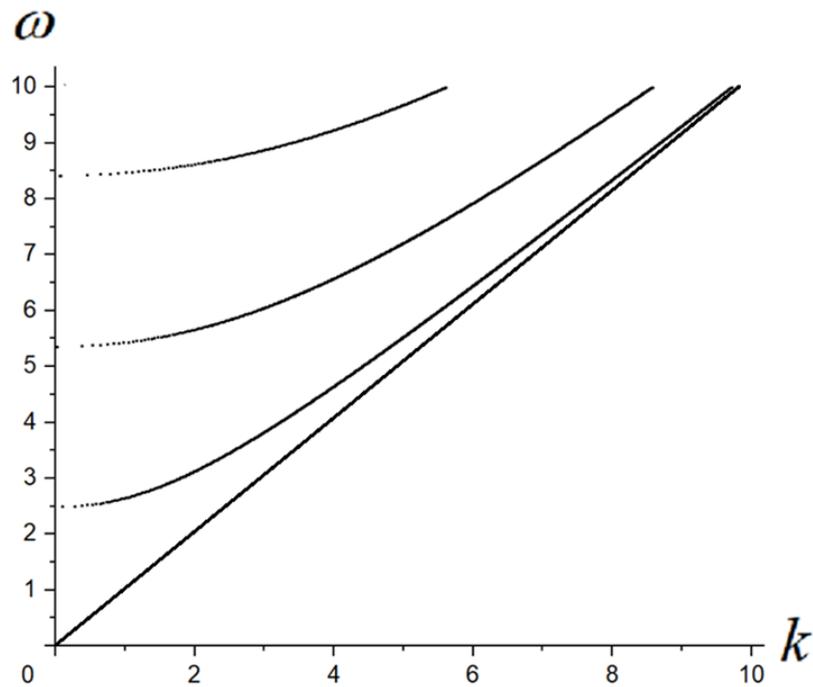


Рисунок 3.29 – Действительные ветви дисперсионного спектра для модельных параметров $h_* = 1$, $c_{440}^{(c)} = 1$, $\rho_0^{(c)} = 1$, $c_{660}^{(n)} = 4$, $c_{440}^{(n)} = 2$, $\rho_0^{(n)} = 1$ и $\mu = -2$

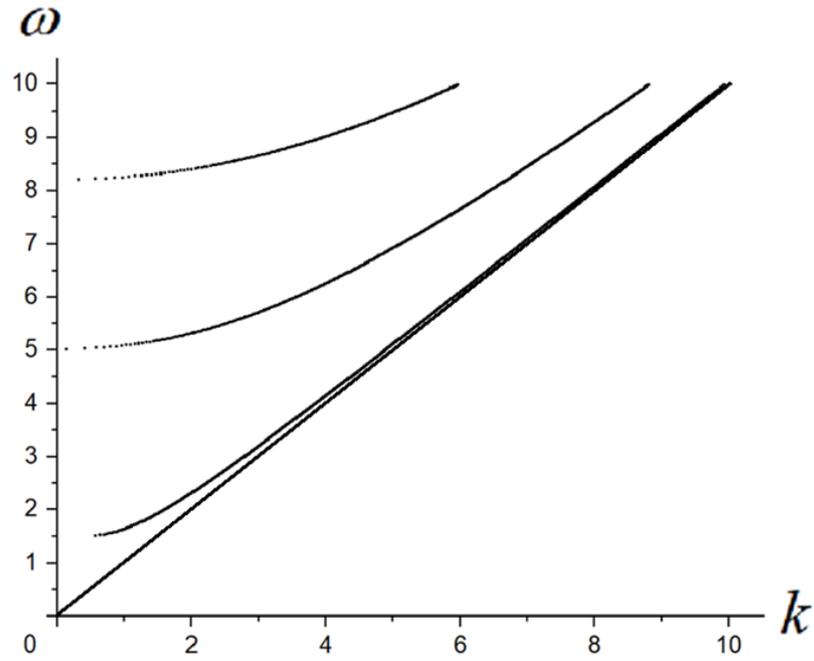


Рисунок 3.30 – Действительные ветви дисперсионного спектра для модельных параметров $h_* = 1$, $c_{440}^{(c)} = 1$, $\rho_0^{(c)} = 1$, $c_{660}^{(n)} = 4$, $c_{440}^{(n)} = 2$, $\rho_0^{(n)} = 1$ и $\mu = 2$

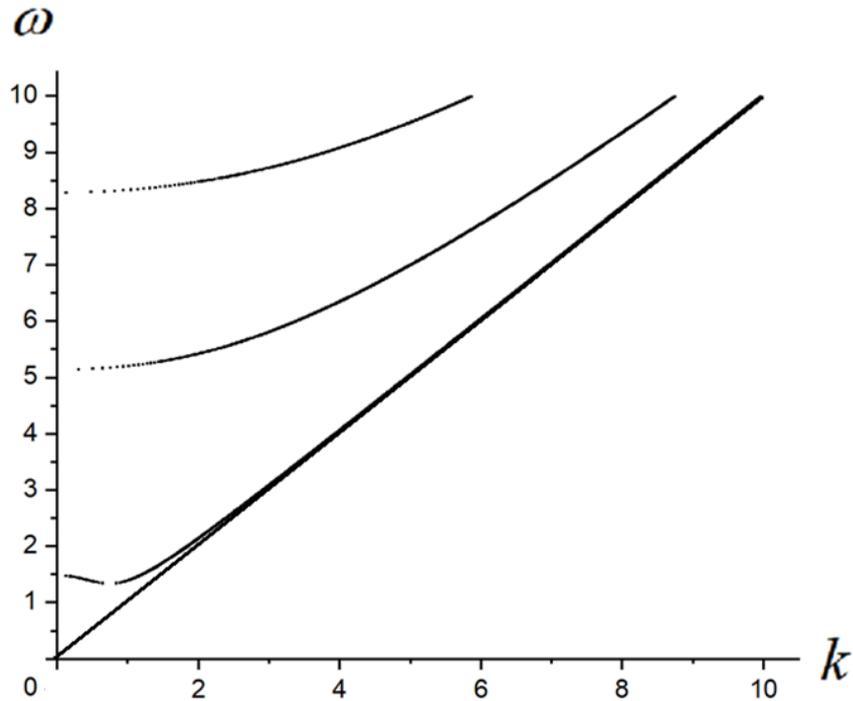


Рисунок 3.31 – Действительные ветви дисперсионного спектра для модельных параметров $h_* = 1$, $c_{440}^{(c)} = 1$, $\rho_0^{(c)} = 1$, $c_{660}^{(n)} = 4$, $c_{440}^{(n)} = 2$, $\rho_0^{(n)} = 1$ и $\mu = 4$

3.3. Анализ модели распространения поверхностных волн рэлеевского типа в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности

Задачи о распространении волн обобщенных поверхностных волн Рэлея в полубесконечных функционально-градиентных телах с различными типами неоднородности и анизотропии остаются на сегодняшний день требующими дальнейшего исследования малоисследованными актуальными задачами волновой механики деформируемых сред. В значительной мере это обусловлено перспективами дальнейшего применения получаемых результатов при решении конкретных инженерных проблем в области сейсмоакустики и неразрушающего ультразвукового контроля. Так, в частности, исследование особенностей распространения сейсмоакустических упругих волн в массивах горных пород, как отмечено в п. 1.1 данной работы, показало, что важным элементом достижения адекватности математических моделей является учет непрерывной неоднородности физико-механических свойств горных пород при отходе от граничной поверхности вглубь, а также их асимптотический выход на стабилизированные постоянные значения на глубине массива при неограниченном увеличении расстояния от граничной поверхности. Модель такого типа с описанием неоднородности двойными экспоненциальными функциями, предложенная в данной работе, и является основой реализуемого ниже исследования.

Рассматривается волновод в виде свободного по граничной поверхности ортотропного функционально-градиентного полупространства с локализованной у границы зоной неоднородности, занимающий в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < 0\}. \quad (3.39)$$

Для описания непрерывной неоднородности физико-механических свойств полупространства в качестве функционального закона изменения плотности и

упругих постоянных массива по глубине предлагается использование введенных в п. 2.1. представлений вида

$$c_{ij} = c_{ij}^{(0)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho = \rho^{(0)} \cdot \varphi(\lambda, \beta, x_3), \quad (ij = 11, 22, 33, 23, 13, 12, 44, 55, 66), \quad (3.40)$$

$$\varphi(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)),$$

где λ, β – действительные параметры неоднородности; $\beta < 0$ при $x_3 < 0$.

Распространение в полупространстве V обобщенных рэлеевских локализованных волн P-SV типа с компонентами комплексного вектора волновых упругих перемещений

$$u_1(x_1, x_3) = u_{10}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad u_2(x_1, x_3) \equiv 0, \quad (3.41)$$

$$u_3(x_1, x_3) = u_{30}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1))$$

описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно амплитудных составляющих $u_{10}(x_3)$, $u_{30}(x_3)$ в выражениях (3.41), получение и алгоритм интегрирования которой представлены в подразделе 2.3. С применением представленной в п. 2.3. методики для вектор-функции решения

$$\underline{F}(x_3) = \begin{pmatrix} u_{10}(x_3) \\ u_{30}(x_3) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

получено выражение вида

$$\underline{F}(x_3) = \begin{pmatrix} u_{10}(x_3) \\ u_{30}(x_3) \end{pmatrix} = A \underline{F}_1(x_3) + B \underline{F}_2(x_3) = A \begin{pmatrix} u_{10}^{(1)}(x_3) \\ u_{30}^{(1)}(x_3) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_{10}^{(2)}(x_3) \\ u_{30}^{(2)}(x_3) \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

где $\underline{F}_1(x_3)$, $\underline{F}_2(x_3)$ – два базисных частных решения системы относительно амплитудных составляющих, имеющие аналитические представления в виде векторных функциональных рядов

$$\begin{aligned} \underline{F}_j(x_3) = & f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - \beta)x_3} + \gamma^2 \underline{M}_{12,j}^{-1} \underline{M}_{22,j} \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta)x_3} - \dots + \\ & + (-\gamma)^n \underline{M}_{1n,j}^{-1} \underline{M}_{2n,j} \underline{M}_{1n-1,j}^{-1} \underline{M}_{2n-1,j} \dots \underline{M}_{11,j}^{-1} \underline{M}_{21,j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - n\beta)x_3} = \\ = & f_{0j} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - \beta)x_3} + \gamma^2 \underline{Q}_{2j} \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - 2\beta)x_3} - \dots + \\ & + (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj} \underline{Q}_{n-1,j} \dots \underline{Q}_{1j} \underline{f}_{0j} e^{(\delta_j - n\beta)x_3}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Входящие в выражения (3.44) и зависящие от физико-механических характеристик полупространства величины описаны в п. 2.3.

При получении дисперсионного соотношения для исследуемых волн представление (3.43) подставляется в однородные граничные условия на свободной поверхности полупространства

$$\begin{aligned}\sigma_{31}(0) &= c_{44}(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1)_{x_3=0} = 0, \\ \sigma_{33}(0) &= (c_{13}\partial_1 u_1 + c_{33}\partial_3 u_3)_{x_3=0} = 0,\end{aligned}\quad (3.45)$$

которые в результате этой подстановки принимают форму системы двух однородных алгебраических уравнений относительно неопределенных постоянных коэффициентов A , B . Равенство нулю определителя этой системы и является искомым дисперсионным соотношением

$$D(\omega, k) = \begin{pmatrix} c_{44}\partial_3 u_{10}^{(1)} + ikc_{44}u_{30}^{(1)} & c_{44}\partial_3 u_{10}^{(2)} + ikc_{44}u_{30}^{(2)} \\ ikc_{13}u_{10}^{(1)} + c_{33}\partial_3 u_{30}^{(1)} & ikc_{13}u_{10}^{(2)} + c_{33}\partial_3 u_{30}^{(2)} \end{pmatrix}_{x_3=0} = 0. \quad (3.46)$$

Для последующего расчета кинематических и силовых характеристик обобщенных рэлеевских волн в рассматриваемой волноводной структуре, после подстановки в алгебраическую систему относительно A , B определяемых из дисперсионного соотношения пар характеристик ω и k_R эквивалентные уравнения системы записываются в виде

$$A\phi_1 + B\phi_2 = 0, \quad (3.47)$$

откуда

$$B = \theta A, \quad \theta = -\frac{\phi_1}{\phi_2}. \quad (3.48)$$

Соответственно выражение для комплексного вектора упругих колебательных перемещений в волне рэлеевского типа с точностью до постоянного множителя принимает вид

$$\underline{F}(x_3) = A(\underline{F}_1(x_3) + \theta \underline{F}_2(x_3)). \quad (3.49)$$

Для характеристики распределения энергетических потоков в рэлеевской волне по глубине полупространства реализуется расчет вектора \bar{P} плотности среднего за период потока мощности в исследуемых волнах. Ненулевой компонентой этого вектора в рассматриваемом случае является величина \bar{P}_1 , имеющая выражение

$$\bar{P}_1 = -\frac{i\omega}{4}(\sigma_{11}u_1^* + \sigma_{31}u_3^* - \sigma_{11}^*u_1 - \sigma_{31}^*u_3). \quad (3.50)$$

где * – в данном случае знак комплексного сопряжения.

Численные исследования с применением разработанной методики реализованы применительно к частному случаю изотропного полупространства для варианта задания приведенных модельных значений исходных параметров

$$c_{11}^{(0)} = 3, c_{13}^{(0)} = 1, c_{33}^{(0)} = 3, c_{44}^{(0)} = 1, \rho_0 = 1. \quad (3.51)$$

Указанная совокупность параметров для однородного изотропного материала соответствует значению его коэффициента Пуассона $\nu = 0.25$.

Расчеты для предельного частного случая однородного изотропного полупространства с вышеуказанными параметрами проводились для верификации разработанного расчетного алгоритма и соответствующего программного приложения на основе сопоставления с результатами работы [22].

На рисунке 3.32 приведены дисперсионные кривые для волн рэлеевского типа в однородном изотропном полупространстве (сплошная линия), в изотропном полупространстве с приповерхностной неоднородностью, характеризуемой параметрами $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$ (штриховая линия) и дисперсионная кривая для объемных волн сдвига в материале однородного полупространства (штрихпунктирная линия).

Рисунок 3.33 иллюстрирует зависимости приведенных относительных амплитуд смещений \hat{u}_1 и \hat{u}_3 в обобщенной рэлеевской волне от относительной координаты x_3 / λ_R по толщине полупространства (сплошными линиями изображены зависимости для изотропного однородного тела, а пунктирными линиями – зависимости для случая локализованной приповерхностной неоднородности этого полупространства, характеризуемой параметрами $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$).

Зависимости приведенных относительных амплитуд напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{31}, \sigma_{33}$ в обобщенной рэлеевской волне от относительной координаты x_3 / λ_R по толщине

полупространства описывают аналогичным образом графики, представляемые на рисунке 3.34.

Наконец, на рисунке 3.35 изображены распределения по координате x_3 / λ_R в однородном и приповерхностно-неоднородном полупространстве для приведенной характеристики плотности среднего за период потока мощности вдоль направления распространения исследуемой волны.

Нормирующие параметры \hat{u}_{10} , \hat{u}_{30} , σ_{11}^0 , σ_{32}^0 , σ_{33}^0 , P_1^0 , для представляемых на графиках характеристик соответственно являются их значениями на граничной поверхности полупространства.

Предельные частные случаи в расчетах для нулевых коэффициентов неоднородности λ, β , представленные на рисунках 3.32–3.35 сплошными кривыми, при сопоставлении полностью совпадают с приведенными в работах [21, 22] для аналогично заданных исходных параметров. Можно также констатировать, что эффектами учета неоднородности для описываемых на этих рисунках характеристик являются снижение фазовой скорости исследуемой обобщенной поверхностной волны; смещение вглубь полупространства зон всплесков значений амплитуд перемещений; увеличение значений σ_{11} и уменьшение значений σ_{31}, σ_{33} , а также более пологий характер их зависимостей от координаты x_3 / λ_R ; уменьшение степени немонотонности для зависимости убывания энергетической характеристики волны при углублении в полупространство.

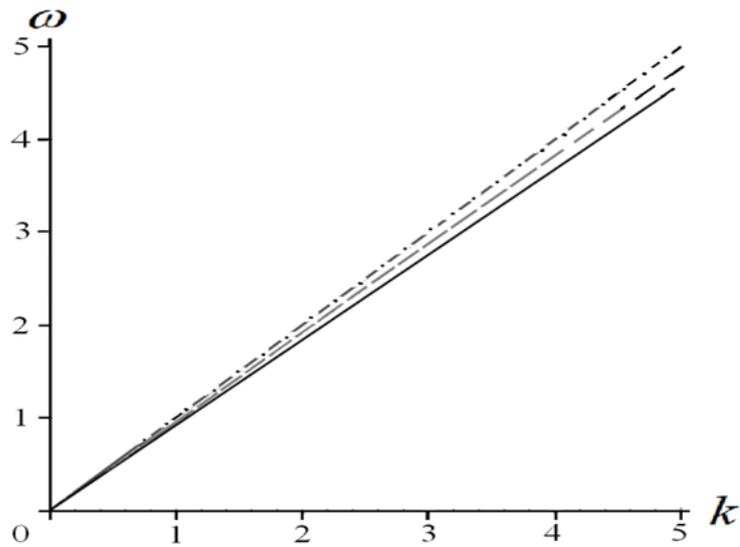


Рисунок 3.32 – Дисперсионные кривые для волн рэлеевского типа в однородном изотропном полупространстве (сплошная линия); в изотропном полупространстве с приповерхностной неоднородностью при $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$ (штриховая линия); для объемных волн сдвига в материале однородного полупространства (штрихпунктирная линия)

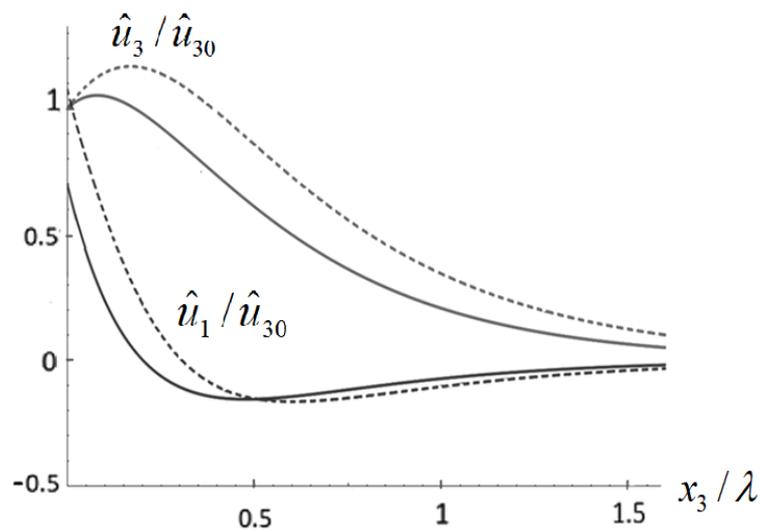


Рисунок 3.33 – Зависимости относительных амплитуд смещений \hat{u}_1 и \hat{u}_3 в обобщенной рэлеевской волне от относительной координаты x_3 / λ_R для изотропного однородного тела (сплошные линии); для локализованной приповерхностной неоднородности с параметрами $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$. (штриховые линии)

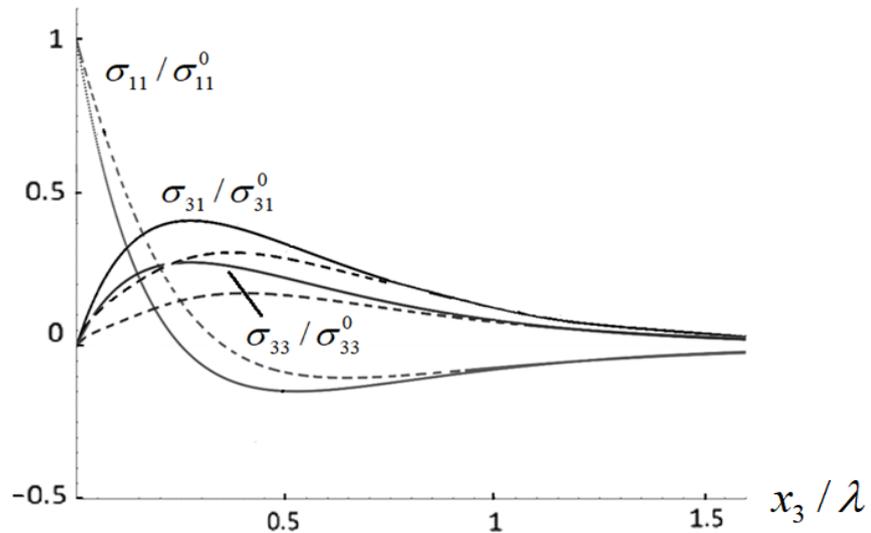


Рисунок 3.34 – Зависимости относительных амплитуд напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{31}, \sigma_{33}$ в обобщенной рэлеевской волне от относительной координаты x_3 / λ_R для изотропного однородного тела (сплошные линии); для локализованной приповерхностной неоднородности с параметрами $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$. (штриховые линии)

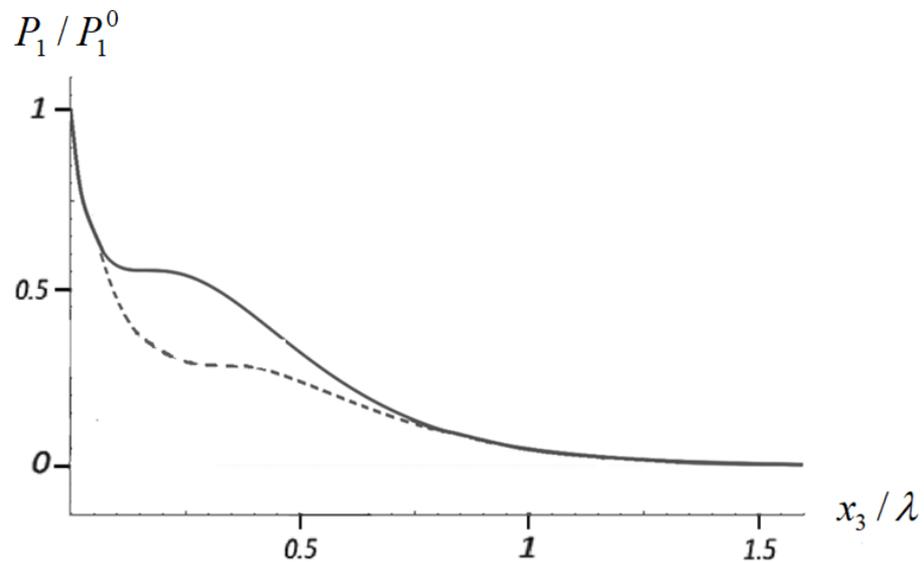


Рисунок 3.35 – Распределения плотности среднего за период потока мощности для изотропного однородного тела (сплошная линия); для локализованной приповерхностной неоднородности с параметрами $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$. (штриховая линия)

Вид кривых распределений плотностей потоков мощности позволяет заключить, что как для однородного, так и для функционально-градиентного полупространства с параметрами неоднородности $\lambda = 2.5$, $\beta = 2.5$, поток энергии рэлеевской волны локализован в поверхностном слое глубиной λ_R , и неоднородность влияет только на характер распределения данной характеристики в указанном интервале.

Результаты численных исследований представлены также в таблицах 3.1–3.7.

В таблице 3.1 приведены значения скорости обобщенной волны Рэлея c_R в приповерхностно-неоднородном полупространстве с характеристиками (3.51) при различных значениях коэффициентов неоднородности, а также процентные показатели их отклонения от скорости волны Рэлея и скорости объемной поперечной волны c_2 в однородном полупространстве с характеристиками (5.51).

Таблица 3.1 – Значения скорости обобщенной волны Рэлея c_R в приповерхностно-неоднородном полупространстве с характеристиками (3.51) при различных значениях коэффициентов неоднородности

λ	β	c_R	$\frac{c_R - c_{R0}}{c_{R0}} \cdot 100\%$	$\frac{c_R - c_2}{c_2} \cdot 100\%$
0	0	0.9194	0	-8.07%
0.1	0.1	0.9216	+0.23%	-7.84%
0.1	1.0	0.9228	+0.36%	-7.72%
0.1	2.5	0.9239	+0.48%	-7.61%
1.0	0.1	0.9310	+1.26%	-6.90%
1.0	0.25	0.9327	+1.44%	-6.73%
1.0	0.5	0.9391	+2.14%	-6.09%
1.0	1.0	0.9519	+3.53%	-4.81%
1.0	2.5	0.9589	+4.29%	-4.11%
2.5	0.1	0.9353	+1.72%	-6.47%
2.5	1.0	0.9670	+5.17%	-3.30%
2.5	2.5	0.9731	+5.84%	-2.69%

В таблицах 3.2 и 3.3 для различных вариантов задания коэффициентов неоднородности λ, β приведены рассчитанные численно величины нормированных амплитудных характеристик волновых смещений u_1/u_{30} и u_3/u_{30} для ряда значений относительной координаты x_3/λ_R .

Аналогичные расчеты для нормированных амплитудных характеристик волновых напряжений σ_{11}/σ_{110} , σ_{31}/σ_{110} и σ_{33}/σ_{110} отражены в таблицах 3.4–3.6.

Наконец, в таблице 3.7 для различных вариантов задания коэффициентов неоднородности λ, β и ряда значений относительной координаты x_3/λ_R приведены рассчитанные численно величины нормированных амплитудных характеристик плотности среднего за период потока мощности вдоль направления распространения исследуемой волны P_1/P_1^0 .

Таблица 3.2 – Амплитуды смещений u_1/u_{30} .

λ, β	0, 0	0.1, 0.1	0.5, 0.1	1.0, 0.1	1.0, 1.0	2.5, 0.25	2.5, 0.5	2.5, 1.0	2.5, 2.5
x_3/λ_R									
0	0.68	0.68	0.69	0.70	0.85	0.86	1.09	1.14	1.07
0.05	0.41	0.41	0.42	0.43	0.59	0.60	0.83	0.89	0.80
0.10	0.21	0.22	0.23	0.24	0.40	0.42	0.65	0.70	0.58
0.15	0.08	0.08	0.09	0.10	0.25	0.30	0.52	0.54	0.38
0.20	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.14	0.21	0.42	0.41	0.23
0.25	-0.07	-0.07	-0.06	-0.06	0.06	0.15	0.34	0.30	0.10
0.30	-0.11	-0.11	-0.11	-0.11	0.00	0.11	0.27	0.20	0.01
0.35	-0.14	-0.14	-0.13	-0.13	-0.05	0.08	0.21	0.12	-0.06
0.40	-0.15	-0.15	-0.15	-0.15	-0.08	0.05	0.16	0.05	-0.10
0.45	-0.16	-0.16	-0.15	-0.15	-0.10	0.03	0.11	0.00	-0.13
0.50	-0.15	-0.16	-0.15	-0.15	-0.12	0.02	0.08	-0.04	-0.15
0.75	-0.11	-0.11	-0.12	-0.12	-0.13	-0.02	-0.04	-0.13	-0.15
1.00	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07	-0.09	-0.03	-0.08	-0.12	-0.11
1.25	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.06	-0.04	-0.08	-0.09	-0.07
1.50	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02	-0.04	-0.04	-0.07	-0.06	-0.04

Таблица 3.3 – Амплитуды смещений u_3 / u_{30} .

λ, β	0, 0	0.1, 0.1	0.5, 0.1	1.0, 0.1	1.0,1.0	2.5,0.25	2.5,0.5	2.5,1.0	2.5,2.5
x_3 / λ_R									5
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.05	1.04	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.09	1.09	1.09
0.10	1.04	1.04	1.05	1.05	1.09	1.08	1.15	1.15	1.14
0.15	1.01	1.01	1.02	1.02	1.08	1.07	1.18	1.19	1.17
0.20	0.97	0.97	0.98	0.98	1.06	1.04	1.19	1.21	1.16
0.25	0.91	0.91	0.92	0.92	1.03	1.01	1.20	1.21	1.14
0.30	0.85	0.85	0.86	0.86	0.99	0.98	1.20	1.20	1.10
0.35	0.78	0.79	0.79	0.80	0.94	0.94	1.19	1.18	1.05
0.40	0.71	0.71	0.73	0.73	0.89	0.91	1.17	1.15	0.99
0.45	0.65	0.65	0.66	0.67	0.83	0.87	1.15	1.11	0.92
0.50	0.59	0.59	0.60	0.61	0.78	0.84	1.13	1.06	0.86
0.75	0.34	0.35	0.36	0.36	0.53	0.68	0.97	0.81	0.56
1.00	0.19	0.20	0.20	0.21	0.34	0.55	0.79	0.58	0.34
1.25	0.10	0.11	0.11	0.11	0.21	0.45	0.62	0.40	0.20
1.50	0.05	0.06	0.06	0.06	0.13	0.36	0.48	0.27	0.12

Таблица 3.4 – Амплитуды напряжений $\sigma_{11} / \sigma_{110}$.

λ, β	0, 0	0.1, 0.1	0.5, 0.1	1.0, 0.1	1.0,1.0	2.5,0.25	2.5,0.5	2.5,1.0	2.5,2.5
x_3 / λ_R									5
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.05	0.64	0.64	0.65	0.65	0.72	0.74	0.78	0.80	0.76
0.10	0.38	0.39	0.04	0.40	0.51	0.55	0.63	0.64	0.56
0.15	0.20	0.21	0.22	0.22	0.35	0.42	0.52	0.50	0.39
0.20	0.07	0.08	0.09	0.09	0.23	0.32	0.42	0.39	0.25
0.25	-0.01	-0.01	0.00	0.00	0.14	0.25	0.35	0.30	0.14
0.30	-0.07	-0.07	-0.06	-0.06	0.06	0.19	0.29	0.21	0.06
0.35	-0.11	-0.11	-0.10	-0.10	0.01	0.15	0.23	0.15	0.00
0.40	-0.14	-0.14	-0.13	-0.13	-0.03	0.12	0.18	0.09	-0.04
0.45	-0.15	-0.15	-0.14	-0.14	-0.06	0.09	0.14	0.04	-0.07
0.50	-0.16	-0.15	-0.15	-0.15	-0.08	0.07	0.11	0.01	-0.09
0.75	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.10	0.01	0.00	-0.01	-0.10
1.00	-0.07	-0.07	-0.08	-0.08	-0.08	-0.01	-0.05	-0.08	-0.07
1.25	-0.04	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.02	-0.06	-0.06	-0.05
1.50	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.05	-0.04	-0.03

Таблица 3.5 – Амплитуды напряжений $\sigma_{31} / \sigma_{110}$.

λ, β	0, 0	0.1, 0.1	0.5, 0.1	1.0, 0.1	1.0,1.0	2.5,0.25	2.5,0.5	2.5,1.0	2.5,2.5
x_3 / λ_R									5
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.05	0.12	0.12	0.12	0.12	0.09	0.12	0.06	0.06	0.05
0.10	0.19	0.20	0.20	0.19	0.14	0.18	0.09	0.08	0.08
0.15	0.24	0.25	0.24	0.24	0.17	0.20	0.10	0.09	0.10
0.20	0.27	0.27	0.27	0.26	0.18	0.21	0.11	0.10	0.13
0.25	0.28	0.28	0.28	0.27	0.19	0.20	0.11	0.11	0.15
0.30	0.28	0.28	0.27	0.27	0.19	0.20	0.11	0.12	0.16
0.35	0.27	0.27	0.27	0.26	0.19	0.18	0.11	0.12	0.17
0.40	0.26	0.26	0.25	0.25	0.19	0.17	0.11	0.13	0.17
0.45	0.24	0.24	0.24	0.24	0.18	0.16	0.11	0.13	0.17
0.50	0.22	0.23	0.22	0.22	0.18	0.15	0.11	0.13	0.16
0.75	0.14	0.14	0.14	0.14	0.13	0.11	0.10	0.12	0.12
1.00	0.08	0.08	0.08	0.08	0.09	0.08	0.09	0.09	0.08
1.25	0.04	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.07	0.06	0.05
1.50	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04	0.05	0.06	0.04	0.03

Таблица 3.6 – Амплитуды напряжений $\sigma_{33} / \sigma_{110}$.

λ, β	0, 0	0.1, 0.1	0.5, 0.1	1.0, 0.1	1.0,1.0	2.5,0.25	2.5,0.5	2.5,1.0	2.5,2.5
x_3 / λ_R									5
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.05	0.17	0.18	0.18	0.17	0.16	0.17	0.15	0.14	0.11
0.10	0.29	0.29	0.29	0.29	0.25	0.27	0.23	0.20	0.17
0.15	0.36	0.36	0.36	0.36	0.30	0.32	0.28	0.24	0.21
0.20	0.40	0.40	0.40	0.39	0.34	0.35	0.31	0.27	0.25
0.25	0.41	0.41	0.41	0.41	0.35	0.37	0.33	0.29	0.28
0.30	0.41	0.41	0.41	0.41	0.36	0.37	0.34	0.30	0.30
0.35	0.40	0.40	0.40	0.40	0.36	0.37	0.35	0.31	0.30
0.40	0.38	0.38	0.38	0.38	0.35	0.36	0.35	0.31	0.30
0.45	0.36	0.36	0.36	0.36	0.34	0.36	0.35	0.31	0.30
0.50	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.35	0.35	0.31	0.28
0.75	0.20	0.21	0.21	0.21	0.24	0.29	0.32	0.26	0.20
1.00	0.12	0.12	0.12	0.12	0.16	0.24	0.27	0.19	0.13
1.25	0.06	0.07	0.07	0.07	0.10	0.19	0.22	0.14	0.08
1.50	0.03	0.04	0.04	0.04	0.06	0.16	0.17	0.09	0.05

Таблица 3.7. Величины нормированных амплитудных характеристик плотности среднего потока мощности P_1/P_1^0

λ, β	0, 0	0.1, 0.1	0.5, 0.1	1.0, 0.1	1.0, 1.0	2.5, 0.25	2.5, 0.5	2.5, 1.0	2.5, 2.5
x_3/λ_R									
0	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0.05	0.66	0.66	0.66	0.66	0.69	0.72	0.74	0.74	0.68
0.10	0.57	0.57	0.57	0.57	0.56	0.60	0.62	0.59	0.48
0.15	0.56	0.56	0.56	0.55	0.49	0.54	0.55	0.49	0.37
0.20	0.57	0.56	0.56	0.55	0.46	0.51	0.51	0.43	0.32
0.25	0.56	0.55	0.54	0.54	0.44	0.48	0.47	0.38	0.31
0.30	0.53	0.52	0.52	0.51	0.42	0.45	0.45	0.36	0.30
0.35	0.48	0.48	0.47	0.47	0.39	0.42	0.43	0.44	0.29
0.40	0.43	0.43	0.43	0.42	0.37	0.39	0.41	0.32	0.28
0.45	0.37	0.38	0.37	0.37	0.34	0.36	0.39	0.31	0.26
0.50	0.32	0.32	0.32	0.32	0.31	0.34	0.37	0.29	0.24
0.75	0.12	0.13	0.13	0.13	0.16	0.23	0.28	0.19	0.12
1.00	0.04	0.04	0.04	0.04	0.07	0.15	0.20	0.10	0.05
1.25	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.10	0.13	0.05	0.02
1.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.06	0.07	0.02	0.00

3.4. Выводы по разделу 3

1. Реализован анализ моделей распространения обобщенных поверхностных волн Лява в составных структурах «однородный изотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве», «функционально-градиентный анизотропный слой на однородном либо функционально-градиентном анизотропном полупространстве с приграничной неоднородностью».

2. Осуществлен анализ модели распространения обобщенных поверхностных волн релеевского типа в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности.

3. С использованием результатов численно-аналитического исследования моделей распространения обобщенных поверхностных волн Лява и Рэлея в

описанных выше волноводных структурах с функционально-градиентными компонентами реализован анализ ряда закономерностей в дисперсионных, кинематических, силовых и энергетических свойствах волн данного типа в зависимости от показателей неоднородности материалов волноводов.

4. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [10, 33-35, 41, 87, 88].

РАЗДЕЛ 4. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СДВИГОВЫХ И ПРОДОЛЬНО- СДВИГОВЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДНЫХ СТРУКТУРАХ В ВИДЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО СЛОЯ МЕЖДУ ВМЕЩАЮЩИМИ УПРУГИМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

Исследование процессов распространения волн напряжений в составных телах-волноводах, образуемых упругим слоем, контактирующим с вмещающими деформируемыми полупространствами, в контексте ряда выполненных исследований по данной проблеме, продолжает сохранять актуальность с точки зрения дальнейшего учета различных усложненных физико-механических свойств компонентов. К ряду таких усложнений относится сочетание факторов механической анизотропии и непрерывной поперечной неоднородности материалов слоя и полупространств, особо характерной для создаваемых на базе аддитивных технологий функционально-градиентных анизотропных нанокompозитов в конструкциях акустоэлектронных радиокомпонентов, а также для структурированных геомассивов из анизотропных неоднородных геоматериалов в окрестности зон контакта пластов с вмещающими массивами. При этом, в первую очередь, представляет интерес исследование случаев наличия локализованных приповерхностных областей выраженной неоднородности в зонах контакта слоя и полупространства, сглаживающейся с выходом на асимптотические характеристики однородных материалов при отдалении от поверхности контакта.

Целью представляемых в данном разделе исследований является анализ моделей распространения локализованных сдвиговых горизонтально-поляризованных упругих волн и локализованных продольно-сдвиговых волн P-SV типа в нескольких видах волноводных структур в виде деформируемого трансверсально-изотропного экспоненциально неоднородного либо однородного слоя между вмещающими трансверсально-изотропными функционально-

градиентными полупространствами с двойной экспоненциальной неоднородностью, интерпретирующей возмущение свойств материалов полупространств вблизи плоскостей контакта со слоем, включая получение дисперсионных соотношений, а также анализ спектральных, кинематических, силовых и энергетических характеристик рассматриваемых волн.

4.1. Исследование модели распространения волн сдвига в однородном анизотропном слое между однотипными функционально-градиентными трансверсально-изотропными полупространствами

Рассматривается занимающее область $V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V \cup V^{(-)}$ в декартовой системе нормированных координат $Ox_1x_2x_3$ составное пространственное упругое тело с фрагментами

$$V^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h\}, V^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h\}, \quad (4.1)$$

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, -h \leq x_3 \leq h\}.$$

Полагается, что материал слоя V является однородным трансверсально-изотропным, и в модели распространения упругих волн SH типа характеризуется физико-механическими постоянными $c_{550} = c_{440}$, $c_{660} = (c_{110} - c_{120})/2$, ρ_0 .

Вмещающие функционально-градиентные приповерхностно-неоднородные полупространства $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ также являются трансверсально-изотропными и имеют физико-механические характеристики, описываемые введенными в п.2.1 двойными экспоненциальными функциями

$$c_{ij}^{(\pm)}(x_3) = c_{ij0}^{(\pm)} \cdot \varphi^{(\pm)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(\pm)}(x_3) = \rho_0^{(\pm)} \cdot \varphi^{(\pm)}(\lambda, \beta, x_3), \quad (4.2)$$

$$\varphi^{(\pm)}(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(\mp \beta x_3)) \quad (ij = 44, 66),$$

в которых λ и $\beta > 0$ – параметры неоднородности;

$$\rho_0^{(+)} = \rho_0^{(-)}, \quad c_{ij0}^{(+)} = c_{ij0}^{(-)}. \quad (4.3)$$

При введении соответствующих представлений

$$u_2(x_3) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_3)), \quad (4.4)$$

$$u_2^{(\pm)}(x_3) = u_{20}^{(\pm)}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_3)). \quad (4.5)$$

комплексных функций упругих перемещений для компонент волновода в исследуемых стационарных обобщенных поверхностных волнах Лява с циклической частотой ω и волновым числом k вдоль координатного направления Ox_1 уравнения волнового деформирования и определяющие соотношения для материалов соответствующих компонент могут быть после преобразований записаны в виде

$$u_{20}'' - \theta^2 u_{20} = 0, \quad \theta^2 = (c_{660}k^2 - \rho_0\omega^2)/c_{440}, \quad (4.6)$$

$$\sigma_{210} = ikc_{660}u_{20}, \quad \sigma_{230} = c_{440}\partial_3 u_{20};$$

$$u_{20}^{(\pm)''}(x_3) - \alpha^2 u_{20}^{(\pm)}(x_3) = \gamma \exp(\mp \beta x_3) u_{20}^{(\pm)'}(x_3), \quad (4.7)$$

$$\gamma = \pm \lambda \beta, \quad \alpha^2 = (\rho_0^{(\pm)}\omega^2 - c_{660}^{(\pm)}k^2)/c_{440}^{(\pm)},$$

$$\sigma_{21}^{(\pm)} = c_{660}^{(\pm)}(x_3)iku_{20}^{(\pm)}, \quad \sigma_{23}^{(\pm)} = c_{440}^{(\pm)} \exp(\lambda \exp(\mp \beta x_3)) \partial_3 u_{20}^{(\pm)}.$$

Краевые условия на контактных граничных поверхностях слоя и полупространств волновода имеют форму

$$u_{20}(\pm h_*) = u_{20}^{(\pm)}(\pm h_*), \quad c_{440}u_{20}'(\pm h_*) = c_{440}^{(\pm)} \exp(\lambda \exp(\mp \beta h_*)) u_{20}^{(\pm)'}(\pm h_*). \quad (4.8)$$

Решение уравнения (4.6) при интегрировании методом Эйлера может быть представлено в форме

$$u_{20} = A_1 \cos(\theta x_3) + A_2 \sin(\theta x_3), \quad (4.9)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные, $\theta(\omega, k)$ – функция искомых параметров волнового числа и циклической частоты обобщенных локализованных волн Лява.

Распределение амплитуд напряжений по толщине слоя, в свою очередь, описывается соотношениями

$$\sigma_{230} = -A_1 c_{440} \theta \sin(\theta x_3) + A_2 c_{440} \theta \cos(\theta x_3), \quad (4.10)$$

$$\sigma_{120} = A_1 c_{660} ik \cos(\theta x_3) + A_2 c_{660} ik \sin(\theta x_3).$$

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида (4.7) построены в подразделе 2.2, и для рассматриваемого случая могут быть записаны в аналитической форме

$$u_{20}^{(\pm)}(x_3) = A_{3\pm} f_{\mp}(x_3), \quad (4.11)$$

где представления $f_{\mp}(x_3)$ в виде экспоненциальных рядов также приведены в п. 2.1.

Подстановка представлений (4.9)–(4.11) в краевые условия (4.8) приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, A_{3\pm}$:

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\theta h_*) + A_2 \sin(\theta h_*) - A_{3+} f_+(h_*) &= 0, \\ A_1 \cos(\theta h_*) - A_2 \sin(\theta h_*) - A_{3-} f_-(-h_*) &= 0, \\ -A_1 c_{440} \theta \sin(\theta h_*) + A_2 c_{440} \theta \cos(\theta h_*) - A_{3+} c_{440}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_+'(h_*) &= 0, \\ A_1 c_{440} \theta \sin(\theta h_*) + A_2 c_{440} \theta \cos(\theta h_*) - A_{3-} c_{440}^{(-)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_-'(-h_*) &= 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Выделяя, далее, отдельные случаи распространения симметричных волн рассматриваемого типа, для которых $A_2 = 0$, и антисимметричных локализованных волн, для которых $A_1 = 0$, можно, в свою очередь, записать соответствующие трансформированные варианты систем (4.12):

– для случая симметричных волн

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\theta h_*) - A_{3+} f_+(h_*) &= 0, \\ A_1 \cos(\theta h_*) - A_{3-} f_-(-h_*) &= 0, \\ -A_1 c_{440} \theta \sin(\theta h_*) - A_{3+} c_{440}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_+'(h_*) &= 0, \\ A_1 c_{440} \theta \sin(\theta h_*) - A_{3-} c_{440}^{(-)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_-'(-h_*) &; \end{aligned} \quad (4.13)$$

– для случая антисимметричных волн

$$\begin{aligned} A_2 \sin(\theta h_*) - A_{3+} f_+(h_*) &= 0, \\ -A_2 \sin(\theta h_*) - A_{3-} f_-(-h_*) &= 0, \\ A_2 c_{440} \theta \cos(\theta h_*) - A_{3+} c_{440}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_+'(h_*) &= 0, \\ A_2 c_{440} \theta \cos(\theta h_*) - A_{3-} c_{440}^{(-)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_-'(-h_*) &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

С учетом свойств $f_+(h_*) = f_-(-h_*)$, $f_+'(h_*) = -f_-'(-h_*)$, из (4.13) и (4.14) следуют соотношения связи коэффициентов $A_{3+} = -A_{3-}$ – для симметричных волн, и $A_{3+} = A_{3-}$ – для антисимметричных волн.

В итоге, для симметричных локализованных волн дисперсионное соотношение может быть записано в виде

$$f_+(h_*) c_{440} \theta \sin(\theta h_*) - \sin(\theta h_*) c_{440}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_+'(h_*) = 0, \quad (4.15)$$

а коэффициенты в представлениях их кинематических и силовых характеристик с точностью до масштабного множителя A имеют выражения

$$A_1 = A, A_2 = 0, A_{3+} = A(\cos(\theta h_*) / f_+(h_*)), A_{3-} = A(\cos(\theta h_*) / f_-(-h_*)). \quad (4.16)$$

Для антисимметричных локализованных волн дисперсионное соотношение может быть записано в виде

$$f_+(h_*) c_{440} \theta \sin(\theta h_*) - \sin(\theta h_*) c_{440}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta h_*)) f_+'(h_*) = 0, \quad (4.17)$$

а коэффициенты в представлениях их кинематических и силовых характеристик с точностью до масштабного множителя A имеют выражения

$$A_1 = 0, A_2 = A, A_{3+} = A(\sin(\theta h_*) / f_+(h_*)), A_{3-} = -A(\sin(\theta h_*) / f_-(-h_*)). \quad (4.18)$$

Расчеты с применением разработанной методики в качестве примера реализованы для случая задания параметров

$$c_{660}^{(\pm)} = c_{440}^{(\pm)} = 38 \text{ МПа}, c_{660}^{(1)} = c_{440}^{(1)} = c_{660}^{(2)} = c_{440}^{(2)} = 14 \text{ МПа}, \\ \rho_0^{(\pm)} = 1800 \text{ кг/м}^3, \rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)} = 1650 \text{ кг/м}^3, h = 20 \text{ м}.$$

Диапазоны варьирования параметров циклической частоты и волнового числа соответственно составляли $\omega \in [0, 40] \text{ рад/с}$, $k \in [0, 40] \text{ рад/м}$; для параметров неоднородности выбирались значения $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.1$.

На рисунке 4.1 представлены результаты расчетов низших действительных ветвей анализируемого дисперсионного спектра в указанном диапазоне. При этом можно отметить, что низшая мода имеет нулевую частоту запираания и характеризуется малой степенью дисперсии.

Далее, на рисунках 4.2–4.7 соответственно приведены результаты расчетов относительных амплитудных характеристик волновых перемещений, напряжений и плотности среднего за период потока мощности вдоль траектории движения волн, имеющих частоту $\omega = 30 \text{ рад/с}$ и принадлежащих двум различным рассчитанным модам спектра, в точках по толщине слоя и вне слоя в полупространствах на удалении до двух полутолщин слоя (в интервале от -60 м

до 60 м). Расчетные характеристики соответственно определяются выражениями

$$U_{20}^*(x_3) = |u_{20}(x_3)/u_{20}(h)|, \quad \sigma_{23}^*(x_3) = |\sigma_{230}(x_3)/\sigma_{230}(h)|, \quad P_1^*(x_3) = |P_{10}(x_3)/P_{10}(h)|.$$

Как следует из анализа представленных на рисунках 4.2–4.7 распределений, рассматриваемые волны имеют высокую степень локализации в области вмещенного слоя; мера захвата волновыми колебаниями приграничных зон полупространства существенно не различается для волн, принадлежащих различным модам дисперсионного спектра.

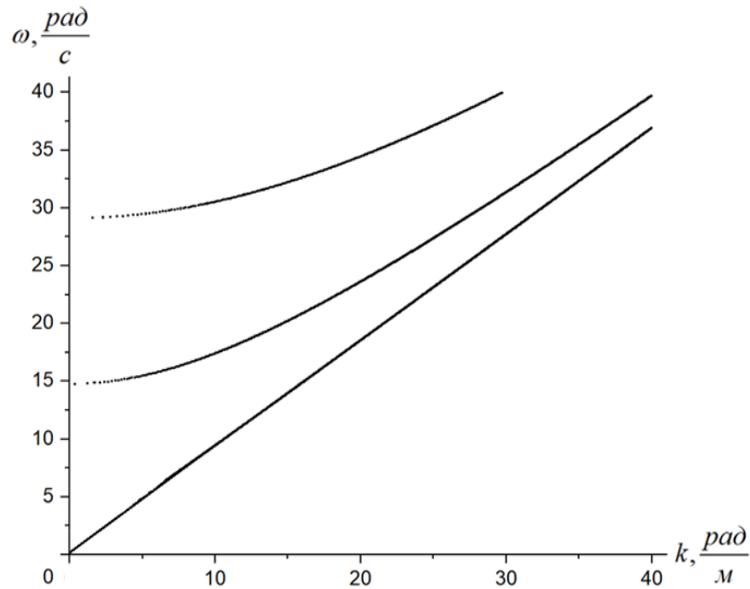


Рисунок 4.1 – Низшие действительные ветви дисперсионного спектра в диапазоне

$$\omega \in [0, 40] \text{ рад/с}, \quad k \in [0, 40] \text{ рад/м} \quad \text{при} \quad \lambda = 0.1, \beta = 0.1$$

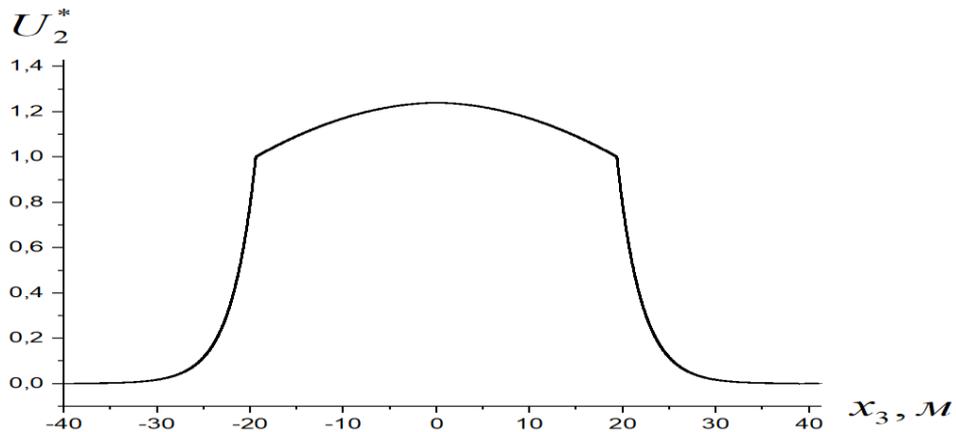


Рисунок 4.2 – Распределение $U_{20}^*(x_3)$ для волны первой моды

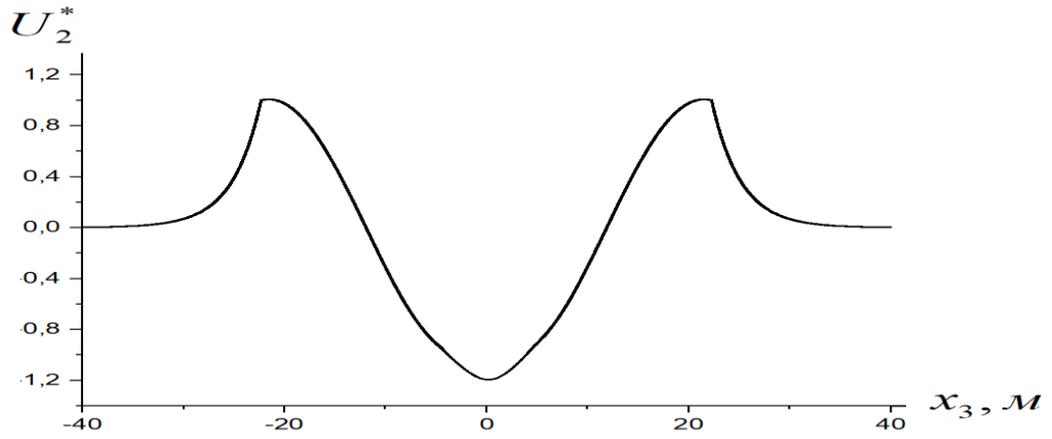


Рисунок 4.3 – Распределение $U_{20}^*(x_3)$ для волны второй моды

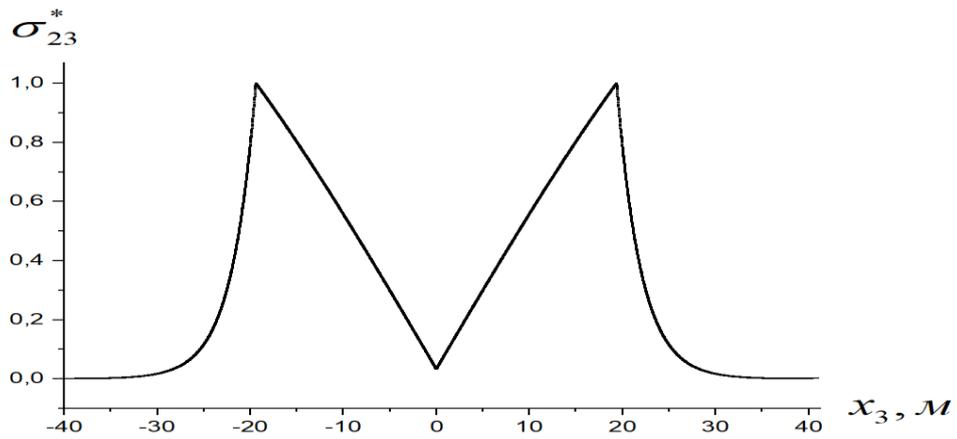


Рисунок 4.4 – Распределение $\sigma_{23}^*(x_3)$ для волны первой моды

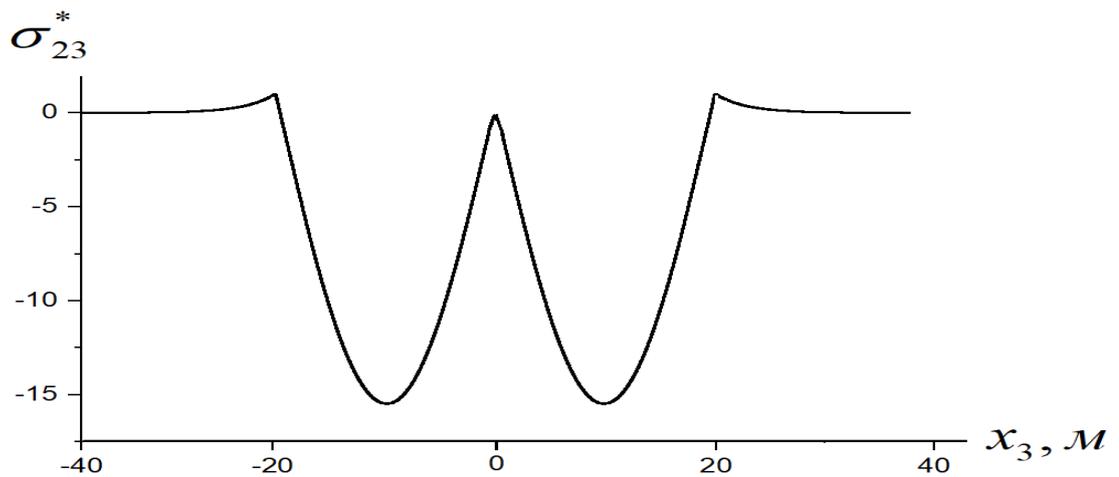


Рисунок 4.5 – Распределение $\sigma_{23}^*(x_3)$ для волны второй моды

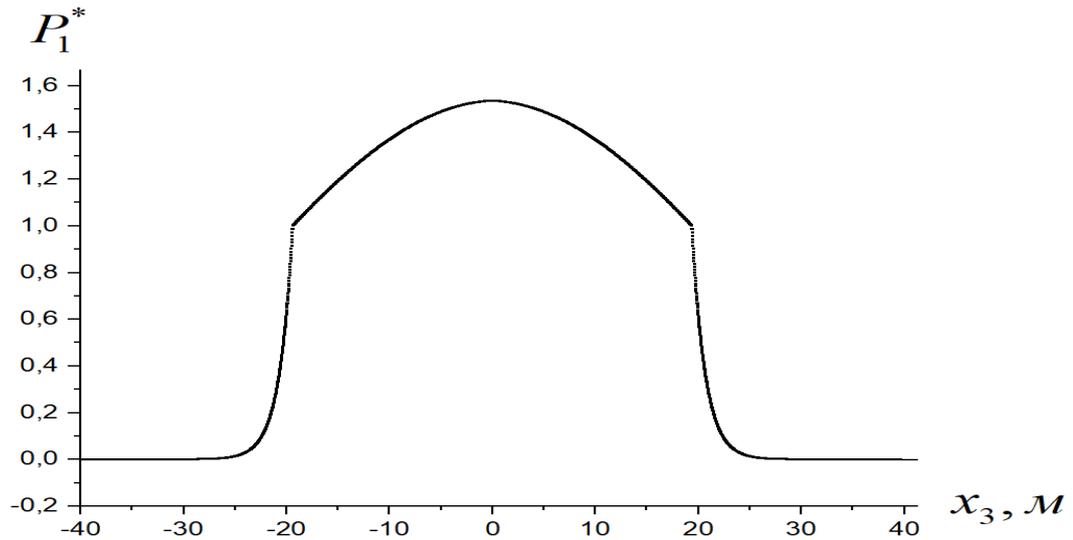


Рисунок 4.6 – Распределение $P_1^*(x_3)$ для волны первой моды

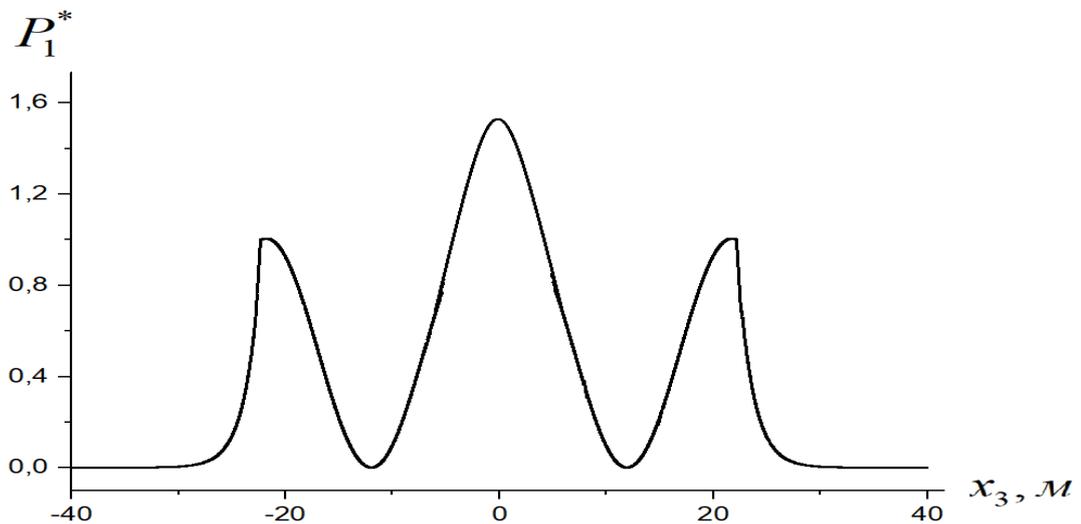


Рисунок 4.7 – Распределение $P_1^*(x_3)$ для волны второй моды

4.2. Локализованные сдвиговые волны в слое с симметричным законом поперечной неоднородности между однотипными функционально-градиентными трансверсально-изотропными полупространствами

Рассматривается пространственное составное упругое тело, занимающее (рис. 4.1) в декартовой системе нормированных координат $Ox_1x_2x_3$ область

$$V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(-)}, \quad (4.19)$$

$$V^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h\}, \quad V^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h\},$$

$$V^{(1)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}, V^{(2)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \geq x_3 \geq -h\}.$$

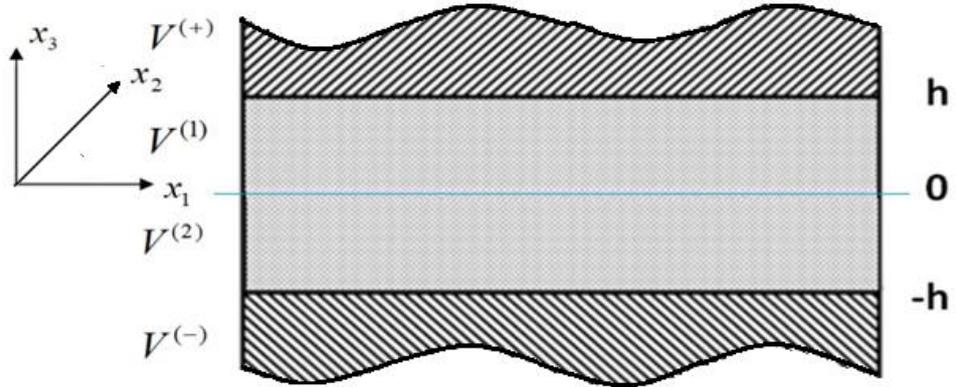


Рисунок 4.8 – Геометрическая модель волновода

Материал составного трансверсально-изотропного слоя $V^{(1)} \cup V^{(2)}$ толщиной $2h$ обладает симметричной поперечной экспоненциальной неоднородностью физико-механических характеристик относительно срединной плоскости $x_3 = 0$. В этой связи, представления для модулей упругости $c_{ij}^{(1)}(x_3)$, $c_{ij}^{(2)}(x_3)$ и параметров плотности материалов $\rho^{(1)}(x_3)$, $\rho^{(2)}(x_3)$ в компонентах $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ слоя соответственно задаются в виде

$$c_{ij}^{(1)}(x_3) = c_{ij0}^{(1)} \exp(\mu x_3), \quad c_{ij}^{(2)}(x_3) = c_{ij0}^{(2)} \exp(-\mu x_3), \quad (4.20)$$

$$\rho^{(1)}(x_3) = \rho_0^{(1)} \exp(\mu x_3), \quad \rho^{(2)}(x_3) = \rho_0^{(2)} \exp(-\mu x_3),$$

где μ – коэффициент неоднородности. В трансверсально-изотропных полупространствах $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ у границ их контакта со слоем имеются локализованные приповерхностные области выраженной неоднородности физико-механических свойств, описываемой в рассматриваемой модели двойными экспоненциальными функциями. Эти характеристики соответственно имеют представления

$$c_{ij}^{(+)}(x_3) = c_{ij0}^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(+)}(x_3) = \rho_0^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), \quad (4.21)$$

$$\varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3));$$

$$c_{ij}^{(-)}(x_3) = c_{ij0}^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(-)}(x_3) = \rho_0^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \quad (4.22)$$

$$\varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(\beta x_3)),$$

где λ и $\beta > 0$ – коэффициенты неоднородности материалов полупространств.

Уравнения стационарного динамического деформирования для компонентов $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ волновода в случае распространяющихся вдоль координатного направления Ox_1 сдвиговых горизонтально поляризованных волн с парциальными комплексными функциями напряженности

$$u_2^{(j)}(x_1, x_3, t) = u_{20}^{(j)}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad (j = \overline{1, 2}), \quad (4.23)$$

для рассматриваемого случая трансформируются в уравнения для определения комплексных амплитудных функций $u_{20}^{(j)}(x_3)$, имеющие вид

$$c_{440}^{(j)} \partial_3^2 u_{20}^{(j)}(x_3) + (-1)^j c_{440}^{(j)} \mu \partial_3 u_{20}^{(j)}(x_3) - c_{660}^{(j)} k^2 u_{20}^{(j)}(x_3) + \rho_0^{(j)} \omega^2 u_{20}^{(j)}(x) = 0, \quad \partial_3 = \partial / \partial x_3, \quad (4.24)$$

и после введения обозначений

$$\delta_j = (\rho_0^{(j)} \omega^2 - c_{660}^{(j)} k^2) / c_{440}^{(j)} \quad (4.25)$$

записываются в форме

$$u_{20}'' + (-1)^j \mu u_{20}' + \delta_j u_{20} = 0. \quad (4.26)$$

Выражения для $u_{20}^{(j)}(x_3)$ могут быть представлены в общем виде

$$u_{20}^{(j)}(x_3) = A_1^{(j)} \exp(\gamma_1^{(j)} x_3) + A_2^{(j)} \exp(\gamma_2^{(j)} x_3), \quad (4.27)$$

где

$$\gamma_q^{(j)} = ((-1)^{j+1} \mu + (-1)^{q+1} (\mu^2 - 4\delta_j)^{1/2}) / 2. \quad (4.28)$$

В свою очередь, на базе представлений (4.27) могут быть получены выражения для амплитудных функций механических напряжений в компонентах $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ составного слоя

$$\sigma_{12}^{(j)}(x_3) = ikc_{660}^{(j)} \exp((-1)^{j+1} \mu x_3) u_{20}^{(j)}(x_3), \quad (4.29)$$

$$\sigma_{23}^{(j)}(x_3) = c_{440}^{(j)} \exp((-1)^{j+1} \mu x_3) \partial_3 u_{20}^{(j)}(x_3) \quad (4.30)$$

$$(j = \overline{1, 2}).$$

Уравнения волнового деформирования относительно комплексных функций динамических упругих перемещений

$$u_2^{(\pm)}(x_1, x_3, t) = u_{20}^{(\pm)}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad (4.31)$$

для случая сдвиговых волн в полупространствах имеют вид

$$c_{440}^{(\pm)} \partial_3^2 u_{20}^{(\pm)}(x_3) \mp c_{440}^{(j)} \lambda \beta \exp(\mp \beta x_3) \partial_3 u_{20}^{(\pm)}(x_3) - c_{660}^{(\pm)} k^2 u_{20}^{(\pm)}(x_3) + \rho_0^{(\pm)} \omega^2 u_{20}^{(\pm)}(x) = 0. \quad (4.32)$$

Решения $F^{(+)}(x_3)$, $F^{(-)}(x_3)$ уравнений вида (4.32) с явными аналитическими представлениями построены в подразделе 2.2 данной работы в форме экспоненциальных рядов на основе применения описанного в этом подразделе итерационного алгоритма. С учетом требуемых асимптотических свойств $|u_{20}^{(\pm)}(x_3)| \rightarrow 0$ при $|x_3| \rightarrow \pm\infty$, выражения для этих решений и, соответственно, для амплитудных функций волновых перемещений в полубесконечных областях $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$, имеют вид:

$$F^{(+)}(x_3) = e^{-\alpha^{(+)} x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha^{(+)} - (p-1)\beta) ((\alpha^{(+)} + p\beta)^2 - (\alpha^{(+)})^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha^{(+)} - n\beta)x_3}, \quad (4.33)$$

$$F^{(-)}(x_3) = e^{\alpha^{(-)} x_3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma)^n \left[\prod_{p=1}^n (\alpha^{(-)} + (p-1)\beta) ((\alpha^{(-)} + p\beta)^2 - (\alpha^{(-)})^2)^{-1} \right] e^{(\alpha^{(-)} + n\beta)x_3};$$

$$u_{20}^{(+)}(x_3) = A_+ F^{(+)}(x_3), \quad u_{20}^{(-)}(x_3) = A_- F^{(-)}(x_3). \quad (4.34)$$

Здесь

$$\gamma = \beta \lambda;$$

$$\alpha^{(+)} = ((c_{660}^{(+)} k^2 - \rho_0^{(+)} \omega^2) / c_{440}^{(+)})^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \alpha^{(+)} > 0;$$

$$\alpha^{(-)} = ((c_{660}^{(-)} k^2 - \rho_0^{(-)} \omega^2) / c_{440}^{(-)})^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \alpha^{(-)} > 0;$$

A_+ , A_- – произвольные коэффициенты; также $F^{(+)}(x_3) = F^{(-)}(-x_3)$.

Соответствующие представлениям (4.33), (4.34) выражения для динамических напряжений на площадках с нормалью Ox_3 в областях $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ могут быть записаны в форме

$$\sigma_{230}^{(+)}(x_3) = A_+ c_{44}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) \partial_3 F^{(+)}(x_3), \quad (4.35)$$

$$\sigma_{230}^{(-)}(x_3) = A_- c_{44}^{(-)} \exp(\lambda \exp(\beta x_3)) \partial_3 F^{(-)}(x_3),$$

где

$$\begin{aligned} \partial_3 F^{(+)}(x_3) &= -\alpha^{(+)} e^{-\alpha^{(+)} x_3} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^n (-\alpha^{(+)} - n\beta) \left[\prod_{p=1}^n (-\alpha^{(+)} - (p-1)\beta) ((\alpha^{(+)} + p\beta)^2 - (\alpha^{(+)})^2)^{-1} \right] e^{(-\alpha^{(+)} - n\beta)x_3}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\partial_3 F^{(-)}(x_3) = \alpha^{(-)} e^{\alpha^{(-)} x_3} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma)^n (\alpha^{(-)} + n\beta) \left[\prod_{p=1}^n (\alpha^{(-)} + (p-1)\beta) ((\alpha^{(-)} + p\beta)^2 - (\alpha^{(-)})^2)^{-1} \right] e^{(\alpha^{(-)} + n\beta)x_3}.$$

При этом имеют место свойство

$$\partial_3 F^{(+)}(x_3) = -\partial_3 F^{(-)}(-x_3), \quad (4.37)$$

и, соответственно,

$$\sigma_{230}^{(+)}(x_3) = -\sigma_{230}^{(-)}(-x_3). \quad (4.38)$$

Таким образом, для случая исследуемых симметричных волн

$$A_+ = A_- = A_s. \quad (4.39)$$

Дальнейший анализ рассматриваемой модели реализуется для оговоренного выше случая

$$c_{ij0}^{(1)} = c_{ij0}^{(2)}, \quad \rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)}, \quad c_{ij0}^{(+)} = c_{ij0}^{(-)}, \quad \rho_0^{(+)} = \rho_0^{(-)}.$$

Граничные условия идеального механического контакта компонентов составного волновода в краевой задаче о распространении волн исследуемого типа сводятся к соотношениям для амплитудных функций в представлениях комплексных функций динамических перемещений (4.23), (4.31) и имеют вид

$$u_{20}^{(+)}(h) = u_{20}^{(1)}(h), \quad \sigma_{230}^{(+)}(h) = \sigma_{230}^{(1)}(h); \quad (4.40)$$

$$u_{20}^{(1)}(0) = u_{20}^{(2)}(0), \quad \sigma_{230}^{(1)}(0) = \sigma_{230}^{(2)}(0) \quad (4.41)$$

$$u_{20}^{(2)}(-h) = u_{20}^{(-)}(-h), \quad \sigma_{230}^{(2)}(-h) = \sigma_{230}^{(-)}(-h). \quad (4.42)$$

Согласно представлениям (4.29) имеют место свойства

$$\gamma_1^{(2)} = -\gamma_2^{(1)}, \quad \gamma_2^{(2)} = -\gamma_1^{(1)}, \quad (4.43)$$

с учетом которых можно записать

$$u_{20}^{(1)}(x_3) = A_1^{(1)} \exp(\gamma_1^{(1)} x_3) + A_2^{(1)} \exp(\gamma_2^{(1)} x_3), \quad (4.44)$$

$$u_{20}^{(2)}(x_3) = A_1^{(2)} \exp(-\gamma_1^{(1)} x_3) + A_2^{(2)} \exp(-\gamma_2^{(1)} x_3).$$

Таким образом, для анализируемых симметричных волн из условий

$$u_{20}^{(1)}(x_3) = u_{20}^{(2)}(-x_3), \quad \sigma_{230}^{(1)}(x_3) = -\sigma_{230}^{(2)}(-x_3), \quad (4.45)$$

и с учетом представлений (4.43) следует, что

$$A_1^{(1)} = A_1^{(2)}, \quad A_2^{(1)} = A_2^{(2)}. \quad (4.46)$$

При этом, из граничного условия (4.41) для напряжений в плоскости $x_3 = 0$, при учете выражений (4.44)–(4.46) и свойства $c_{ij0}^{(1)} = c_{ij0}^{(2)}$, в качестве следствия может быть записано соотношение

$$A_2^{(1)} = -\frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} A_1^{(1)}, \quad (4.47)$$

Вводя переобозначение $A_1^{(1)} = A_c$ и принимая во внимание соотношение связи (4.47), можно получить представление

$$u_{20}^{(c)} = A_c \exp(\gamma_1^{(1)} x_3) - A_c \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} x_3). \quad (4.48)$$

С учетом свойств (4.28)–(4.30), (4.39), (4.45), можно заключить, что пары краевых условий (4.40) и (4.422) являются эквивалентными, и в дальнейшем процессе получения дисперсионных соотношений для анализируемых симметричных сдвиговых локализованных волн достаточно рассматривать только краевые условия (4.40), которые после соответствующих подстановок принимают вид

$$A_s F^{(+)}(h) - A_c (\exp(\gamma_1^{(1)} h) + \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h)) = 0, \quad (4.49)$$

$$A_s c_{440}^{(+)} \exp(\lambda \exp(-\beta h)) \partial_3 (F^{(+)}(h)) - \\ - c_{440}^{(-)} \exp(\mu h) (\gamma_1^{(1)} A_c \exp(\gamma_1^{(1)} h) - \gamma_2^{(1)} A_c \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h)) = 0.$$

Искомое дисперсионное соотношение является равенством нулю определителя системы линейных алгебраических уравнений (4.49) и записывается в форме соотношения

$$- F^{(+)}(h) c_{44}^{(c)} \exp(\mu h) (\gamma_1^{(1)} \exp(\gamma_1^{(1)} h) - \gamma_2^{(1)} \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h)) + \exp(\gamma_1^{(1)} h) + \\ + \frac{\gamma_1^{(1)}}{\gamma_2^{(1)}} \exp(\gamma_2^{(1)} h) c_{44}^{(n)} \exp(\lambda \exp(\beta h)) \partial F^{(+)}(h) = 0. \quad (4.50)$$

Численная реализация представленной расчетной методики осуществлена для следующего варианта задания физико-механических и геометрических параметров модели:

$$c_{660}^{(\pm)} = c_{440}^{(\pm)} = 38 \text{ МПа}, \quad c_{660}^{(1)} = c_{440}^{(1)} = c_{660}^{(2)} = c_{440}^{(2)} = 14 \text{ МПа},$$

$$\rho_0^{(\pm)} = 1800 \text{ кг/м}^3, \rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)} = 1650 \text{ кг/м}^3, h = 20 \text{ м}.$$

Диапазоны варьирования параметров циклической частоты и волнового числа соответственно составляли $\omega \in [0, 40] \text{ рад/с}$, $k \in [0, 40] \text{ рад/м}$; для параметров неоднородности выбирались значения $\mu = -1$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.1$.

На рисунке 4.8 представлены результаты расчетов трех низших действительных ветвей анализируемого дисперсионного спектра в указанном диапазоне. При этом можно отметить, что низшая мода характеризуется малой степенью дисперсии, но имеет ненулевую частоту запираания.

Далее, на рисунках 4.9–4.17 соответственно приведены результаты расчетов относительных амплитудных характеристик волновых перемещений, напряжений и плотности среднего за период потока мощности вдоль траектории движения волн, имеющих частоту $\omega = 30 \text{ рад/с}$ и принадлежащих трем различным рассчитанным модам спектра, в точках по толщине слоя и вне слоя в полупространствах на удалении до двух полутолщин слоя (в интервале от -60 м до 60 м). Расчетные характеристики соответственно определяются выражениями $U_{20}^*(x_3) = |u_{20}(x_3)/u_{20}(h)|$, $\sigma_{23}^*(x_3) = |\sigma_{230}(x_3)/\sigma_{230}(h)|$, $P_1^*(x_3) = |P_{10}(x_3)/P_{10}(h)|$.

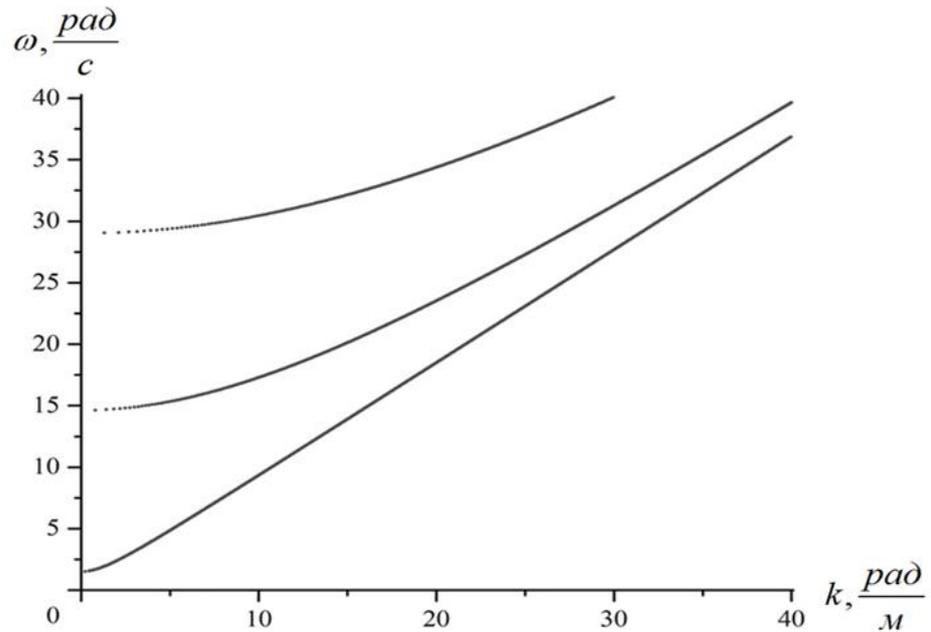


Рисунок 4.8 – Низшие действительные ветви дисперсионного спектра в диапазоне $\omega \in [0, 40] \text{ рад/с}$, $k \in [0, 40] \text{ рад/м}$; при $\mu = -1$, $\lambda = 0.1$, $\beta = 0.1$.

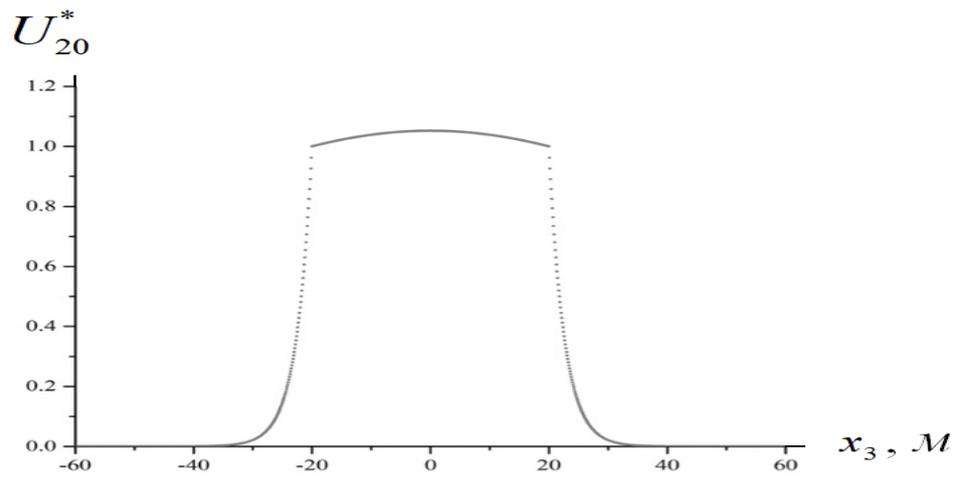


Рисунок 4.9 – Распределение $U_{20}^*(x_3)$ для волны первой моды

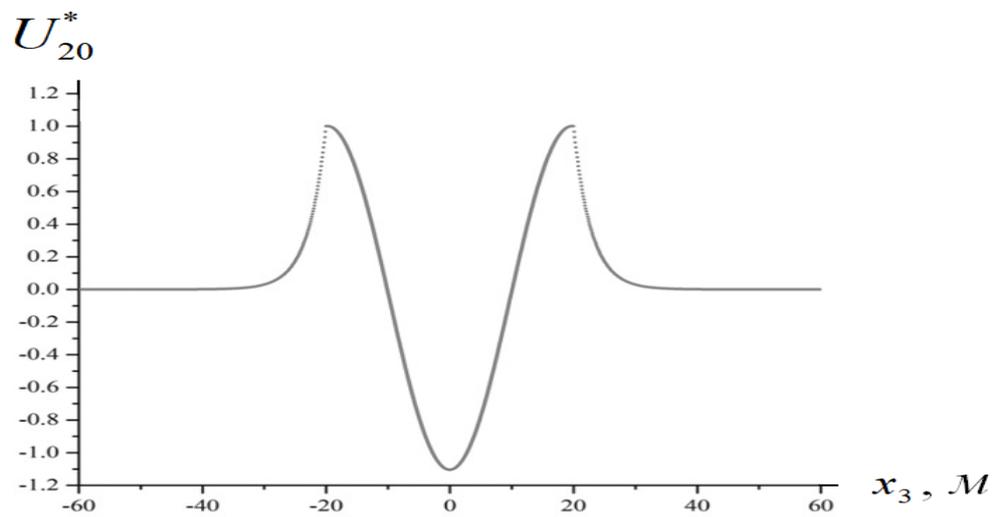


Рисунок 4.10 – Распределение $U_{20}^*(x_3)$ для волны второй моды

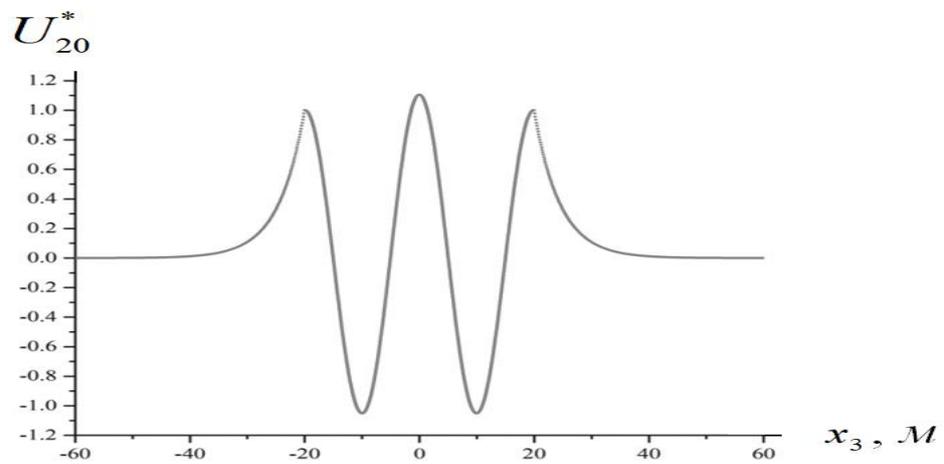


Рисунок 4.11 – Распределение $U_{20}^*(x_3)$ для волны третьей моды

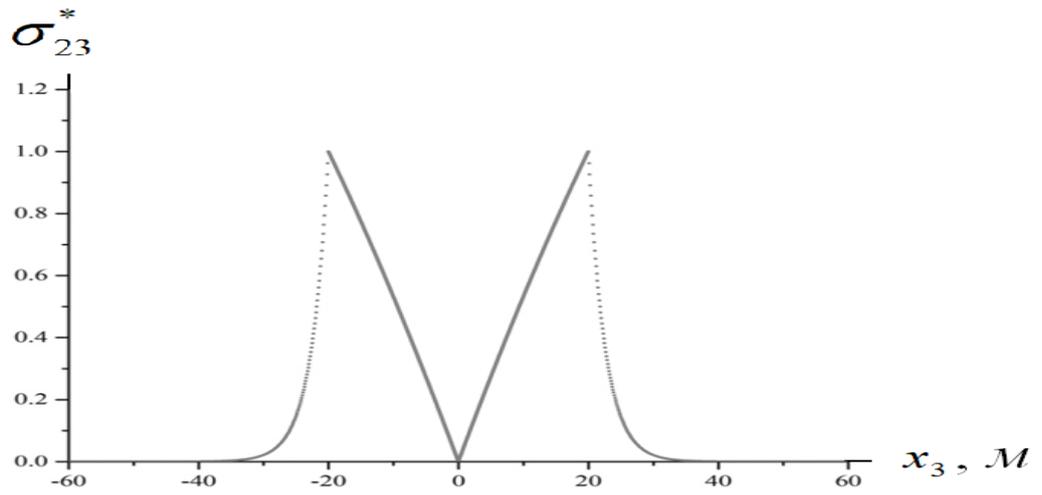


Рисунок 4.12 – Распределение $\sigma_{23}^*(x_3)$ для волны первой моды

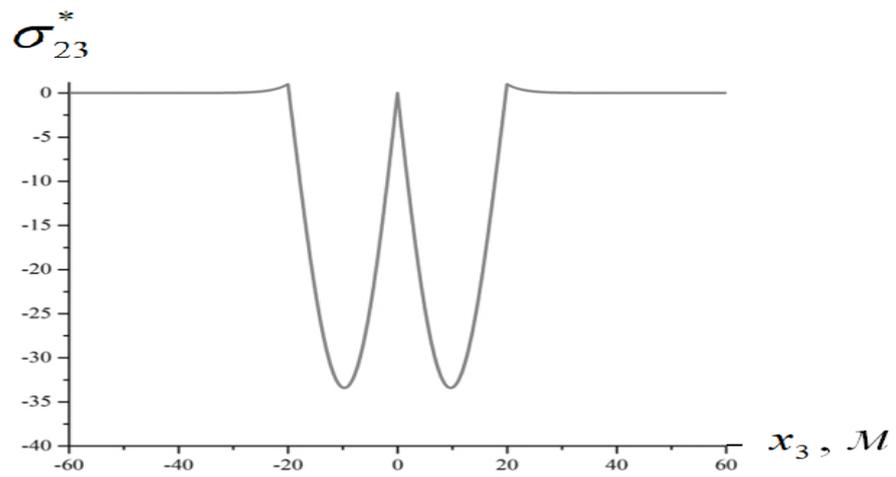


Рисунок 4.13 – Распределение $\sigma_{23}^*(x_3)$ для волны второй моды

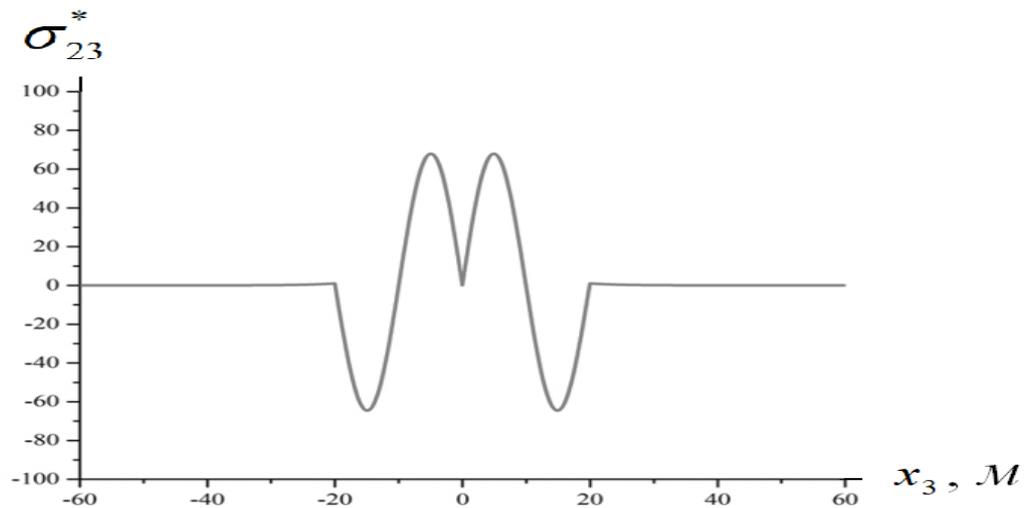


Рисунок 4.14 – Распределение $\sigma_{23}^*(x_3)$ для волны третьей мод

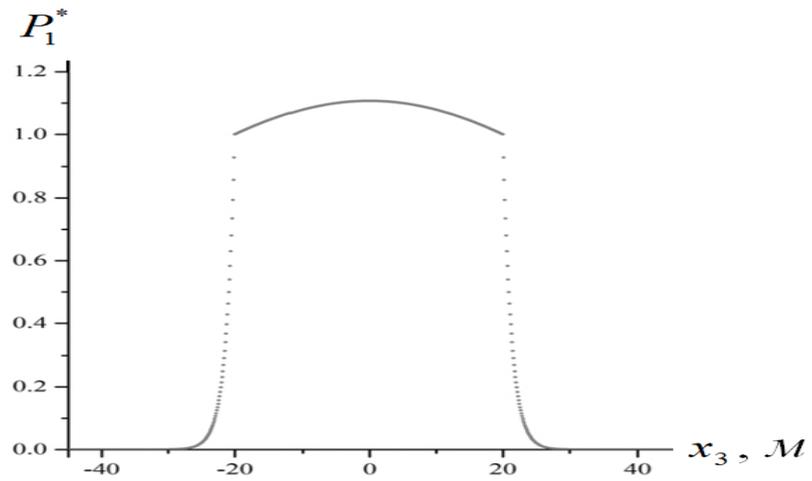


Рисунок 4.15 – Распределение $P_1^*(x_3)$ для волны первой моды

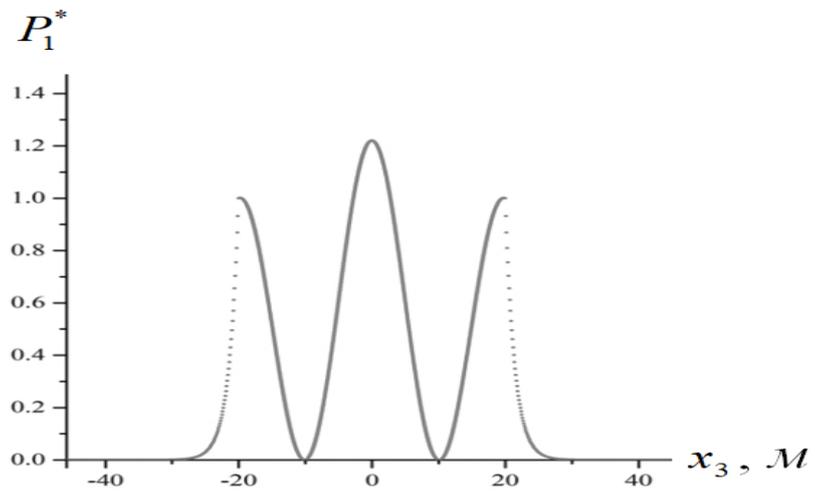


Рисунок 4.16 – Распределение $P_1^*(x_3)$ для волны второй моды

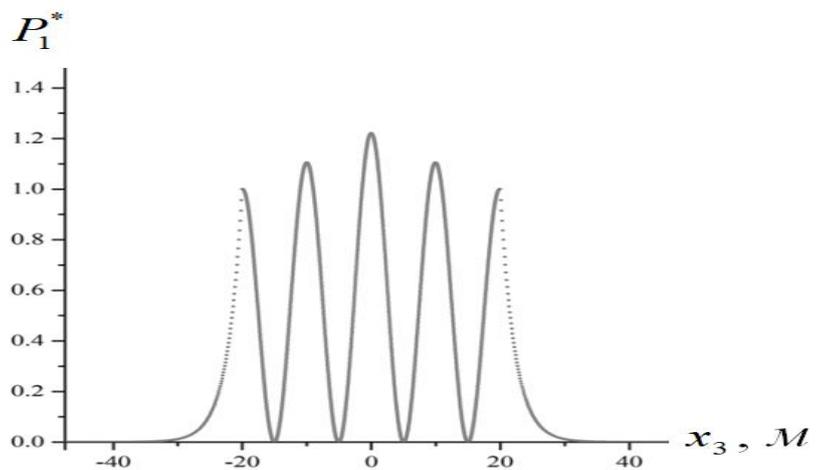


Рисунок 4.17 – Распределение $P_1^*(x_3)$ для волны третьей моды

Как следует из представленных на рисунках 4.9–4.17 распределений, рассматриваемые волны имеют высокую степень локализации в области вмещенного слоя; мера захвата волновыми колебаниями приграничных зон полупространства существенно не различается для волн, принадлежащих различным модам дисперсионного спектра.

4.3. Анализ модели распространения продольно-сдвиговых волн в анизотропном функционально-градиентном слое с симметричным законом поперечной неоднородности между однотипными пригранично-неоднородными трансверсально-изотропными полупространствами

Рассматривается занимающее область $V_{\Sigma} = V^{(+)} \cup V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(-)}$ в декартовой системе нормированных координат $Ox_1x_2x_3$ составное пространственное упругое тело с фрагментами

$$V^{(+)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 > h\}, V^{(-)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_3 < -h\}, \quad (4.51)$$

$$V^{(1)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}, V^{(2)} = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \geq x_3 \geq -h\}.$$

Полагается, что материал имеющего толщину $2h$ составного слоя $V^{(1)} \cup V^{(2)}$ в обоих компонентах является трансверсально-изотропным, имеет одинаковые параметры $c_{ij0}^{(1)} = c_{ij0}^{(2)}$, $\rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)}$, и обладает симметричной относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ экспоненциальной поперечной неоднородностью физико-механических свойств. Отвечающие данным предположениям выражения для функциональных характеристик плотности $\rho^{(1)}(x_3)$, $\rho^{(2)}(x_3)$ и модулей упругости $c_{ij}^{(1)}(x_3)$, $c_{ij}^{(2)}(x_3)$ материалов в компонентах $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ слоя соответственно задаются в виде

$$\rho^{(1)}(x_3) = \rho_0^{(1)} \exp(\mu x_3), \rho^{(2)}(x_3) = \rho_0^{(2)} \exp(-\mu x_3), \quad (4.52)$$

$$c_{ij}^{(1)}(x_3) = c_{ij0}^{(1)} \exp(\mu x_3), c_{ij}^{(2)}(x_3) = c_{ij0}^{(2)} \exp(-\mu x_3) \quad (ij = 11, 33, 13, 44),$$

где μ – параметр неоднородности, и выполняются условия

$$\rho_0^{(1)} = \rho_0^{(2)}, c_{ij0}^{(1)} = c_{ij0}^{(2)}. \quad (4.53)$$

Вмещающие полупространства $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ также являются трансверсально-изотропными и имеют физико-механические характеристики, описываемые двойными экспоненциальными функциями

$$c_{ij}^{(+)}(x_3) = c_{ij0}^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(+)}(x_3) = \rho_0^{(+)} \cdot \varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3), \quad (4.54)$$

$$\varphi^{(+)}(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(-\beta x_3));$$

$$c_{ij}^{(-)}(x_3) = c_{ij0}^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \quad \rho^{(-)}(x_3) = \rho_0^{(-)} \cdot \varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3), \quad (4.55)$$

$$\varphi^{(-)}(\lambda, \beta, x_3) = \exp(\lambda \exp(\beta x_3)) \quad (ij = 11, 33, 13, 44),$$

в которых λ и $\beta > 0$ – параметры неоднородности, и выполняется условие

$$\rho_0^{(+)} = \rho_0^{(-)}, \quad c_{ij0}^{(+)} = c_{ij0}^{(-)}. \quad (4.56)$$

При введении соответствующих представлений вида

$$u_{1j}(x_1, x_3, t) = f_{1j}(x_3) e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad u_{3j}(x_1, x_3, t) = f_{3j}(x_3) e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad (4.57)$$

для компонентов комплексных векторов динамических упругих перемещений в волнах P-SV типа с циклической частотой ω и волновым числом k вдоль направления Ox_1 в слоях $V^{(j)}$, амплитудные функции $f_{1j}(x_3)$, $f_{3j}(x_3)$, с учетом свойств (4.53), подлежат определению из систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} & c_{440}^{(1)} f_{1j}'' + (-1)^{j+1} c_{440}^{(1)} \mu f_{1j}' + (\rho_0^{(1)} \omega^2 - c_{110}^{(1)} k^2) f_{1j} + \\ & + (c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)}) (ik) f_{3j}' + (-1)^{j+1} c_{440}^{(1)} \mu (ik) f_{3j} = 0, \\ & (c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)}) (ik) f_{1j}' + (-1)^{j+1} c_{130}^{(1)} \mu (ik) f_{1j} + \\ & + c_{330}^{(1)} f_{3j}'' + (-1)^{j+1} c_{330}^{(1)} \mu f_{3j}' + (\rho_0^{(1)} \omega^2 - c_{440}^{(1)} k^2) f_{3j} = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Уравнения (4.58) удобно представить в более компактной форме

$$\begin{aligned} & \alpha_1 f_{1j}'' + (-1)^{j+1} \beta_1 f_{1j}' + \gamma_1 f_{1j} + \delta_1 f_{3j}' + (-1)^{j+1} \varepsilon_1 f_{3j} = 0, \\ & \delta_2 f_{1j}' + (-1)^{j+1} \varepsilon_2 f_{1j} + \alpha_2 f_{3j}'' + (-1)^{j+1} \beta_2 f_{3j}' + \gamma_2 f_{3j} = 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= c_{440}^{(1)}, \quad \beta_1 = c_{440}^{(1)} \mu, \quad \gamma_{13} = (\rho_0^{(1)} \omega^2 - c_{110}^{(1)} k^2), \quad \delta_1 = (c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)}) (ik), \quad \varepsilon_1 = c_{440}^{(1)} \mu (ik), \\ \delta_2 &= (c_{440}^{(1)} + c_{130}^{(1)}) (ik), \quad \varepsilon_2 = c_{130}^{(1)} \mu (ik), \quad \alpha_2 = c_{330}^{(1)}, \quad \beta_{23} = c_{330}^{(1)} \mu, \quad \gamma_2 = (\rho_0^{(1)} \omega^2 - c_{440}^{(1)} k^2). \end{aligned}$$

Системы дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитудных функций $g_{1\pm}(x_3)$, $g_{3\pm}(x_3)$ в представлениях волновых смещений

$$u_{1\pm}(x_1, x_3, t) = g_{1\pm}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad u_{3\pm}(x_1, x_3, t) = g_{3\pm}(x_3)e^{-i(\omega t - kx_1)}, \quad (4.60)$$

описывающих исследуемые волны P-SV типа вдоль направления Ox_1 в трансверсально-изотропных функционально-градиентных полупространствах $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$, с учетом свойств (4.56) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} c_{440}^{(+)}g_{1\pm}'' + (-1)^{j+1}\gamma e^{(-1)^j\beta x_3}c_{440}^{(+)}g_{1\pm}' + (\rho_0^{(+)}\omega^2 - c_{110}^{(+)}k^2)g_{1\pm} + \\ + (c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)})(ik)g_{3\pm}' + (-1)^{j+1}\gamma e^{(-1)^j\beta x_3}c_{440}^{(+)}(ik)g_{3\pm} = 0, \\ (c_{440}^{(+)} + c_{130}^{(+)})(ik)g_{1\pm}' + (-1)^{j+1}\gamma e^{(-1)^j\beta x_3}c_{130}^{(+)}(ik)g_{1\pm} + c_{330}^{(+)}g_{3\pm}'' + \\ + (-1)^{j+1}\gamma e^{(-1)^j\beta x_3}c_{330}^{(+)}g_{3\pm}' + (\rho_0^{(+)}\omega^2 - c_{440}^{(+)}k^2)g_{3\pm} = 0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

и далее представлены в матричной форме:

$$(\underline{A}_1^{(0\pm)}\partial_3^2 + \underline{A}_2^{(0\pm)}\partial_3 + \underline{A}_3^{(0\pm)})\underline{G}^{(\pm)} = (-1)^j\gamma e^{(-1)^j\beta x_3}(\underline{A}_2^{(1\pm)}\partial_3 + \underline{A}_3^{(1\pm)})\underline{G}^{(\pm)}, \quad (4.62)$$

где $\underline{A}_m^{(0\pm)}$, $\underline{A}_m^{(1\pm)}$ – матричные коэффициенты, имеющие выражения

$$\begin{aligned} \underline{A}_1^{(0\pm)} = \begin{pmatrix} c_{440}^{(+)} & 0 \\ 0 & c_{330}^{(+)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2^{(0\pm)} = \begin{pmatrix} 0 & ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)}) \\ ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)}) & 0 \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_3^{(0\pm)} = \begin{pmatrix} (\rho_0^{(+)}\omega^2 - c_{110}^{(+)}k^2) & 0 \\ 0 & (\rho_0^{(+)}\omega^2 - c_{440}^{(+)}k^2) \end{pmatrix}, \\ \underline{A}_2^{(1\pm)} = \begin{pmatrix} c_{440}^{(+)} & 0 \\ 0 & c_{330}^{(+)} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_3^{(1\pm)} = \begin{pmatrix} 0 & ikc_{440}^{(+)} \\ ikc_{130}^{(+)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

В соотношениях (4.61)–(4.63) выбирается $j = 1$ для случая полупространства $V^{(+)}$ и $j = 2$ – для полупространства $V^{(-)}$.

Системы уравнений (4.58), (4.61) дополняются краевыми условиями идеального механического сопряжения на плоскостях контакта граней слоя и границ полупространств, условиями идеального механического сопряжения в плоскости $x_3 = 0$ контакта слоев $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$, а также условиями, связанными с предположениями относительно типа симметрии волновых движений в слое. Данные условия в реализуемом исследовании имеют вид

$$f_{11}(h) = g_{1+}(h), \quad f_{31}(h) = g_{3+}(h), \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}
& \exp(\mu h)(ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{11}(h) + c_{330}^{(1)}f'_{31}(h)) = \\
& = \exp(\lambda \cdot \exp(-\beta h))(ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)})g_{1+}(h) + c_{330}^{(+)}g'_{3+}(h)), \\
& \exp(\mu h)(ikc_{440}^{(1)}f_{31}(h) + c_{440}^{(1)}f'_{11}(h)) = \\
& = \exp(\lambda \cdot \exp(-\beta h))(ikc_{440}^{(+)}g_{3+}(h) + c_{440}^{(+)}g'_{1+}(h)); \\
& f_{12}(-h) = g_{1-}(-h), \quad f_{32}(-h) = g_{3-}(-h), \tag{4.65}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \exp(-\mu h)(ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{12}(-h) + c_{330}^{(1)}f'_{32}(-h)) = \\
& = \exp(\lambda \cdot \exp(\beta h))(ik(c_{130}^{(+)} + c_{440}^{(+)})g_{1-}(-h) + c_{330}^{(+)}g'_{3-}(-h)), \\
& \exp(-\mu h)(ikc_{440}^{(1)}f_{32}(-h) + c_{440}^{(1)}f'_{12}(-h)) = \\
& = \exp(\lambda \cdot \exp(\beta h))(ikc_{440}^{(+)}g_{3-}(-h) + c_{440}^{(+)}g'_{1-}(-h)); \\
& f_{11}(0) = f_{12}(0), \quad f_{31}(0) = f_{32}(0), \tag{4.66}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ikc_{440}^{(1)}f_{31}(0) + c_{440}^{(1)}f'_{11}(0) = ikc_{440}^{(1)}f_{32}(0) + c_{440}^{(1)}f'_{12}(0), \\
& ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{11}(0) + c_{330}^{(1)}f'_{31}(0) = ik(c_{130}^{(1)} + c_{440}^{(1)})f_{12}(0) + c_{330}^{(1)}f'_{32}(0); \\
& f_{11}(h) = f_{12}(-h), \quad f_{31}(h) = -f_{32}(-h), \tag{4.67} \\
& g_{1+}(h) = g_{1-}(-h), \quad g_{3+}(h) = -g_{3-}(-h).
\end{aligned}$$

Представленные постановочные соотношения являются базовыми для формулировки основного дисперсионного уравнения, описывающего локализованные волновые движения рассматриваемого типа, а также получения расчетных соотношений для анализа кинематических, силовых и энергетических характеристик исследуемых волн в компонентах составного волновода

Решения систем уравнений (4.59) для случая симметричных волн в составном слое $V^{(1)} \cup V^{(2)}$ отыскиваются на базе метода Эйлера с подстановкой $f_{1j} = Q_{1j}e^{\mu x_3}$, $f_{3j} = Q_{3j}e^{\mu x_3}$, в результате которой записываются системы линейных алгебраических уравнений относительно Q_{1j} , Q_{3j} :

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 p^2 + (-1)^{j+1} \beta_1 p + \gamma_1)Q_{1j} + (\delta_1 p + (-1)^{j+1} \varepsilon_1)Q_{3j} = 0, \tag{4.68} \\
& (\delta_2 p + (-1)^{j+1} \varepsilon_2)Q_{1j} + (\alpha_2 p^2 + (-1)^{j+1} \beta_2 p + \gamma_2)Q_{3j} = 0,
\end{aligned}$$

и соответствующие полиномиальные характеристические уравнения

$$\Delta_{1j} p^4 + (-1)^{j+1} \Delta_{2j} p^3 + \Delta_{3j} p^2 + (-1)^{j+1} \Delta_{4j} p + \Delta_{5j} = 0, \tag{4.69}$$

$$\Delta_{1j} = \alpha_1 \alpha_2, \Delta_{2j} = (-1)^{j+1} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1), \Delta_{3j} = \alpha_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2,$$

$$\Delta_{4j} = (-1)^{j+1} (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2 - \delta_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \delta_2), \Delta_{5j} = \gamma_1 \gamma_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Корни уравнения (4.69) могут быть рассчитаны каким либо из численных методов, однако следует учитывать, что при дальнейшей реализации алгоритма построения и анализа дисперсионного уравнения для исследуемых нормальных волн должна учитываться параметрическая непрерывность выделяемых ветвей корней, что при численном решении (4.69) требует создания дополнительного алгоритма их упорядочения. В этой связи, для нахождения корней (4.69) наиболее целесообразным является использование аналитического метода Феррари. При этом (4.69) приводится к виду

$$p^4 + (-1)^{j+1} Ap^3 + Bp^2 + (-1)^{j+1} Cp + D = 0, \quad (4.70)$$

и в качестве этапа применения метода для обоих вариантов задания j , с применением формул Кардано для уравнения

$$y^3 - By^2 + (AC - 4D)y - A^2D + 4BD - C^2 = 0 \quad (4.71)$$

рассчитывается величина

$$y_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad (4.72)$$

$$p = -\frac{B^2}{3} \quad q = -\frac{2B^3}{27} + \frac{B(AC - 4D)}{3} - A^2D + 4BD - C^2, \quad (4.73)$$

не зависящая от выбора j ввиду вхождения коэффициентов полинома (4.70) при p и p^3 в выражения (4.71)–(4.73) во второй степени, а также в виде совместного произведения. Далее корни характеристических полиномов (4.70) соответственно определяются из пары квадратных уравнений

$$p^2 + (-1)^{j+1} \frac{A}{2} p + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B - y_0\right) p^2 + (-1)^{j+1} \left(\frac{A}{2} y_0 - C\right) p + \frac{y_0^2}{4} - D} = 0, \quad (4.74)$$

с полными квадратами в подкоренных выражениях. В силу этого,

для $j = 1$

$$p_1^{(1)} = \frac{-b_1 + \sqrt{D_1}}{2}, \quad p_2^{(1)} = \frac{-b_1 - \sqrt{D_1}}{2}, \quad p_3^{(1)} = \frac{-b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, \quad p_4^{(1)} = \frac{-b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, \quad (4.75)$$

и для $j = 2$

$$p_1^{(2)} = \frac{b_1 + \sqrt{D_1}}{2}, p_2^{(2)} = \frac{b_1 - \sqrt{D_1}}{2}, p_3^{(2)} = \frac{b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, p_4^{(2)} = \frac{b_2 + \sqrt{D_2}}{2}, \quad (4.76)$$

где

$$b_1 = \frac{A}{2} + \alpha, b_2 = \frac{A}{2} - \alpha, D_1 = \sqrt{b_1^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} + \beta\right)}, D_2 = \sqrt{b_2^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} - \beta\right)}, \quad (4.77)$$

$$\alpha = (A^2/4 - B - y_0)^{1/2}, \beta = (y_0^2/4 - D)^{1/2}.$$

Соответственно, между наборами корней $p_m^{(1)}$ и $p_m^{(2)}$ имеется следующая из (4.75), (4.76) и подлежащая учету при записи представлений решений систем (4.59) связь

$$p_1^{(2)} = -p_2^{(1)}, p_2^{(2)} = -p_1^{(1)}, p_3^{(2)} = -p_4^{(1)}, p_4^{(2)} = -p_3^{(1)}. \quad (4.78)$$

Для получаемых таким образом выражений

$$f_{1j}(x_3) = Q_{1j}^{(1)} e^{p_1 x_3} + Q_{1j}^{(2)} e^{p_2 x_3} + Q_{1j}^{(3)} e^{p_3 x_3} + Q_{1j}^{(4)} e^{p_4 x_3},$$

$$f_{3j}(x_3) = Q_{3j}^{(1)} e^{p_1 x_3} + Q_{3j}^{(2)} e^{p_2 x_3} + Q_{3j}^{(3)} e^{p_3 x_3} + Q_{3j}^{(4)} e^{p_4 x_3},$$

из (4.68) могут быть установлены соотношения связи $Q_{1j}^{(m)}$ и $Q_{3j}^{(m)}$. Так, в случае $j = 1$

$$Q_{11}^{(m)} = \Delta_1^{(m)} Q^{(m)}, \Delta_1^{(m)} = (\delta_1 p_m + \varepsilon_1), \quad (4.79)$$

$$Q_{31}^{(m)} = \Delta_3^{(m)} Q^{(m)}, \Delta_3^{(m)} = (\alpha_1 p_m^2 + \beta_1 p_m + \gamma_1),$$

и, соответственно,

$$f_{11}(x_3) = \Delta_1^{(1)} Q^{(1)} e^{p_1 x_3} + \Delta_1^{(2)} Q^{(2)} e^{p_2 x_3} + \Delta_1^{(3)} Q^{(3)} e^{p_3 x_3} + \Delta_1^{(4)} Q^{(4)} e^{p_4 x_3}, \quad (4.80)$$

$$f_{31}(x_3) = \Delta_3^{(1)} Q^{(1)} e^{p_1 x_3} + \Delta_3^{(2)} Q^{(2)} e^{p_2 x_3} + \Delta_3^{(3)} Q^{(3)} e^{p_3 x_3} + \Delta_3^{(4)} Q^{(4)} e^{p_4 x_3};$$

в случае $j = 2$

$$Q_{12}^{(m)} = \theta_1^{(m)} R^{(m)}, \theta_1^{(m)} = (\delta_1 p_m - \varepsilon_1), \quad (4.81)$$

$$\theta_3^{(m)} = (\alpha_1 p_m^2 - \beta_1 p_m + \gamma_1);$$

$$f_{12}(x_3) = \theta_1^{(1)} R^{(1)} e^{-p_1 x_3} + \theta_1^{(2)} R^{(2)} e^{-p_2 x_3} + \theta_1^{(3)} R^{(3)} e^{-p_3 x_3} + \theta_1^{(4)} R^{(4)} e^{-p_4 x_3}, \quad (4.82)$$

$$f_{32}(x_3) = \theta_3^{(1)} R^{(1)} e^{-p_1 x_3} + \theta_3^{(2)} R^{(2)} e^{-p_2 x_3} + \theta_3^{(3)} R^{(3)} e^{-p_3 x_3} + \theta_3^{(4)} R^{(4)} e^{-p_4 x_3}.$$

Таким образом, для симметричной волны верны соотношения

$$\Delta_1^{(m)} Q^{(m)} = \theta_1^{(m)} R^{(m)}, \Delta_3^{(m)} Q^{(m)} = \theta_3^{(m)} R^{(m)}. \quad (4.83)$$

Используя, далее, краевые условия (4.66), можно записать равенства

$$\begin{aligned}
& p_1\Delta_1^{(1)}Q^{(1)} + p_2\Delta_1^{(2)}Q^{(2)} + p_3\Delta_1^{(3)}Q^{(3)} + p_4\Delta_1^{(4)}Q^{(4)} = \\
& = -p_1\theta_1^{(1)}R^{(1)} - p_2\theta_1^{(2)}R^{(2)} - p_3\theta_1^{(3)}R^{(3)} - p_4\theta_1^{(4)}R^{(4)}, \\
& p_1\Delta_3^{(1)}Q^{(1)} + p_2\Delta_3^{(2)}Q^{(2)} + p_3\Delta_3^{(3)}Q^{(3)} + p_4\Delta_3^{(4)}Q^{(4)} = \\
& = -p_1\theta_3^{(1)}R^{(1)} - p_2\theta_3^{(2)}R^{(2)} - p_3\theta_3^{(3)}R^{(3)} - p_4\theta_3^{(4)}R^{(4)},
\end{aligned}$$

которые трансформируются в соотношения связи четырех констант $Q^{(m)}$

$$\sum_{m=1}^4 p_m\Delta_1^{(m)}Q^{(m)} = 0, \quad \sum_{m=1}^4 p_m\Delta_3^{(m)}Q^{(m)} = 0. \quad (4.84)$$

При введении переобозначений

$$p_m\Delta_1^{(m)} = a_m, \quad p_m\Delta_3^{(m)} = b_m, \quad Q^{(1)} = A, \quad Q^{(2)} = B, \quad (4.85)$$

из (4.84), можно, в итоге, получить

$$Q^{(3)} = \left(\frac{a_4(b_3a_1 - b_1a_3)}{a_3(b_4a_3 - b_3a_4)} - \frac{a_1}{a_3} \right) A + \left(\frac{a_4(b_3a_2 - b_2a_3)}{a_3(b_4a_3 - b_3a_4)} - \frac{a_2}{a_3} \right) B = \phi_1 A + \phi_2 B, \quad (4.86)$$

$$Q^{(4)} = \frac{b_3a_1 - b_1a_3}{b_4a_3 - b_3a_4} A + \frac{b_3a_2 - b_2a_3}{b_4a_3 - b_3a_4} B = \phi_3 A + \phi_4 B,$$

и далее, соответственно, записать формулы для расчета амплитудных функций перемещений и напряжений в компоненте $v^{(1)}$ для симметричной нормальной волны:

$$f_{11}(x_3) = A(\Delta_1^{(1)}e^{p_1x_3} + \phi_1\Delta_1^{(3)}e^{p_3x_3} + \phi_3\Delta_1^{(4)}e^{p_4x_3}) + B(\Delta_1^{(2)}e^{p_2x_3} + \phi_2\Delta_1^{(3)}e^{p_3x_3} + \phi_4\Delta_1^{(4)}e^{p_4x_3}), \quad (4.87)$$

$$f_{31}(x_3) = A(\Delta_3^{(1)}e^{p_1x_3} + \phi_1\Delta_3^{(3)}e^{p_3x_3} + \phi_3\Delta_3^{(4)}e^{p_4x_3}) + B(\Delta_3^{(2)}e^{p_2x_3} + \phi_2\Delta_3^{(3)}e^{p_3x_3} + \phi_4\Delta_3^{(4)}e^{p_4x_3}),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{31,1}(x_3) = e^{\mu x_3} [& A(c_{440}^{(1)}ik\Delta_3^{(1)}e^{p_1x_3} + c_{440}^{(1)}ik\phi_1\Delta_3^{(3)}e^{p_3x_3} + c_{440}^{(1)}ik\phi_3\Delta_3^{(4)}e^{p_4x_3} + c_{440}^{(1)}p_1\Delta_1^{(1)}e^{p_1x_3} + c_{440}^{(1)}p_3\phi_1\Delta_1^{(3)}e^{p_3x_3} + \\
& + c_{440}^{(1)}p_4\phi_3\Delta_1^{(4)}e^{p_4x_3}) + B(c_{440}^{(1)}jk\Delta_3^{(2)}e^{p_2x_3} + c_{440}^{(1)}jk\phi_2\Delta_3^{(3)}e^{p_3x_3} + c_{440}^{(1)}jk\phi_4\Delta_3^{(4)}e^{p_4x_3} + \\
& + c_{440}^{(1)}p_2\Delta_1^{(2)}e^{p_2x_3} + c_{440}^{(1)}p_3\phi_2\Delta_1^{(3)}e^{p_3x_3} + c_{440}^{(1)}p_4\phi_4\Delta_1^{(4)}e^{p_4x_3})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33,1}(x_3) = e^{\mu x_3} [& A(c_{130}^{(1)}ik\Delta_1^{(1)}e^{p_1x_3} + c_{130}^{(1)}ik\phi_1\Delta_1^{(3)}e^{p_3x_3} + c_{130}^{(1)}ik\phi_3\Delta_1^{(4)}e^{p_4x_3} + c_{330}^{(1)}p_1\Delta_3^{(1)}e^{p_1x_3} + c_{330}^{(1)}p_3\phi_1\Delta_3^{(3)}e^{p_3x_3} + \\
& + c_{330}^{(1)}p_4\phi_3\Delta_3^{(4)}e^{p_4x_3}) + B(c_{130}^{(1)}jk\Delta_1^{(2)}e^{p_2x_3} + c_{130}^{(1)}jk\phi_2\Delta_1^{(3)}e^{p_3x_3} + c_{130}^{(1)}jk\phi_4\Delta_1^{(4)}e^{p_4x_3} + \\
& + c_{330}^{(1)}p_2\Delta_3^{(2)}e^{p_2x_3} + c_{330}^{(1)}p_3\phi_2\Delta_3^{(3)}e^{p_3x_3} + c_{330}^{(1)}p_4\phi_4\Delta_3^{(4)}e^{p_4x_3})].
\end{aligned}$$

Алгоритм получения базисных частных решений $G_j^{(+)}(x_3)$, $G_j^{(-)}(x_3)$ для описывающих волновые поля в функционально-градиентных пригранично-неоднородных полупространствах векторно-матричных уравнений (4.62), а также представления этих базисных решений в форме векторно-матричных экспоненциальных рядов приведены в подразделе 2.3 данной диссертационной

работы. Представление $\underline{G}^{(+)}(x_3)$ может быть записано в виде линейной комбинации базисных векторных частных решений $G_j^{(+)}(x_3)$ с произвольными коэффициентами C и D

$$\underline{G}^{(+)}(x_3) = C\underline{G}_1^{(+)}(x_3) + D\underline{G}_2^{(+)}(x_3), \quad \underline{G}_j^{(+)}(x_3) = \begin{pmatrix} g_{1+,j}(x_3) \\ g_{3+,j}(x_3) \end{pmatrix}, \quad (4.88)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{G}_j^{(+)}(x_3) = & \underline{f}_{0j+} e^{\delta_j x_3} - \gamma \underline{Q}_{1j+} \underline{f}_{0j+} e^{(\delta_j - \beta)x_3} + \gamma^2 \underline{Q}_{2j+} \underline{Q}_{1j+} \underline{f}_{0j+} e^{(\delta_j - 2\beta)x_3} - \dots + \\ & + (-\gamma)^n \underline{Q}_{nj+} \underline{Q}_{n-1,j+} \dots \underline{Q}_{1j+} \underline{f}_{0j+} e^{(\delta_j - n\beta)x_3} + \dots \end{aligned} \quad (4.89)$$

С использованием соотношений (4.88), (4.89) для полупространства $V^{(+)}$ записываются следующие представления фигурирующих в граничных условиях (4.64) амплитудных кинематических и силовых характеристик волнового поля

$$g_{1+}(x_3) = Cg_{1+,1}(x_3) + Dg_{1+,2}(x_3), \quad g_{3+}(x_3) = Cg_{3+,1}(x_3) + Dg_{3+,2}(x_3); \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{31+}(x_3) = & \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) [C(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,1}(x_3) + ikc_{440}^{(+)} g_{3+,1}(x_3)) + \\ & + D(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,2}(x_3) + ikc_{440}^{(+)} g_{3+,2}(x_3))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33+}(x_3) = & \exp(\lambda \exp(-\beta x_3)) [C(ikc_{130}^{(+)} g_{1+,1}(x_3) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,1}(x_3)) + \\ & + D(ikc_{130}^{(+)} g_{1+,2}(x_3) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,2}(x_3))]. \end{aligned}$$

В итоге, с использованием полученных выше, содержащих четыре произвольные постоянные A, B, C, D представлений для характеристик волновых полей в $V^{(+)}$ и $V^{(1)}$, применительно к рассматриваемому случаю распространения симметричных локализованных волн из граничных условий (4.64) можно получить искомое дисперсионное соотношение для исследуемых волновых движений в форме равенства нулю функционального определителя четвертого порядка

$$F(\omega, k) = \det \| a_{pq} \| = 0, \quad (4.91)$$

в котором

$$a_{11} = \Delta_1^{(1)} e^{p_1 h} + \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}, \quad a_{12} = \Delta_1^{(2)} e^{p_2 h} + \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}, \quad (4.92)$$

$$a_{13} = -g_{1+,1}(h), \quad a_{14} = -g_{1+,2}(h);$$

$$a_{21} = \Delta_3^{(1)} e^{p_1 h} + \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h}, \quad a_{22} = \Delta_3^{(2)} e^{p_2 h} + \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h},$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= -g_{3+,1}(h), \quad a_{24} = -g_{3+,2}(h); \\
a_{31} &= e^{i h} (c_{440}^{(1)} i k \Delta_3^{(1)} e^{p_1 h} + c_{440}^{(1)} i k \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} i k \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h} + \\
&\quad + c_{440}^{(1)} p_1 \Delta_1^{(1)} e^{p_1 h} + c_{440}^{(1)} p_3 \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} p_4 \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}), \\
a_{32} &= e^{i h} (c_{440}^{(1)} i k \Delta_3^{(2)} e^{p_2 h} + c_{440}^{(1)} i k \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} i k \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h} + \\
&\quad + c_{440}^{(1)} p_2 \Delta_1^{(2)} e^{p_2 h} + c_{440}^{(1)} p_3 \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{440}^{(1)} p_4 \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h}), \\
a_{33} &= -(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,1}(h) + i k c_{440}^{(+)} g_{3+,1}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)), \\
a_{34} &= -(c_{440}^{(+)} \partial_3 g_{1+,2}(h) + i k c_{440}^{(+)} g_{3+,2}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)); \\
a_{41} &= e^{i h} (c_{130}^{(1)} i k \Delta_1^{(1)} e^{p_1 h} + c_{130}^{(1)} i k \phi_1 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{130}^{(1)} i k \phi_3 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h} + \\
&\quad + c_{330}^{(1)} p_1 \Delta_3^{(1)} e^{p_1 h} + c_{330}^{(1)} p_3 \phi_1 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{330}^{(1)} p_4 \phi_3 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h}), \\
a_{42} &= e^{i h} (c_{130}^{(1)} i k \Delta_1^{(2)} e^{p_2 h} + c_{130}^{(1)} i k \phi_2 \Delta_1^{(3)} e^{p_3 h} + c_{130}^{(1)} i k \phi_4 \Delta_1^{(4)} e^{p_4 h} + \\
&\quad + c_{330}^{(1)} p_2 \Delta_3^{(2)} e^{p_2 h} + c_{330}^{(1)} p_3 \phi_2 \Delta_3^{(3)} e^{p_3 h} + c_{330}^{(1)} p_4 \phi_4 \Delta_3^{(4)} e^{p_4 h}), \\
a_{43} &= -(i k c_{130}^{(+)} g_{1+,1}(h) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,1}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)), \\
a_{44} &= -(i k c_{130}^{(+)} g_{1+,2}(h) + c_{330}^{(+)} \partial_3 g_{3+,2}(h)) \exp(\lambda \exp(-\beta h)).
\end{aligned}$$

Получение соотношений (4.91), (4.92) отвечает решению заданий данного исследования.

Некоторые результаты расчетов с использованием реализующего описанную методику программного приложения, представлены на рисунке 4.18. Представлен фрагмент дисперсионного спектра исследуемых волн в частном случае однородного ортотропного слоя и пригранично неоднородных полупространств при задании приведенных модельных значений физико-механических параметров волноводной структуры в виде

$$c_{110}^{(1)} = 0.66, \quad c_{330}^{(1)} = 1.15, \quad c_{310}^{(1)} = 0.19, \quad c_{440}^{(1)} = 0.12, \quad \rho_0^{(1)} = 2.90; \quad (4.93)$$

$$c_{110}^{(\pm)} = 3.68, \quad c_{330}^{(\pm)} = 5.04, \quad c_{310}^{(\pm)} = 0.84, \quad c_{440}^{(\pm)} = 1.60, \quad \rho_0^{(\pm)} = 2.90, \quad \lambda = 0.1, \quad \beta = 0.1.$$

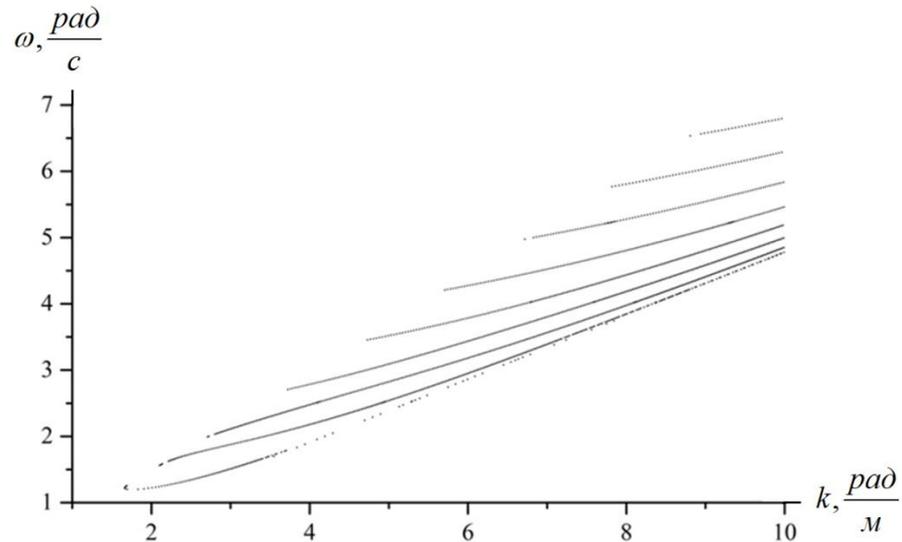


Рис. 4.18 – Фрагмент дисперсионного спектра исследуемых волн

4.4. Выводы по разделу 4

1. Осуществлена разработка численно-аналитической методики описания процессов распространения локализованных сдвиговых горизонтально-поляризованных упругих волн в трансверсально-изотропном однородном слое между трансверсально-изотропными функционально-градиентными полупространствами с двойной экспоненциальной неоднородностью, интерпретирующей возмущение свойств материалов полупространств и слоя вблизи контактных плоскостей. В аналитической форме получено дисперсионное соотношение для исследуемых локализованных волн. Проведена численная апробация предлагаемой методики для анализа дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик рассматриваемых волн.

2. Осуществлена разработка численно-аналитической методики описания процессов распространения локализованных сдвиговых горизонтально-поляризованных упругих волн в плоскости трансверсально-изотропного функционально-градиентного слоя-пласта, обладающего симметричной по его толщине экспоненциальной поперечной неоднородностью и расположенного между однотипными трансверсально-изотропными неоднородными полупространствами с физико-механическими характеристиками, описываемыми

двойными экспоненциальными функциями поперечной координаты. В аналитической форме получено дисперсионное соотношение для исследуемых локализованных волн и проведена численная апробация предлагаемой методики для анализа их дисперсионных, кинематических и энергетических характеристик.

3. Разработан аналитический алгоритм получения дисперсионного уравнения, а также расчетных соотношений для кинематических и силовых характеристик в модели распространения локализованных стационарных симметричных упругих волн P-SV типа вдоль произвольного направления в плоскости трансверсально-изотропного функционально-градиентного слоя-пласта, обладающего симметричной по его толщине экспоненциальной поперечной неоднородностью и расположенного между однотипными трансверсально-изотропными неоднородными полупространствами с физико-механическими характеристиками, описываемыми двойными экспоненциальными функциями поперечной координаты. Приведен пример расчетного анализа полученного дисперсионного соотношения.

4. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [8, 31, 36, 37].

РАЗДЕЛ 5. ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНОМ СЛОЕ С МНОГОФАКТОРНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ФИЗИКО- МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

В данном разделе диссертационной работы представлены исследования, связанные с получением дисперсионных соотношений и анализом спектров нормальных горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн, распространяющихся вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала с двух факторной неоднородностью в случаях, когда задаются различные экспоненциальные законы изменения модулей упругости и параметра плотности по толщине слоя, либо когда двухфакторная поперечная неоднородность связана с особой экспоненциальной зависимостью для одного из параметров упругих свойств и вторым типом экспоненциальных зависимостей для всех оставшихся физико-механических характеристик. Представлена также методика анализа модели распространения нормальной сдвиговой волны в неоднородном по толщине трансверсально-изотропном слое с трехфакторной неоднородностью, каждый из физико-механических параметров которого характеризуется своей, отличающейся от остальных, экспоненциальной функцией изменения по поперечной координате.

5.1. Сдвиговые волны в слое с альтернативными вариантами двухфакторной физико-механической неоднородности

Рассматривается упругий волновод в виде функционально-градиентного трансверсально-изотропного слоя, занимающего в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ область

$$V = \{(x_1, x_2) \in R^2, 0 \leq x_3 \leq h\}, \quad (5.1)$$

и составленного из трансверсально-изотропного материала, обладающего свойствами двухфакторной поперечной экспоненциальной неоднородности. Применительно к исследуемому типу волнового процесса рассматриваются следующие варианты задания граничных условий на гранях слоя $x_3 = 0$, $x_3 = h$:

жесткое закрепление обеих граней

$$u_{20}(0) = u_{20}(h) = 0; \quad (5.2)$$

обе грани свободны

$$\sigma_{230}(0) = \sigma_{230}(h) = 0; \quad (5.3)$$

грань $x_3 = 0$ свободна, а грань $x_3 = h$ жестко закреплена

$$\sigma_{230}(0) = u_{20}(h) = 0; \quad (5.4)$$

грань $x_3 = 0$ жестко закреплена, а грань $x_3 = h$ свободна

$$u_{20}(0) = \sigma_{230}(h) = 0. \quad (5.5)$$

В первом из рассматриваемых случаев двухфакторной неоднородности слоя представления для модулей упругости $c_{ij}(x_3)$ и параметра плотности $\rho(x_3)$ материала слоя соответственно имеют вид

$$c_{ij}(x_3) = c_{ij0} \exp(\lambda_c x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda_\rho x_3), \quad (5.6)$$

где λ_c , λ_ρ – действительные параметры неоднородности. Уравнение стационарного динамического деформирования волновода с данными характеристиками в случае распространения вдоль координатного направления Ox_1 сдвиговых горизонтально-поляризованных волн с циклической частотой ω , волновым числом k и комплексной функцией напряженности

$$u_2(x_1, x_3, t) = u_{20}(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)) \quad , \quad (5.7)$$

для рассматриваемого случая неоднородности материала слоя трансформируются в уравнение для определения комплексной амплитудной функции $u_{20}(x_3)$

$$e^{\lambda_c x_3} (c_{440} \partial_3^2 u_{20}(x_3) + c_{440} \lambda_c \partial_3 u_{20}(x_3) - c_{660} k^2 u_{20}(x_3)) + e^{\lambda_p x_3} \rho_0 \omega^2 u_{20}(x_3) = 0, \quad (5.8)$$

методика интегрирования которого, представления для базисных частных решений $f^{(j)}(x_3)$ и соответствующие им выражения для амплитудных характеристик волновых напряжений представлены в п. 2.5 и имеют вид (2.83)–(2.87).

В частном случае $\lambda_p = \lambda_c$ выражение для $u_{20}(x_3)$ будет иметь вид

$$u_{20}(x_3) = A_1 \exp(\zeta_1 x_3) + A_2 \exp(\zeta_2 x_3), \quad (5.9)$$

где

$$\zeta_q = -\lambda_c / 2 + (-1)^{q+1} ((\lambda_c / 2)^2 - \chi)^{1/2}, \quad \chi = (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) / c_{440}. \quad (5.10)$$

Дисперсионное уравнение для нормальных волн исследуемого типа в случае задания на гранях слоя краевых условий (5.2) может быть записано в форме

$$F_1(\omega, k) = \begin{vmatrix} f^{(1)}(0) & f^{(2)}(0) \\ f^{(1)}(h) & f^{(2)}(h) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.11)$$

а в частном случае $\lambda_p = \lambda_c$

$$F_1(\omega, k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp(\zeta_1 h) & \exp(\zeta_2 h) \end{vmatrix} = \exp(-(\lambda_c / 2)h) (\exp(i \mathcal{G}h) - \exp(-i \mathcal{G}h)) = 0, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{G} = (\chi - (\lambda_c / 2)^2)^{1/2},$$

откуда следует

$$\sin(\mathcal{G}h) = 0, \quad \mathcal{G}_p = p\pi / h, \quad (p = \overline{1, \infty}). \quad (5.13)$$

Соответственно, для мод рассматриваемых волн в данном частном случае при $\lambda_p = \lambda_c$ следуют представления

$$\omega = \varphi_p^{(1)}(k, \lambda, h, \rho_0, c_{440}, c_{660}) = ((c_{440} / \rho_0)(c_{660} / c_{440})k^2 + (\lambda_c / 2)^2 + (p\pi / h)^2)^{1/2} \quad (5.14)$$

$$(p = \overline{1, \infty}),$$

или при переводе (5.14) в безразмерную форму с введением параметров приведенной нормированной частоты $\Omega = (\rho_0 \omega^2 h^2 / c_{440})^{1/2}$ и нормированного волнового числа $\bar{k} = kh$

$$\Omega = \bar{\varphi}_p^{(1)}(\bar{k}, \lambda, h, \rho_0, c_{440}, c_{660}) = (\Delta_c \bar{k}^2 + (\Delta_\lambda / 2)^2 + (p\pi)^2)^{1/2}, \quad \Delta_c = c_{660} / c_{440}, \quad \Delta_\lambda = \lambda_c h. \quad (5.15)$$

Из выражений (5.15) следует, что значения приведенных частот запирания $\Omega_p^* = ((\Delta_\lambda / 2)^2 + (p\pi)^2)^{1/2}$ бегущих нормальных волн в исследуемом спектре с ростом значения параметра неоднородности λ_c увеличиваются, однако уравнение асимптоты для этих мод $\Omega = \Delta_c^{1/2} \bar{k}$ в коротковолновом высокочастотном диапазоне от параметра неоднородности не зависит.

Дисперсионное уравнение для случая краевых условий (5.3) может быть записано в форме

$$F_2(\omega, k) = \begin{vmatrix} (f^{(1)}(0))' & (f^{(2)}(0))' \\ (f^{(1)}(h))' & (f^{(2)}(h))' \end{vmatrix} = 0, \quad (5.16)$$

а в частном случае $\lambda_p = \lambda_c$

$$\begin{aligned} F_2(\omega, k) &= \begin{vmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \\ \varsigma_1 \exp(\varsigma_1 h) & \varsigma_2 \exp(\varsigma_2 h) \end{vmatrix} = \varsigma_1 \varsigma_2 (\exp(\varsigma_2 h) - \exp(\varsigma_1 h)) = \\ &= \varsigma_1 \varsigma_2 \exp(-(\lambda/2)h) (\exp(i\mathcal{G}h) - \exp(-i\mathcal{G}h)) = 0, \end{aligned} \quad (5.17)$$

и, в свою очередь,

$$\varsigma_1 = 0, \quad \varsigma_2 = 0, \quad \sin(\mathcal{G}h) = 0. \quad (5.18)$$

Для случая краевых условий (5.4) дисперсионное уравнение может быть представлено в виде

$$F_3(\omega, k) = \begin{vmatrix} (f^{(1)}(0))' & (f^{(2)}(0))' \\ f^{(1)}(h) & f^{(2)}(h) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.19)$$

а в частном случае $\lambda_p = \lambda_c$

$$F_3(\omega, k) = \begin{vmatrix} \varsigma_1 & \varsigma_2 \\ \exp(\varsigma_1 h) & \exp(\varsigma_2 h) \end{vmatrix} = \varsigma_1 \exp(\varsigma_2 h) - \varsigma_2 \exp(\varsigma_1 h) = 0. \quad (5.20)$$

Наконец, для случая краевых условий (5.5) дисперсионное уравнение имеет форму

$$F_4(\omega, k) = \begin{vmatrix} f^{(1)}(0) & f^{(2)}(0) \\ (f^{(1)}(h))' & (f^{(2)}(h))' \end{vmatrix} = 0, \quad (5.21)$$

а в частном случае $\lambda_p = \lambda_c$

$$F_3(\omega, k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varsigma_1 \exp(\varsigma_1 h) & \varsigma_2 \exp(\varsigma_2 h) \end{vmatrix} = \varsigma_2 \exp(\varsigma_2 h) - \varsigma_1 \exp(\varsigma_1 h) = 0.$$

Численная реализация представленной методики на основе разработки соответствующего программного приложения дана применительно к функционально-градиентному слою со значениями параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 , отвечающими керамике «цирконат-титанат свинца» $c_{440} = 2.49 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $c_{660} = 2.39 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 7.51 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ в случае жесткого закрепления граней. закрепленными гранями. Описываемые выражениями (5.15) фрагменты действительных ветвей спектра на диаграммах дисперсионных кривых при $\Delta_c = 0.96$ для случаев $\lambda_c = 0$, $\lambda_c = 4$ и $\lambda_c = 10$ представлены на рисунке 5.1. Введенные на рисунке обозначения p_j для дисперсионных кривых соответствуют номерам j рассчитываемых мод и дополняются соответствующими данными о величинах λ_c .

Данные аналогичных расчетов для неоднородного слоя со значениями параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 , отвечающими монокристаллическому цинку $c_{440} = 3.78 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $c_{660} = 6.86 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 7.13 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, и, соответственно, с $\Delta_c = 1.81$, для случаев $\lambda_c = 0$, $\lambda_c = 4$ и $\lambda_c = 10$ представлены на рисунке 5.2.

Наконец, данные расчетов для неоднородного слоя со значениями параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 , отвечающими монокристаллу сульфида кадмия $c_{440} = 3.78 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $c_{660} = 6.86 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\rho_0 = 7.13 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, и, соответственно, с $\Delta_c = 0.112$, для случаев $\lambda_c = 0$, $\lambda_c = 4$ и $\lambda_c = 10$ представлены на рисунке 5.3.

Представленные расчетные результаты иллюстрируют меру роста значений нормированных частот запираия для бегущих нормальных волн в исследуемом спектре с ростом значения параметра неоднородности λ_c .

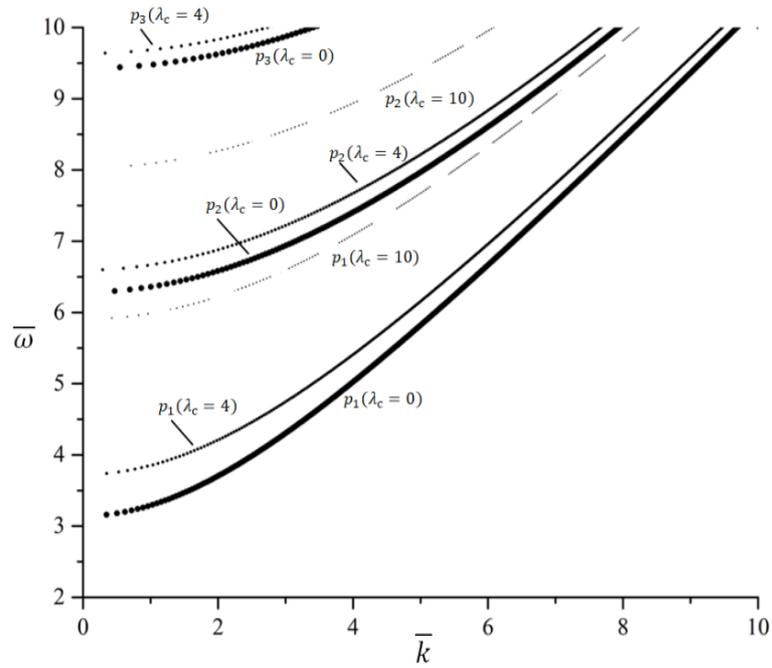


Рисунок 5.1 – Фрагменты действительных ветвей спектра на диаграммах дисперсионных кривых при $\Delta_c = 0.96$

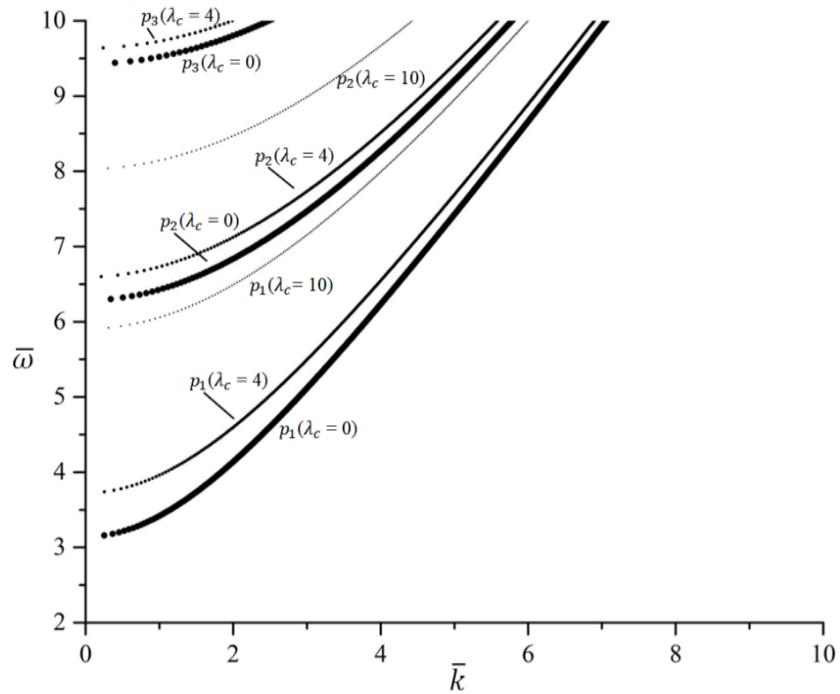


Рисунок 5.2 – Фрагменты действительных ветвей спектра на диаграммах дисперсионных кривых при $\Delta_c = 1.81$

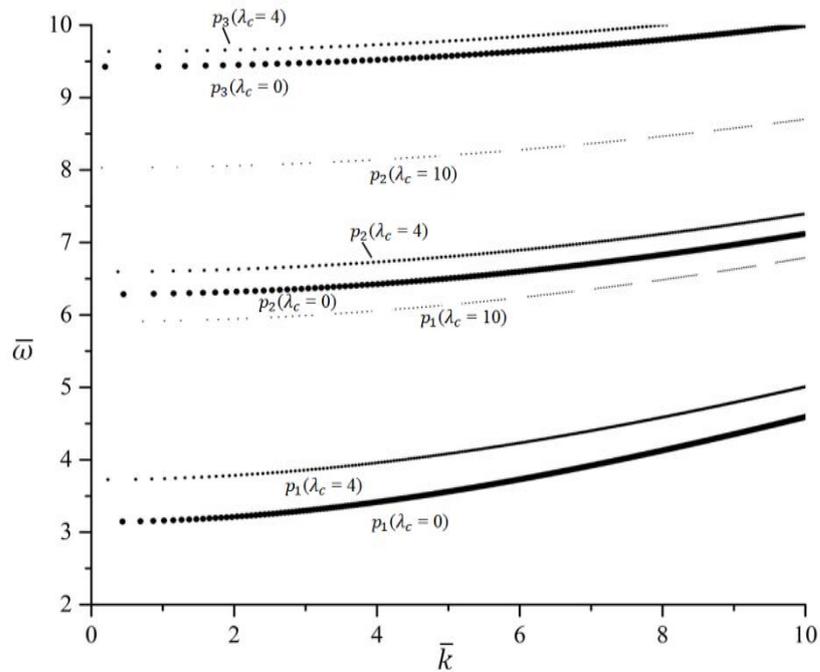


Рисунок 5.3 – Фрагменты действительных ветвей спектра на диаграммах дисперсионных кривых при $\Delta_c = 0.112$

Они также описывают соответствующие степени различия в траекториях дисперсионных кривых, иллюстрируют увеличение фазовых скоростей бегущих волн одинаковой относительной длины из соответствующих ветвей спектра с ростом значения параметра неоднородности.

Результаты расчетов фрагментов диаграмм дисперсионных кривых для слоя с закрепленными границами из функционально-градиентного материала с рассматриваемым типом неоднородности при вариациях значений параметров двухфакторной экспоненциальной неоднородности λ_c и λ_p вида $\{\lambda_c = 1, \lambda_p = 2\}$, $\{\lambda_c = 1, \lambda_p = 3\}$, $\{\lambda_c = 2, \lambda_p = 1\}$, $\{\lambda_c = 3, \lambda_p = 1\}$ соответственно представлены на рисунках 5.4–5.7. В качестве заключений по анализу данных этих расчетов можно отметить снижение частот запирания и соответственно уменьшение значений фазовых скоростей для волн однопорядковых мод в случае фиксации значения λ_c и наращивания величины λ_p (рис. 5.4, 5.5), а также интенсивный рост значений указанных характеристик в случае фиксации значения λ_p наращивания величины λ_c (рис. 5.6, 5.7).

Во втором из рассматриваемых случаев двухфакторной неоднородности рассматривается упругий функционально-градиентный трансверсально-изотропный слой, для материала которого представления модулей упругости $c_{ij}(x_3)$ и плотности $\rho(x_3)$ соответственно имеют вид

$$c_{44}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_1 x_3), \quad c_{66}(x_3) = c_{660} \exp(\lambda_2 x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda_1 x_3), \quad (5.22)$$

где λ_1, λ_2 – действительные параметры неоднородности. Уравнение стационарного динамического деформирования волновода в случае распространяющихся вдоль координатного направления Ox_1 сдвиговых горизонтально поляризованных волн с комплексной функцией напряженности (5.7) имеет вид (2.90), а его базисные частные решения описываются соотношениями (2.97), (2.98).

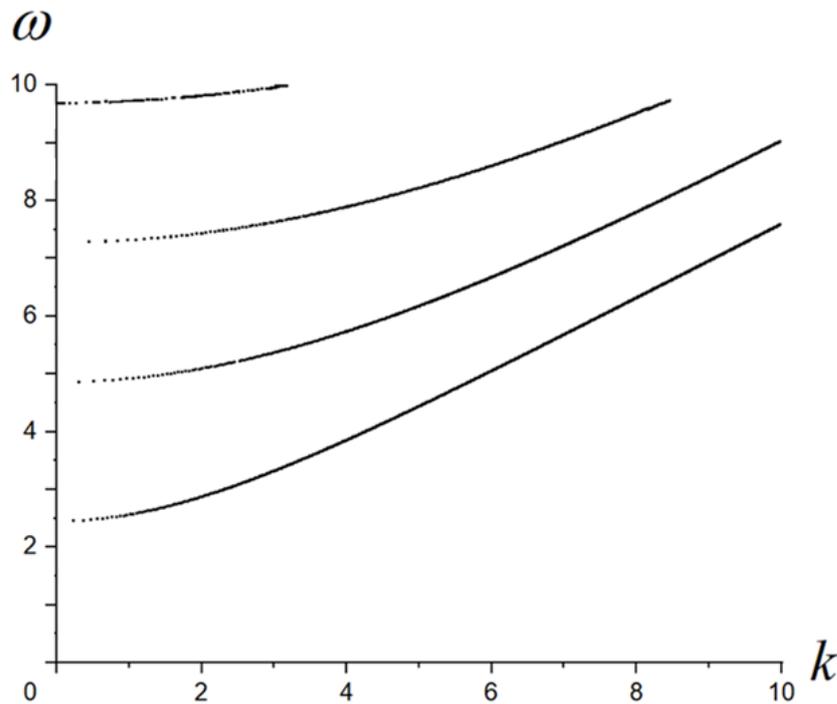


Рисунок 5.4 – Фрагменты диаграмм дисперсионных кривых для слоя с закрепленными границами из функционально-градиентного материала с неоднородностью $\{\lambda_c = 1, \lambda_\rho = 2\}$

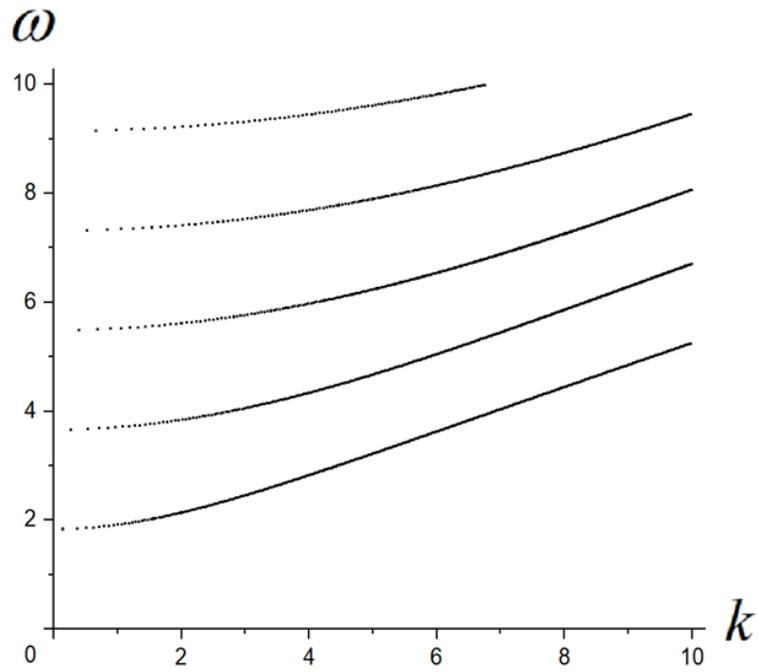


Рисунок 5.5 – Фрагменты диаграмм дисперсионных кривых для слоя с закрепленными границами из функционально-градиентного материала с неоднородностью $\{\lambda_c = 1, \lambda_p = 3\}$

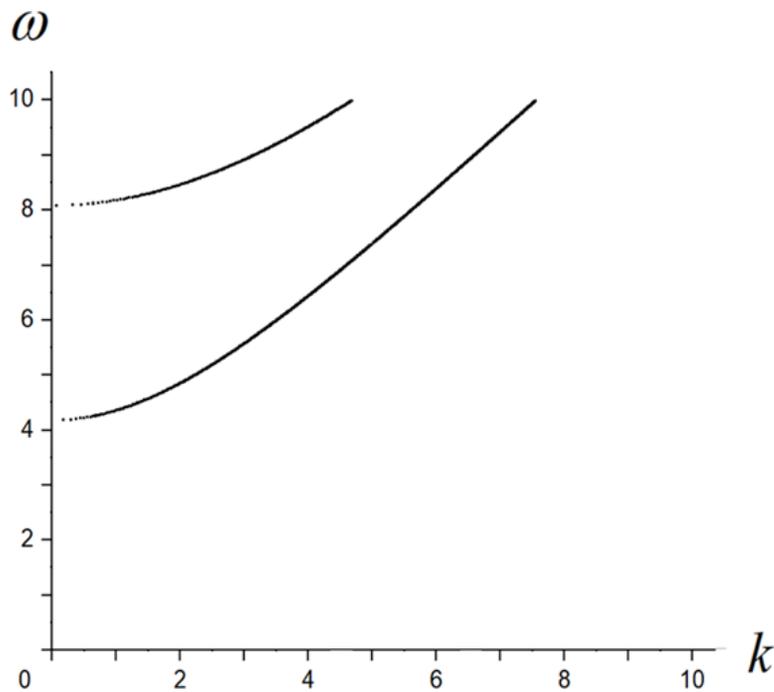


Рисунок 5.6 – Фрагменты диаграмм дисперсионных кривых для слоя с закрепленными границами из функционально-градиентного материала с неоднородностью $\{\lambda_c = 2, \lambda_p = 1\}$

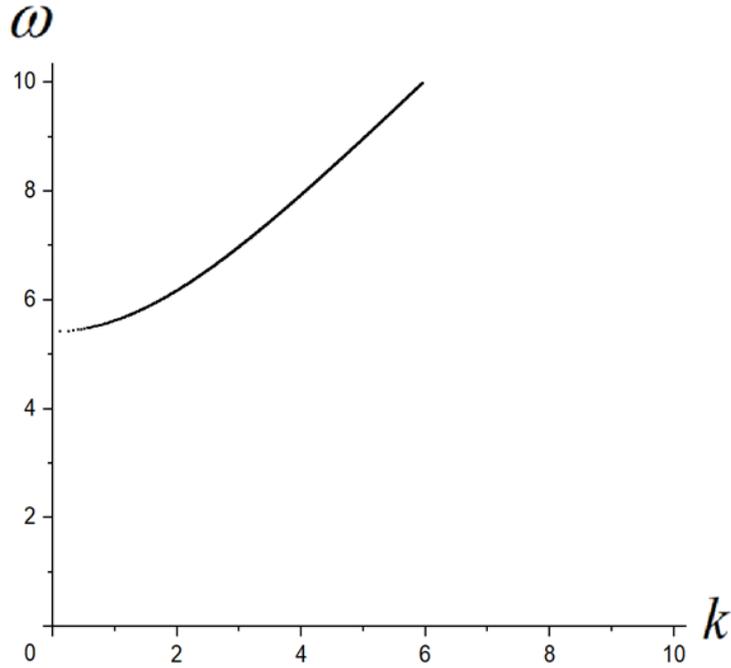


Рисунок 5.7 – Фрагменты диаграмм дисперсионных кривых для слоя с закрепленными границами из функционально-градиентного материала с неоднородностью $\{\lambda_c = 3, \lambda_p = 1\}$

Выражение для амплитудной функции динамического напряжения σ_{23} в волновых полях рассматриваемого типа может быть с учетом (2.97), (2.98) записано в форме

$$\sigma_{230}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) u'_{20}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_c x_3) (C_1 (f^{(1)}(x_3))' + C_2 (f^{(2)}(x_3))'), \quad (5.23)$$

$$(f^{(j)}(x_3))' = \delta_j e^{\delta_j x_3} + \sum_{p=1}^{\infty} (\delta_j - p\lambda) A_{pj} e^{(\delta_j - p\lambda)x_3}. \quad (5.24)$$

Дисперсионные уравнения для нормальных волн исследуемого типа в случае задания на гранях слоя краевых условий (5.2)–(5.5) могут быть соответственно записаны в форме

$$f^{(1)}(0)f^{(2)}(h) - f^{(2)}(0)f^{(1)}(h) = 0, \quad (5.25)$$

$$(f^{(1)}(0))'(f^{(2)}(h))' - (f^{(2)}(0))'(f^{(1)}(h))' = 0, \quad (5.26)$$

$$(f^{(1)}(0))'f^{(2)}(h) - (f^{(2)}(0))'f^{(1)}(h) = 0, \quad (5.27)$$

$$f^{(1)}(0)(f^{(2)}(h))' - f^{(2)}(0)(f^{(1)}(h))' = 0. \quad (5.28)$$

В результате численных исследований, в частности, проведен анализ эффектов наращивания значений параметра λ_1 при фиксации величины параметра λ_2 на траекторию низшей моды бегущих нормальных волн сдвига из дисперсионного спектра для свободного по граням слоя с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью из материала рассматриваемого типа при выборе пар значений $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ вида $\{\lambda_1 = 2.0, \lambda_2 = 1.0\}$, $\{\lambda_1 = 2.25, \lambda_2 = 1.0\}$, $\{\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 1.0\}$, $\{\lambda_1 = 3.0, \lambda_2 = 1.0\}$ (рис. 5.8). Как показывают расчеты, при данном варианте варьирования параметров неоднородности траектории низшей моды становятся все более пологими со снижением фазовых скоростей соответствующих нормальных волн.

В третьем из рассматриваемых случаев учета двухфакторной неоднородности при исследовании закономерностей распространения нормальных горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала его модули упругости $c_{ij}(x_3)$ и параметр плотности $\rho(x_3)$ соответственно описываются представлениями

$$c_{44}(x_3) = c_{440} \exp(\lambda_1 x_3), \quad c_{66}(x_3) = c_{660} \exp(\lambda_2 x_3), \quad \rho(x_3) = \rho_0 \exp(\lambda_2 x_3), \quad (5.29)$$

с действительными коэффициентами неоднородности λ_1, λ_2 .

Уравнение стационарного динамического деформирования слоя в случае распространения волн исследуемого типа вдоль координатного направления Ox_1 принимает вид

$$e^{\lambda_1 x_3} (c_{440} \partial_3^2 u_{20}(x_3) + c_{440} \lambda_1 \partial_3 u_{20}(x_3)) + e^{\lambda_2 x_3} (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) u_{20}(x) = 0, \quad (5.30)$$

а методика его аналитического интегрирования описана в п. 2.5 с получением представлений для базисных частных решений $f^{(1)}(x_3), f^{(2)}(x_3)$ в виде (2.108), (2.109) и (2.111), (2.112); получением выражений для комплексной амплитудной составляющей функции волновых перемещений $u_{20}(x_3)$ в виде (2.113) и комплексной амплитудной составляющей динамических напряжений $\sigma_{230}(x_3)$ в виде (2.114).

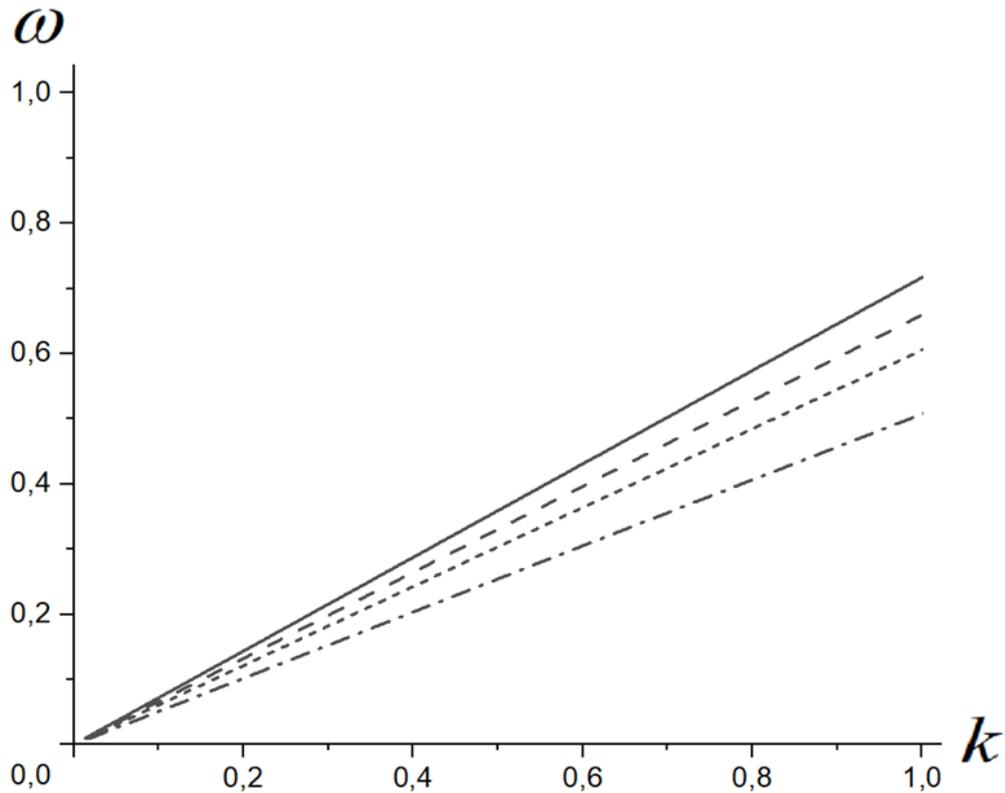


Рисунок 5.8 – Влияние величин параметров неоднородности на траекторию нижней моды дисперсионного спектра: сплошная линия – $\{\lambda_1 = 2.0, \lambda_2 = 1.0\}$, штриховая – $\{\lambda_1 = 2.25, \lambda_2 = 1.0\}$, мелкий штрих – $\{\lambda_1 = 2.5, \lambda_2 = 1.0\}$, пунктирно-штриховая – $\{\lambda_1 = 3.0, \lambda_2 = 1.0\}$.

В итоге, дисперсионные уравнения для нормальных волн исследуемого типа в случае задания на гранях слоя краевых условий (5.2)–(5.5) также записываются в виде (5.25)–(5.28) с отвечающими данному случаю представлениями $f^{(1)}(x_3), f^{(2)}(x_3)$.

Численные исследования для данного случая неоднородности материала слоя, как и выше в данном подразделе, реализованы применительно к функционально-градиентному материалу со значениями параметров c_{440}, c_{660}, ρ_0 , отвечающими керамике «цирконат-титанат свинца» для $\lambda_1 = 0$ и для λ_2 , принимающего значения 1.0, 2.0, 3.0, 5.0, 7.0 соответственно. Представляемые на рисунках 5.9–5.13 результаты расчетов описывают вид фрагментов действительных ветвей спектров на диаграммах дисперсионных кривых для

рассматриваемого слоя толщины h_* , имеющего свободные грани. Они указывают на эффект снижения значений частот запираания однопорядковых мод при данном варианте варьирования параметров рассматриваемой двухфакторной неоднородности функционально-градиентного материала слоя.

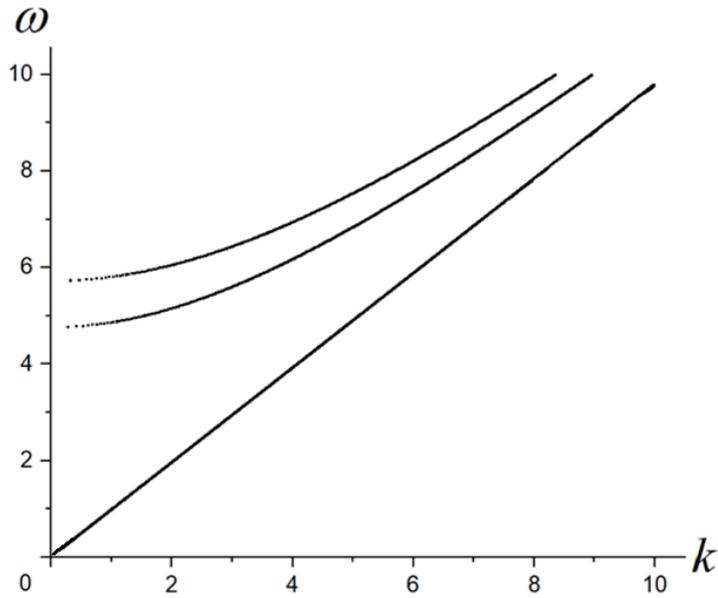


Рисунок 5.9 – Действительные ветви спектра при параметрах неоднородности

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

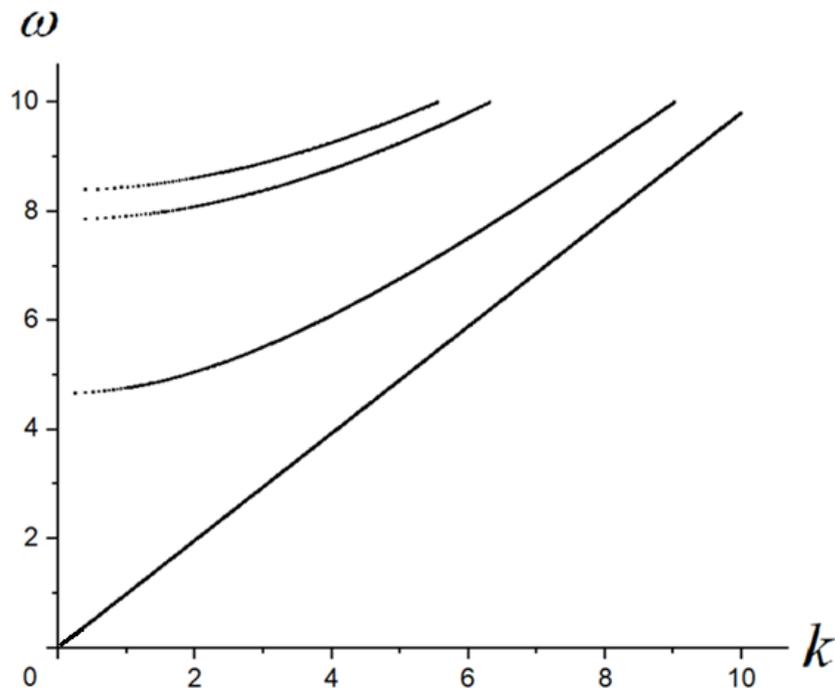


Рисунок 5.10 – Действительные ветви спектра при параметрах неоднородности

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

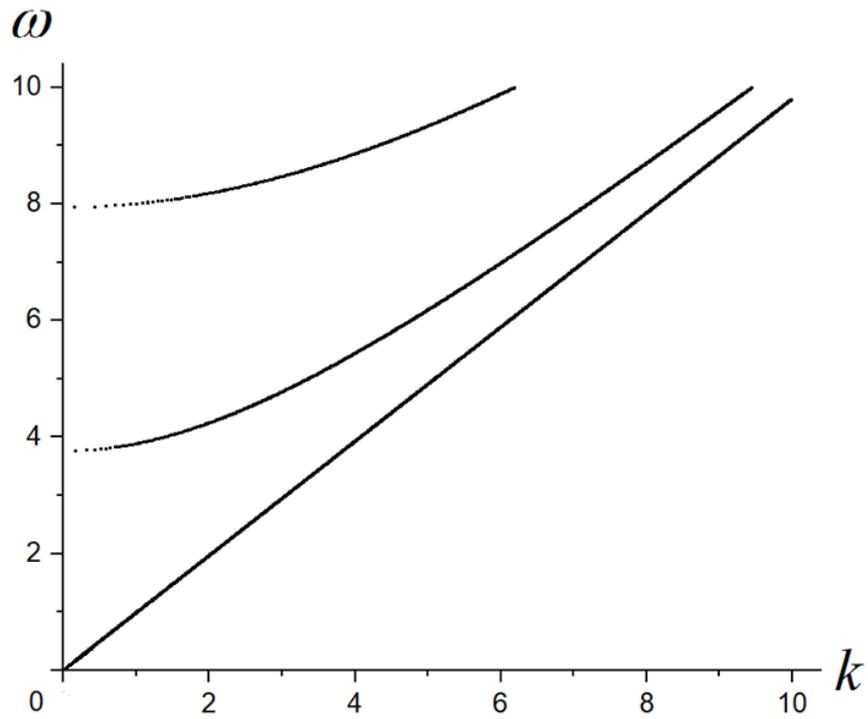


Рисунок 5.11 – Действительные ветви спектра при параметрах неоднородности

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$$

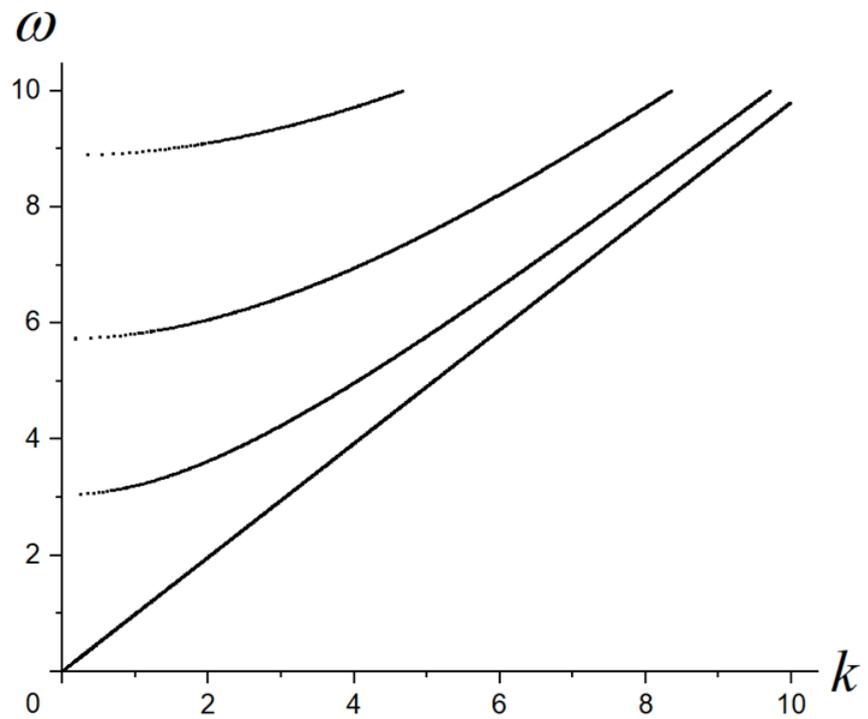


Рисунок 5.12 – Действительные ветви спектра при параметрах неоднородности

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$$

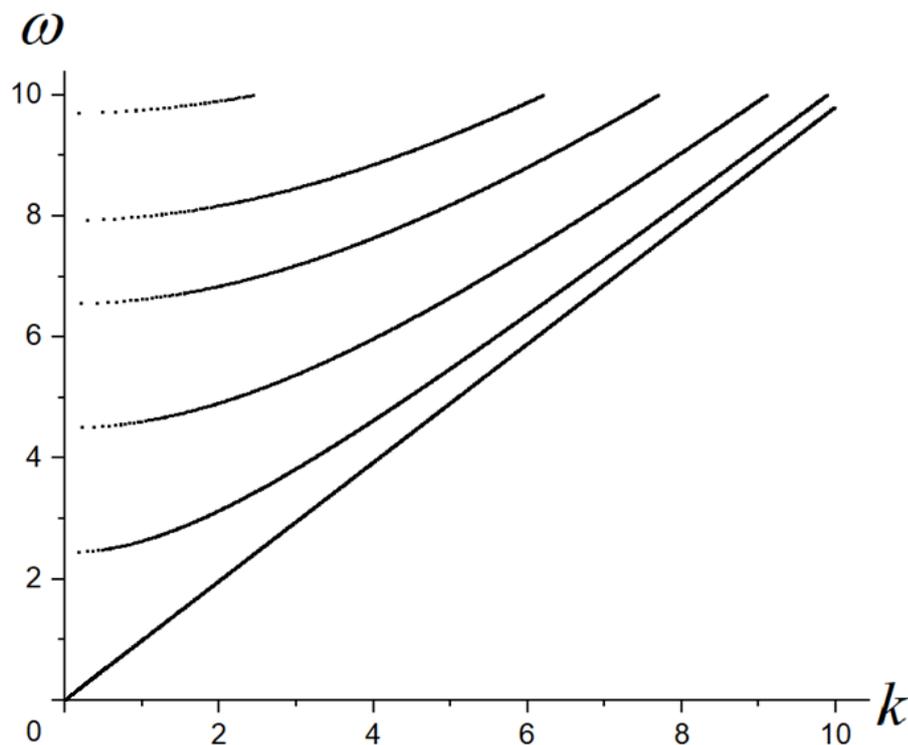


Рисунок 5.13 – Действительные ветви спектра при параметрах неоднородности

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7$$

Наряду с представленными в данном подразделе исследованиями в рамках тематического направления работы осуществлена также разработка методики получения нечетко-множественных оценок для фазовых скоростей нормальных волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с разбросом значений физико-механических параметров [29].

5.2. Волны сдвига в трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое с трехфакторной физико-механической неоднородностью

В данном подразделе работы осуществляется дальнейшее исследование представленной в п. 2.6 модели распространения нормальных волн SH-типа вдоль координатного направления Ox_1 в отнесенном к прямоугольным безразмерным координатам $Ox_1x_2x_3$ с нормирующим параметром h_* [м] трансверсально-изотропном функционально-градиентном слое $V = \{(x_1, x_2) \in R_2, 0 \leq x_3 \leq h\}$ с направлением трехфакторной неоднородности и осью изотропии, коллинеарными Ox_3 , в котором физико-механические характеристики материала имеют вид

(2.128). Для рассматриваемой модели алгоритм интегрирования уравнения (2.130) относительно амплитудной функции $u_{20}(x_3)$ описан в п. 2.6, а полученные на базе его применения базисные частные решения представлены в форме степенных рядов соотношениями (2.136)–(2.138).

Полученные таким образом представления для комплексной амплитудной функции сдвиговых волновых упругих перемещений (2.139) и учет свойств (2.140) позволяют сформулировать дисперсионные соотношения $F(\omega, k) = 0$, описывающие закономерности распространения нормальных SH-волн в волноводах в виде рассматриваемого трансверсально-изотропного функционально-градиентного слоя с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью при задании краевых условий вида (5.2), (5.3), а также дисперсионное соотношение для обобщенных локализованных горизонтально-поляризованных сдвиговых волн Лява в структуре «трансверсально-изотропный функционально-градиентный слой V из материала с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью на однородном изотропном полупространстве $x_3 \in (-\infty, 0)$ с модулем сдвига $\tilde{\mu}$ и плотностью $\tilde{\rho}$ ».

Для нормальных горизонтально-поляризованных сдвиговых волн в рассматриваемом слое V с закрепленными граничными плоскостями

$$F(\omega, k) = a_0^{(1)}\Phi_2(h, \omega, k) - a_0^{(2)}\Phi_1(h, \omega, k) = 0; \quad (5.31)$$

для слоя V со свободными граничными плоскостями

$$F(\omega, k) = a_1^{(1)}\Phi_2'(h, \omega, k) - a_1^{(2)}\Phi_1'(h, \omega, k) = 0; \quad (5.32)$$

для обобщенных локализованных волн Лява в структуре «трансверсально-изотропный функционально-градиентный слой с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью на однородном изотропном полупространстве»

$$F(\omega, k) = (c_{440}a_1^{(1)} + \mathcal{G}a_0^{(1)})\Phi_2'(h, \omega, k) - (c_{440}a_1^{(2)} + \mathcal{G}a_0^{(2)})\Phi_1'(h, \omega, k) = 0, \quad (5.33)$$

$$\mathcal{G} = (\omega^2 \tilde{\rho} / \tilde{\mu} - k^2)^{1/2}.$$

В процессе численной реализации представленной методики отдельно рассмотрен вопрос верификации запрограммированного алгоритма расчета

базисных решений вида (2.136)–(2.138). С этой целью рассматривались частные случаи однофакторной неоднородности $\lambda_{44} = \lambda_{66} = \lambda_\rho = \lambda$, и с использованием базисных частных решений амплитудных уравнений для этого случая в экспоненциальной форме (5.9), (5.10)

$$u_{20}(x_3) = A_1 \exp(\delta_1 x_3) + A_2 \exp(\delta_2 x_3),$$

$$\delta_q = -\lambda/2 + (-1)^{q+1}((\lambda/2)^2 - \chi)^{1/2}, \quad \chi = (\rho_0 \omega^2 - c_{660} k^2) / c_{440},$$

для компонентов которых могут быть записаны выражения

$$\exp(\delta_1 x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_1^m}{m!} x_3^m, \quad \exp(\delta_2 x_3) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_2^m}{m!} x_3^m, \quad (5.34)$$

конструировались соответствующие представления базисных решений в рядах

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ с $a_0 = 0, a_1 = 1$, либо $a_0 = 1, a_1 = 0$, которые, соответственно, имеют вид

$$(\exp(\delta_1 x_3) - \exp(\delta_2 x_3)) / (\delta_1 - \delta_2) = \quad (5.35)$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_1^m}{m!} x_3^m - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_2^m}{m!} x_3^m \right) / (\delta_1 - \delta_2) = 0 \cdot x_3^0 + (\delta_1 - \delta_2) x_3^1 / (1!(\delta_1 - \delta_2)) + \dots,$$

$$(\delta_2 \exp(\delta_1 x_3) - \delta_1 \exp(\delta_2 x_3)) / (\delta_2 - \delta_1) = \quad (5.36)$$

$$= (\delta_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_1^m}{m!} x_3^m - \delta_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\delta_2^m}{m!} x_3^m) / (\delta_2 - \delta_1) = 1 \cdot x_3^0 + (\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2) x_3^1 / (1!(\delta_2 - \delta_1)) + \dots$$

Контрольные расчеты осуществлялись для анализа совпадения в частном случае однофакторной неоднородности результатов вычислений $\Phi_1(x_3, \omega, k)$, $\Phi_2(x_3, \omega, k)$ с данными расчетов по формулам (5.35) и (5.36).

На базе разработанной методики для ряда вариантов варьируемого задания параметров трехфакторной неоднородности физико-механических свойств слоя со свободными от напряжений плоскими гранями реализован расчетный анализ поведения низшей моды дисперсионного спектра, а также рассчитаны фрагменты диаграмм дисперсионных кривых для отдельных случаев выбора существенно увеличенных значений констант неоднородности. Значения физико-механических и геометрических параметров рассматриваемого волновода выбирались в следующем виде. Вводились два варианта задания приведенных физико-

механических параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 : вариант 1 – $c_{440} = 2c_*$, $c_{660} = c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, вариант 2 – $c_{440} = c_*$, $c_{660} = 2c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, где $c_* [Па]$ и $\rho_0 [кг/м^3]$ – соответствующие нормирующие величины. Параметр толщины слоя задавался в виде $h = 0.5h_*$. Для коэффициентов неоднородности λ_{44} , λ_{66} , λ_ρ рассматривались вариации значений λ_{44} , $\lambda_{66} = \{\lambda_*, 2\lambda_*, 4\lambda_*\}$, где $\lambda_* [h_*^{-1}]$ – параметр нормировки.

Результаты расчетов траекторий низшей моды спектра на диаграммах дисперсионных кривых исследуемых нормальных волн в зависимости от задаваемых величин показателей неоднородности λ_{44} , λ_{66} , λ_ρ для варианта 1 задания параметров c_{440} , c_{660} , ρ_0 представлены на рисунках 5.14–5.16, а для варианта 2 – на рисунках 5.17–5.19. На этих рисунках $\tilde{k} = kh_*$ – приведенное нормированное волновое число, $\tilde{\omega} = (\rho_0 \omega^2 h^2 / c_*)$ – приведенный безразмерный частотный параметр. На всех графиках сплошные линии отвечают минимальным значениям варьируемого параметра, точечные – средним по величине значениям и мелкий штрих – максимальным значениям.

Рисунки 5.14 и 5.17 описывают поведение низшей моды спектра при задании параметров неоднородности λ_{44} , λ_{66} , λ_ρ в виде $\lambda_{44} = h_*$, $\lambda_{66} = \{h_*, 2h_*, 4h_*\}$, $\lambda_\rho = 0.5\rho_*$; рисунки 5.15 и 5.18 отвечает варианту задания параметров $\lambda_{44} = h_*$, $\lambda_{66} = 2h_*$, $\lambda_\rho = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\}$; рисунки 5.16 и 5.19 – варианту задания параметров $\lambda_{44} = 2h_*$, $\lambda_{66} = h_*$, $\lambda_\rho = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\}$.

В качестве эффектов варьирования параметров неоднородности можно указать на увеличение фазовых скоростей бегущих нормальных волн низшей моды при росте значений параметра неоднородности λ_{66} и уменьшение фазовых скоростей этих волн при росте значений параметра неоднородности λ_ρ для обоих вариантов задания характеристик c_{440} , c_{660} , ρ_0 .

Наконец, на рисунках 5.20 и 5.21 соответственно представлены фрагменты диаграмм дисперсионных спектров исследуемых волн для вариантов задания параметров

$$c_{440} = 2c_*, c_{660} = 0.96c_*, \rho_0 = \rho_*$$

$$\lambda_{44} = 0.001h_*, \lambda_{66} = 5h_*, \lambda_\rho = 5\rho_*$$

И

$$c_{440} = 2c_*, c_{660} = 0.96c_*, \rho_0 = \rho_*$$

$$\lambda_{44} = 0.001h_*, \lambda_{66} = 0.001h_*, \lambda_\rho = 5\rho_*$$

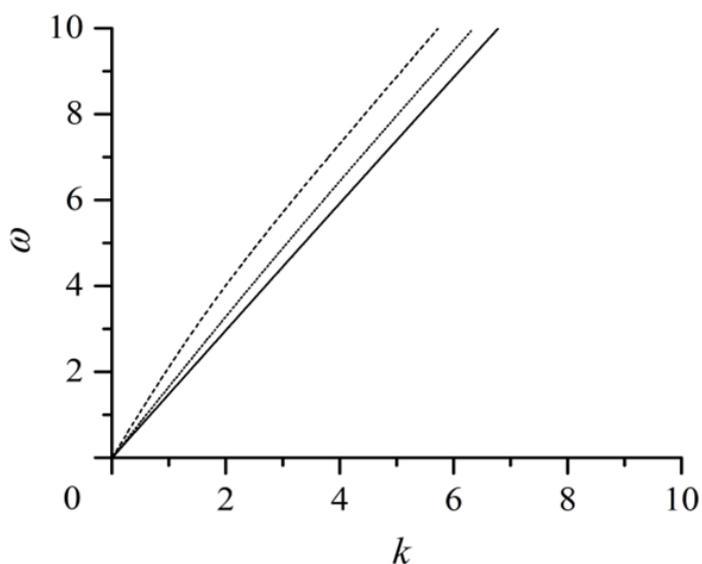


Рисунок 5.14 – Траектория низшей моды для материала с первым вариантом модельных параметров в зависимости от величин показателей неоднородности

$$\lambda_{44} = h_*, \lambda_{66} = \{h_*, 2h_*, 4h_*\}, \lambda_\rho = 0.5\rho_*;$$

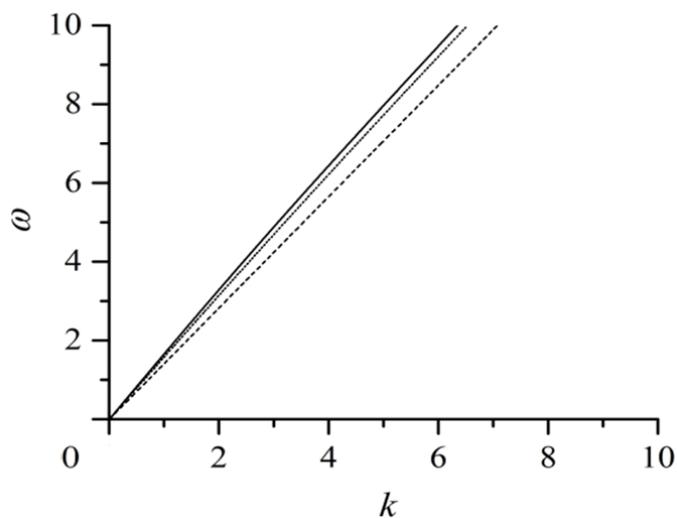


Рисунок 5.15 – Траектория низшей моды для материала с первым вариантом модельных параметров в зависимости от величин показателей неоднородности

$$\lambda_{44} = h_*, \lambda_{66} = 2h_*, \lambda_\rho = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\};$$

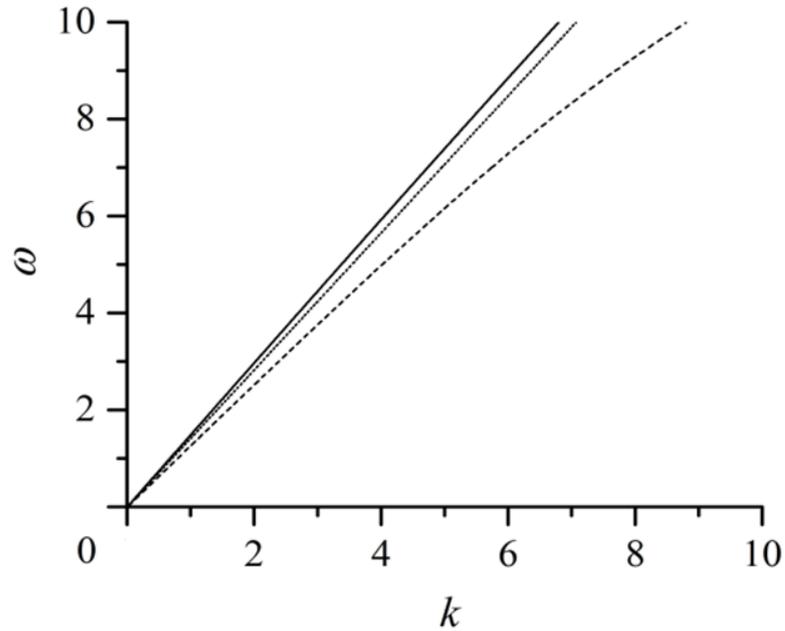


Рисунок 5.16 –Траектория низшей моды для материала с первым вариантом модельных параметров в зависимости от величин показателей неоднородности

$$\lambda_{44} = 2h_*, \lambda_{66} = h_*, \lambda_\rho = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\}.$$

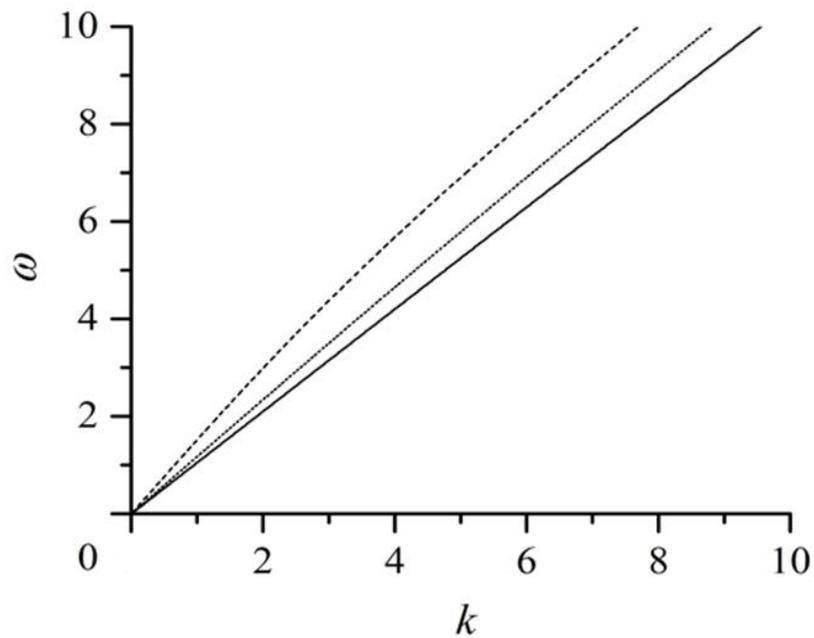


Рисунок 5.17 – Траектория низшей моды для материала со вторым вариантом модельных параметров в зависимости от величин показателей неоднородности

$$\lambda_{44} = h_*, \lambda_{66} = \{h_*, 2h_*, 4h_*\}, \lambda_\rho = 0.5\rho_*;$$

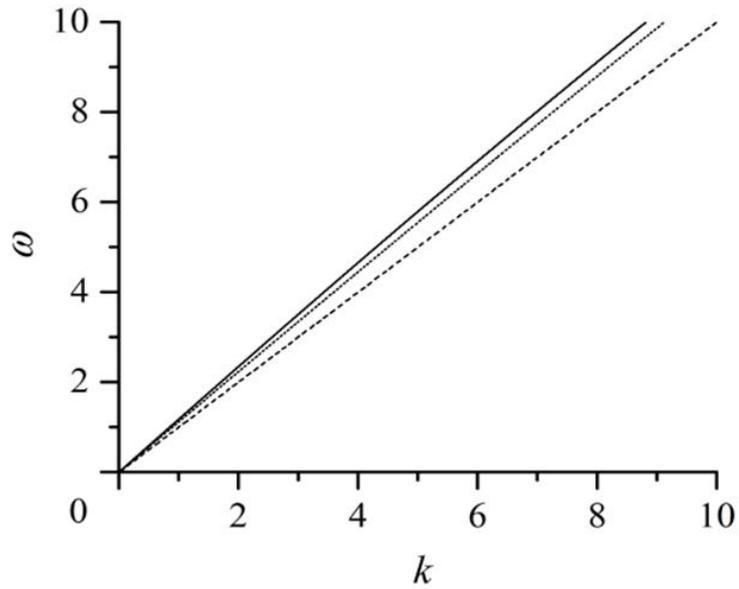


Рисунок 5.18 – Траектория низшей моды для материала со вторым вариантом модельных параметров в зависимости от величин показателей неоднородности

$$\lambda_{44} = h_*, \lambda_{66} = 2h_*, \lambda_p = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\};$$

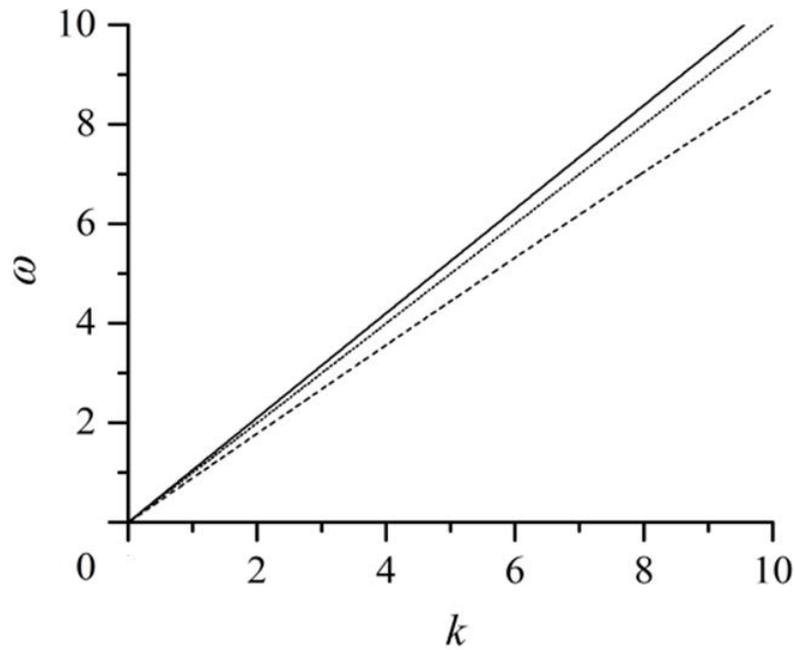


Рисунок 5.19–Траектория низшей моды для материала со вторым вариантом модельных параметров в зависимости от величин показателей неоднородности

$$\lambda_{44} = 2h_*, \lambda_{66} = h_*, \lambda_p = \{0.5\rho_*, \rho_*, 2\rho_*\}.$$

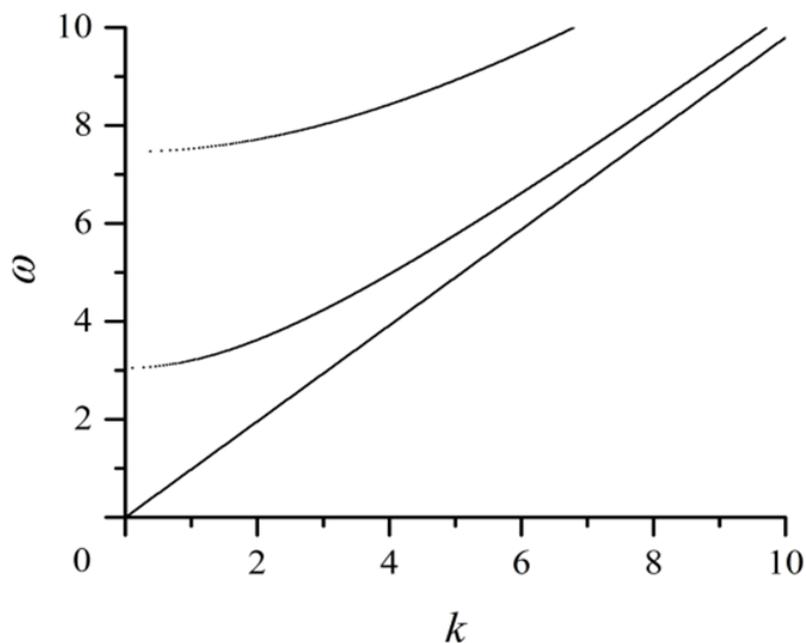


Рисунок 5.20 – Фрагмент диаграммы дисперсионного спектра для вариантов задания параметров $c_{440} = 2c_*$, $c_{660} = 0.96c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, $\lambda_{44} = 0.001h_*$, $\lambda_{66} = 5h_*$, $\lambda_\rho = 5\rho_*$

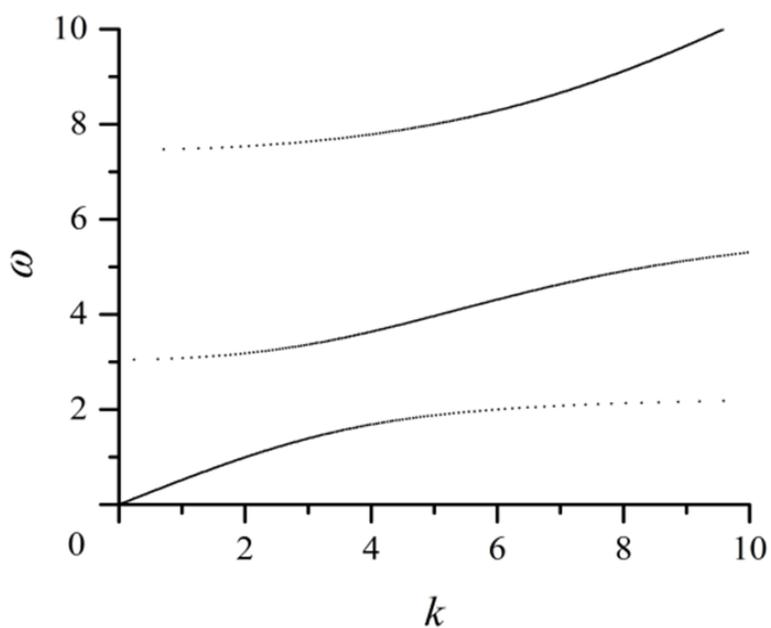


Рисунок 5.21 – Фрагмент диаграммы дисперсионного спектра для вариантов задания параметров $c_{440} = 2c_*$, $c_{660} = 0.96c_*$, $\rho_0 = \rho_*$, $\lambda_{44} = 0.001h_*$, $\lambda_{66} = 0.001h_*$, $\lambda_\rho = 5\rho_*$.

5.3. Выводы по разделу 5

1. В итоге представленных в данном разделе диссертационной работы исследований решены задачи получения дисперсионных соотношений, являющихся основой для последующего анализа спектральных, кинематических, силовых и энергетических характеристик в моделях распространения нормальных горизонтально поляризованных сдвиговых упругих волн вдоль произвольно ориентированного направления в плоскости слоя из характеризуемого для данного случая тремя физико-механическими параметрами функционально-градиентного трансверсально-изотропного материала с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью, описываемой тремя возможными сочетаниями двух различных экспоненциальных зависимостей для пары параметров упругости и параметра плотности, для пары из параметра плотности и одного из параметров упругих свойств и второго параметра упругости.

2. Разработана методика получения дисперсионных уравнений для сдвиговых нормальных волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью при различных экспоненциальных законах изменения каждой из физико-механических характеристик материала по толщине в случаях задания граничных условий закрепленных плоских граней, свободных плоских граней и альтернативных условий закрепления одной и отсутствия напряжений на второй грани слоя.

3. В рамках вычислительных экспериментов на основе описанной методики в частном случае проанализирована мера роста значений нормированных частот запертия для бегущих нормальных волн в исследуемом спектре для слоя с закрепленными гранями с ростом значения параметра однофакторной неоднородности λ_c , а также получена оценка степени различия в траекториях соответствующих дисперсионных кривых, указывающей на увеличение фазовых скоростей бегущих волн из соответствующих ветвей спектра с ростом параметра неоднородности.

4. Осуществлены расчеты фрагментов диаграмм дисперсионных кривых для слоя с закрепленными границами из функционально-градиентного материала двухфакторной экспоненциальной неоднородностью, характеризуемой различающимися значениями параметров λ_c и λ_p , указывающие на снижение частот запирания и соответственно уменьшение значений фазовых скоростей для волн однопорядковых мод в случае фиксации значения λ_c и наращивания величины λ_p , а также на интенсивный рост значений указанных характеристик в случае фиксации значения λ_p наращивания величины λ_c .

5. На базе численных исследований проведен анализ эффектов наращивания значений параметра двухфакторной неоднородности λ_1 для характеристики c_{66} при фиксации величины параметра неоднородности λ_2 для характеристик c_{44} и ρ на траекторию низшей моды бегущих нормальных волн сдвига из дисперсионного спектра для свободного по граням слоя и установлено, что в этом случае траектории низшей моды становятся все более пологими со снижением фазовых скоростей соответствующих нормальных волн.

6. В результате расчетов фрагментов действительных ветвей дисперсионных спектров для функционально-градиентного слоя со свободными гранями показано, что при фиксации параметра двухфакторной неоднородности λ_1 для характеристики c_{44} при наращивании величины параметра неоднородности λ_2 характеристик c_{66} и ρ наблюдается эффект снижения значений частот запирания однопорядковых мод.

7. Реализован расчетный анализ траекторий низшей моды спектра на диаграммах дисперсионных кривых исследуемых нормальных волн сдвига в слое со свободными от напряжений плоскими гранями для ряда вариантов варьируемого задания параметров трехфакторной неоднородности физико-механических свойств функционально-градиентного слоя.

8. Результаты изложенных в разделе исследований представлены в публикациях [29, 30, 38, 39, 40, 42, 44, 89].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В итоге изложенных в диссертационной работе исследований соответственно ее целям осуществлена разработка и апробация комплекса специализированных аналитико-числовых методов теоретического исследования спектров и свойств локализованных и нормальных упругих волн в полубесконечных анизотропных функционально-градиентных телах с описываемой двойными экспоненциальными функциями локализованной приповерхностной неоднородностью и функционально-градиентном слое с многофакторной неоднородностью экспоненциального типа, а также дана компьютерная реализация разработанных методов и проведены численные параметрические исследования анализируемых волновых полей с выявлением ведущих закономерностей в их структуре и свойствах.

При реализации заданий работы:

1. Разработана и апробирована новая аналитическая математическая модель описания локализованных зон выраженной высокоградиентной приповерхностной однофакторной неоднородности физико-механических свойств функционально-градиентных материалов и асимптотического сглаживания их характеристик при отходе от границ вглубь рассматриваемых тел с использованием двойных экспоненциальных функций.

2. На основе специальных вариантов итерационной аналитической методики получены базисные частные решения амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и систем уравнений указанного типа в скалярных и векторных экспоненциальных рядах применительно к модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями приграничной локализованной зоной неоднородности; применительно к модели распространения упругих волн P-SV типа в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном массиве с описываемой двойными

экспоненциальными функциями приграничной локализованной зоной неоднородности, применительно к модели распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полубесконечном массиве с описываемой двойными экспоненциальными функциями приграничной локализованной зоной неоднородности.

3. На основе специальных вариантов итерационной аналитической методики получены базисные частные решения амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение сдвиговых нормальных упругих волн в функционально-градиентном слое в рамках моделей двухфакторной экспоненциальной неоднородности трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды.

4. Разработана аналитическая методика интегрирования амплитудных волновых обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих распространение сдвиговых упругих волн в рамках моделей общей трехфакторной экспоненциальной неоднородности трансверсально-изотропной функционально-градиентной среды.

5. Осуществлен теоретический и численный анализ моделей распространения обобщенных поверхностных волн Лява в составных структурах «однородный изотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве», «функционально-градиентный анизотропный слой на однородном анизотропном полупространстве», «функционально-градиентный экспоненциально-неоднородный анизотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве с приграничной неоднородностью» с использованием для описания локализованных зон неоднородности материалов полупространств двойных экспоненциальных функций.

6. Осуществлен теоретический и численный анализ модели распространения поверхностных волн рэлеевского типа в функционально-градиентном трансверсально-изотропном полупространстве с приграничной

локализованной зоной неоднородности, описываемой двойными экспоненциальными функциями.

7. Осуществлен теоретический и численный анализ моделей распространения локализованных сдвиговых волн в однородном анизотропном слое между однотипными функционально-градиентными полупространствами, а также локализованных сдвиговых и продольно-сдвиговых волн в слое с симметричным законом поперечной неоднородности между однотипными функционально-градиентными трансверсально-изотропными полупространствами с использованием для описания зон приповерхностной неоднородности материалов полупространств двойных экспоненциальных функций.

8. Реализовано получение и исследование отдельных вариантов дисперсионных соотношений для нормальных сдвиговых волн в трансверсально-изотропном упругом слое с альтернативными вариантами двухфакторной экспоненциальной физико-механической неоднородности.

9. Осуществлен теоретический и численный анализ модели распространения нормальных сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропном слое с трехфакторной физико-механической неоднородностью.

10. Установлены, систематизированы и обобщены некоторые новые фундаментальные физико-механические закономерности влияния факторов анизотропии и неоднородности отдельных классов упругих функционально-градиентных материалов волноводов для обобщенных поверхностных волн Лява и Рэлея, и нормальных волн в анизотропном функционально-градиентном слое на дисперсионные, кинематические, силовые и энергетические характеристики волн исследуемого типа. Указаны сферы дальнейшего обобщения разработанных в диссертации подходов.

11. Разработанные численно-аналитических методы, алгоритмы их компьютерной реализации, установленные и обобщенные свойства и закономерности анализируемых волновых процессов могут быть непосредственно использованы в предпроектном моделировании и конструкторских расчетах в области технологий шахтной пластовой сейсморазведки и других видов

геоакустических исследований, в области неразрушающего ультразвукового контроля, в области разработки усовершенствованных акустоэлектронных компонентов на поверхностных акустических волнах, в практике прочностных расчетов деталей машин и элементов строительных конструкций из анизотропных функционально-градиентных нанокompозитных материалов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Амензаде, Ю.А. Теория Упругости / Ю. А. Амензаде – Москва : Издательство “Высшая школа”, 1976. – 272 с.
2. Аннин, Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов / Б. Д. Аннин // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 5–14.
3. Бардзокас, Д.И. Распространение волн в электромагнитоупругих средах / Д.И. Бардзокас, Б.А. Кудрявцев, Н.А. Сеник – М. : URSS, 2003. – 336 с.
4. Белубекян, М.В. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде / М.В. Белубекян, Д.Э. Мгерян // Известия Национальной академии наук Армении. – 2006. – Т. 59, №2. – С. 3–9.
5. Белянкова, Т.И. Особенности распространения поверхностных акустических волн в пьезоэлектриках с неоднородным покрытием / Т.И. Белянкова, В.В. Калинин // Наука юга России. – 2016. – Т 12, № 4. – С. 10–17.
6. Бирюков, С.В. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский. – М. : Наука, 1991. – 414с.
7. Бреховских, Л.М. Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин – М. : Наука, 1989. – 416 с.
8. Болнокин, В.Е. Качественный анализ структуры дисперсионных спектров волн деформаций для двухслойных анизотропных пластов в толще геомассива / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы III Международной научной конференции (Донецк, 25 октября 2018 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 278–280.
9. Болнокин, В.Е. Интегрирование уравнения распространения волн сдвига в функционально градиентном полупространстве с приграничной

локализацией зоны неоднородности физико-механических свойств / В.Е. Болнокин, А. А. Глухов, В. И. Сторожев // Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VII Международной научной конференции, посвящённой 85-летию Донецкого национального университета (Донецк, 27–28 октября 2022 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные науки, управление. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2022. – С. 38–40.

10. Болнокин, В.Е. Анализ модели распространения сдвиговых упругих волн в полубесконечном трансверсально-изотропном функционально-градиентном геомассиве / В.Е. Болнокин, А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022. – №3 (80). – С. 14–19. – doi:10.24412/0136-4545-2022-3-14-19. – EDN:BOBAVC

11. Бугаев, А.С. Устройства на поверхностных акустических волнах / А.С. Бугаев, В.Ф. Дмитриев, С.В. Кулаков – Санкт-Петербург: ГУАП, 2009. – 187 с.

12. Бужан, В.В. Распространение упругих волн в окрестности тонкого анизотропного слоя / В. В. Бужан, А.С. Саморукова // Вестник ИМСИТ. – 2012. – № 3–4. – С. 47–53.

13. Булычев Г.Г., Пшеничных С.Г. Осесимметричная задача динамики длинного упругого неоднородного цилиндра. Строительная механика и расчет сооружений. – 1989. – №4. – С. 35–37.

14. Ватульян, А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.

15. Ватульян А.О. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел / А. О. Ватульян, А. Н. Соловьев. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2008. – 176 с.

16. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики – М.: Физматлит, 2019. – 272 с.

17. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи термомеханики / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров. – Ростов-на-Дону, Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, 2019. – 145 с.

18. Ватульян, А.О. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел / А.О. Ватульян, В.В. Дударев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 259–264
19. Ватульян, А.О. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами / А.О. Ватульян, А.В. Моргунова // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61, № 3. – С. 295–301.
20. Ватульян, А.О. О дисперсионных соотношениях для неоднородного волновода при наличии затухания / А.О. Ватульян, В.О. Юров // Известия РАН. МТТ. – 2016. – № 5. – С. 85–93.
21. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике / И.А. Викторов – Москва: Наука, 1966. – 168 с.
22. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 287 с.
23. Вильде, М.В. Краевые и резонансные явления в упругих телах / М.В. Вильде, Ю.Д. Каплунов, Л.Ю. Коссович. – М.: Физматлит, 2010. – 210 с.
24. Вовк, Л.П. Динамические задачи для тел сложной структуры. / Л.П. Вовк – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. строит. ун-т, 2003. – 169 с.
25. Вовк, Л.П. Анализ спектра резонансных частот неоднородной упругой призматической детали с учетом ее толщины / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Вести автомобильно-дорожного института. – 2020. – № 3(34). – С. 20–26.
26. Вовк, Л.П. Анализ характеристик волнового поля в задачах исследования неоднородных тел / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Труды Института прикладной математики и механики. – 2021. – Т. 34. – С. 17–28.
27. Вовк, Л.П. Пространственный анализ резонансных волновых характеристик кусочно-неоднородных деталей / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Вести автомобильно-дорожного института. – 2024. – № 1(48). – С. 30–39.
28. Волков, А.С. Об использовании сдвиговых ультразвуковых волн с горизонтальной поляризацией при дефектоскопии изделия / Волков А.С., Гребенников В. С // Дефектоскопия. – 1988. – № 5. – С. 94–95.

29. Глухов, А.А. Нечетко-множественные оценки для фазовых скоростей нормальных волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с разбросом значений физико-механических параметров / А.А. Глухов, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2019. – № 3–4. – С. 31–36.

30. Глухов, А.А. Особенности топологического строения дисперсионных спектров сдвиговых нормальных волн в трансверсально-изотропном функционально-градиентном упругом слое / А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IV Международной научной конференции (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1 / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 53–55.

31. Глухов, А.А. Локализованные сдвиговые волны в трехслойном поперечно-анизотропном пласте симметричного строения в толще неоднородного геомассива / А.А. Глухов, М.Н. Пачева, В.И. Сторожев // Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы V Международной научной конференции (Донецк, 17-18 ноября 2020 г.). – Том 1: Физико-математические и технические науки. Часть 1 / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 49–51.

32. Глухов, А.А. Интегрирование системы уравнений распространения произвольно ориентированных трехпарциальных поверхностных волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – № 4 (81). – С. 15–22. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-15-22. – EDN JBHEKR.

33. Глухов, А.А. Влияние двойной экспоненциальной неоднородности на энергетические эффекты распространения волны Лява в однородном изотропном слое на функционально-градиентном трансверсально-изотропном полупространстве / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, М.В. Фоменко // Донецкие

чтения 2023: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VIII Международной научной конференции (Донецк, 25–27 октября 2023 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2023. – С. 40–42.

34. Глухов, А.А. Волны Лява в структуре «однородный изотропный слой на трансверсально-изотропном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью» / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1 (82). – С. 32–39. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-1-32-39. – EDN: ENGOVX.

35. Глухов, А.А. Анализ модели распространения поверхностных релеевских волн в функционально-градиентном ортотропном полупространстве с приграничной локализованной зоной неоднородности / А.А. Глухов, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 2 (83). – С. 26–38. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-2-26-38. – EDN: ETYFCH.

36. Глухов, А.А. Локализованные волны сдвига в поперечно-неоднородном анизотропном слое между неоднородными полупространствами / А.А. Глухов, И.А. Моисеенко, В.И. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3 (84). – С. 93–101. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-3-93-101. – EDN: UUNEXN.

37. Глухов, А.А. Волны продольно-сдвигового типа в анизотропном слое между неоднородными полупространствами / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 4 (85). – С. 61–81. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-4-61-71. – EDN: RHKXPW.

38. Глухов, А.А. Методика анализа проблемы распространения волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с различными законами экспоненциальной неоднородности для каждой физико-механической характеристики / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 1 (86). – С. 51–60. – DOI:10.24412/0136-4545-2024-1-51-60. – EDN: PSXXPV.

39. Глухов, А.А. Дисперсионные соотношения для сдвиговых волн в анизотропном функционально-градиентном слое с двухфакторной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам / А.А. Глухов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2024. – № 4. – С. 3–8. – DOI: 10.5281/zenodo.14138063. – EDN: VREMUM.

40. Глухов, А.А. Анализ модели распространения нормальных P-SV волн в функционально-градиентном ортотропном слое для специального случая двухфакторной экспоненциальной неоднородности / А.А. Глухов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – 2(87). – С. 34–40. – DOI:10.24412/0136-4545-2024-2-34-40. – EDN: VIAPOE.

41. Глухов, А.А. Дисперсионное соотношение для поверхностных волн Лява в составной структуре «функционально-градиентный экспоненциально-неоднородный анизотропный слой на функционально-градиентном анизотропном полупространстве с приграничной неоднородностью» / А.А. Глухов // Труды РАНИМИ. – Донецк, 2024. – № 3 (41). – Том 2. – С.214–221. – DOI: 10.24412/2519-2418-2024-341-214-221.

42. Глухов, А.А. Дисперсионные соотношения для нормальных SH волн в трансверсально-изотропном слое с разнотипной экспоненциальной поперечной неоднородностью по механическим характеристикам / А.А. Глухов, М.Н. Пачева // Материалы докладов Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50-летию ИВМ СО РАН. – Электронные данные. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2024. – С. 38–40. – Режим доступа: <https://mdm2024.tilda.ws/#rec796105776>.

43. Глухов, А.А. Численно-аналитическое исследование модели распространения сдвиговых упругих волн в трансверсально-изотропной среде с трехфакторной экспоненциальной неоднородностью / А.А. Глухов, С.В. Сторожев // Сборник материалов международной конференции «XXXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам» – Симферополь: ИТ «АРЕАЛ», 2024. – С. 79–80.

44. Глухов, А.А. Анализ модели распространения продольно-сдвиговых нормальных волн в функционально-градиентном ортотропном слое с двухфакторной экспоненциальной неоднородностью / А.А. Глухов, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции (Донецк, 15–17 октября 2024 г.). – Том 1: Механико-математические, компьютерные и химические науки, управление / под общей редакцией проф. С.В. Беспаловой. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. – С. 26–29.

45. Глухов, И.А. Локализованные волны в анизотропном упругом слое между разнотипными анизотропными полупространствами / И.А. Глухов, В.И. Сторожев // Современные проблемы механики сплошной среды: Тезисы докладов XVII Международной конференции (Ростов-на-Дону, 14–17 октября 2014 г.) – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2014. – С. 36.

46. Глухов, И.А. Симметричные трехпарциальные локализованные волны в ортотропном слое между ортотропными полупространствами / И. А. Глухов // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – С. 112.

47. Гольдштейн, Р.В. Волны Лэмба в анизотропных средах: шестимерный формализм Коши / Р.В. Гольдштейн, А.В. Ильяшенко, С.В. Кузнецов // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29. – № 10. – С. 86–94.

48. Горшков, А.Г. Волны в сплошных средах / А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский. – М.: Физматлит. – 2004. – 472 с.

49. Григорян, В.Г. Локализованные акустические волны в слоистых структурах. / В.Г. Григорян, Л. Вендлер // Физика твердого тела. – 1991. – Т. 33, 7. – С. 2120–2128.

50. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.

51. Дейвис, Р.М. Волны напряжений в твердых телах / Р.М. Дейвис – Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. – 104 с.
52. Дьелесан, Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука, 1982. – 424 с.
53. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В.И. Ерофеев. – М.: МГУ, 1999. – 327 с.
54. Жаворонок, С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 1 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27, № 2. – С. 227–260. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06.
55. Жаворонок, С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 2 / С.И. Жаворонок // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 36–86. – DOI: 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.036_086.03.
56. Исраилов, М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн / М.Ш. Исраилов. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 204 с.
57. Кайбичев, И.А. Поперечные волны в неоднородном слое между двумя средами. / И.А. Кайбичев, В.Г. Шавров. // Акустический журнал. – 1999. – Т. 45, № 1. – С. 81–85.
58. Капитонов, А.М. Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы / А.М. Капитонов, В.Г. Васильев. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2011. – 424 с.
59. Капитонов, А.М. Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства / А.М. Капитонов, В.Е. Редькин. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2013. – 532 с.
60. Карасев, Д.С. Интегрирование уравнений распространения связанных электроупругих сдвиговых волн в полупространстве функционально-градиентной пьезокерамики / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2022 – № 4 (81). – С. 47–52. – DOI: 10.24412/0136-4545-2022-4-47-52. – EDN RARMHU.

61. Карасев, Д.С. Интегрирование уравнений распространения локализованных сдвиговых электроупругих волн в функционально-градиентной пьезокерамике с двойной экспоненциальной неоднородностью / Д.С. Карасев, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – №2 (83). – С. 48–55. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-2-48-55. – EDN SPYOBС.
62. Кольский, Г. Волны напряжений в твердых телах / Г. Кольский. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 192 с.
63. Космодамианский, А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985. – 176 с.
64. Кузнецов, С.В. Волны Лэмба в анизотропных пластинах / С.В. Кузнецов // Акустический журнал. – 2014. – Т. 60. – № 1. – С. 90–100.
65. Кузнецов, С.В. Волны Лэмба в защемленном и частично защемленном упругом слое / С.В. Кузнецов // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – № 1. – С. 96–113.
66. Купрадзе, В.Д. Динамические задачи теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.В. Бурчуладзе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики / ВИНТИ. – 1975. – Т. 7. – С. 163–294.
67. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
68. Мелешко, В.В. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.
69. Молодецкий, А.В. Влияние глубины залегания угольных пластов на механические свойства угля / А.В. Молодецкий, В.Н. Ревва // Физико-технические проблемы горного производства. – 2009. – № 12. – С. 55 – 58.
70. Моисеенко, И.А. Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах / И.А. Моисеенко,

С.А. Прийменко, В.А. Шалдырван // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – №1 (58). – С. 27–41.

71. Моисеенко, И.А. Распространение нормальных волн вдоль трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндров / И.А. Моисеенко // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2018. – № 1. – С. 37–54.

72. Моисеенко, И.А. Нормальные волны в функционально градиентных сплошных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журн. теоретической и прикладной механики. – 2018. – № 1–2 (62–63). – С. 16–34.

73. Моисеенко, И.А. Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко // Журн. теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 31–53.

74. Моисеенко, И.А. Распространение нормальных волн в функционально-градиентных трансверсально-изотропных двухслойных цилиндрах / И.А. Моисеенко, В.А. Моисеенко, Р.В. Бобакова // Вестник Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2019. – № 3–4. – С. 80–87.

75. Моисеенко, И.А. Трехмерный частотный анализ кусочно-неоднородной призмы / И.А. Моисеенко, Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023 – № 4 (85). – С. 5–13. – DOI: 10.24412/0136-4545-2023-4-5-13. – EDN ZNIAZB.

76. Назаров, Ю.П. Расчетные модели сейсмических воздействий / Ю.П. Назаров. – М.: Наука, 2012. – 414 с.

77. Неразрушающий контроль и диагностика. Справочник / под ред. В.В. Клюева. – М.: Машиностроение, 2005. – 656 с.

78. Островский, Л.А. Введение в теорию модулированных волн / Л.А. Островский, А.И. Потапов. – М.: Физматлит, 2003. – 400 с.

79. Позняк, Е.В. Моделирование пространственно-временного поля волн Лява по акселерограмме / Е.В. Позняк // Строительство и реконструкция. – 2017. – № 6 (74). – С. 32–42.

80. Пшеничнов, С.Г. Динамические задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел / С.Г. Пшеничнов // Известия РАН. МТТ. – 2016. – № 1. – С. 79–89.
81. Пшеничнов, С.Г. Нестационарные волновые процессы в цилиндре из функционально-градиентного вязкоупругого материала / С.Г. Пшеничнов // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2024. – № 2. – С. 37–44. – DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-2-5.
82. Речицкий, В.И. Радиокomпоненты на поверхностных акустических волнах / В.И. Речицкий. – М.: Сов. радио, 1984. – 112 с.
83. Справочное пособие для обработки материалов инженерно-геологических изысканий. – М: ДАР\ВОДГЕО, 2005. – 94 с.
84. Ставрогин, А.Н. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – Москва: Недра, 1986. – 312 с.
85. Сторожев, В.И. Локализованные Р-SV волны в трансверсально-изотропном слое между трансверсально-изотропными полупространствами при условиях скользящего контакта / В.И. Сторожев, И.А. Глухов // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 71–81.
86. Сторожев, В.И. Локализованные антисимметричные волны в структуре «трансверсально-изотропный слой между трансверсально-изотропными полупространствами» / В.И. Сторожев, И.А. Глухов // Механика твердого тела. – 2014. – № 44. – С. 122–131.
87. Сторожев, В.И. Локализованные волны в полубесконечных ортотропных функционально-градиентных телах с приграничными зонами неоднородности описываемой двойными экспоненциальными функциями / В.И. Сторожев, А.А. Глухов, М.Н. Пачева // Тезисы докладов XVII Всероссийской школы, Ростов-на-Дону, 2023. – С. 105.
88. Сторожев, В.И. Локализованные продольно-сдвиговые волны в функционально-градиентном полупространстве с двойной экспоненциальной неоднородностью / В.И. Сторожев, А.А. Глухов // Современные проблемы

механики сплошной среды: тезисы докладов XXI Международной конференции (Ростов-на-Дону, 11-13 октября 2023 г.). – Ростов-на-Дону; Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2023. – С. 110.

89. Сторожев, В.И. Дисперсия нормальных сдвиговых волн в функционально-градиентном трансверсально-изотропном слое / В.И. Сторожев, А.А. Глухов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А. Естественные науки. – 2024. – № 1. – С. 58–64. – DOI: 10.5281/zenodo.12531960. – EDN: GCZGRS.

90. Труэлл, Р. Ультразвуковые методы в физике твердого тела / Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик. – М.: Мир, 1972. – 307 с.

91. Турчанинов, И.А. Основы механики горных пород / И.А. Турчанинов, М.А. Иосиф, Э.В. Каспарьян. – Л.: Недра, 1989. – 488 с.

92. Усаченко, Б.М. Свойства пород и устойчивость горных выработок / Б. М. Усаченко. – Киев: Наук. думка, 1979. – 136 с.

93. Хлыбов, А.А. Изучение влияния микроскопической неоднородности среды на распространение поверхностных волн / А.А. Хлыбов // Российский журнал неразрушающего контроля. – 2018. – № 54. – С. 385–393.

94. Шермергор, Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред / Т.Д. Шермергор. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

95. Шульга, Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н.А. Шульга. – Киев: Наукова думка, 1981. – 200 с.

96. Шутилов, В.А. Основы физики ультразвука / В.А. Шутилов. – Л.: Изд.-во Ленинградского университета, 1980. – 280с.

97. Ямщиков, В.С. Особенности характеристик каналовых волн Лява в многослойном массиве / В.С. Ямщиков, В.Н. Данилов, А.З. Вартанов // Известия ВУЗов. Сер. Горный журнал. – 1987. – № 2. – С. 4–6.

98. Ahmed, S.M. Propagation of Love waves in an orthotropic Granular layer under initial stress overlying a semi-infinite Granular medium / S.M. Ahmed, S.M. Abd-Dahab // Journal of Vibration and Control. – 2010. – V. 16 (12). – P. 1845–1858.

99. Abd-Alla, A.M. Rotational effect on Rayleigh, Love and Stoneley waves in fibre-reinforced anisotropic general viscoelastic media of higher and fraction orders with voids / A.M. Abd-Alla, A. Khan, S.M. Abo-Dahab // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2015. – V. 29. – P. 4289–4297.
100. Abo-Zena, R. Dispersion function computations for unlimited frequency values / R. Abo-Zena // *Geophys. J. of the Royal Astronom. Society*. – 1979. – Vol. 58. – P. 91–105.
101. Alam, P. Dispersion and Attenuation of Torsional Wave in a Viscoelastic Layer Bonded Between a Layer and a Half-Space of Dry Sandy Media / P. Alam, S. Kundu, S. Gupta // *Appl. Math. Mech.* – 2017. – V. 38, No 9. – P.1313–1328.
102. Alam, P. Dispersion and Attenuation of Love-Type Waves Due to a Point Source in Magneto-Viscoelastic Layer / P. Alam, S. Kundu, S. Gupta // *Journal of Mechanics*. – 2018. – V. 34, No 6. – P. 801–816.
103. Alam, P. Love-type wave propagation in a hydrostatic stressed magneto-elastic transversely isotropic strip over an inhomogeneous substrate caused by a disturbance point source / P. Alam, S. Kundu, S. Gupta // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. – 2018. – V. 29, No 11. – P. 2508–2521.
104. Alam, P. Effect of magneto-elasticity, hydrostatic stress and gravity on Rayleigh waves in a hydrostatic stressed magneto-elastic crystalline medium over a gravitating half-space with sliding contact / P. Alam, S. Kundu, S. Gupta // *Mechanics Research Communications* – 2018. – V. 89. – P. 11–17.
105. Alam, P. Dispersion Study of SH-Wave Propagation in an Irregular Magneto-Elastic Anisotropic Crustal Layer over an Irregular Heterogeneous Half-Space / P. Alam, S. Kundu, S. Gupta // *J.K.S. Uni.-Sci.* – 2018. – V. 30, No 3. – P. 301–310.
106. Alam, P. Dispersion and attenuation characteristics of Love-type waves in a fiber-reinforced composite over a viscoelastic substrate / P. Alam, S. Kundu, I. Badruddin, T. Khan // *Physics of Wave Phenomena*. – 2019. – V. 27. – P. 281–289.
107. Attia M.A., Shanab R.A. Vibration characteristics of two-dimensional FGM nanobeams with couple stress and surface energy under general boundary conditions // *Aerospace Science and Technology*. – 2021. – Vol.111. – 106552.

108. Belyankova, T.I. Peculiarities of the surface SH waves propagation in the weakly inhomogeneous prestressed piezoelectric structures / T. I. Belyankova, V. V. Kalinchuk, O.M. Tukodova // Springer Proceedings in Physics. – 2016. – V. 175. – P. 413–429.

109. Binh, D.T. Applied theory of bending vibration of magnetoelastoelectric bimorph / D.T. Binh, A.N. Soloviev, V.A. Chebanenko, E. Kirillova, T.H.D. Ha // Proceedings of the 2nd Annual International Conference (MMMS2020). – 2021. – P. 337–342. – DOI: 10.1007/978-3-030-69610-8_47.

110. Bharti, I. Novel applications of functionally graded nano, optoelectronic and thermoelastic materials / I. Bharti, N. Gupta, K. Gupta // Int. J. of Materials, Mechanics and Manufacturing. – 2013. – Vol.1. – No. 3. – P. 221–224.

111. Bhattacharya, J. The possibility of the propagation of Love waves in an intermediate heterogeneous layer lying between two semi-infinite isotropic homogeneous elastic layers / J. Bhattacharya // Pure and Applied Geophysics. – 1969. – V. 72 (1). – P. 61–71.

112. Bhavar, V. A review of functionally gradient materials (FGM's) and their applications / V. Bhavar, P. Kattire, S. Patil, R.K.P. Singh // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 229. – 012021.

113. Boggarapu, V. State of the art in functionally graded materials / V. Boggarapu, R. Gujjala, S. Ojha, S. Acharya, P. Venkateswara, S. Chowdary, D. Gara // Composite Structures. – 2021. – Vol. 262, Article No 113596. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113596.

114. Birman, V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman, L.W. Byrd // Appl. Mech. Rev. – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195–216.

115. Cao, X. Transverse shear wave in a functionally graded material infinite half-space / X. Cao, F. Jin, K. Kishimoto // Philosophical Magazine Letters. – 2012. – Vol. 92. – No. 5. – P. 245–253.

116. Cao, X. Asymptotic solution and numerical simulation of Lamb waves in functionally graded viscoelastic film / X. Cao, H. Jiang, Y. Ru, J. Shi // *Materials*. – 2019. – Vol. 12, No 2. – P. 268–284. – DOI: 10.3390/ma12020268.
117. Chattopadhyay, A. Torsional wave propagation in non-homogeneous layer between non-homogeneous half-spaces / A. Chattopadhyay, S. Gupta, P. Kumari, V.K. Sharma // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2013 – V. 37, Issue 10, – P. 1280–1291.
118. Chau, K. *Analytic Methods in Geomechanics* / K. Chau. – Boca Raton, FL.: CRC Press, 2013. – 457 p.
119. Chen, J. Transient internal crack problem for a nonhomogeneous orthotropic strip (Mode I) / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // *International Journal of Engineering Science*. – 2002. – V. 40, No 15. – DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00038-1.
120. Chen, J. Electromechanical impact of a crack in a functionally graded piezoelectric medium / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. – 2003. – V. 39, No 1. – P. 47–60. – DOI: 10.1016/S0167-8442(02)00137-4.
121. Chen, J. Dynamic response of a crack in a functionally graded interface of two dissimilar piezoelectric half-planes / J. Chen, Z. Liu, Z. Zou // *Archive of Applied Mechanics*. – 2003. – V. 72, No 9. – P. 686–696. – DOI: 10.1007/s00419-002-0238-5.
122. Chen, W.Q. On calculating dispersion curves of waves in a functionally graded elastic plate / W.Q. Chen, H.M. Wang, R.H. Bao // *Composite Structures*. – 2007. – Vol. 81. – P. 233–242.
123. Crampin, S. The dispersion of surface waves in multilayered anisotropic media / S. Crampin // *Geophys. J. Int.* – 1970. – V. 21. – P. 387–402.
124. Dahmen, S. Optimization of coupled Lamb wave parameters for defect detection in anisotropic composite three-layer with Kelvin-Voigt viscoelasticity using Legendre polynomial method / S. Dahmen, C. Glorieux // *Composite Structures*. – 2021. – Vol.272. – 114158.

125. Datta, S. K. On ultrasonic guided waves in a thin anisotropic layer lying between two isotropic layers / S. K. Datta – *J. Acoust Soc. Am.* – 2000 – V. 108. – P. 2005–2011.
126. Datta, S.K. *Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation*, in *Mechanical Engineering Series* / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.
127. Daniel, I.M. *Engineering Mechanics of Composite Materials* / I.M. Daniel, O. Ishai. – 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 2006. – 411 p.
128. Delale, F. The Crack Problem for a Nonhomogeneous Plane / F. Delale, F. Erdogan // *Journal of Applied Mechanics.* – 1983. – V. 50, No 3. – DOI: 10.1115/1.3167098.
129. Ding, S. Mode-I crack problem for functionally graded layered structures / S. Ding, X. Li // *International Journal of Fracture.* – 2011. – V. 168, No 2. – P. 209–226. – DOI: 10.1007/s10704-010-9575-5.
130. Dunkin, J.W. Computation of modal solution in layered, elastic media at high frequencies / J.W. Dunkin // *Bull. Seismol. Soc. America.* – 1965. – V. 55, № 2. – P. 335–358.
131. Evans, R.B. The decoupling of seismic waves / R.B. Evans // *Wave Motion.* – 1986. – Vol. 8. – P. 321–328.
132. Ezzin, H. Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation / H. Ezzin, B. Wang, Z. Qian // *Mechanics of Materials.* – 2020. – Vol. 148. – Article No. 103492. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2020.103492.
133. Ghorai, A.P. Love waves in a fluid-saturated porous layer under a rigid boundary and lying over an elastic half-space under gravity / A.P. Ghorai, S.K. Samal, N.C. Mahanti // *Appl. Math. Model.* – 2010. – V. 34. – P. 1873–1883.
134. Goyal, R. Estimating the effects of imperfect bonding and size-dependency on Love-type wave propagation in functionally graded orthotropic material under the influence of initial stress / R. Goyal, S. Kumar // *Mechanics of Materials.* – 2021. – V. 155. – Available at: <https://www.sciencegate.app/document/10.1016/j.mechmat.2021>.

103772.

135. Gupta, A. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures / A. Gupta, M. Talha // *Progress in Aerospace Science*. – 2015. – Vol. 79. – P. 1–14.

136. Gupta, S. Propagation of Love waves in non-homogeneous substratum over initially stressed heterogeneous half-space / S. Gupta, D.K. Majhi, S. Kundu, S.K. Vishwakarma, // *Applied Mathematics and Mechanics*. – 2013. – V. 34. – P. 249–258.

137. Gupta, S. Effects of periodic corrugated boundary surfaces on plane SH-waves in fiber-reinforced medium over a semi-infinite micropolar solid under the action of magnetic field / S. Gupta, M. Ahmed, J. C. Misra // *Mechanics Research Communications*. – 2019. – V. 95. – P. 35–44.

138. Gu, S. Propagation of shear horizontal (SH) waves in a functionally graded piezoelectric substrate with periodic gratings / S. Gu, Z. Ou, L. Ma, H. Zhao // *Acta Mechanica*. – 2023. – V. 234, No 7. – P. 1–16.

139. Han, X. Effects of SH waves in a functionally graded plate / X. Han, G.R. Liu // *Mechanics Research Communication*. – 2002. – Vol. 29. – P. 327–338.

140. Han, X. Characteristics of waves in a functionally graded cylinder / X. Han, G.R. Liu, Z.C. Xi, K.Y. Lam // *Int. J. of Numerical Methods in Engineering*. – 2002. – Vol.53. – P. 653–676.

141. Hoven, J.M. Acoustic waves in finely layered media / J.M. Hoven // *Geophysics*. – 1995. – Vol. 7.60, № 4. – P. 1217–1221.

142. Hussien, N.S. Surface Waves in Fibre-Reinforced Anisotropic Elastic Media Subjected to Rotation and Magnetic Field / N.S. Hussien, F.S. Bayones, H.R. AL-Quthami // *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* – 2016. – V. 13. – P. 950–957.

143. Jakoby, B. Properties of Loves waves: application in sensors / B. Jakoby, M.J. Vellekoop // *Smart Mater. Struct.* – 1997. – V. 6. – P. 668–679.

144. Jemioło, S. Constitutive modelling of fibre reinforced nonhomogenous hyperelastic materials / S. Jemioło, M. Gajewski // *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – V. 117. – Available at: <https://www.matec->

conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/31/mateconf_rsp2017_00049/mateconf_rsp2017_00049.html.

145. Kakar, R. Love waves in an intermediate heterogeneous layer lying in between homogeneous and inhomogeneous isotropic elastic half-spaces / R. Kakar, M. Gupta // *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*. – 2014. –V. 19. – P. 7165–7185.

146. Kakar, R. Dispersion of Love wave in an isotropic layer sandwiched between orthotropic and prestressed inhomogeneous half-spaces / R. Kakar // *Lat. Am. J. Solids Struct.* – 2015. – Vol. 12, No. 10. – DOI: 10.1590/1679-78251918.

147. Kakar, R. Love Waves in Voigt-Type Viscoelastic Inhomogeneous Layer Overlying a Gravitational Half-Space / R. Kakar, S. Kakar // *International Journal of Geomechanics*. – 2016. – Vol. 16, Iss. 3. – DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000582.

148. Kakar, R. of Torsional Surface Wave in a Voigt Layer Overlying a Prestressed Heterogeneous Substratum / R. Kakar, S. Kakar // *International Journal of Geomechanics*. – 2016. – Vol. 16, Iss. 4. – DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000626.

149. Kakar, R. Love-Type Surface Wave in an Isotropic Layer Bounded between Orthotropic and Heterogeneous Half-Spaces under Initial Stresses / R. Kakar, S. Kakar // *International Journal of Geomechanics*. – 2017. – Vol. 17, Iss. 3. – Available at: Love-Type Surface Wave in an Isotropic Layer Bounded between Orthotropic and Heterogeneous Half-Spaces under Initial Stresses | *International Journal of Geomechanics* | Vol. 17, No 3 (ascelibrary.org).

150. Kakar, R. Love Wave in a Voigt-Type Viscoelastic Heterogeneous Layer Overlying Heterogeneous Viscoelastic Half-Space / R. Kakar, S. Kakar // *International Journal of Geomechanics*. – 2017. – Vol. 17, Iss.1. – DOI:10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000675.

151. Ke, L.L. Propagation of Love Waves in an inhomogeneous fluid saturated porous layered half-space with properties varying exponentially / L.L. Ke, Y.S. Wang,

Z.M. Zhang, // *International Journal of Geomechanics*. – 2005. – V. 131(12). – P. 1322–1328.

152. Kenneth, B.L.N. *Seismic wave propagation in stratified media* / B.L.N. Kenneth. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. – 350 p.

153. Kielczynski, P. Propagation of ultrasonic love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials / P. Kielczynski, M. Szalewski, A. Balcerzak, K. Wieja // *Ultrasonics*. – 2016. – V.65. – P. 220–227.

154. Koizumi, M. The concept of FGM / M. Koizumi // *Ceramics Transactions: Functionally Graded Materials*. – 1993. – Vol.34. – P. 3–10.

155. Kong, Y.-P. Propagation of love waves in the orthotropic layer/functionally graded piezoelectric half-space / Y.-P. Kong, C.-H. Chen, J.-X. Liu // *Journal of Shanghai Jiaotong University*. – 2013. – V. 47, No. 2. – P. 210–215.

156. Kumar, D. Vibrational analysis of love waves in a viscoelastic composite multilayered structure / D. Kumar, S. Kundu, R. Kumhar, S. Gupta // *Acta Mechanica*. – 2020. – V. 231. – P. 4199–4215.

157. Kumar, D. Analysis of SH-Wave Propagation in Magnetoelastic Fiber-Reinforced Layer Resting over Inhomogeneous Viscoelastic Half-Space with Corrugation / D. Kumar, S. Kundu, S. Gupta // *International Journal of Geomechanics*. – 2021. – V. 21, No 11. – DOI: 10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0002188.

158. Kumar, P. Green's function technique to study the influence of heterogeneity on horizontally polarised shear-wave propagation due to a line source in composite layered structure / P. Kumar, M. Mahanty, A. Chattopadhyay, A. K. Singh // *Journal of Vibration and Control*. – 2020. – V. 26. – Available at: <https://doi.org/10.1177/10775463198898>.

159. Kumar, S. Propagation of SH-Type Waves in Inhomogeneous Anisotropic Layer Overlying an Anisotropic Viscoelastic Half-Space / S. Kumar, P.C. Pal, S. Bose // *Int. J. Eng. Sci. Tech.* – 2014. – V. 6, No 4 – DOI: 10.4314/ijest.v6i4.3.

160. Kumar, S. Propagation of SH-wave in a corrugated viscous sandy layer sandwiched between two elastic half-spaces / S. Kumar // *Journal Waves in Random and Complex Media*. – 2017 – Vol. 27, Iss. 2 – P. 213–240.

161. Kumari, C. Impact of Prestressed Anisotropic Porous and Prestressed Anisotropic Magnetoelastic Layers on a Love-Type Wave / C. Kumari, S. Kundu // *International Journal of Geomechanics* – 2023. – V. 23, No 2. – Available at: <https://doi.org/10.1061/IJGNAI.GMENG-711>.
162. Kumari, N. Influence of Heterogeneity on the Propagation Behavior of Love-Type Waves in a Layered Isotropic Structure / N. Kumari, S.A. Sahu, A. Chattopadhyay, A.K. Singh // *Int. J. Geom.* – 2015. – V.16, No 2. — Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000541](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000541).
163. Kumari, N. Magnetoelastic Shear Wave Propagation in Pre-Stressed Anisotropic Media under Gravity / N. Kumari, A. Chattopadhyay, A.K. Singh, S.A. Sahu // *Acta Geophys.* – 2017. – V. 65, No 1. – P.189–205.
164. Kumari, P. Response of SH waves in inhomogeneous functionally graded orthotropic layered structure with interfacial imperfections / P. Kumari, Payal // *Journal of Engineering Mathematics.* – 2023. – V. 142. – DOI: 10.1007/s10665-023-10290-7.
165. Kundu, S. Love wave propagation in porous rigid layer lying over an initially stressed half space / S. Kundu, S. Gupta, D.K. Majhi // *Appl. Phys. & Math.* – 2013. – No. 3 (2). – P. 140–142.
166. Kundu, S. Propagation of Love wave in fiber-reinforced medium lying over an initially stressed orthotropic half-space / S. Kundu S. Gupta, S. Manna // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.* – 2014. – N. 38 (11). – P.1172–1182.
167. Kundu, S. Impacts on the Propagation of SH-Waves in a Heterogeneous Viscoelastic Layer Sandwiched between an Anisotropic Porous Layer and an Initially Stressed Isotropic Half Space / S. Kundu , P. Alam , S. Gupta D. K. Pandit // *Journal of Mechanics* – 2017. – V. 33. – P. 13–22.
168. Kuznetsov, S.V. Surface waves of Non-Rayleigh type / S.V. Kuznetsov // *Quarterly Applied Mathematics.* – 2003. – Vol. 61. – P. 575–582.
169. Kuznetsov, S.V. Lamb waves in functionally graded plates with transverse inhomogeneity / S.V. Kuznetsov // *Acta Mecanica.* – 2018. – Vol. 229. – P. 4131–4139.

170. Kuznetsov, S.V. Lamb waves in anisotropic functionally graded plates: a closed form dispersion solution / S.V. Kuznetsov // *Journal of Mechanics*. – 2020. – Vol. 36, Iss.1. – P. 1–6. – DOI: 10.1017/jmech.2019.12.
171. Lienke, V. Comment on « Dispersion function computations for unlimited frequency values» by Abo-Zena A / V. Lienke // *Geophysics J. R. Astr. Soc.* – 1979. – № 59. – P. 315–323.
172. Lisovenko, D. Rayleigh and Love Surface Waves in Isotropic Media with Negative Poisson's Ratio / D. Lisovenko, R. Goldstein // *Mechanics of Solids*. – 2014. – V. 49, No 4. – P. 422–434.
173. Liu, J. The propagation behavior of Love waves in a functionally graded layered piezoelectric structure / J. Liu, Z.K. Wang // *Smart Mat. Struct.* – 2005. – N. 14. – P. 137–146.
174. Ma, L. Dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials / L. Ma, L.Z. Wu, L.C. Guo, Z.G. Zhou // *Mechanics of Materials*. – 2005. – V. 37, No 11. – P. 1153–1165. – DOI: 10.1016/j. mechmat.2005.05.004.
175. Mahmood, R.M. Functionally graded materials / R.M. Mahmood, E.T. Aktinlabi. – Springer International Publishing, 2017. – 197 p.
176. Majhi, S. Reflection and Transmission of Plane SH-Waves in an Initially Stressed Inhomogeneous Anisotropic Magnetoelastic Medium / S. Majhi , P.C. Pal, S. Kumar // *Journal of Seismology*. – 2017. – V. 21. – P.155–163.
177. Mamedgasanov, E.G. Transient SH waves in elastic layer lying on elastic half-space / E.G. Mamedgasanov // *Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Techn. and Math. Sci.* – 2007. – V. 27, N7. – P. 167–176.
178. Manna, S. Effect of reinforcement and inhomogeneity on the propagation of love waves / S. Manna, S. Kundu, S. Gupta // *International Journal of Geomechanics*. – 2015. – V. 16, No 2. – Available at: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2017/31/matecconf_rsp2017_00049/matecconf_rsp2017_00049.html.

179. Manna, S. Love wave propagation in a piezoelectric layer overlying in an inhomogeneous elastic half-space / S. Manna, S. Kundu, S. Gupta // *J. Vib. Control.* – 2015. – V. 21, No 13. – P. 2553–2568.
180. Manna, S. Rayleigh type wave dispersion in an incompressible functionally graded orthotropic half-space loaded by a thin fluid-saturated aeolotropic porous layer / S. Manna, T.C. Anjali // *Applied Mathematical Modelling.* – 2020. – V. 83. – P. 590–613.
181. Meguid, S.A. On the dynamic propagation of a finite crack in functionally graded materials / S.A. Meguid, X.D. Wang, L.Y. Jiang // *Engineering Fracture Mechanics.* – 2002. – V. 69, No 14–16. – P. 1753–1768. – DOI: 10.1016/S0013-7944(02)00046-2.
182. Miklowitz, J. The theory of elastic waves and waveguides / J. Miklowitz. – North Holland, 1978. – 618 p.
183. Miyamoto, Y. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
184. Musgrave, M.J.P. Crystal acoustics. Introduction to the study of elastic waves and vibrations in crystals / M.J.P. Musgrave. – San Francisco, 1970. – 288 p.
185. Naebe, M. Functionally Graded Materials: a review 244 of fabrication and properties / M. Naebe, K. Shrivanimoghaddam // *Applied Materials Today.* – 2016. – Vol. 5. – P. 223–245.
186. Niino, M. The functionally gradient materials / M. Niino, T. Hirai, R. Watanabe // *J. of the Japanese Society for Composite Materials.* – 1987. – Vol. 13. – P. 257–264.
187. Ohyoshi, T. New stacking layer elements for analyses of reflection for transmission of elastic waves to inhomogeneous layers / T. Ohyoshi // *Mechanics Research Communication.* – 1993. – Vol. 20, Iss. 4. – P. 353–359. – DOI: 10.1016/0093-6413(93)90050-X.
188. Pang, Y. Shear horizontal wave propagation along a periodic metal grating surface of a magneto-electro-elastic substrate / Y. Pang, C.Y. Xu, T. Ge, W.J. Feng // *Phys. Rev. Appl.* – 2019. – V. 125, No 16. – DOI:10.1063/1.5079273.

189. Pramanik, A. Propagation of Love Waves in Composite Layered Structures Loaded with Viscous Liquid / A. Pramanik, S. Gupta // *Procedia Engineering*. – 2016. – V. 144. – P. 461–467.
190. Pshenichnov, S. Transient wave propagation in functionally graded viscoelastic structures / S. Pshenichnov, R. Ivanov, M. Datcheva // *Mathematics*. – 2022. – Vol. 10, Iss. 23. – P. 4505-1–4505-18. – DOI:10.3390/math10234505.
191. Rajak, B.P. Study of the SH-wave propagation in an MEFR layer bounded by heterogeneous viscoelastic layer and elastic half-space / B.P. Rajak, S. Kundu, R. Kumhar, S. Gupta // *Engineering Computations*. – 2022. – V. 39. – P. 2820–2844.
192. Redwood, M. Mechanical waveguides. The propagation of sonic and ultrasonic waves in fluids and solids with boundaries / M. Redwood. – Oxford-London-New York-Paris: Pergamon press, 1960. – 250 p.
193. Rokhlin, S.I. Ultrasonic wave interaction with a thin anisotropic layer between two anisotropic solids. II Second order asymptotic boundary conditions / S.I. Rokhlin, W. Huang // *The Journal of the Acoustical Societi of America*. – 1993. – V. 93. – № 6 – P. 3405–3420.
194. Rose, J.L. Ultrasonic waves in solid media / J.L. Rose. – Cambridge University Press, 2004. – 454 p.
195. Sadab, M. Analytical study of Love-type wave propagation in a composite structure of viscoelastic materials / M. Sadab, S. Kundu, D. Kumar, B. P. Rajak // *Acta Mechanica*. – 2023. – V. 234. – P. 1943–1955.
196. Sahu, S.A. SH-Waves in Viscoelastic Heterogeneous Layer over Half-Space with Self-Weight / S.A Sahu, P.K. Saroj, N. Dewangan // *Arch. Appl. Mech.* – 2014. – V. 84, No 2. – P. 235–245.
197. Senitskii, Y.E. Inhomogeneous anisotropic cylinder and sphere under an arbitrary radially symmetric dynamic load / Y.E. Senitskii // *Soviet Applied Mechanics*. – 1978. – Vol. 14, No 5. – P. 451–456.
198. Shuvalov, A.L. General formalism for plane guided waves in transversely inhomogeneous anisotropic plates / A.L. Shuvalov, O. Poncelet, M. Deschamps // *Wave Motion*. – 2004. – Vol. 40. – P. 413–426.

199. Shuvalov, A.L. The state-vector formalism and the Peano series solution for modelling guided waves in functionally graded anisotropic piezoelectric plates / A.L. Shuvalov, E. Le Clezio, G. Feuillard // *Int. J. of Engineering Sciences*. – 2008. – Vol.46. – P. 929–947.
200. Soloviev, A.N. Modeling of vibrations of a stacked piezo element made of porous piezoceramics / A.N. Soloviev, M.S Germanchuk, P.A. Oganesyanyan // *Problems of Strength and Plasticity* – 2024. – Vol. 86, No. 3. – P. 358–370.
201. Soloviev, A.N. Applied Theory of Vibrations of a Composite Electromagnetoelastic Bimorph with Damping / A.N. Soloviev, V.A. Chebanenko, B.T. Do, A.V. Yudin, I.A. Parinov // *Springer Proceedings in Materials*. – 2024. – Vol. 41. – P. 355–364.
202. Sukumar, S. Dispersion of Love Waves in a Composite Layer Resting on Monoclinic Half-Space / S. Sukumar // *Journal of Applied Mathematics*. – 2011. – V. 2011 – P. 1–9.
203. Sultana, R. Study of SH-type wave propagating in an anisotropic layer sandwiched between an orthotropic medium and an in-homogeneous half-space / R. Sultana, S. Gupta // *Journal of Physics Conference Series*. – 2015. – V. 662, No 1. – Available at: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/662/1/012002>.
204. Suresh, S. Fundamentals of Functionally Graded Materials / S. Suresh, A. Mortensen. – London: IOM Communications, 1998. – 176 p.
205. Ting, T.C.T. Steady waves in an anisotropic elastic layer attached to a half-space or between two half-spaces – A generalization of Love waves and Stoneley waves / T.C.T. Ting // *Mathematics and mechanics of solids*. – 2009. – V. 14, No. 1–2. – P. 52–71.
206. Udupa, G. Functionally graded composite materials: An overview / G. Udupa, R.S.Shrikantha, R.V. Gangadharan // *Procedia Materials Science*. – 2014. – Vol.5. – P.1291–1299.
207. Velasco, V. R. Dynamics of systems with two interfaces / V. R. Velasco, B. Djafari-Rouhani // *Phys. Rev.* – 1982. – Vol. B 26. – P. 1929 – 1941.

208. Vishwakarma, S.K. Torsional wave propagation in a substratum over a dry sandy Gibson half-space / S.K. Vishwakarma, S. Gupta, S. Kundu // *International Journal of Geomechanics* – 2014. – V. 14, No 3. – Available at: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29GM.1943-5622.0000322>.
209. Wendler, L. Acoustic interface waves in sandwich structures / L. Wendler, V.G. Grigoryan // *Surface Science*. – 1988. – V. 206. – P. 203–224.
210. Weng, G.J. Effective bulk moduli of two functionally graded composites // *Acta Mechanica*. – 2003. – V. 166. – P. 57–67.
211. White, J.E. *Underground sound. Application of seismic waves* / J.E. White. – Elsevier Science Publishers B.V., 1983. – 270 p.
212. Yang, J. Dynamic anti-plane problems of piezoceramics and applications in ultrasonics – a review / J. Yang, J. Wang // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2008. – V. 21, I. 3. – P. 207–220. – DOI:10.1007/s10338-008-0824-3.
213. Yang, Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // *J. Nondestructive Eval.* – 2010. – V. 29. – P. 233–240.
214. Yu J.G. Viscoelastic shear horizontal wave in graded and layered plates / J.G. Yu // *International Journal of Solids and Structures*. – 2011. – Vol. 48, Iss.16–17. – P. 2361–2372. – DOI:10.1016/j.ijsolstr. 2011.04.011.
215. Zhang, S. Frequency dispersion of Love waves in a piezoelectric nanofilm bonded on a semi-infinite elastic substrate / S. Zhang, B. Gu, H. Zhang, R. Pan, Alamusi, X. Feng // *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. – 2015. – V. 28, No. 6. – P. 1157–1162. – DOI:10.3901/CJME.2015.0709.090.
216. Zhang, X. The fractional Kelvin–Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder / X. Zhang, Z. Li, X. Wang, J.G. Yu // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – Vol. 89. – Part 1. – P. 299–313. – DOI:10.1016/j.apm.2020.06.077.
217. Zhou, Z.G. Investigation of the dynamic behavior of a finite crack in the functionally graded materials by use of the Schmidt method / Z.G. Zhou, B. Wang, Y.G.

Sun // Wave Motion. – 2004. – V. 39, No 3. – P.213–225. – DOI:10.1016/j.wavemoti.2003.09.001.

218. Zhu, F. A numerical algorithm to solve multivariate transcendental equation sets in complex domain and its application in wave dispersion curve characterization / F. Zhu, B. Wang, Z.H. Qian // Acta Mechanica. – 2019. – V. 230. – P.1303–1321.

219. Zorammuana, C. SH-Wave at a Plane Interface between Homogeneous and Inhomogeneous Fibre-Reinforced Elastic Half-Spaces / C. Zorammuana, S.S. Singh. // Indian Journal of Materials Science. – V. 2015. – Available at: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/532939>.