Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Сероштанов Александр Владимирович

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ ТОНКИХ ПЛИТ

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Калоеров Стефан Алексеевич

Донецк 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Развитие современных отраслей промышленности и техники тесно связано с созданием и применением новых материалов, важное место среди которых занимают пьезоматериалы, обладающие магнитоэлектрическим эффектом. Элементы конструкций из таких материалов могут быть использованы при создании широкого диапазона устройств – от бытовых приборов до космических аппаратов. Широкое распространение в качестве таких элементов конструкций получили тонкие пластинки, находящиеся в условиях поперечного изгиба и называемые тонкими плитами.

По разным техническим соображениям или технологическим и эксплуатационным причинам указанные элементы могут иметь концентраторы напряжений типа отверстий и трещин. При эксплуатации таких конструкций под механическими и электромагнитными воздействиями вблизи таких дефектов элементов основные характеристики электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) (напряжения, перемещения, индукции, напряженности и потенциалы электромагнитного поля) могут достигать запредельных значений, что может приводить к разрушению конструкций. Это нужно учитывать при проектировании и расчете конструкций на прочность. Поэтому необходимо иметь надежные методы определения ЭМУС многосвязных электромагнитоупругих тонких плит и решения с их помощью прикладных задач, возникающих при проектировании соответствующих конструкций.

Степень разработанности проблемы. Несмотря на указанную практическую потребность в разработке методов и решении важных задач, до сих пор эффективные методы решения задач теории изгиба тонких электромагнитоупругих многосвязных плит разработаны недостаточно. Многочисленные исследования проведены лишь для плит простейшей геометрии, чаще всего сплошных, из материалов простейшей микроструктуры.

Известно, что при решении задач о напряженно-деформированном состоянии многосвязных пластин достаточно надежные результаты получаются при использовании комплексных потенциалов. Это подтвердилось и использованием этих функции при решении плоской задачи электромагнитоупругости для различных областей.

Для случая изгиба тонких плит эти функции были введены лишь в последние годы. Через них были получены соотношения для основных характеристик ЭМУС, граничные условия для определения функций, решены некоторые задачи для односвязных областей.

Методы же решения задач для произвольных многосвязных областей, включая случаи наличия в них бесконечных прямолинейных границ, не были разработаны, не были решены многие важные для инженерной практики задачи и не изучены закономерности изменений ЭМУС различных многосвязных пьезоплит.

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка методов решения задач об изгибе электромагнитоупругих тонких плит, решение реальных задач инженерной практики, исследование влияния физико-механических свойств их материалов, геометрических характеристик ослабляющих их отверстий и трещин, их количества, взаимного расположения и сочетания на значения основных характеристик ЭМУС, установление качественных и количественных закономерностей изменений указанных величин. Для достижения этой цели необходимо было для различных классов задач

– исследовать общий вид комплексных потенциалов;

– найти для различных классов задач общие представления комплексных потенциалов в виде рядов с неизвестными коэффициентами;

– для некоторых случаев односвязных плит получить точные аналитические решения соответствующих краевых задач;

– для каждой, из рассматриваемых классов задач в случае многосвязных плит, задачи приводить решение к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений по определению неизвестных коэффициентов рядов;

– составить комплексы программ на алгоритмическом языке для численной реализации получаемых решений;

– исследовать эффективность решений и достоверность получаемых результатов;

– проводить численные исследования с изучением закономерностей изменения ЭМУС рассматриваемых плит при различных внешних механических и электромагнитных воздействиях.

Объектом исследования является электромагнитоупругое состояние тонких пьезоплит с отверстиями и трещинами в зависимости от способа внешнего воздействия, геометрических характеристик плит и физико-механических свойств их материалов.

Предметом исследования является разработка математических методов определения электромагнитоупругого состояния тонких пьезоплит; получение решений новых классов задач с исследованием влияния геометрических и физико-механических характеристик плит на возникающее в них ЭМУС.

Методы исследования. Для достижения сформулированной цели в работе развиты методы решения задач об изгибе тонких многосвязных электромагнитоупругих плит, заключающиеся в построении общих представлений комплексных потенциалов для рассматриваемых классов задач, разложении голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, определяемыми из граничных условий. При наличии границ в виде бесконечной прямой широко использован метод интегралов типа Коши. В случае многосвязных плит для удовлетворения граничным условиям использовался обобщенный метод наименьших квадратов. Даны решения конкретных задач с исследованиями сходимости решений и достоверности получаемых результатов.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Проведенные в работе исследования связаны с разработкой конкурсных фундаментальных научно-исследовательских проектов «Методы исследования линейных и нелинейных моделей статического и динамического деформирования анизотропных функционально-градиентных упругих тел» (№ госрегистрации 0120D000014, 2020–2022 гг.) и «Численно-аналитические методы исследования волнового деформирования, ползучести, концентрации напряжений и сопряженных полей в новых классах анизотропных композитных и функционально-градиентных сред» (№ госрегистрации 124012400354-0, 2023–2025 гг.). Результаты исследований по теме диссертации представлены в отчетных материалах по указанным НИР.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованной литературы, который содержит 212 источников, и двух приложений. В работе 33 таблицы и 51 рисунок. Общий объем диссертации составляет 197 страниц, из которых 23 страницы занимает список литературы, 40 страниц – приложения.

В первом разделе приведен аналитический обзор известных публикаций по теме диссертации и смежным темам, описаны формирование и развитие физических представлений и математических моделей магнитоэлектрического эффекта и электромагнитоупругости. Установлено, что до последнего времени по решению краевых задач теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит были опубликованы лишь отдельные работы для односвязных плит, и то для плит из пьезоматериалов простейшей микроструктуры; в последние годы были сформулированы краевые задачи общей теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит, введены комплексные потенциалы для их решения, исследованы свойства и общие представления этих функций для односвязных и многосвязных областей; но оставались неразработанными методы нахождения комплексных потенциалов при решении различных практически важных классов, таких как многосвязные плита, полуплоскость и полоса с отверстиями, трещинами и выемами, хотя в результатах таких исследований есть большая практическая потребность.

Во втором разделе представлены гипотезы и краевые задачи теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит, исследованы основные соотношения для комплексных потенциалов, граничные условия для их определения, общие представления этих функций для многосвязных областей. В этом же разделе получены точные решения задач об изгибе эллиптической плиты и бесконечной плиты с эллиптическим отверстием или трещиной. Проведены численные исследования, с помощью которых изучено влияние на ЭМУС плит физико-механических свойств их материалов.

В третьем разделе диссертации дано решение задачи для многосвязной электромагнитоупругой плиты с отверстиями и трещинами при произвольном их количестве, сочетании и расположении. Методами конформных отображений и разложения функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера найдены общие представления комплексных потенциалов, содержащие неизвестные постоянные, определение которых обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) приведено к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений, решаемой с помощью сингулярного разложения. Приведены решения ряда конкретных задач для конечных и бесконечных плит с различными отверстиями круговых и эллиптических контуров, а также с трещинами. Исследования проводились как с учетом электромагнитных свойств материалов, так и без их учета. Численными исследованиями определены влияния геометрических характеристик плит и физико-механических свойств их материалов на значения основных характеристик ЭМУС. В третьем разделе также даны решения периодической и двоякопериодической задач об изгибе пьезоплиты с эллиптическими отверстиями или трещинами с анализом результатов численных исследований. Описаны результаты численных исследований для плиты с периодическим рядом круговых отверстий или трещин, двоякопериодической системой круговых отверстий с полным или частичным учетом пьезосвойств, без их учета.

В четвертом разделе, с использованием методов интегралов типа Коши и ОМНК, получены решения задач об изгибе плит в виде многосвязных полуплоскости и полосы; даны решения ряда задач для полуплоскости и полосы с произвольно расположенными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на прямолинейные границы. Исследовано влияние геометрических характеристик и физико-механических свойств материалов на значения основных характеристик ЭМУС.

В заключении сформулированы и обобщены основные научные результаты проведенных в работе теоретических и численно-аналитических исследований.

На защиту выносятся следующие полученные в работе научные результаты:

– разработка методов решения различных классов задач теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит с отверстиями и трещинами;

– установление для рассматриваемых классов задач общего вида комплексных потенциалов;

– получение для некоторых односвязных областей точных аналитических решений рассматриваемых задач;

– получение для конечных или бесконечных многосвязных пьезопластин переопределенных систем линейных алгебраических уравнений по определению неизвестных коэффициентов рядов;

– получение решения задач об изгибе пьезоплиты в виде полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами, основанного на использовании метода интегралов типа Коши и ОМНК с точным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе и приближенным на контурах отверстий и трещин;

– получение решений задач об изгибе пьезоплиты в виде полуплоскости или полосы с отверстиями и трещинами, в том числе выходящих на прямолинейные границы, с приближенным удовлетворением граничным условиям как на контурах отверстий и трещин, так и на прямолинейных границах обобщенным методом наименьших квадратов;

– решение ряда новых задач теории изгиба электромагнитоупругих плит с отверстиями и трещинами;

– установление новых механических и электромагнитных закономерностей влияния геометрических характеристик пьезоплит и физико-механических свойств их материалов на значения основных характеристик ЭМУС.

Научная новизна полученных результатов состоит в том, что

– исследованы и установлены общие представления комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит в виде различных рядов с неизвестными коэффициентами;

– получены, изучены и использованы точные аналитические решения задач об ЭМУС конечных и бесконечных односвязных пьезоплит;

– решения задач для конечных и бесконечных многосвязных пьезоплит сведены к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярного разложения;

– с использованием метода интегралов типа Коши получены общие представления комплексных потенциалов, точно удовлетворяющие граничным условиям на прямолинейной границе многосвязной пьезополуплоскости, с дальнейшим нахождением комплексных потенциалов задачи удовлетворением условиям на контурах внутренних отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов;

– предложен подход приближенного удовлетворения (ОМНК) граничным условиям на всех границах многосвязных полуплоскости и полосы, позволяющий решать задачи не только для случая внутренних отверстий и трещин, но и когда последние пересекают прямолинейные границы;

– проведены алгоритмизация и численная реализация указанных решений на алгоритмическом языке C++;

– установлен ряд новых механических закономерностей влияния физико-механических свойств материалов плит, их геометрических характеристик и способов внешнего воздействия на значения основных характеристик ЭМУС.

Достоверность полученных результатов и выводов работы обеспечивается корректным использованием соотношений механики деформируемого твердого тела; строгостью постановки задач и применяемых математических методов; использованием проверенных математических и численных методов; высокой степенью точности удовлетворения граничных условий краевых задач, проверяемых в многочисленных точках границ, непротиворечивостью получаемых результатов известным представлениям о рассматриваемых физических явлениях; согласованием получаемых результатов с известными в литературе для частных задач теории упругости или электроупругости.

Практическая ценность полученных результатов состоит в возможности использования разработанных методов решения задач и программных средств для их численной реализации при расчетах, связанных с проектированием и определением рабочих параметров элементов конструкций в виде тонких плит из пьезоматериалов с отверстиями и трещинами; в возможности получения численных результатов, позволяющих оценивать взаимовлияние отверстий и трещин, их количества, сочетания, расположения относительно друг друга и внешних границ, а также влияние физико-механических свойств материалов на значения основных характеристик ЭМУС.

Апробация результатов работы. Основные положения работы были доложены и обсуждены на ряде заседаний научного семинара по механике сплошных сред кафедры теории упругости и вычислительной математики Донецкого государственного университета под руководством проф. С. А. Калоерова, на ряде научных конференций, в том числе: на V, VI, VII, VIII и IX Междунар. науч. конф. «Донецкие чтения: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» (г. Донецк, 2020–2024 гг.), на XX Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, ЮФУ, 2020 г.), на Междунар. мол. научн. форумах «ЛОМОНОСОВ–2021», «ЛОМОНОСОВ–2023», «ЛОМОНОСОВ–2025», на Междунар. конф. к юбилею ректора МГУ академика В. А. Садовничего «Математика в созвездии наук» (г. Москва, 2024 г.).

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 21 научной работе, из которых 11 статей в рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России, причем 5 из них в научных журналах, индексируемых в наукометрической базе Scopus, 10 тезисов и материалов научных конференций.

Личный вклад соискателя. Основные результаты получены автором самостоятельно. В работах [41, 43–48, 56, 59–66, 69] соавтору С.А. Калоерову принадлежит участие в постановке задач, выборе метода исследования и обсуждении получаемых результатов. В работах [44, 48, 64] соавтору А. Б. Мироненко принадлежит участие в проведении численных исследований и обсуждении полученных результатов.

Лично автору принадлежат такие, включенные в диссертационную работу и публикации, научные результаты:

– получение общих представлений комплексных потенциалов для различных классов задач в виде рядов с неизвестными коэффициентами;

– получение переопределенных систем линейных алгебраических уравнений по определению неизвестных коэффициентов рядов для каждой рассматриваемой задачи;

– установление общих представлений комплексных потенциалов для многосвязных полуплоскости и полосы, порожденных применением к граничным условиям на прямолинейных границах метода интегралов типа Коши, с дальнейшим использованием ОМНК к граничным условиям на контурах отверстий и трещин;

– распространение на задачи изгиба тонких электромагнитоупругих плит в виде полуплоскости и полосы методики, основанной на приближенном удовлетворении граничным условиям с помощью ОМНК на всех границах; решение на этой основе ряда задач;

– установление закономерностей изменения ЭМУС рассматриваемых пьезоплит при различных внешних механических и электромагнитных воздействиях в зависимости от геометрических характеристик плит и физико-механических свойств их материалов.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА, СТАНОВЛЕНИЮ И РАЗВИТИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ

1.1. Исследования по магнитоэлектрическому эффекту

С момента открытия связи между электрическим и магнитным полями Ампером и Фарадеем, которая позже была сформулирована в 19 веке Джеймсом Клерком Максвеллом в его знаменитых уравнениях [183], исследование электромагнетизма не прекращалось и в научном, и в технологическом отношениях.

Начальным пунктом исследований магнитоэлектрического эффекта принято считать открытие Рентгена в 1888 году [191], заключающееся в том, что движущийся диэлектрик при его помещении в электрическое поле изменяет свою намагниченность. Обратный эффект был выявлен и доказан в 1905 году Вильсоном [208].

Следующий шаг на пути открытия магнитоэлектрического эффекта был сделан Пьером Кюри, который теоретически показал возможность одновременного присутствия в одном кристалле как пьезоэлектрического, так и магнитного упорядочений [157].

Само же открытие магнитоэлектрического эффекта произошло в 1957 году, когда академики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц предсказали возможность существования собственно магнитоэлектрического эффекта в некоторых веществах, обладающих определенной магнитной симметрией, и сформулировали условия для его возникновения [89]. Затем ученик Ландау И. Е. Дзялошинский при изучении этой проблемы в 1958 году [31] конкретно указал, какие именно вещества могут обладать данным эффектом. Годом позднее Д. Н. Астров провел многочисленные эксперименты, которые показали, что вещества, названные

И. Е. Дзялошинским, действительно намагничиваются, если их поместить в электрическое поле. Первым веществом, в котором был экспериментально измерен магнитоэлектрический эффект, стал кристалл оксида хрома Cr_2O_3 [4].

Исследования обратного магнитоэлектрического эффекта первыми провели американские ученые Folen V. J., Rado G. T. и Stalder E. W [167]. Они также использовали кристалл оксида хрома и измерили электрическую поляризацию, индуцированную магнитным полем. Тем не менее, практически сразу стало понятно, что техническое применение Cr_2O_3 невозможно из-за малой величины наблюдаемого эффекта. Это вынудило исследователей искать альтернативные магнитоэлектрические материалы.

Вскоре было проведено большое количество исследований магнитоупорядоченных материалов, в которых экспериментально обнаружили магнитоэлектрический эффект [15, 192], причем было установлено, что в некоторых материалах возможно существование и нелинейного магнитоэлектрического эффекта [30, 85].

Механизм магнитоэлектрического эффекта в антиферромагнетиках впервые был описан в работе Rado [187], где было показано, что электронные оболочки ионов деформируются при приложении электрического поля, что приводит к изменению магнитного момента магнитоактивного иона благодаря спин-орбитальному взаимодействию. Основываясь на этом предположении, Rado предложил микроскопическую теорию магнитоэлектрического эффекта в антиферромагнетиках [189], которая получила дальнейшее развитие и в других работах для магнитоупорядоченных кристаллов [29, 148, 154, 188].

Наряду с возникновением поляризации под действием магнитного поля и намагниченности под действием электрического поля, в кристаллах были обнаружены дополнительные специфические эффекты, такие как: сдвиг линии резонанса под действием электрического поля [8], электромагнитооптический эффект [84], эффект невзаимного вращения плоскости поляризации и двулучепреломления света [83], изменение магнитного спектра под действием электрического поля [134]. Кроме того, было обнаружено возникновение новых типов поверхностных волн в антиферромагнетиках, вследствие магнитоэлектрического взаимодействия

[9]. К настоящему времени выполнен большой объем работ по изучению магнитоэлектрического эффекта в монокристаллических материалах, описаны их свойства, а также перспективы дальнейшего использования [96, 97, 121, 177].

Однако, как показали исследования, магнитоэлектрический эффект в кристаллах не обладает необходимыми характеристиками для его практического использования. Поэтому следующим шагом стало изготовление композитных многофункциональных материалов, состоящих из двух раздельных фаз – магнитострикционной и пьезоэлектрической. Физические свойства таких структур, как известно, определяются свойствами каждой из фаз в отдельности, а также их взаимодействием [182, 200, 201]. В связи с этим выделяют три класса свойств:

– суммарные свойства (взвешенная сумма вкладов от составляющих фаз; например, вес определяется долей этих фаз);

– пропорциональные свойства (проявляются в эффектах, величина которых больше для композита, нежели для отдельных составляющих его материалов);

– умножаемые свойства (отсутствуют в материалах, но присутствуют в их композитах).

В то время как суммарные и пропорциональные свойства определяют усреднение или улучшение эффекта, умножаемые свойства приводят к новым эффектам, образующимся от взаимодействия между составляющими композит материалами. Такие композиты используются для создания структур, обладающих магнитоэлектрическим эффектом из материалов, им не обладающих. Качественно прямой и обратный магнитоэлектрический эффект в таких композитах можно описать следующими выражениями:

$$МЭ \cdot эффект = \frac{электрические\ свойства}{механические\ свойства} \times \frac{механические\ свойства}{магнитные\ свойства},$$

$$МЭ \cdot эффект = \frac{магнитные\ свойства}{механические\ свойства} \times \frac{механические\ свойства}{электрические\ свойства}.$$

Принцип работы таких магнитоэлектрических композитов состоит в следующем: при приложении магнитного поля к образцу в результате магнитострикции в магнитной фазу возникают деформации, передающиеся в пьезоэлектрической фазе, которая поляризуется под воздействием этих деформаций в результате пьезоэффекта. Также имеет место и аналогичный обратный эффект.

Сначала была предложена концепция объемных магнитоэлектрических структур, которые представляют собой однофазные частицы или волокна, взвешенные в матрице другой фазы и изготавливаемые следующим образом. Сперва получают пудры из магнитострикционного материала и пьезоэлектрической керамики, их перемешивают, а затем прессуют. Полученные образцы подвергают длительному отжигу и затем поляризуют. После этого измеряют магнитоэлектрический эффект получившегося композита.

Первым данную концепцию предложил Van Suchtelen в 1972 году [200]. А первые работы по созданию объемных композитов были проведены в Philips Laboratory [149, 197, 198, 199], где в качестве первых компонентов брали титанат бария $BaTiO_3$ и феррит кобальта $CoFe_2O_4$.

Справедливо отметить, что уже в 1948 году B. D. H. Tellegen на основе магнитоэлектрических композитов предложил устройство, которое позже было названо гиратором Теллегена [195]. Композиты с сильными МЭ-эффектами не были известны в те времена, и поэтому гипотеза Теллегена о МЭ-устройстве практически не была реализована.

Очевидно, что использование композитных материалов существенно расширило возможности, связанные с магнитоэлектрическим эффектом. Число регулируемых исследователями параметров, влияющих на величину магнитоэлектрического эффекта и характеристики композита, значительно увеличилось. Для всех композитов верно, что механические напряжения должны передаваться между магнитной и пьезоэлектрической фазами с минимальными потерями для достижения максимального эффекта. Также очевидно, что размер зерен, молярные доли компонентов, форма частиц и различные режимы спекания сильно влияют на величину эффекта. Несмотря на существенное увеличение значения магнитоэлектрического эффекта при комнатной температуре в объемных композитах по сравнению с кристаллами, полученные величины были далеки от желаемых и теоретически предсказанных. Существует несколько важных проблем воспроизводимости и надежности, которые до сих пор остаются нерешенными: 1) сложность контроля взаимосвязи составляющих фаз; 2) химические реакции между фазами в процессе спекания; 3) пробой диэлектрика через низкоомную магнитострикционную фазу во время поляризации пьезоэлектрической фазы; 4) слабая механическая связь между фазами из-за механических дефектов, вызванных обработкой, таких как поры и трещины.

Эти и другие проблемы использования объемных магнитоэлектрических композитов привели исследователей к идее о слоистых композитах, состоящих из чередующихся слоев магнитострикционного и пьезоэлектрического материалов. Впервые теоретическое исследование таких структур было предложено в 1993 году [170], а первая экспериментальная работа на эту тему была опубликована в 2001 году [180]. В данной работе был получен рекордный по сравнению с объемными композитами магнитоэлектрический коэффициент в двухслойных и многослойных структурах «никель-цинковый феррит – цирконат-титанат свинца», был проведен теоретический анализ и предложена модель, описывающая экспериментальные результаты.

В связи с развитием тенденции к миниатюризации электронных устройств возникла потребность в получении магнитоэлектрических композитов, совместимых с планарной технологией. В 2004 году исследователями были созданы первые столбчатые наноструктуры $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$, состоящие из наностолбиков $CoFe_2O_4$, выращенных перпендикулярно подложке $SrTiO_3$ и внедренных в матрицу $BaTiO_3$ [122]. При этом столбчатая структура не препятствует растяжению/сжатию наностолбиков в вертикальном направлении, благодаря чему нанокомпозит может иметь явно выраженную магнитоэлектрическую связь.

Исходя из исследований магнитоэлектрического эффекта в композитных структурах, можно сделать вывод, что на величину магнитоэлектрического эффекта основное влияние оказывают 3 фактора [184]:

1. Качество и параметры исходных материалов, которые использованы при создании магнитоэлектрических композитов (в частности, модули Юнга и

плотности, коэффициенты Пуассона, величины констант магнитострикции, пьезоэлектричества, магнитной и диэлектрической проницаемости и т.д.)

2. Характеристики самих структур, таких как метод изготовления, толщина и геометрия образцов.

3. Внешние воздействия, к которым относят различные механические усилия, внешние магнитные и электрические поля, акустические колебания и т.д.

Большое число экспериментальных работ по магнитоэлектрическому эффекту привело к необходимости разработки теоретических моделей, описывающих магнитоэлектрические взаимодействия в композитных структурах. Первая работа, в которой был рассчитан магнитоэлектрический коэффициент многослойной структуры, была выполнена Harshe [170]. Большая часть последующих работ была основана на формулах, приведенных в этой статье.

Существуют два основных подхода к исследованию магнитоэлектрических композитов. В первом подходе слоистая структура рассматривается как гомогенный образец и записывают уравнения, общие для всей структуры [155], во втором рассматривают отдельно слои и их взаимодействие [203]. Последняя модель учитывает только продольные деформации растяжения-сжатия, не учитывает изгибных и толщинных деформаций, и не описывает случая резонанса. В дальнейшем были предложены еще несколько методов исследования магнитоэлектрического эффекта, в частности, метод эквивалентной цепи [159] и метод функции Грина [98]. Для случая тонких и толстых пленок предложена модель, основанная на свободной энергии [111].

Магнитоэлектрические материалы представляют собой огромный источник технологических применений, поскольку они могут одновременно демонстрировать настраиваемые механические, магнитные, электрические/диэлектрические, тепловые и оптические свойства. Эти параметры также могут сочетаться друг с другом, создавая интересные эффекты перекрестного взаимодействия, которые еще больше повышают универсальность магнитоэлектрических материалов для новых применений. В зависимости от области применения к различным магнитоэлектрическим материалам предъявляются различные требования. Однако в большинстве случаев общие требования, которые должны строго соблюдаться при применении, таковы [204]: (а) магнитоэлектрические материалы должны обладать значительными эффектами магнитоэлектрической связи, предпочтительно при комнатной температуре; (б) должны быть простыми в изготовлении и предпочтительно состоять из дешевых химических элементов и соединений; (в) должны быть пригодны для крупномасштабного производства и интеграции на уровне чипа/пластины; (г) должны быть пригодны для изготовления в микро- и наномасштабных размерах без потери функциональности.

Большинству перечисленных выше требований сегодня удовлетворяют композиционные магнитоэлектрические материалы. Последние результаты исследований магнитоэлектрического эффекта в композиционных материалах, а также перспективы их практического использования приведены в работах [74, 107, 146, 153, 162, 181, 184, 193].

1.2. Разработка моделей и методов электромагнитоупругости

Открытие и изучение магнитоэлектрического эффекта, последующее использование магнитоэлектрических материалов потребовали создания математических методов решения задач электромагнитоупругости, исследования электромагнитоупругого состояния тел при действии на них механических сил, элеткрических и магнитных полей. И здесь в первую очередь использовались и распространялись на задачи электромагнитоупругости результаты, полученные в классической теории упругости, бурное развитие которой происходило в XIX–XX вв.

Разработка математических моделей и методов решения задач классической теории упругости связаны с многими выдающимися механиками и математиками, такими как И. И. Ворович [22], А. А. Ильюшин [35], С. Г. Лехницкий [90, 91], А. Ляв [95], Н. И. Мусхелишвили [105], В. Новацкий [109], Г. Н. Савин [123], Л. И. Седов [124, 125], С. П. Тимошенко [136] и многие другие. Благодаря их трудам к настоящему времени построена строгая и стройная математическая теория упругости, решен ряд важных задач теории и практики. Во второй половине XX в. интенсивно стали развиваться многие направления теории упругости, а также электроупругости и магнитоупругости.

Разработку и изложение силовых, энергетических и деформационных критериев разрушения можно найти в работах таких авторов, как Г. И. Баренблатт [6], Э. М. Ву [23], А. Н. Гузь [28], А. А. Каминский [71, 72], Л. М. Качанов [73], В. В. Панасюк [112, 113], В. З. Партон [114, 115], Г. П. Черепанов [141, 142], J. R. Rice [190] и др.

Построение общих моделей электроупругих и магнитоупругих сплошных сред и связанных электро- и магнитомеханических эффектов представлены в работах Д. Берлинкура, Д. Керрана и Г. Жаффе [7], В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко и Н. А. Шульги [25, 143], У. Кэди [88], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [89], В. З. Партона и Б. А. Кудрявцева [86, 87], Я. С. Подстригача, Я. Й. Бурака и В.Ф. Кондрата [120], A.C. Eringen и G. A. Maugin [163], D. Fang и J. Liu [166] и др.

Параллельно, начиная с последней четверти XX в., происходило и бурное развитие электромагнитоупругости сплошных тел, когда последние, помимо пьезоэлектрического или пьезомагнитного эффектов, также обладают связанным магнитоэлектрическим эффектом. Описания общих моделей для различных классов задач теории электромагнитоупругости приводятся в работах таких авторов, как С. А. Амбарцумян [3], В. З. Партон и Б. А. Кудрявцев [116], А. Н. Гузь и Ф. Г. Махорт [26], Ж. Можен [104], В. Новацкий [110], J. B. Alblas [147], C. Eringen [164, 165], J. L. Volakis [202], C.-C. Wang [205] и др. Используя подходы данных авторов решены различные задачи электромагнитоупругости.

1.3. Разработка методов и построение решений задач электромагнитоупругости

К настоящему времени разработаны методы решения различных классов задач электроупругости, магнитоупругости и электромагнитоупругости. Большинство из них посвящено решению двухмерных и плоских задач. При этом широкое применение здесь нашли методы обобщенных комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы плоской задачи электроупругости были введены в работах А. С. Космодамианского и В. Н. Ложкина [80, 81], а в работе [93] с их помощью решена задача для пластинки с эллиптическим отверстием. В работах С.А. Калоерова предложен комбинированный метод определения комплексных потенциалов, заключающийся в разложении искомых функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, нахождении неизвестных коэффициентов рядов из граничных условий методом наименьших квадратов. С использованием этого метода автором и его учениками решены многочисленные двумерные и плоские задачи электроупругости и магнитоупругости [39], термоэлектроупругости и термомагнитоупругости [38, 68]. В монографии Д. И. Бардзокаса и М. Л. Фильштинского [5] решение двумерных задач электроупругости осуществляется методом граничных интегральных уравнений.

С использованием методов конформных отображений и разложений функций в ряды Фурье, M. Dai, P. Schiavone и C. -F. Gao [158] решили плоскую задачу для пьезоэлектрической полуплоскости с внутренним эллиптическим отверстием или трещиной.

Решению трехмерных задач электроупругости и магнитоупругости посвящены работы Ю. Н. Подильчука [117–119], для толстых пластин методы решения задач электроупругости предложены И. Ю. Хомой [139, 140].

В статье W.-Y. Tian, U. Gabbert [196] определение электромагнитоупругого состояния бесконечной пластинки с произвольным расположением трещин сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма II рода, для решения которой применяется метод Чебышева. Они установили, что действие магнитного поля с положительной индукцией ведет к распространению трещины, в то время как действие магнитного поля с положительной индукцией препятствует этому.

С использованием формализма Стро в работе [144] получено решение двумерной задачи электромагнитоупругости для бесконечной пластинки с эллиптической полостью или трещиной.

M. Ayatollahi и M. Nourazar [151] рассмотрели плоскую задачу для электромагнитоупругой полуплоскости с множеством трещин. Они исследовали влияние границы электромагнитоупругой полуплоскости, а также взаимодействия между трещинами на коэффициенты интенсивности напряжения, электрического смещения и коэффициенты интенсивности магнитной индукции.

В ряде работ [10, 11, 14, 36] Ватульяном А.О., Соловьевым А.Н. и их учениками методами конечных элементов и интегральных уравнений решены различные задачи электроупругости, магнитоупругости и электромагнитоупругости.

В монографии С. А. Калоерова и А. В. Петренко [40] изложены аналитические и численно-аналитические методы решения двумерных и плоских задач электромагнитоупругости для тел с отверстиями и трещинами. Методом линейного сопряжения дано решение задачи для пластинки с конечным числом трещин вдоль одной прямой. При помощи комплексных потенциалов электромагнитоупругости авторами решены множественные двумерные и плоские задачи для конечных и бесконечных тел и пластинок с отверстиями и трещинами. С использованием методов интегралов типа Коши и наименьших квадратов решены некоторые задачи для полуплоскости и полосы с отверстиями и трещинами при произвольном их расположении, количестве и сочетании. В работе [70] используя методы теории функций комплексной переменной авторами исследовано электромагнитоупругое состояние бесконечной пластинки с криволинейными отверстиями. В статье [55] с использованием комплексных потенциалов и обобщенного метода наименьших квадратов решена задача о действии температурного поля на многосвязную пластинку, а в работе [24] – на многосвязную полуплоскость.

В статьях [16, 17] решены задачи о распространении трещин на внешней поверхности цилиндра, из поверхности отверстия. В работе [18] решена задача об упругопластическом деформировании пластинки с трещиной.

В работах Ватульяна А. О., Кирютенко А. Ю., Наседкина А. В. [13], Наседкина А. В., Еремеева В. А. [108], Соловьева А. Н., Чебаненко В. А., Германчука М. С. [130, 132] решен ряд задач динамической электроупругости и термоэлектроупругости для пьезоэлектрических тел.

P. F. Hou [172, 173], используя метод функций Грина, предложил общее решение трехмерной задачи электромагнитоупругости для трансверсально-изотропного тела в случае действия сосредоточенных сил, электрических зарядов и зарядов магнитных диполей, а также сосредоточенных источников тепла. В работе [171] рассмотрено взаимодействие электромагнитных и механических полей в электромагнитоупругой среде, которая содержит сфероидальное включение. R. Wang, Q. Han и E. Pan [207] получили аналитическое решение для трехмерной трансверсально-изотропной многослойной электромагнитоупругой пластины круглой формы.

1.4 Разработка методов решения и исследования напряженно-деформированного состояния по изгибу тонких плит

Задачи теории упругости. Хотя проблемой определения напряженно-деформированного состояния тонких плит уже с середины XVIII века занимались многие известные ученые, наиболее приемлимое решение было дано лишь в середине 1850 г. Кирхгоффом [178, 179], предложившим свою приближенную прикладную теорию изгиба тонких плит. Свою теорию он построил на основе двух гипотез, получивших ныне всеобщее признание. Эти гипотезы таковы: 1) каждая прямая, первоначально перпендикулярная к срединной плоскости пластинки, остается при изгибе прямой и перпендикулярной к срединной поверхности изогнутой пластинки; 2) элементы срединной плоскости пластинки при малых прогибах пластинки не испытывают удлинения.

Исходя из этих двух предпосылок, Кирхгофф нашел правильное выражение для потенциальной энергии изогнутой пластинки и, впоследствии, вывел известное уравнение изгиба пластинки

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q\,.$$

Кроме того, пользуясь принципом Сен-Венана, Кирхгофф в отличие от

Пуассона, заменил три граничных условия двумя, что позволило корректно ставить краевые задачи для основного уравнения изгиба.

Однако, хотя Кирхгоффом были выведены основные соотношения и вскоре нашли применения в акустике, широкое использование этой теории в инженерном деле началось лишь в XX столетии [135]. Выбором прогиба в виде некоторых функций, в частности тригонометрических рядов, был решен ряд задач для плит прямоугольной, эллиптической, треугольной, секторной форм.

Во второй половине XX века были предложены методы сведения пространственных задач теории упругости к двумерным, которые позволили рассматривать задачи для пластин и оболочек, как частный случай задач для пространственных упругих тел. При этом широкое развитие получили асимптотические методы сведения пространственных задач к двумерным задачам, с помощью которых решения трехмерных задач ищутся в виде некоторых разложений по безразмерным параметрам (чаще всего зависящим от толщины), асимптотическим в некоторой области их изменения. Эти методы предложены в работах Воровича И. И. и его учеников [1, 2, 22], для многосвязной области – в работах Космодамианского А. С. и его учеников [79]. Анализ и классификация этих методов также даны в работах Воровича И. И. [20, 21], Гузя А. Н. и Немиша Ю. Н. [27], Кильчевского Н. А. [75], Устинова Ю. А. и Шленева М. А. [137].

Особенно интенсивно стала развиваться теория изгиба тонких плит в результате приложения к ней теории функций комплексного переменного.

Впервые задачу об изгибе изотропной плиты с помощью функций комплексного переменного в 1928 году решил Лурье А. И. [94], он рассмотрел произвольно нагруженную круглую плиту, опертую по краю. В 1938 году Лехницкий С. Г. [90], рассматривая изотропную плиту как частный случай анизотропной, снова получил основные соотношения для комплексных потенциалов, в том числе граничные условия. Эти условия по своей структуре оказались такими же, как аналогичные граничные условия первой и второй основных задач плоской задачи теории упругости.

Для случая изотропных плит Космодамианским А.С. и Ивановым Г. М. [78]

были найдены общие представления этих комплексных потенциалов, решен ряд задач. В частности, разложением искомых функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера были получены общие представления комплексных потенциалов с неизвестными коэффициентами, которые определялись из граничных условий методом рядов. На этой основе были решены задачи для круглой или эллиптической плиты с круговым или эллиптическим отверстиями под действием моментов на контурах, сосредоточенных сил и моментов во внутренних точках, нормальной нагрузки $q(x, y)$ по основанию плиты [78, 92]. Рассматривались случаи бесконечной плиты с круговыми контурами с использованием метода рядов, случаи кусочно-однородных плит с упругими включениями кругового [102], эллиптического [32], криволинейного [103] форм.

Исследования для анизотропных плит долгое время не проводились, хотя основы прикладной теории изгиба анизотропных плит были разработаны еще во второй половине XIX века в работах Геринга Ф. Д. [169], Буссенеска Ж. В. [156] и Губера М. Т. [174, 175]. Широкомасштабное исследования по определению напряженно-деформированного состояния анизотропных плит началось лишь в 30-е годы XX века с введения Лехницким С. Г. [90] комплексных потенциалов и получения основных соотношений. Им через эти функции была получены выражения для основных характеристик, граничные условия для определения функций, впервые была решена задача об изгибе плиты с эллиптическим отверстием. В дальнейшем с использованием этих функций был решен ряд задач. При этом голоморфные в соответствующих областях функции разлагались в ряды Лорана и по полиномам Фабера с неизвестными коэффициентами, которые определялись из граничных условий методом рядов. Были решены задачи для круглой или эллиптической плиты с круговым или эллиптическим отверстиями под действием распределенных моментов или поперечных усилий на контурах, сосредоточенных сил [33, 76, 99, 101]. Рассматривались также случаи кусочно-однородных плит с упругими включениями кругового [100], эллиптического [77] форм. Были даны и решения задач для случаев действия усилий по основанию плиты поверхностных сил [99, 101], но эти решения оказались неверными из-за использования неверного общего вида комплексных потенциалов.

Общие представления комплексных потенциалов теории изгиба многосвязных анизотропных плит были установлены лишь в работе Калоерова С.А. [49]. С использованием этих представлений и обобщенного метода наименьших квадратов для определения комплексных потенциалов были решены задачи об изгибе многосвязных анизотропных плит с эллиптическими и криволинейными отверстиями [42, 57].

Для решения задач изгиба анизотропных плит с каноническими контурами использовались и методы, отличные от методов комплексных потенциалов. В работах [185, 194] решены задачи об изгибе круглой и эллиптической ортотропных плит под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки $q(x, y)$. Многочисленные исследования напряженно-деформированного состояния анизотропных плит проведены численными методами, прежде всего методом конечных элементов [12, 34, 131].

Задачи электромагнитоупругости. Задачи электромагнитоупругого изгиба тонких плит без использования теории функций комплексного переменного решались многими.

Так, S.-P. Xu и W. Wang [209] получили аналитическое решение для изгиба бесконечной трансверсально-изотропной пьезоэлектрической плиты с круглым отверстием. В работе [150] изучено термоэлектромеханическое поведение многослойной нанопластины при изгибе. Многослойная нанопластина подвергается поперечному механическому воздействию, двухпараметрическому повышению температуры и трехмерному электрическому потенциалу с приложенным напряжением. Показано, что с увеличением параметров температуры или электрической напряженности прогиб многослойной нанопластины увеличивается.

E. Pan и P Heyliger [186], с использованием формализма Stroh, решили задачу об изгибе прямоугольной плиты. Они показали, что при изгибе многослойной магнитоэлектрической плиты перемещения и напряжения изменяются по толщине по линейному закону, а потенциалы электрического и магнитного полей – по квадратичному.

G. Gales и N. Baroiu [168] определили влияние концентрации заряда на изгиб бесконечной пьезоэлектромагнитной тонкой пластины.

В работе [206] авторы, используя нелинейную теорию изгиба плит Фёппля – фон Кармана, исследовали изгиб прямоугольной электромагнитоупругой плиты с линейно изменяющейся толщиной. Показано, что нелинейный прогиб электромагнитоупругой плиты с линейно изменяемой толщиной уменьшается с увеличением соотношения сторон прямоугольника; с увеличением параметра конусности плиты (её утолщения вдоль оси x) электрический и магнитный потенциалы растут, а их максимум смещается в сторону утолщения.

Y. Yang и X.-F. Li [211] расширили классическую теорию изгиба тонких плит Кирхгоффа на случай круглых электромагнитоупругих наноплит с поверхностными эффектами, такими как поверхностная упругость, поверхностное остаточное напряжение, поверхностные пьезоэлектричество и пьезомагнетизм. Они выяснили, что поверхностные эффекты увеличивают эффективную жесткость наноплиты и уменьшают её прогиб.

В работе W. Feng, Z. Yan, J. Lin, C. Z. Zhang [152] на основе нелокальной теории и теории пластин Миндлина построена модель изгиба конечных сплошных электромагнитоупругих нанопластин, опирающихся на упругое основание Пастернака.

W. Shen и др. [145] предложили свою модель изгиба зависящих от микроструктуры трансверсально-изотропных круглых электромагнитоупругих плит Кирхгоффа. С помощью рядов Фурье-Бесселя, проведены численные исследования для защемленной круглой электромагнитоупругой плиты, подвергнутой равномерно распределенной постоянной нагрузке. В работе показано, что эффект электромагнитоупругой связи играет важную роль в вычислении прогиба, электрического и магнитного потенциалов.

С использованием нелинейного геометрического уравнения фон Кармана и теории сдвиговой деформации высшего порядка Y.-F. Zheng, L.-L. Xu и C.-P. Chen [212] провели нелинейный анализ изгиба прямоугольных электромагнитоупругих композитных пластин под действием механической или магнитоэлектрической нагрузки. Они выяснили, что положительное магнитное поле или положительное электрическое поле могут замедлить деформацию электромагнитоупругой пластины, и напротив, отрицательное электрическое или магнитное поле может ускорить ее деформацию. Также они определили, что увеличение внешней нагрузки может усилить магнитоэлектрический эффект в плите, а магнитный или электрический потенциал в электромагнитоупругой прямоугольной пластине постепенно уменьшается от середины к обоим концам.

C. Hwu и W. Becker [176] показали, как с помощью формализма Stroh можно получить общую постановку задачи для различных типов материалов (анизотропных, пьезоэлектрических, пьезомагнитных, электромагнитоупругих, вязкоупругих) и различных деформаций (двумерные внутри- и антиплоские, боковые нагрузки, изгибающие моменты, трехмерные). Представлено общее решение задачи для бесконечной пластинки, в точке которой действует сосредоточенная сила, и для бесконечной пластинки с эллиптическим отверстием или трещиной. Однако, никакие численные результаты авторами не представлены.

В описанных выше работах по решению связанных задач об изгибе электромагнитоупругих плит рассматривались лишь односвязные области.

Калоеровым С. А. [50, 51, 53] были введены комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит, получены выражения основных характеристик электромагнитоупругого состояния плит (поперечные силы, механические моменты, моменты электрической и магнитной индукций), граничные условия для определения этих функций, общий вид этих функций для плит; с их использованием решены некоторые задачи для односвязных плит. С использованием этих комплексных потенциалов, разрабатывая методы определения этих функций, можно решать различные классы задач теории изгиба тонких многосвязных электромагнитоупругих тонких плит.

1.5. Выводы к разделу 1

В данном разделе приведен обзор литературы по теме диссертации и смежным темам, описаны исследования магнитоэлектрического эффекта, по разработке моделей электроупругости, магнитоупругости и электромагнитоупругости, а также методов решения и решению различных задач об электромагнитоупругом состоянии тел.

Из приведенного обзора литературы следует, что к настоящему времени сравнительно хорошо изучен магнитоэлектрический эффект в твердых деформируемых телах; разработаны математические основы электромагнитоупругости, предложены различные методы решения плоских, двумерных и трехмерных задач; решены многочисленные плоские задачи для односвязных и многосвязных областей.

Для случаев изгиба тонких плит простейшей микроструктуры и геометрии (сплошных) выполнены многочисленные работы по определению их ЭМУС.

Введены комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит, позволяющие решать задачи для плит с произвольными отверстиями и трещинами; с использованием этих функций решены задачи для односвязных плит. Но не разработаны методы определения этих комплексных потенциалов и не решены различные классы задач в случае многосвязных плит с отверстиями и трещинами. Поэтому многие важные с практической точки зрения частные задачи остались нерешенными.

В связи с этим тема диссертационной работы, посвященная разработке методов и построению решений различных классов задач теории изгиба электромагнитоупругих плит, актуальна и в ней необходимо было:

1. исследовать общий вид комплексных потенциалов;

2. разработать методы решения задач об изгибе электромагнитоупругих многосвязных тонких плит с отверстиями и трещинами;

3. решить новые классы задач по определению электромагнитоупругого состояния тонких конечных и бесконечных многосвязных пьезоплит, полуплоскости

и полосы с произвольными отверстиями, трещинами и выемами;

4. исследовать эффективность разработанных методов и достоверность получаемых при их использовании результатов;

5. проводить численные исследования с установлением закономерностей влияния физико-механических параметров материалов, геометрических размеров отверстий и трещин, их количества, взаимного расположения относительно друг друга и внешних границ на значения основных характеристик электромагнитоупругого состояния плиты.

РАЗДЕЛ 2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗГИБА ТОНКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ПЛИТ И ИХ РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

2.1. Основная система уравнений трехмерной теории электромагнитоупругости

Под внешними механическими и электромагнитными воздействиями в пьезотелах возникают напряжения, деформации и электромагнитные поля. При этом, если деформации в теле малы, его материал обладает прямолинейной анизотропией и в каждой его точке имеется плоскость материальной симметрии, то возникающие в ней напряжения, деформации, индукции и напряженности поля удовлетворяют системе уравнений электромагнитоупругости, состоящей из уравнений равновесия [105]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \tag{2.1}$$

уравнений вынужденной электромагнитостатики [21, 133, 183]

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial x}=0, \tag{2.3}$$

уравнений электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) [7, 106]

$$\varepsilon_x=s_{11}\sigma_x+s_{12}\sigma_y+s_{13}\sigma_z+s_{14}\tau_{yz}+s_{15}\tau_{xz}+s_{16}\tau_{xy}+$$
$$+g_{11}D_x+g_{21}D_y+g_{31}D_z+p_{11}B_x+p_{21}B_y+p_{31}B_z,$$

$$\varepsilon_y=s_{12}\sigma_x+s_{22}\sigma_y+s_{23}\sigma_z+s_{24}\tau_{yz}+s_{25}\tau_{xz}+s_{26}\tau_{xy}+$$
$$+g_{12}D_x+g_{22}D_y+g_{32}D_z+p_{12}B_x+p_{22}B_y+p_{32}B_z,$$

$$\varepsilon_z=s_{13}\sigma_x+s_{23}\sigma_y+s_{33}\sigma_z+s_{34}\tau_{yz}+s_{35}\tau_{xz}+s_{36}\tau_{xy}+$$
$$+g_{13}D_x+g_{23}D_y+g_{33}D_z+p_{13}B_x+p_{23}B_y+p_{33}B_z,$$

$$\gamma_{yz}=s_{14}\sigma_x+s_{24}\sigma_y+s_{34}\sigma_z+s_{44}\tau_{yz}+s_{45}\tau_{xz}+s_{46}\tau_{xy}+$$
$$+g_{14}D_x+g_{24}D_y+g_{34}D_z+p_{14}B_x+p_{24}B_y+p_{34}B_z,$$

$$\gamma_{xz}=s_{15}\sigma_x+s_{25}\sigma_y+s_{35}\sigma_z+s_{45}\tau_{yz}+s_{55}\tau_{xz}+s_{56}\tau_{xy}+$$
$$+g_{15}D_x+g_{25}D_y+g_{35}D_z+p_{15}B_x+p_{25}B_y+p_{35}B_z,$$

$$\gamma_{xy}=s_{16}\sigma_x+s_{26}\sigma_y+s_{36}\sigma_z+s_{46}\tau_{yz}+s_{56}\tau_{xz}+s_{66}\tau_{xy}+$$
$$+g_{16}D_x+g_{26}D_y+g_{36}D_z+p_{16}B_x+p_{26}B_y+p_{36}B_z,$$

$$E_x=-g_{11}\sigma_x-g_{12}\sigma_y-g_{13}\sigma_z-g_{14}\tau_{yz}-g_{15}\tau_{xz}-g_{16}\tau_{xy}+$$
$$+\beta_{11}D_x+\beta_{12}D_y+\beta_{13}D_z+\nu_{11}B_x+\nu_{12}B_y+\nu_{13}B_z,$$

$$E_y=-g_{21}\sigma_x-g_{22}\sigma_y-g_{23}\sigma_z-g_{24}\tau_{yz}-g_{25}\tau_{xz}-g_{26}\tau_{xy}+$$
$$+\beta_{12}D_x+\beta_{22}D_y+\beta_{23}D_z+\nu_{12}B_x+\nu_{22}B_y+\nu_{23}B_z,$$

$$E_z=-g_{31}\sigma_x-g_{32}\sigma_y-g_{33}\sigma_z-g_{34}\tau_{yz}-g_{35}\tau_{xz}-g_{36}\tau_{xy}+$$
$$+\beta_{13}D_x+\beta_{23}D_y+\beta_{33}D_z+\nu_{13}B_x+\nu_{23}B_y+\nu_{33}B_z,$$

$$H_x=-p_{11}\sigma_x-p_{12}\sigma_y-p_{13}\sigma_z-p_{14}\tau_{yz}-p_{15}\tau_{xz}-p_{16}\tau_{xy}+$$
$$+\nu_{11}D_x+\nu_{12}D_y+\nu_{13}D_z+\chi_{11}B_x+\chi_{12}B_y+\chi_{13}B_z,$$

$$H_y=-p_{21}\sigma_x-p_{22}\sigma_y-p_{23}\sigma_z-p_{24}\tau_{yz}-p_{25}\tau_{xz}-p_{26}\tau_{xy}+$$

$$+\nu_{12}D_x+\nu_{22}D_y+\nu_{23}D_z+\chi_{12}B_x+\chi_{22}B_y+\chi_{23}B_z,$$

$$H_z=-p_{31}\sigma_x-p_{32}\sigma_y-p_{33}\sigma_z-p_{34}\tau_{yz}-p_{35}\tau_{xz}-p_{36}\tau_{xy}+$$

$$+\nu_{13}D_x+\nu_{23}D_y+\nu_{33}D_z+\chi_{13}B_x+\chi_{23}B_y+\chi_{33}B_z, \qquad (2.4)$$

соотношений Коши для малых деформаций и потенциальности электрического и магнитного полей

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$H_x=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad H_y=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad H_z=-\frac{\partial\psi}{\partial z}. \qquad (2.5)$$

Здесь s_{ij} – коэффициенты деформации материала, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей, g_{ij} и p_{ij} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях, β_{ij}, χ_{ij}, ν_{ij} – соответственно коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей, измеренные при постоянных напряжениях; φ и ψ – потенциалы электрического и магнитного полей.

Систему уравнений (2.1) – (2.5) нужно интегрировать при заданных на границе условиях. В частности, если на границе заданы внешние усилия X_n, Y_n, Z_n и индукции D_n, B_n, то краевые условия имеют вид

$$\sigma_x\cos(nx)+\tau_{xy}\cos(ny)+\tau_{xz}\cos(nz)=X_n,$$

$$\tau_{xy}\cos(nx)+\sigma_y\cos(ny)+\tau_{yz}\cos(nz)=Y_n,$$

$$\tau_{xz}\cos(nx)+\tau_{yz}\cos(ny)+\sigma_z\cos(nz)=Z_n,$$

$$D_x\cos(nx)+D_y\cos(ny)+D_z\cos(nz)=D_n,$$

$$B_x \cos(nx) + B_y \cos(ny) + B_z \cos(nz) = B_n . \tag{2.6}$$

Аналогичные условия имеют место в других случаях.

Кроме соотношений (2.1) – (2.5), должны выполняться уравнения совместности Сен-Венана [105]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y\, \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial z\, \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x\, \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\, \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right] = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \tag{2.7}$$

Решив систему (2.1) – (2.5), найдём напряжения, деформации, перемещения, индукции и напряжённости электрического и магнитного полей в любой точке тела.

2.2. Гипотезы прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит

Рассмотрим тонкую пластинку из пьезоматериала постоянной толщины $2h$, отнесенную к прямоугольной системе координат $Oxyz$ с плоскостью Oxy, совпадающей со срединной плоскостью плиты (рисунок 2.1), и находящуюся под действием нормальных усилий $\sigma_z = -q(x, y)$ по верхнему основанию и произвольных внешних воздействий по боковой поверхности так, что ее срединная плоскость искривляется. Такую пластинку принято называть тонкой плитой.

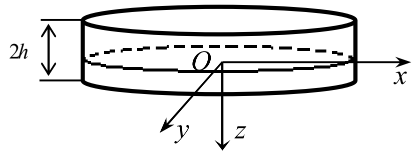


Рисунок 2.1

Обозначим занимаемую срединной плоскостью плиты область через S и будем считать, что имеют место гипотезы Кирхгоффа [178, 179]:

1. В каждой точке плиты имеется плоскость материальной симметрии, параллельная срединной плоскости.

2. Прямолинейные отрезки, нормальные к срединной плоскости до деформации, при изгибе плиты остаются прямолинейными и нормальными к изогнутой срединной поверхности и не меняют своей длины.

3. Срединная поверхность плиты является нерастяжимой, т. е. при $z = 0$ перемещения u и v равны нулю;

4. Влияние взаимодействия продольных слоев плиты на удлинения и сдвиги материальных волокон, лежащих в этих слоях, малы и ими можно пренебречь, в связи с чем напряжениями σ_z можно пренебречь.

Дополним эти гипотезы гипотезами на электромагнитные свойства [51]: компоненты векторов электрической и магнитной индукций по толщине и на основаниях равны нулю ($D_z = B_z = 0$).

Исходя из принятых гипотез, как и в классической теории изгиба тонких плит [78], получим, что перемещения w по оси, перпендикулярной срединной плоскости плиты (прогиб плиты) зависят только координат в срединной плоскости плиты $w = w(x, y)$, а для остальных перемещений имеют место равенства $u = -z\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $v = -z\dfrac{\partial w}{\partial y}$. Следовательно, для деформаций имеют место равенства

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{2.8}$$

по аналогии с которыми электрический и магнитный потенциалы выберем линейными функциями от z [51]:

$$\varphi(x,y)=z\varphi_0(x,y),$$

$$\psi(x,y)=z\psi_0(x,y), \tag{2.9}$$

где $\varphi_0(x,y)$, $\psi_0(x,y)$ – функции координат в срединной плоскости, называемые в дальнейшем плотностями потенциалов электрического и магнитного полей по толщине плиты. Тогда для напряженностей будем иметь

$$E_x=-z\frac{\partial\varphi_0(x,y)}{\partial x},\quad E_y=-z\frac{\partial\varphi_0(x,y)}{\partial y},\quad E_z=-\varphi_0(x,y),$$

$$H_x=-z\frac{\partial\psi_0(x,y)}{\partial x},\quad H_y=-z\frac{\partial\psi_0(x,y)}{\partial y},\quad H_z=\psi_0(x,y), \tag{2.10}$$

т. е. компоненты E_x, E_y, H_x, H_y являются нечетными функциями толщиной координаты z, а компоненты E_z, H_z не зависят от этой координаты. На основании уравнений состояния такие же связи получаются для компонент векторов индукций:

$$D_x=zD_x(x,y),\quad D_y=zD_y(x,y),\quad D_z=D_z(x,y),$$

$$B_x=zB_x(x,y),\quad B_y=zB_y(x,y),\quad B_z=B_z(x,y). \tag{2.11}$$

Учитывая это, уравнения (2.2) перепишем в виде

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}=0. \tag{2.12}$$

В силу наличия плоскости материальной симметрии плиты уравнения электромагнитоупругого состояния примут вид [51]

$$\varepsilon_x=s_{11}\sigma_x+s_{12}\sigma_y+s_{16}\tau_{xy}+g_{11}D_x+g_{21}D_y+p_{11}B_x+p_{21}B_y,$$

$$\varepsilon_y=s_{12}\sigma_x+s_{22}\sigma_y+s_{26}\tau_{xy}+g_{12}D_x+g_{22}D_y+p_{12}B_x+p_{22}B_y,$$

$$\gamma_{xy}=s_{16}\sigma_x+s_{26}\sigma_y+s_{66}\tau_{xy}+g_{16}D_x+g_{26}D_y+p_{16}B_x+p_{26}B_y,$$

$$E_x=-g_{11}\sigma_x-g_{12}\sigma_y-g_{16}\tau_{xy}+\beta_{11}D_x+\beta_{12}D_y+\nu_{11}B_x+\nu_{12}B_y,$$

$$E_y=-g_{21}\sigma_x-g_{22}\sigma_y-g_{26}\tau_{xy}+\beta_{12}D_x+\beta_{22}D_y+\nu_{12}B_x+\nu_{22}B_y,$$

$$H_x=-p_{11}\sigma_x-p_{12}\sigma_y-p_{16}\tau_{xy}+\nu_{11}D_x+\nu_{12}D_y+\chi_{11}B_x+\chi_{12}B_y,$$

$$H_y = -p_{21}\sigma_x - p_{22}\sigma_y - p_{26}\tau_{xy} + \nu_{12}D_x + \nu_{22}D_y + \chi_{12}B_x + \chi_{22}B_y, \qquad (2.13)$$

из которого следует вторая форма записи этих уравнений

$$\sigma_x = b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y + b_{16}\gamma_{xy} + c_{g11}E_x + c_{g21}E_y + c_{p11}H_x + c_{p21}H_y,$$

$$\sigma_y = b_{12}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y + b_{26}\gamma_{xy} + c_{g12}E_x + c_{g22}E_y + c_{p12}H_x + c_{p22}H_y,$$

$$\tau_{xy} = b_{16}\varepsilon_x + b_{26}\varepsilon_y + b_{66}\gamma_{xy} + c_{g16}E_x + c_{g26}E_y + c_{p16}H_x + c_{p26}H_y,$$

$$D_x = -c_{g11}\varepsilon_x - c_{g12}\varepsilon_y - c_{g16}\gamma_{xy} + c_{\beta11}E_x + c_{\beta12}E_y + c_{\nu11}H_x + c_{\nu12}H_y,$$

$$D_y = -c_{g21}\varepsilon_x - c_{g22}\varepsilon_y - c_{g26}\gamma_{xy} + c_{\beta12}E_x + c_{\beta22}E_y + c_{\nu12}H_x + c_{\nu22}H_y,$$

$$B_x = -c_{p11}\varepsilon_x - c_{p12}\varepsilon_y - c_{p16}\gamma_{xy} + c_{\nu11}E_x + c_{\nu12}E_y + c_{\chi11}H_x + c_{\chi12}H_y,$$

$$B_y = -c_{p21}\varepsilon_x - c_{p22}\varepsilon_y - c_{p26}\gamma_{xy} + c_{\nu12}E_x + c_{\nu22}E_y + c_{\chi12}H_x + c_{\chi22}H_y, \qquad (2.14)$$

где коэффициенты связи получаются как элементы обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{16} & c_{g11} & c_{g21} & c_{p11} & c_{p21} \\ b_{12} & b_{22} & b_{26} & c_{g12} & c_{g22} & c_{p12} & c_{p22} \\ b_{16} & b_{26} & b_{66} & c_{g16} & c_{g26} & c_{p16} & c_{p26} \\ -c_{g11} & -c_{g12} & -c_{g16} & c_{\beta11} & c_{\beta12} & c_{\nu11} & c_{\nu12} \\ -c_{g21} & -c_{g22} & -c_{g26} & c_{\beta12} & c_{\beta22} & c_{\nu12} & c_{\nu22} \\ -c_{p11} & -c_{p12} & -c_{p16} & c_{\nu11} & c_{\nu12} & c_{\chi11} & c_{\chi12} \\ -c_{p21} & -c_{p22} & -c_{p26} & c_{\nu12} & c_{\nu22} & c_{\chi12} & c_{\chi22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & \nu_{11} & \nu_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & \nu_{12} & \nu_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & \nu_{11} & \nu_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & \nu_{12} & \nu_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \qquad (2.15)$$

Учитывая выражения (2.8), (2.10), из формул (2.14) получим

$$\sigma_x = -z\tilde{\sigma}_x, \quad \sigma_y = -z\tilde{\sigma}_y, \quad \tau_{xy} = -z\tilde{\tau}_{xy},$$

$$D_x = -z\tilde{D}_x, \quad D_y = -z\tilde{D}_y,$$

$$B_x = -z\tilde{B}_x, \quad B_y = -z\tilde{B}_y, \qquad (2.16)$$

где

$$\tilde{\sigma}_x = b_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g11}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{g21}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} -$$

$$-c_{p11}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{p21}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{\sigma}_y = b_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{g22}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} -$$

$$-c_{p12}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{p22}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = b_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{g16}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{g26}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} -$$

$$-c_{p16}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{p26}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{D}_x = -c_{g11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{g16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{g12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{\beta 11}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{\beta 12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} -$$

$$-c_{\nu 11}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{\nu 12}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{D}_y = -c_{g21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{g26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{g22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{\beta 12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{\beta 22}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} -$$

$$-c_{\nu 12}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{\nu 22}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{B}_x = -c_{p11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{p16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{p12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{\nu 11}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{\nu 12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} -$$

$$-c_{\chi 11}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{\chi 12}\frac{\partial \psi_0}{\partial y},$$

$$\tilde{B}_y = -c_{p21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c_{p26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - c_{p22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - c_{\nu 12}\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - c_{\nu 22}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} -$$

$$-c_{\chi 12}\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - c_{\chi 22}\frac{\partial \psi_0}{\partial y}. \qquad (2.17)$$

Учитывая выражения (2.16), из первых двух уравнений (2.1) найдем

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = z\left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = z\left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y}\right).$$

Проинтегрировав эти равенства по z, получим

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} \right) + A_1(x, y),$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2} z^2 \left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} \right) + A_2(x, y). \tag{2.18}$$

Учитывая, что напряжения (2.18) на основаниях плиты должны удовлетворять условиям

$$\sigma_z = -q(x, y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = -h,$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{при } z = h, \tag{2.19}$$

для функций $A_1(x, y)$ и $A_2(x, y)$ найдем выражения

$$A_1(x, y) = -\frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} \right),$$

$$A_2(x, y) = -\frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} \right).$$

Тогда из формул (2.18) с учетом (2.17) получим равенства

$$\tau_{xz} = \frac{z^2 - h^2}{2} \left[b_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3b_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(b_{12} + 2b_{66} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + b_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right.$$

$$- c_{g11} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \left(c_{g21} + c_{g16} \right) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - c_{g26} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} -$$

$$\left. - c_{p11} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \left(c_{p21} + c_{p16} \right) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - c_{p26} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right],$$

$$\tau_{yz} = \frac{z^2 - h^2}{2} \left[b_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(b_{12} + 2b_{66} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3b_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + b_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right.$$

$$- c_{g16} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \left(c_{g12} + c_{g26} \right) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - c_{g22} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} -$$

$$\left. - c_{p16} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \left(c_{p12} + c_{p26} \right) \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - c_{p22} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right], \tag{2.20}$$

из которых видно, что напряжения τ_{xz}, τ_{yz} по толщине плиты изменяются по закону квадратичной параболы, принимая наибольшие значения в точках ее срединной плоскости и обращаясь в нуль на основаниях плиты.

2.3. Выражения основных характеристик ЭМУС через прогиб плиты и плотности потенциалов

Интегрированием по толщине плиты соответствующих основных (на основных площадках) напряжений и индукций, а также плотностей потенциалов электрического и магнитного полей, введем основные механические и электромагнитные моменты и перерезывающие силы

$$M_x = \int_{-h}^{h} z\sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h}^{h} z\sigma_y dz, \quad H_{xy} = \int_{-h}^{h} z\tau_{xy} dz,$$

$$N_x = \int_{-h}^{h} \tau_{xz} dz, \quad N_y = \int_{-h}^{h} \tau_{yz} dz,$$

$$M_{dx} = \int_{-h}^{h} zD_x dz, \quad M_{dy} = \int_{-h}^{h} zD_y dz,$$

$$M_{bx} = \int_{-h}^{h} zB_x dz, \quad M_{by} = \int_{-h}^{h} zB_y dz, \tag{2.21}$$

$$\mathrm{M}_{\varphi} = \int_{-h}^{h} z\varphi dz, \quad \mathrm{M}_{\psi} = \int_{-h}^{h} z\psi dz. \tag{2.22}$$

Подставив в равенства (2.21) и (2.22), выражения (2.17), (2.20) и (2.9), и проинтегрировав по толщине плиты, для моментов напряжений, индукций, потенциалов, а также перерезывающих сил найдем выражения [51]

$$M_x = \int_{-h}^{h} z\sigma_x dz = \frac{2}{3}h^3\tilde{\sigma}_x = -\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right.$$

$$-C_{g11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-C_{g21}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-C_{p11}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}-C_{p21}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Bigg),$$

$$M_y=-\Bigg(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-$$

$$-C_{g12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-C_{g22}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-C_{p12}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}-C_{p22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Bigg),$$

$$H_{xy}=-\Bigg(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-$$

$$-C_{g16}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}-C_{g26}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}-C_{p16}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}-C_{p26}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\Bigg); \qquad (2.23)$$

$$M_{dx}=C_{g11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{g16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{g12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+C_{\beta 11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+C_{\beta 12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+C_{\nu 11}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+C_{\nu 12}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$$M_{dy}=C_{g21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{g26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{g22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+C_{\beta 12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+C_{\beta 22}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+C_{\nu 12}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+C_{\nu 22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$$M_{bx}=C_{p11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{p16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{p12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+C_{\nu 11}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+C_{\nu 12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+C_{\chi 11}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+C_{\chi 12}\frac{\partial\psi_0}{\partial y},$$

$$M_{by}=C_{p21}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2C_{p26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+C_{p22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+C_{\nu 12}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+C_{\nu 22}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}+C_{\chi 12}\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+C_{\chi 22}\frac{\partial\psi_0}{\partial y}; \qquad (2.24)$$

$$\mathrm{M}_\varphi=D_0\varphi_0, \quad \mathrm{M}_\psi=D_0\psi_0; \qquad (2.25)$$

$$N_x = -\left[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right.$$

$$-C_{g11}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \left(C_{g21} + C_{g16}\right)\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g26}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} -$$

$$\left. -C_{p11}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \left(C_{p21} + C_{p16}\right)\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p26}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right],$$

$$N_y = -\left[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \right.$$

$$-C_{g16}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} - \left(C_{g12} + C_{g26}\right)\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - C_{g22}\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} -$$

$$\left. -C_{p16}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} - \left(C_{p12} + C_{p26}\right)\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x \partial y} - C_{p22}\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right], \quad (2.26)$$

где $D_{ij} = b_{ij} D_0$ – упругие жесткости плиты; $C_{gij} = c_{gij} D_0$, $C_{pij} = c_{pij} D_0$, $C_{\beta ij} = c_{\beta ij} D_0$, $C_{\nu ij} = c_{\nu ij} D_0$, $C_{\chi ij} = c_{\chi ij} D_0$ – электромагнитные жесткости плиты; $D_0 = \frac{2}{3}h^3$ – постоянная, зависящая от толщины плиты.

Сравнивая соотношения (2.16), (2.23), (2.26) и (2.24), найдем выражения напряжений и индукций через моменты и перерезывающие силы:

$$\sigma_x = \frac{3M_x}{2h^3}z, \quad \sigma_y = \frac{3M_y}{2h^3}z, \quad \tau_{xy} = \frac{3H_{xy}}{2h^3}z,$$

$$\tau_{xz} = \frac{3N_x}{4h^3}\left(h^2 - z^2\right), \quad \tau_{yz} = \frac{3N_y}{4h^3}\left(h^2 - z^2\right),$$

$$D_x = \frac{3M_{dx}}{2h^3}z, \quad D_y = \frac{3M_{dy}}{2h^3}z,$$

$$B_x = \frac{3M_{bx}}{2h^3}z, \quad B_y = \frac{3M_{by}}{2h^3}z. \quad (2.27)$$

Для напряжений и индукций на произвольных площадках с нормалью n и касательной s имеют место формулы [105]

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 nx + \sigma_y \cos^2 ny + 2\tau_{xy} \cos nx \cos ny,$$

$$\tau_{ns} = \left(\sigma_y - \sigma_x\right) \cos nx \cos ny + \tau_{xy} \left(\cos^2 nx - \cos^2 ny\right),$$

$$\tau_{nz} = \tau_{xz} \cos nx + \tau_{yz} \cos ny,$$

$$D_n = D_x \cos nx + D_y \cos ny,$$

$$B_n = B_x \cos nx + B_y \cos ny, \tag{2.28}$$

на основании которых введем силовые и индукционные моменты, крутящий силовой момент и перерезывающую силу на площадке с нормалью n

$$M_n = \int_{-h}^{h} z\sigma_n dz, \quad H_{ns} = \int_{-h}^{h} z\tau_{ns} dz, \quad N_n = \int_{-h}^{h} \tau_{nz} dz,$$

$$M_{dn} = \int_{-h}^{h} zD_n dz, \quad M_{bn} = \int_{-h}^{h} zB_n dz \tag{2.29}$$

и для них на основании выражений (2.28), (2.29) найдем

$$M_n = M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny,$$

$$M_s = M_x \cos^2 ny + M_y \cos^2 nx - 2H_{xy} \cos nx \cos ny,$$

$$H_{ns} = \left(M_y - M_x\right) \cos nx \cos ny + H_{xy} \left(\cos^2 nx - \cos^2 ny\right); \tag{2.30}$$

$$N_n = N_{xz} \cos nx + N_{yz} \cos ny; \tag{2.31}$$

$$M_{dn} = M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny,$$

$$M_{bn} = M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny. \tag{2.32}$$

Таким образом, если известны функции прогиба w и плотности потенциалов электрического поля φ_0 и магнитного поля ψ_0 по толщине плиты, то можно в любой точке плиты найти потенциалы (2.9), моменты напряжений (2.23), перерезывающие силы (2.26) и моменты индукций (2.24) на основных площадках, а по ним и моменты (2.30), (2.32) и перерезывающие силы (2.31) на любых площадках с нормалью n. По известным моментам и перерезывающим силам можно по формулам (2.27) найти напряжения и индукции в любой точке плиты.

2.4. Краевые задачи теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит

В процессе преобразований в предыдущем пункте были использованы первые два уравнения системы уравнений равновесия (2.1). Оставшееся третье уравнение этой системы и уравнения (2.12) запишем в виде

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0. \qquad (2.33)$$

Используя зависимости (2.27), первое уравнение системы (2.33) запишем в виде

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{3}{4h^3}\left(z^2 - h^2\right)\Phi(x, y), \qquad (2.34)$$

где $\Phi(x, y) = \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y}$. Проинтегрировав соотношение (2.34) по z, получим

$$\sigma_z = \frac{3}{4h^3}\left[\frac{z^3}{3} - h^2 z\right]\Phi(x, y) + A_1(x, y). \qquad (2.35)$$

Из равенства (2.35) и условия на нижнем основании плиты ($\sigma_z = 0$ при $z = h$) найдем, что

$$A_1(x, y) = \frac{1}{2}\Phi(x, y).$$

Подставив это значение снова в (2.35), из условия на верхнем основании плиты ($\sigma_z = -q(x, y)$ при $z = -h$), найдем

$$q(x, y) = -\Phi(x, y) = -\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y}\right).$$

Подставляя во второе уравнение системы (2.33) значения D_x, D_y с учетом формул (2.16) и (2.17) или все равно что (2.27), найдем равенство

$$z\left(\frac{\partial M_{dx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{dy}}{\partial y}\right)\frac{3}{2h^3}=0,$$

которое должно выполняться при любых значениях координаты z. Следовательно, $\frac{\partial M_{dx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{dy}}{\partial y}=0$. Таким же образом преобразуем третье уравнение системы (2.33).

Окончательно систему уравнений (2.33) запишем так [53]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=-q\left(x,y\right),$$

$$\frac{\partial M_{dx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{dy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial M_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{by}}{\partial y}=0. \tag{2.36}$$

Подставив в эти уравнения выражения (2.26) и (2.24), найдем

$$L_{4s}\,w+L_{3g}\varphi_0+L_{3p}\psi_0=q(x,y),$$

$$L_{3g}\,w+L_{2\beta}\varphi_0+L_{2\nu}\psi_0=0,$$

$$L_{3p}w+L_{2\nu}\varphi_0+L_{2\chi}\psi_0=0; \tag{2.37}$$

где

$$L_{4s}=-\left(D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\right.$$

$$\left.+4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right),$$

$$L_{3g}=C_{g11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\left(C_{g21}+2C_{g16}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\left(C_{g12}+2C_{g26}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+$$

$$+C_{g22}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{3p}=C_{p11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\left(C_{p21}+2C_{p16}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}+\left(C_{p12}+2C_{p26}\right)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}+$$

$$+C_{p22}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_{2\beta}=C_{\beta11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2C_{\beta12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C_{\beta22}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{2\nu}=C_{\nu11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2C_{\nu12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C_{\nu22}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{2\chi}=C_{\chi11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2C_{\chi12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C_{\chi22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (2.38)$$

Систему дифференциальных уравнений (2.37) нужно решать при определенных краевых условиях на боковой поверхности плиты. Рассмотрим основные виды краевых условий.

Электромагнитные краевые условия. На краю плиты должны задаваться механические и электромагнитные краевые условия. В качестве электромагнитных условий могут задаваться моменты индукций $M_{dn}=m_d(s)$, $M_{bn}=m_b(s)$ или моменты плотностей потенциалов электромагнитного поля $\mathrm{M}_\varphi=D_0\varphi_0(x,y)$, $\mathrm{M}_\psi=D_0\psi_0(x,y)$. В случае контакта двух плит (например, плиты с электромагнитоупругим включением) в краевые условия будут входить и те и другие.

Механические краевые условия. Что касается механических граничных условий, они зависят от способа загружения и закрепления контуров. Приведем их для некоторых способов загружения и закрепления.

Край, загруженный распределенными моментами и поперечными усилиями. В этом случае на краю плиты заданные воздействия представим как действие поперечных усилий $p(s)$, изгибающих и скручивающих моментов $m(s)$, $h(s)$ [53]

$$M_n=m(s),\quad H_{ns}=h(s),\quad N_n=p(s). \qquad (2.39)$$

В этом случае граничные условия принимают вид

$$M_x\cos nx+\left(H_{xy}-I\right)\cos ny=m(s)\cos nx-\left(r(s)+c\right)\cos ny,$$

$$\left(H_{xy}+I\right)\cos nx+M_y\cos ny=m(s)\cos ny+\left(r(s)+c\right)\cos nx, \qquad (2.40)$$

где

$$I(s)=\int_0^s N_n ds, \quad r(s)=\int_0^s p(s)ds, \tag{2.41}$$

c – вещественная постоянная.

Если край плиты свободен от внешних воздействий, то в этих равенствах нужно принять $m(s)=p(s)=r(s)=0$.

Деформированный край. Пусть на краю плиты заданы прогиб и его производная по нормали (угол наклона изогнутой срединной поверхности к плоскости Oxy). В этом случае граничные условия имеют вид [53]

$$w=w^*(s), \quad \frac{dw}{dn}=\left(\frac{dw}{dn}\right)^*, \tag{2.42}$$

где $w^*(s)$, $\left(\frac{dw}{dn}\right)^*$ – заданные на границе значения прогиба и его производной по нормали. Эти условия можно записать в виде

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\left(\frac{dw}{dn}\right)^*\cos nx+\frac{\partial w^*}{\partial x}\cos^2 ny-\frac{\partial w^*}{\partial y}\cos nx\cos ny,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\left(\frac{dw}{dn}\right)^*\cos ny-\frac{\partial w^*}{\partial x}\cos nx\cos ny+\frac{\partial w^*}{\partial y}\cos^2 nx. \tag{2.43}$$

Если край плиты жестко подкреплен, то при деформации он может поворачиваться как жесткое целое. Поэтому точки контура будут находиться в одной плоскости – плоскости жесткого края, т.е. функция прогиба на краю должна удовлетворять условию $w=c_1x+c_2y+c_0$, откуда следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x}=c_1, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=c_2. \tag{2.44}$$

Здесь c_1, c_2 – вещественные постоянные, характеризующие углы поворота жесткого края относительно осей x и y соответственно.

Если край плиты жёстко защемлен (прогиб его точек и угол наклона изогнутой срединной поверхности к плоскости Oxy равен нулю), то $w^* = 0$, $\left(\dfrac{dw}{dn}\right)^* = 0$, и из (2.44) следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{2.45}$$

Опертый край, загруженный изгибающими моментами. В этом случае на границе заданы изгибающие моменты, а прогиб равен нулю [53]

$$w = 0, \quad M_n = m(s), \tag{2.46}$$

где $m(s)$ – интенсивность силовых изгибающих моментов. Эти условия с учётом первого равенства (2.30) перепишем в виде:

$$\begin{gathered} w = 0, \\ M_x \cos^2 nx + M_y \cos^2 ny + 2H_{xy} \cos nx \cos ny = m(s). \end{gathered} \tag{2.47}$$

Если опертый край плиты не загружен моментами (свободно оперт), то в этих условиях нужно принять $m(s) = 0$.

Идеальный контакт плиты с упругим включением. Пусть плита с областью S (в срединной плоскости) идеально контактирует с упругим включением с областью $S^{(l)}$ так, что точки контакта перемещаются совместно. В этом случае в точках контакта равны друг другу прогибы w, $w^{(l)}$, а углы поворотов по нормали, перерезывающие силы, а также моменты от нормальных напряжений σ_n и векторов индукций D_n, B_n:

$$\begin{gathered} w = w^{(l)}, \quad \frac{dw}{dn} = \frac{dw^{(l)}}{dn^{(l)}}, \\ N_n + \frac{\partial H_{ns}}{\partial s} = N_n^{(l)} + \frac{\partial H_{ns}^{(l)}}{\partial s^{(l)}}, \\ M_n = M_n^{(l)}, \\ M_\varphi = M_\varphi^{(l)}, \quad M_\psi = M_\psi^{(l)}, \\ M_{dn} = M_{dn}^{(l)}, \quad M_{bn} = M_{bn}^{(l)}, \end{gathered} \tag{2.48}$$

где величины с индексом (l) вверху относятся к включению $S^{(l)}$. Преобразуя первые два уравнения системы (2.48) таким же образом, как это сделано для заданных на краю плиты прогиба и углов поворота по нормали (см. формулы (2.42) – (2.43)), а последние 7 и 8 уравнения системы (2.48) таким же образом, как это сделано при выводе формул (2.40), получаем

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w^{(l)}}{\partial y} = 0,$$

$$M_x \cos nx + \left(H_{xy} - I\right)\cos ny - M_x^{(l)} \cos nx -$$

$$-\left(H_{xy}^{(l)} - I^{(l)}\right)\cos ny = c \cos ny,$$

$$\left(H_{xy} + I\right)\cos nx + M_y \cos ny - \left(H_{xy}^{(l)} + I^{(l)}\right)\cos nx +$$

$$-M_y^{(l)} \cos ny = -c \cos nx,$$

$$M_\varphi - M_\varphi^{(l)} = 0, \quad M_\psi - M_\psi^{(l)} = 0,$$

$$M_{dx} \cos nx + M_{dy} \cos ny - M_{dx}^{(l)} \cos nx - M_{dy}^{(l)} \cos ny = 0,$$

$$M_{bx} \cos nx + M_{by} \cos ny - M_{bx}^{(l)} \cos nx - M_{by}^{(l)} \cos ny = 0. \qquad (2.49)$$

Таким образом, решение задачи об изгибе плиты под действием механических сил и электромагнитных полей сводится к решению системы дифференциальных уравнений (2.37) при соответствующих условиях на краю плиты. После решения этой краевой задачи значения основных характеристик находятся по формулам (2.23) – (2.26).

2.5. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит

Операторными преобразованиями, аналогичными решению системы 3-х линейных алгебраических уравнений, решение системы (2.37) приведем к решению следующих 3-х уравнений в частных производных 8-го порядка относительно функций $w(x,\, y)$, $\varphi_0(x,\, y)$ и $\psi_0(x,\, y)$

$$\begin{vmatrix} L_{4s} & L_{3g} & L_{3p} \\ L_{3g} & L_{2\beta} & L_{2\nu} \\ L_{3p} & L_{2\nu} & L_{2\chi} \end{vmatrix} (w,\, \varphi_0,\, \psi_0) = 0\,, \tag{2.50}$$

где L_{ij} – операторы (2.38).

Решение первого уравнения (2.50) будем искать в виде произвольной некоторой функции W от линейной формы $x+\mu\, y$, т. е. в виде $w(x,y)=W(x+\mu\, y)$ [50]. Подставляя эту функцию в первое уравнение (2.50) и учитывая, что в силу ее произвольности производная $W^{VIII}(x+\mu\, y)$ не может тождественно равняться нулю при произвольных x и y, приходим к выводу, что равен нулю коэффициент при этой производной:

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0\,, \tag{2.51}$$

где $l_{ij}(\mu)$ – полиномы

$$l_{4s}(\mu) = -\Big(D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2\big(D_{12}+2D_{66}\big)\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11}\Big),$$

$$l_{3g}(\mu) = C_{g22}\mu^3 + \Big(C_{g12}+2C_{g26}\Big)\mu^2 + \Big(C_{g21}+2C_{g16}\Big)\mu + C_{g11},$$

$$l_{3p}(\mu) = C_{p22}\mu^3 + \Big(C_{p12}+2C_{p26}\Big)\mu^2 + \Big(C_{p21}+2C_{p16}\Big)\mu + C_{p11},$$

$$l_{2\beta}(\mu) = C_{\beta22}\mu^2 + 2C_{\beta12}\mu + C_{\beta11},$$

$$l_{2\nu}(\mu) = C_{\nu22}\mu^2 + 2C_{\nu12}\mu + C_{\nu11},$$

$$l_{2\chi}(\mu) = C_{\chi22}\mu^2 + 2C_{\chi12}\mu + C_{\chi11}\,. \tag{2.52}$$

Как и в задаче теории упругости анизотропного тела [90, 91], можно установить, что для реальных пьезоматериалов корни характеристического уравнения 8-го порядка (2.51) не могут быть вещественными, а являются обще комплексными или чисто мнимыми. Тогда в силу вещественности коэффициентов уравнения эти корни будут попарно сопряженными. Обозначим их через μ_k, $\overline{\mu_k}$ $(k=\overline{1,\,4})$, и будем рассматривать случай неравных корней. Этим корням соответствуют обобщенные комплексные переменные $z_k = x + \mu_k y$, $\overline{z}_k = x + \overline{\mu}_k y$ и функции от них $W_k\left(z_k\right)$ и $W_{k+4}\left(\overline{z}_k\right)$. Тогда общее решение первого уравнения (2.50) является суммой 8-ми функций от переменных z_k и $\overline{z}_k$ $(k=\overline{1,\,4})$. Аналогичным образом получаются решения для второго и третьего уравнений (2.50) с тем же характеристическим уравнением. Окончательно для всех трех уравнений найдем

$$w(x,\,y) = \sum_{k=1}^{4}\left[W_k\left(z_k\right) + W_{k+4}\left(\overline{z}_k\right)\right],$$

$$\varphi_0\left(x,\,y\right) = \sum_{k=1}^{4}\left[\Phi_k\left(z_k\right) + \Phi_{k+4}\left(\overline{z}_k\right)\right],$$

$$\psi_0\left(x,\,y\right) = \sum_{k=1}^{4}\left[\Psi_k\left(z_k\right) + \Psi_{k+4}\left(\overline{z}_k\right)\right], \tag{2.53}$$

где

$$z_k = x + \mu_k y = x_k + i y_k, \tag{2.54}$$

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \beta_k > 0,$$

$$x_k = x + \alpha_k y, \quad y_k = \beta_k y;$$

условие $\beta_k > 0$ принято для определенности при отборе μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 среди 8-ми корней уравнения (2.51).

Левые части равенств (2.53) являются вещественными функциями, и для выполнения этого условия для функций в правых частях примем $W_{k+4}\left(\overline{z}_k\right) = \overline{W_k}\left(\overline{z}_k\right) = \overline{W_k\left(z_k\right)}$, $\Phi_{k+4}\left(\overline{z}_k\right) = \overline{\Phi_k\left(z_k\right)}$, $\Psi_{k+4}\left(\overline{z}_k\right) = \overline{\Psi_k\left(z_k\right)}$. Тогда общие решения всех уравнений (2.50) запишутся в виде

$$w(x,\,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} W_k\left(z_k\right),$$

$$\varphi(x,\,y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} \Phi_k\left(z_k\right),$$

$$\psi(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\Psi_k(z_k), \tag{2.55}$$

где $W_k(z_k)$, $\Phi_k(z_k)$, $\Psi_k(z_k)$ $(k=\overline{1, 4})$ – аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_k = x + \mu_k y$. Но в силу того, что $w(x, y)$, $\varphi_0(x, y)$, $\psi_0(x, y)$ должны удовлетворять первоначальной общей системе уравнений (2.37) , между функциями $W_k(z_k)$, $\Phi_k(z_k)$, $\Psi_k(z_k)$ существуют некоторые связи. Примем, что

$$\Phi_k(z_k) = \nu_k W_k'(z_k), \quad \Psi_k(z_k) = \rho_k W_k'(z_k), \tag{2.56}$$

где ν_k, ρ_k – неизвестные постоянные. Подставляя выражения (2.56) в уравнения однородной системы (2.37) и учитывая (2.55), получаем

$$\begin{aligned}
&l_{4s}(\mu_k) + \nu_k\, l_{3g}(\mu_k) + \rho_k\, l_{3p}(\mu_k) = 0, \\
&l_{3g}(\mu_k) + \nu_k\, l_{2\beta}(\mu_k) + \rho_k\, l_{2\nu}(\mu_k) = 0, \\
&l_{3p}(\mu_k) + \nu_k\, l_{2\nu}(\mu_k) + \rho_k\, l_{2\chi}(\mu_k) = 0 \ \left(k=\overline{1, 4}\right).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Из 2-го и 3-го уравнений системы (2.57) находим

$$\nu_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}. \tag{2.58}$$

Здесь

$$\Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{1k} = \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}. \tag{2.59}$$

Подставив выражения (2.58) в первое уравнение системы (2.57), получим равенство

$$l_{4s}\Delta_{0k} + l_{3g}\Delta_{1k} + l_{3p}\Delta_{2k} = 0,$$

которое на основе характеристического уравнения (2.51) удовлетворяется тождественно.

Окончательно с учетом частного решения системы уравнений (2.37) для прогиба и плотностей потенциалов по толщине плиты получаем выражения

$$w(x,\ y) = w_0(x,\ y) + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} W_k(z_k); \tag{2.60}$$

$$\varphi_0(x,\ y) = \varphi_{00}(x,\ y) + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} \nu_k W_k'(z_k),$$

$$\psi_0(x,\ y) = \psi_{00}(x,\ y) + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} \rho_k W_k'(z_k), \tag{2.61}$$

где $w_0(x,y)$, $\varphi_{00}(x,y)$ и $\psi_{00}(x,y)$ – частное решение системы (2.37).

Выражение основных характеристик ЭМУС через комплексные потенциалы. Подставив функции (2.60), (2.61) в выражения основных характеристик (2.23) – (2.26), получим для этих характеристик получим следующие выражения [50]:

$$\left(M_x, M_y, H_{xy}\right) = \left(M_{0x}, M_{0y}, H_{0xy}\right) - 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k, q_k, r_k\right) W_k''(z_k),$$

$$p_k = D_{11} + 2D_{16}\mu_k + D_{12}\mu_k^2 - \left(C_{g11} + C_{g21}\mu_k\right)\nu_k - $$
$$-\left(C_{p11} + C_{p21}\mu_k\right)\rho_k,$$

$$q_k = D_{12} + 2D_{26}\mu_k + D_{22}\mu_k^2 - \left(C_{g12} + C_{g22}\mu_k\right)\nu_k - $$
$$-\left(C_{p11} + C_{p22}\mu_k\right)\rho_k,$$

$$r_k = D_{16} + 2D_{66}\mu_k + D_{26}\mu_k^2 - \left(C_{g16} + C_{g26}\mu_k\right)\nu_k - $$
$$-\left(C_{p16} + C_{p26}\mu_k\right)\rho_k; \tag{2.62}$$

$$\left(M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}\right) = \left(M_{0dx}, M_{0dy}, M_{0bx}, M_{0by}\right) + $$
$$+2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}\right) W_k''(z_k),$$

$$d_{xk} = C_{g11} + 2C_{g16}\mu_k + C_{g12}\mu_k^2 - \left(C_{\beta 11} + C_{\beta 12}\mu_k\right)\nu_k -$$

$$-\left(C_{\nu 11} + C_{\nu 12}\mu_k\right)\rho_k,$$

$$d_{yk} = C_{g21} + 2C_{g26}\mu_k + C_{g22}\mu_k^2 - \left(C_{\beta 12} + C_{\beta 22}\mu_k\right)\nu_k -$$

$$-\left(C_{\nu 12} + C_{\nu 22}\mu_k\right)\rho_k,$$

$$b_{xk} = C_{p11} + 2C_{p16}\mu_k + C_{p12}\mu_k^2 - \left(C_{\nu 11} + C_{\nu 12}\mu_k\right)\nu_k -$$

$$-\left(C_{\chi 11} + C_{\chi 12}\mu_k\right)\rho_k,$$

$$b_{yk} = C_{p21} + 2C_{p26}\mu_k + C_{p22}\mu_k^2 - \left(C_{\nu 12} + C_{\nu 22}\mu_k\right)\nu_k -$$

$$-\left(C_{\chi 12} + C_{\chi 22}\mu_k\right)\rho_k; \qquad (2.63)$$

$$\left(\mathrm{M}_{\varphi},\ \mathrm{M}_{\psi}\right) = \left(\mathrm{M}_{0\varphi},\ \mathrm{M}_{0\psi}\right) + D_0\left(\varphi_0,\ \psi_0\right); \qquad (2.64)$$

$$\left(N_x,\ N_y\right) = \left(N_{0x},\ N_{0y}\right) - 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(l_k,\ -s_k\right)W_k'''(z_k),$$

$$l_k = D_{11} + 3D_{16}\mu_k + \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\mu_k^2 + D_{26}\mu_k^3 -$$

$$-\left(C_{g11} + \left(C_{g21} + C_{g16}\right)\mu_k + C_{g26}\mu_k^2\right)\nu_k -$$

$$-\left(C_{p11} + \left(C_{p21} + C_{p16}\right)\mu_k + C_{p26}\mu_k^2\right)\rho_k,$$

$$s_k = -D_{16} - \left(D_{12} + 2D_{66}\right)\mu_k - 3D_{26}\mu_k^2 - D_{22}\mu_k^3 +$$

$$+\left(C_{g16} + \left(C_{g12} + C_{g26}\right)\mu_k + C_{g22}\mu_k^2\right)\nu_k +$$

$$+\left(C_{p16} + \left(C_{p12} + C_{p26}\right)\mu_k + C_{p22}\mu_k^2\right)\rho_k. \qquad (2.65)$$

Здесь величины со значком 0 в индексах относятся к частному решению и вычисляются по формулам (2.23) – (2.26), если в них вместо $w(x,\ y)$, $\varphi_0(x,\ y)$, $\psi_0(x,\ y)$ брать $w_0(x,\ y)$, $\varphi_{00}(x,\ y)$, $\psi_{00}(x,\ y)$. При этом можно показать, что

$$l_k - \mu_k s_k = d_{xk} + \mu_k d_{yk} = b_{xk} + \mu_k b_{yk} = 0,$$

откуда следуют равенства

$$l_k = \mu_k s_k,\quad d_{xk} = -\mu_k d_{yk},\quad b_{xk} = -\mu_k b_{yk}. \qquad (2.66)$$

Имеют место и связи

$$s_k - r_k = p_k / \mu_k, \quad s_k + r_k = -q_k \mu_k. \tag{2.67}$$

Кроме основных характеристик, дифференцируя первую функцию (2.60) по x и y, также найдем выражения для компонент углов поворотов

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(1, \mu_k\right) W_k'(z_k). \tag{2.68}$$

Граничные условия для определения комплексных потенциалов. Комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ должны удовлетворять определенным граничным условиям на краю плиты [50, 51]. Эти условия получаются из соответствующих условий для решения системы дифференциальных уравнений (2.37), если в них учитывать приведенные выше выражения для основных характеристик. Рассмотрим эти условия.

Электромагнитные граничные условия. На каждом из контуров L_l должны задаваться и механические и электромагнитные граничные условия. В качестве электромагнитных граничных условий на контуре L_l могут задаваться плотности по толщине потенциалов электромагнитного поля $\varphi_0(x, y) = \varphi_{0l}(x, y)$, $\psi_0(x, y) = \psi_{0l}(x, y)$ или моменты индукций $M_{dl} = m_{dl}$, $M_{bl} = m_{bl}$.

При задании потенциалов на основе (2.61) граничные условия будут такими:

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} \nu_k W_k'\left(z_k\right) = -\varphi_{0l}\left(x,\ y\right) - \varphi_{00}\left(x,\ y\right),$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} \rho_k W_k'\left(z_k\right) = -\psi_{0l}\left(x,\ y\right) - \psi_{00}\left(x,\ y\right). \tag{2.69}$$

Если же на контуре заданы моменты индукций, то на основе (2.63) граничные условия имеют вид [53]

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} d_{yk} W_k'(z_k) = M_{0d} \pm \int_0^s m_{dl}\, ds + c_{l5},$$

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} b_{yk} W_k'(z_k) = M_{0b} \pm \int_0^s m_{bl}\, ds + c_{l6}, \tag{2.70}$$

где

$$M_{0d} = \int_0^s \left(M_{0dx} \cos nx + M_{0dy} \cos ny \right) ds \, ,$$

$$M_{0b} = \int_0^s \left(M_{0bx} \cos nx + M_{0by} \cos ny \right) ds \, .$$

c_{l5}, c_{l6} – произвольные комплексные постоянные. В случае незагруженного края плиты нужно принять $m_{dl}(s) = m_{bl}(s) = 0$.

Что касается механических граничных условий, они зависят от способа загружения и закрепления контуров. Приведем их для основных способов загружения и закрепления.

Край плиты с контуром L_l *загружен внешними воздействиями* в виде изгибающих моментов $m_l(s)$ и поперечных усилий $p_l(s)$. В этом случае краевые условия для определения функций имеют вид (2.40) [50].

При обходе области по контуру L_l против часовой стрелки для направляющих косинусов имеем

$$\cos nx = \pm \frac{dy}{ds}, \quad \cos ny = \mp \frac{dx}{ds}, \tag{2.71}$$

или

$$\cos ny - \mu_k \cos nx = \mp \frac{dx + \mu_k dy}{ds} = \mp \frac{dz_k}{ds}, \tag{2.72}$$

где верхние знаки относятся к внешнему контуру (при положительном обходе области), нижние знаки – к контурам отверстий (при отрицательном обходе области). Учитывая это, из (2.62) и (2.65) получим [49, 50]:

$$N_n = N_{0x} \cos nx + N_{0y} \cos ny \mp 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} s_k W_k'''(z_k) \frac{dz_k}{ds}; \tag{2.73}$$

$$I = \int_0^s N_n ds = I_0 \mp 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} s_k W_k''(z_k),$$

$$I_0 = \int_0^s \left(N_{0x} \cos nx + N_{0y} \cos ny \right) ds ; \tag{2.74}$$

$$M_x \cos nx + \left(H_{xy} - I \right) \cos ny = M_{0x} \cos nx + \left(H_{0xy} - I_0 \right) \cos ny \pm$$

$$\pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{4} \frac{p_k}{\mu_k} W_k''(z_k) \frac{dz_k}{ds},$$

$$\left(H_{xy} + I \right) \cos nx + M_y \cos ny = \left(H_{0xy} + I_0 \right) \cos nx + M_{0y} \cos ny \pm$$

$$\pm 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{4} q_k W_k''(z_k) \frac{dz_k}{ds}. \tag{2.75}$$

Интегрируя условия (2.40) с учетом (2.75), получим краевые условия для случая загруженного края плиты

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{4} \frac{p_k}{\mu_k} W_k'(z_k) = I_{0xy1} \mp \int_0^s \left(m_l dy + f_l dx \right) - c_l x + c_{l1},$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{4} q_k W_k'(z_k) = I_{0xy2} \mp \int_0^s \left(m_l dx - f_l dy \right) + c_l y + c_{l2}, \tag{2.76}$$

где

$$I_{0xy1} = \int_0^s \left(M_{0x} \cos nx + \left(H_{0xy} - I_0 \right) \cos ny \right) ds,$$

$$I_{0xy2} = \int_0^s \left(\left(H_{0xy} + I_0 \right) \cos nx + M_{0y} \cos ny \right) ds,$$

$$f_l(s) = \int_0^s p_l(s) ds ; \tag{2.77}$$

c_l – вещественная, c_{l1}, c_{l2} – комплексные постоянные. Здесь, как и ранее, верхние знаки относятся к внешнему контуру L_0 области S, нижние – к контурам отверстий L_l; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки.

В случае незагруженного края плиты в равенствах (2.76) нужно принимать $m_l(s) = p_l(s) = 0$.

Если на краю плиты заданы прогиб w^* *и производная по нормали* $\left(dw/dn\right)^*$, то краевые условия имеют вид (2.43), из которого, учитывая выражения производных (2.68), получаем

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} W_k'(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(\frac{dw}{dn}\right)^* \cos nx +$$

$$+\frac{\partial w^*}{\partial x}\cos^2 ny - \frac{\partial w^*}{\partial y}\cos nx \cos ny\,,$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} \mu_k W_k'(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \left(\frac{dw}{dn}\right)^* \cos ny -$$

$$-\frac{\partial w^*}{\partial x}\cos nx \cos ny + \frac{\partial w^*}{\partial y}\cos^2 nx\,. \qquad (2.78)$$

Для случая жестко защемленного края плиты получаем

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} W_k'(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}\,,$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} \mu_k W_k'(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}\,. \qquad (2.79)$$

Если край плиты жестко подкреплен, то краевые условия будут такими:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} W_k'(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{l3}\,,$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} \mu_k W_k'(z_k) = -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{l4}\,, \qquad (2.80)$$

c_{l3}, c_{l4} – комплексные постоянные.

Если контур плиты оперт и загружен распределенными моментами интенсивности $m_l(s)$, то краевые условия имеют вид (2.47). Заменив прогиб и моменты через комплексные потенциалы и их производные, получим

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} W_k(z_k) = -w_0\,,$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}[p_k\cos^2 nx+q_k\cos^2 ny+2r_k\cos nx\cos ny]W_k''(z_k)=$$

$$=M_{0x}\cos^2 nx+M_{0y}\cos^2 ny+2H_{0xy}\cos nx\cos ny-m_l\left(s\right). \quad (2.81)$$

Если имеет место идеальный контакт плиты с упругим включением, то краевые условия для определения функций имеют вид (2.49) [51]. Подставив в (2.49) выражения производных (2.68) и моментов по формулам (2.62) и (2.63), найдем условия

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(g_{kli}W_k'(z_k)-g_{ki}^{(l)}W_k'^{(l)}(z_k)\right)=f_{li}\ \ (i=\overline{1,8}), \quad (2.82)$$

в которых

$$g_{kl1}=\frac{p_k}{\mu_k},\quad g_{kl2}=q_k,\quad g_{kl3}=1,\quad g_{kl4}=\mu_k,$$

$$g_{kl5}=d_{yk},\quad g_{kl6}=b_{yk},\quad g_{kl7}=\nu_k,\ g_{kl8}=\rho_k,$$

$$g_{k1}^{(l)}=\frac{p_k^{(l)}}{\mu_k^{(l)}},\quad g_{k2}^{(l)}=q_k^{(l)},\quad g_{k3}^{(l)}=1,\quad g_{k4}^{(l)}=\mu_k^{(l)},$$

$$g_{k5}^{(l)}=d_{yk}^{(l)},\quad g_{k6}^{(l)}=b_{yk}^{(l)},\quad g_{k7}^{(l)}=\nu_k^{(l)},\ g_{k8}^{(l)}=\rho_k^{(l)}; \quad (2.83)$$

$$f_{l1}=I_{0xy1}-I_{0xy1}^{(l)}-c_lx+c_{l1},\quad f_{l2}=I_{0xy2}-I_{0xy2}^{(l)}+c_ly+c_{l2},$$

$$f_{l3}=\frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial x}-\frac{\partial w_0}{\partial x},\quad f_{l4}=\frac{\partial w_0^{(l)}}{\partial y}-\frac{\partial w_0}{\partial y},$$

$$f_{15}=M_{0d}-M_{0d}^{(l)}+c_{l5},\quad f_{16}=M_{0b}-M_{0b}^{(l)}+c_{l6};$$

$$f_{l7}=c_{l7},\quad f_{l8}=c_{l8}. \quad (2.84)$$

2.6. Общий вид комплексных потенциалов для многосвязной области

Пусть срединная плоскость плиты занимает конечную многосвязную область S, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами отверстий

$L_l\left(l=\overline{1,\,\mathcal{L}}\right)$ (рисунок 2.2). В этой многосвязной области, как функции двух переменных x, y определены все основные характеристики изгиба плиты: прогиб, углы поворотов относительно осей координат, моменты плотностей по толщине потенциалов, силовые изгибающие, скручивающие моменты, индукционные моменты и перерезывающая сила. По своей физической сути все эти функции являются непрерывными и однозначными. Эти величины выражаются через частное решение $w_0(x,\,y)$ и комплексные потенциалы $W_k(z_k)$ с их производными. Будем считать, что частное решение $w_0(x,\,y)$ и его производные обладают такими свойствами и остается накладывать соответствующие ограничения на комплексные потенциалы $W_k(z_k)$, определенные в многосвязных областях S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (2.54) и ограниченных контурами L_{kl}, соответствующими при этих преобразованиях контурам L_l.

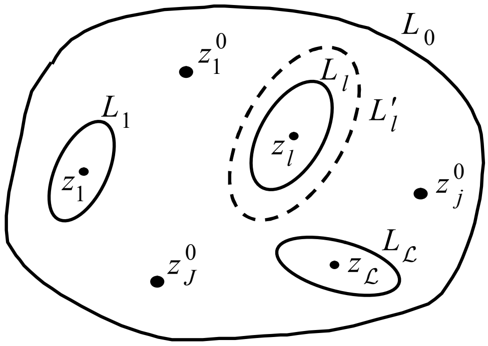


Рисунок 2.2

В самом общем виде комплексные потенциалы имеют вид [50]

$$W_k'(z_k)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{L}(A_{kl}z_k+B_{kl})\ln(z_k-z_{kl})+$$

$$+\sum_{r=1}^{R}\left(A_{kr}^0 z_k+B_{kr}^0\right)\ln\left(z_k-z_{kr}^0\right)+W_k'^0(z_k), \qquad (2.85)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые решением системы

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k,\,q_k,\,r_k,\,d_{xk},\,d_{yk},\,b_{xk},\,b_{yk},\,\frac{1}{\mu_k}\right)\Gamma_k=$$

$$=\left(-M_x^\infty,-M_y^\infty,-H_{xy}^\infty,-M_{dx}^\infty,-M_{dy}^\infty,-M_{bx}^\infty,-M_{by}^\infty,0\right); \qquad (2.86)$$

p_k, q_k, r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk} – величины, вычисляемые по формулам (2.62), (2.63); A_{kl}, B_{kl} – постоянные, определяемые решением систем уравнений

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(1,\ \mu_k,\ \mu_k^2,\ \nu_k,\ \nu_k\mu_k,\ \rho_k,\ \rho_k\mu_k,\ \frac{1}{\mu_k}\right) iA_{kl} = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\right.$$

$$\left. 0,\ 0,\ 0,\ \frac{P_l + P_{0l}}{2\pi D_{11}}\right),$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(1,\ \mu_k,\ \nu_k,\ \rho_k,\ \mu_k^2,\ \frac{1}{\mu_k},\ d_{yk},\ b_{yk}\right) iB_{kl} = \left(0, 0, 0, 0,\right.$$

$$\left. -\frac{M_{xl} + M_{0xl}}{2\pi D_{22}},\ -\frac{M_{yl} + M_{0yl}}{2\pi},\ M_{Dl} + M_{0Dl},\ M_{Bl} + M_{0Bl}\right); \quad (2.87)$$

P_l, M_{xl}, M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента поперечных внешних усилий, приложенных к контуру отверстия L_l; M_{Dl}, M_{Bl} – суммарные моменты электрической и магнитной индукций по контуру L_l; P_{0l}, M_{0xl}, M_{0yl}, M_{0Dl}, M_{0Bl} – величины, аналогичные указанным величинам без нулей в индексах, соответствующие частному решению системы дифференциальных уравнений (2.37); A_{kr}^0, B_{kr}^0 – постоянные, определяемые решением систем уравнений

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(1,\ \mu_k,\ \mu_k^2,\ \nu_k,\ \nu_k\mu_k,\ \rho_k,\ \rho_k\mu_k,\ \frac{1}{\mu_k}\right) iA_{kr}^0 = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\right.$$

$$\left. 0,\ 0,\ 0,\ \frac{P_r^0}{2\pi D_{11}}\right),$$

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(1,\ \mu_k,\ \nu_k,\ \rho_k,\ \mu_k^2,\ \frac{1}{\mu_k},\ d_{yk},\ b_{yk}\right) iB_{kr}^0 = \left(0, 0, 0, 0,\right.$$

$$\left. -\frac{M_{xr}^0}{2\pi D_{22}},\ -\frac{M_{yr}^0}{2\pi},\ M_{Dr}^0,\ M_{Br}^0\right), \quad (2.88)$$

где P_r^0, M_{xr}^0, M_{yr}^0 и M_{Dr}^0, M_{Br}^0 – сосредоточенная сила в точке z_r^0, ее моменты относительно осей координат и сосредоточенные электромагнитные моменты в этой точке; $W_k'^0(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k.

2.7. Частные случаи общей задачи электромагнитоупругости

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). При этом для задачи ЭУ в приведенном решении нужно отбрасывать соотношения магнитостатики и принять равными нулю постоянные p_{ij}, ν_{ij}, тогда 6 и 7 уравнения состояния (2.13) составят однородную систему 2 линейных уравнений относительно коэффициентов магнитных восприимчивостей χ_{ij}, с тривиальным решением $\chi_{ij}=0$; для задачи МУ в приведенном решении нужно отбрасывать соотношения электростатики и принять равными нулю постоянные g_{ij}, ν_{ij}, тогда 4 и 5 уравнения состояния (2.13) составят однородную систему 2 линейных уравнений относительно коэффициентов диэлектрических восприимчивостей β_{ij}, с тривиальным решением $\beta_{ij}=0$; для задачи теории упругости нужно принять и первые, и вторые условия, что приводит к тому что $\chi_{ij}=\beta_{ij}=\nu_{ij}=0$.

В практике решения различных задачи (ЭМУ, ЭУ, МУ, ТУ) численные результаты для этих задач можно получить на основе реализации общего алгоритма решения задачи ЭМУ для модельного материала с постоянными g'_{ij}, p'_{ij}, ν'_{ij}, предусмотрев в этом решении совокупности параметров, характеризующие ту или другую задачу. Это можно сделать, связав постоянные модельного материала с соответствующими постоянными решаемой задачи таким образом [53]:

$$p'_{ij}=\lambda_p p_{ij}, \quad g'_{ij}=\lambda_g g_{ij}, \quad \nu'_{ij}=\lambda_{gp}\nu_{ij},$$

где λ_g, λ_p, λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. Тогда для задачи ЭУ, чтобы обеспечивать условия $p_{ij}=\nu_{ij}=0$, для модельного материала нужно принять $\lambda_p=\lambda_{gp}=0$. Но с такими значениями параметров при проведении вычислений возникнут трудности. Поэтому можно брать эти параметры достаточно малыми, но не нулями. Как показывают численные исследования, уже при $\lambda_p=\lambda_{gp}\le 10^{-3}$ значения характерных величин при решении задачи ЭМУ получаются такими же, как при решении задачи ЭУ. Такое же имеет место и для других случаев.

Следовательно, в приведенном общем решении

для задач ЭМУ $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$,

для задач ЭУ $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$,

для задач МУ $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$,

для задач ТУ $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$.

Также заметим, по общей программе можно получать результаты по решению задачи электромагнитостатики для «абсолютно жесткой плиты», когда пьезосвойства преобладают. В этом случае нужно рассматривать модельный упругий материал с постоянными $s'_{ij} = \lambda_s s_{ij}$ и для задачи электромагнитостатики брать $\lambda_s \le 10^{-3}$.

2.8. Решение задачи об изгибе эллиптической плиты

Пусть эллиптическая плита с контуром L_0, полуосями a_0, b_0 (рисунок 2.3) находится под действием постоянных вдоль контура L_0 механических изгибающих моментов $M_n(s) = m_0$, а поперечные усилия и индукционные моменты на контуре равны нулю, т. е: по контуру $p(s) = m_{d0}(s) = m_{b0}(s) = 0$. В этом случае комплексные потенциалы (2.89) имеют вид

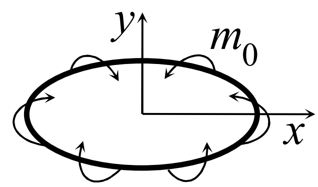


Рисунок 2.3

$$W'_k(z_k) = W'^0_k(z_k),$$

где $W'^0_k(z_k)$ – функции, голоморфные в областях S_k, получаемых из заданного эллипса S и ограниченных контурами L_{k0}, соответствующими контуру L_0 при аффинных преобразованиях (2.54). Для нахождения вида этих функций используем конформные отображения.

Учитывая параметрические уравнения

$$x = a_0 \cos\theta, \quad y = b_0 \sin\theta,$$

контура L_0 и выражение обобщенной переменной $z_k = x + \mu_k y$, построим конформное отображение внешности единичных кругов $|\zeta_{k0}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k0}, соответствующих контуру L_0 при аффинных преобразованиях (2.54):

$$z_k = R_{k0}\left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}}\right), \tag{2.90}$$

$$R_{k0} = \frac{a_0 - i\mu_k b_0}{2}, \quad m_{k0} = \frac{a_0 + i\mu_k b_0}{a_0 - i\mu_k b_0}.$$

Тогда функции $W_k'^0(z_k)$, голоморфные в эллипсах L_{k0}, можно разложить в ряды по полиномам Фабера, и для $W_k'(z_k)$ получаем

$$W_k'(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} P_n(z_k), \tag{2.91}$$

где $P_n(z_k)$ – полиномы Фабера, для которых имеют место равенства [82]

$$P_0 = 1, \quad P_n(z_k) = \zeta_{k0}^n + \frac{m_{k0}^n}{\zeta_{k0}^n}; \tag{2.92}$$

a_{k0n} – неизвестные постоянные, для определения которых используем граничные условия на контуре плиты. На основе (2.76) граничные условия на L_0 можно записать в таком векторном виде

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{p_k}{\mu_k},\ q_k,\ d_{yk},\ b_{yk}\right) W_k'(z_k) =$$

$$= \left(-m_0 y + c_{10}, -m_0 x + c_{20}, c_{30}, c_{40}\right), \tag{2.93}$$

в котором c_{i0} – комплексные постоянные.

Подставляя функции (2.91) в условия (2.93) и учитывая, что на контуре

$$x = a_0 \cos\theta = \frac{a_0}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$y = b_0 \sin\theta = -\frac{ib_0}{2}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\zeta_{k0} = \sigma,\ \sigma = e^{i\theta},$$

θ – параметр параметрического задания эллипса, методом рядов получаем $a_{k0n} = 0$ при $n \geq 2$ и систему линейных алгебраических уравнений для определения a_{k01}:

$$\sum_{k=1}^{4}\left(\left(\frac{p_k}{\mu_k},\ q_k,\ d_{yk},\ b_{yk}\right)a_{k01}m_{k0} + \left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k},\ \bar{q}_k,\ \bar{d}_{yk},\ \bar{b}_{yk}\right)\bar{a}_{k01}\right) =$$

$$= \left(-m_0\frac{ib_0}{2},\ -m_0\frac{a_0}{2},\ 0,\ 0\right). \quad (2.94)$$

Тогда функции (2.91) с точностью до постоянных слагаемых примут вид

$$W_k'(z_k) = a_{k01}\left(\zeta_{k0} + \frac{m_{k0}}{\zeta_{k0}}\right) = a_{k01}\frac{z_k}{R_{k0}}. \quad (2.95)$$

Для моментов (2.62), (2.63) получим выражения

$$\left(M_x,\ M_y,\ H_{xy}, M_{dx},\ M_{dy},\ M_{bx},\ M_{by}\right) =$$

$$= -2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k,\ q_k,\ r_k,\ d_{xk},\ d_{yk},\ b_{xk},\ b_{yk}\right)\frac{a_{k01}}{R_{k0}}, \quad (2.96)$$

из которых следует, что моменты постоянны во всех точках плиты, причем для любых материалов и значений полуосей эллиптической плиты они получаются такими: $M_x = M_y = m_0$, $H_{xy} = M_{dx} = M_{dy} = M_{bx} = M_{by} = 0$. То есть от действия механических моментов моменты индукций в плите не возникают, хотя пьезоэффект имеет место, так как возникают деформации, перемещения и потенциалы поля, что следует из уравнений состояния (2.4).

2.9. Решение задачи об изгибе бесконечной плиты с эллиптическим отверстием

Рассмотрим теперь односвязную область в виде бесконечной плиты с эллиптическим отверстием с контуром L_1, полуосями a_1, b_1 (рисунок 2.4). Контур отверстия свободен от загружений или жестко подкреплен, на бесконечности действуют механические моменты M_x^∞, M_y^∞, H_{xy}^∞ и индукционные моменты M_{dx}^∞, M_{dy}^∞, M_{bx}^∞, M_{by}^∞.

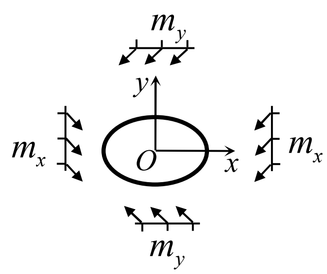


Рисунок 2.4

В данном случае комплексные потенциалы (2.85) имеют вид

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + W_k'^0(z_k),$$

в котором Γ_k – постоянные, определяемые решением системы уравнений (2.86); $W_k'^0(z_k)$ – функции, голоморфные в бесконечных областях, ограниченной контурами L_{k1}, получаемыми из L_1 аффинными преобразованиями (2.54). Для построения этих функций используем конформные отображения. Отобразим внешность единичных кругов $|\zeta_{k1}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{k1}

$$z_k = R_{k1}\left(\zeta_{k1} + \frac{m_{k1}}{\zeta_{k1}}\right), \tag{2.97}$$

где

$$R_{k1} = \frac{a_1 - i\mu_k b_1}{2}, \quad m_{k1} = \frac{a_1 + i\mu_k b_1}{a_1 - i\mu_k b_1}. \tag{2.98}$$

Тогда функции $W_k'^0(z_k)$, голоморфные вне L_{k1}, можно разложить в ряды Лорана по неположительным степеням ζ_{k1}, и функции $W_k'(z_k)$ можно записать так:

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{k1n}}{\zeta_{k1}^n}, \tag{2.99}$$

где a_{k1n} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий (2.76) на контуре отверстия. Для рассматриваемого случая эти условия примут вид

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{p_k}{\mu_k},\ q_k,\ d_{yk},\ b_{yk}\right) W_k'(z_k) = \left(c_{10}, c_{20},\ c_{30},\ c_{40}\right). \tag{2.100}$$

при c_{i0} – комплексные постоянные.

Подставляя в эти условия функции (2.99), учитывая, что $x = a_1 \cos\theta = \frac{a_1}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)$, $y = b_1 \sin\theta = -\frac{ib_1}{2}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)$, и применяя метод рядов, получаем, что $a_{k1n} = 0$ при $n \geq 2$, а для a_{k11} имеет место система уравнений

$$\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk}\right)a_{k11} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{4}\left[\left(\frac{p_k}{\mu_k}, q_k, d_{yk}, b_{yk}\right)R_{k1}m_{k1}\Gamma_k + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\bar{p}_k}{\bar{\mu}_k},\ \bar{q}_k,\ \bar{d}_{yk},\ \bar{b}_{yk}\right)\bar{R}_{k1}\bar{\Gamma}_k\right]. \qquad (2.101)$$

Тогда функции (2.99) примут вид

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \frac{a_{k11}}{\zeta_{k1}}, \qquad (2.102)$$

а для моментов (2.62), (2.63) получаются выражения

$$\left(M_x,\ M_y,\ H_{xy}, M_{dx}, M_{dy}, M_{bx}, M_{by}\right) =$$

$$= -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k,\ q_k,\ r_k, d_{xk}, d_{yk}, b_{xk}, b_{yk}\right)\left(\Gamma_k - \frac{a_{k11}}{R_{k1}\left(\zeta_{k1}^2 - m_{k1}\right)}\right). \quad (2.103)$$

В случае жесткого подкрепления контура отверстия в приведенном решении нужно принять $p_k/\mu_k = 1$, $q_k = \mu_k$.

Если эллипс переходит в прямолинейный разрез при $b_1 = 0$ (трещину или жесткое линейное включение), то для его концов можно вычислить и коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) $k_{1M}^{\pm}$ (КИМ, соответствующий моменту M_y) и $k_{2M}^{\pm}$ (КИМ, соответствующий моменту H_{xy}), используя известные формулы [54]

$$k_{1M}^{\pm} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left[p_k \sin^2\varphi + q_k \cos^2\varphi - 2r_k \sin\varphi\cos\varphi\right]M_k\ ,$$

$$k_{2M}^{\pm} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\Big[\big(q_k - p_k\big)\cos\varphi\sin\varphi + r_k\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\Big]M_k\,, \quad (2.104)$$

в которых

$$M_k = \mp\frac{\sqrt{a_1}}{2R_{k1}}\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\, n\, a_{k1n}\,. \quad (2.105)$$

причем «$+$» и «$-$» у КИМ в локальной системе координат относятся к правому и левому концам трещины соответственно, φ – угол наклона трещины относительно оси Ox, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки.

Численные исследования были проведены для пластинки с эллиптическим отверстием из материалов: 1) композит на основе $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$ (материал М1) [196, 210]; 2) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (М2) [173]; 3) композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют PZT-4, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (М3) [173]. Физико-механические постоянные этих материалов даны в таблице 2.1.

Для случая действия на плиту из различных материалов с круговым отверстием радиуса a_1 $(b_1 = a_1)$ механических моментов $M_y^{\infty} = m_y$ в таблице А.2.1, и в случае действия моментов $M_x^{\infty} = m_x$ в таблице А.2.2 приложения в зависимости от центрального угла отверстия θ, отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, с точностью до множителя m_y или m_x приведены значения моментов M_s от нормальных напряжений σ_s вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к контуру. А на рисунке Б.2.1 и рисунке Б.2.2 для плиты с круговым отверстием из материала М2 изображены графики распределения этих моментов M_s/m_y и M_s/m_x для задач ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ (штрих-пунктирная линия), ТУ (пунктирная линия).

Таблица 2.1 – Физико-механические постоянные материалов

Величина	Материалы		
	М1	М2	М3
$s_{11}/s_0 = s_{33}/s_0$	7,165	22,260	10,745
s_{22}/s_0	6,797	14,984	7,398
$s_{44}/s_0 = s_{66}/s_0$	19,912	47,481	7,637
s_{55}/s_0	19,802	69,204	32,680
$s_{12}/s_0 = s_{23}/s_0$	-2,337	-6,437	-2,542
s_{13}/s_0	-2,736	-11,942	-5,595
$g_{16}/g_0 = g_{34}/g_0$	2,028	109,22	2,054
$g_{21}/g_0 = g_{23}/g_0$	-0,496	-4,333	-1,159
g_{22}/g_0	1,157	8,016	2,458
$p_{16}/p_0 = p_{34}/p_0$	1,850	268,318	98,843
$p_{21}/p_0 = p_{23}/p_0$	0,576	17,778	12,102
p_{22}/p_0	1,186	31,206	22,268
$\beta_{11}/\beta_0 = \beta_{33}/\beta_0$	0,156	19,612	0,106
β_{22}/β_0	0,137	10,612	0,090
$\nu_{11}/\nu_0 = \nu_{33}/\nu_0$	-0,190	213,404	-14,931
ν_{22}/ν_0	-0,185	-5,534	-3,740
$\chi_{11}/\chi_0 = \chi_{33}/\chi_0$	0,336	0,590	0,805
χ_{22}/χ_0	0,119	0,575	0,704

$$s_0 = 10^{-6}\,\text{МПа}^{-1},\ g_0 = 10^{-2}\,\text{МКл}^{-1}\text{м}^2,\ p_0 = 10^{-5}\,\text{МТл}^{-1},$$

$$\beta_0 = 10^3\,\text{МН}\cdot\text{м}^2\cdot\text{МКл}^{-2},\ \nu_0 = 10^{-1}\,\text{МКл}\cdot\text{м}\cdot\text{МА}^{-1},\ \chi_0 = 10^{-1}\,\text{МПа}\cdot\text{МТл}^{-2}$$

Как видно, наибольшие изгибающие моменты возникают в плите из «наиболее анизотропного» по упругим свойствам материала М2 («степень анизотропии» характеризуется отношением s_{11}/s_{22}). Как следует из рисунка Б.2.1 и рисунка Б.2.2 совместный учет электрических и магнитных свойств значительно влияет на значения основных характеристик ЭМУС. Видно, что с учетом всех свойств полученные значения моментов M_s в некоторых точках отличаются друг от друга значительно. Поэтому даже в случае силовых воздействий при решении задач нельзя пренебрегать ни электрическими, ни магнитными свойствами пьезоматериалов.

В таблице А.2.3 для случая действия на плиту с одним жестко подкрепленным круговым отверстием радиуса a_1 $(b_1 = a_1)$ механических моментов $M_y^\infty = m_y$ для задач ЭМУ и ТУ в зависимости от центрального угла отверстия θ, отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, с точностью до множителя m_y в точках контура отверстия приведены значения механических моментов M_n (соответствующих нормальным напряжениям σ_n на площадках, касательных к контуру), а в таблице А.2.4 для этой же задачи приведены значения моментов M_s (соответствующих нормальным напряжениям σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру). Также, на рисунках Б.2.3 и Б.2.4, аналогично случаю бесконечной плиты со свободным круговым отверстием, для плиты с жестко подкрепленным круговым отверстием из материала М2 изображены графики распределения соответственно моментов M_s/m_y и M_s/m_x для задач ЭМУ, МУ, ЭУ и ТУ. Из приведенных данных видно, что значения моментов M_s оказываются значительно меньше M_n. При жестком подкреплении контура отверстия вблизи точки $\theta = 0$ (в случае действия на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$) моменты M_n и M_s отрицательны, а значит при положительных толщинных координатах z в этой зоне возникает зона сжатия, в отличие от задачи об изгибе плиты со свободным отверстием, для которой в этой зоне имеют место существенные растягивающие моменты. Значения моментов M_n становятся наибольшими вблизи точек вертикального диаметра (соответствующих значению параметра $\theta = \pi/2$). Значительная концентрация (отличие от 1) этих моментов наблюдается и вблизи концов горизонтального диаметра (соответствующих значению параметра $\theta = 0$). В случае «наиболее изотропного» материала М1 учет пьезосвойств незначительно влияет на значения механических моментов. Для плиты с жестко подкрепленным отверстием значения моментов в зонах их наибольшей концентрации при учете пьезосвойств плиты меньше, нежели без их учета, что существенно отличает эту задачу от задачи изгиба пьезоплиты со свободным отверстием.

Как показывают расчеты, на значения моментов и характер распределения около контура отверстия моментов M_s значительно влияет отношение полуосей эллипса b_1/a_1. Чем больше это отношение отличается от единицы, тем больше становятся моменты M_s вблизи конца большой полуоси эллипса. Это видно и из данных рисунка Б.2.3, где для некоторых значений этого параметра изображены графики распределения около контура отверстия моментов M_s для случая изгиба плиты механическими моментами $M_y^\infty = m_y$. При $|b_1/a_1| \le 10^{-3}$ моменты около контура отверстия вдали от концов большой оси малы, вблизи этих концов велики и легко вычислить КИМ (коэффициенты интенсивности моментов).

2.10. Выводы к разделу 2

В данном разделе диссертации представлены гипотезы и краевые задачи теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит, исследованы основные соотношения для комплексных потенциалов, граничные условия для определения комплексных потенциалов, общие представления этих функций для многосвязных областей.

Получены точные решения задач об изгибе сплошной эллиптической плиты под действием равномерно распределенных по контуру моментов, бесконечной плиты со свободным или жестко подкрепленным эллиптическим отверстием под действием заданных на бесконечности моментов. Найдены аналитические выражения для комплексных потенциалов. Установлено, что в эллиптической плите от механических воздействий электрическая и магнитная индукции не возникают, и, наоборот, от действий индукций механические напряжения не возникают, хотя пьезоэффект имеет место всегда в плане возникновения деформаций, перемещений и электрического и магнитного потенциалов; для бесконечной плиты с эллиптическим отверстием или трещиной пьезоэффект наблюдается всегда и значительно влияет на значения изгибающих моментов. Для плиты с эллиптическим отверстием изучены закономерности влияния физико-механических свойств материала и геометрических характеристик отверстия на значения изгибающих моментов.

По результатам, представленным в разделе 2, опубликованы работы [43, 45, 56, 69, 128].

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСВЯЗНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ ПЛИТ

3.1. Общее решение задачи для плиты с отверстиями и трещинами

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую электромагнитоупругую плиту с отверстиями и трещинами, отнесенную к прямоугольной декартовой системе координат Oxy. В случае криволинейных отверстий их контуры можно аппроксимировать дугами эллипсов или берегами прямолинейных трещин, которые рассматриваются как частный (предельный случай) эллиптических отверстий. В связи с этим будем считать, что плита занимает многосвязную область S, ограниченную внешним контуром L_0 и контурами эллиптических отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ с полуосями a_l, b_l (рисунок 3.1), причем в локальных системах координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l их параметрические уравнения будут такими:

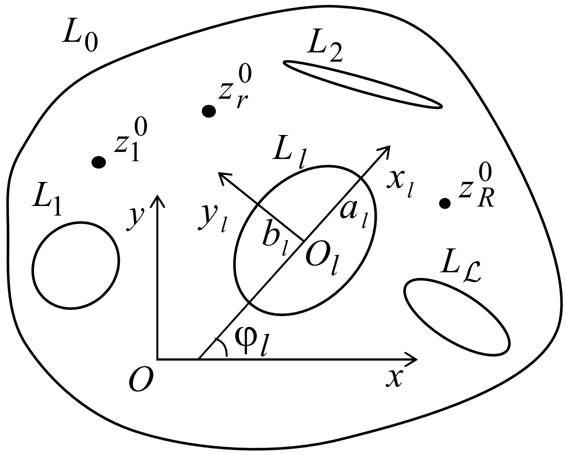


Рисунок 3.1

$$x_l = a_l \cos\theta, \quad y_l = b_l \sin\theta, \tag{3.1}$$

а в основной системе координат Oxy имеют вид

$$x = x_{0l} + x_l \cos\varphi_l - y_l \sin\varphi_l,$$
$$y = y_{0l} + x_l \sin\varphi_l + y_l \cos\varphi_l, \tag{3.2}$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π;

x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy; φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки. Плита находится под действием приложенных к ее контурам L_l $\left(l=\overline{0,\mathcal{L}}\right)$ механических изгибающих моментов $m_l(s)$, поперечных сил $p_l(s)$, моментов электрической индукции $m_{dl}(s)$ и магнитной индукции $m_{bl}(s)$, сосредоточенных воздействий (сил, моментов механических и моментов индукционных) во внутренних точках $z_r^0\left(x_r^0, y_r^0\right)$ области S. Как частный случай, когда контур L_0 полностью уходит в бесконечность, будем рассматривать и бесконечную многосвязную плиту, будем предполагать, что на бесконечности действуют механические изгибающие и крутящие моменты M_x^∞, M_y^∞, H_{xy}^∞ и моменты индукций (векторов индукций) M_{dx}^∞, M_{dy}^∞, M_{bx}^∞, M_{by}^∞, причем в случае необходимости моменты напряженностей (векторов напряженностей) H_{dx}^∞, H_{dy}^∞, H_{bx}^∞, H_{by}^∞ можно найти на основе уравнений состояния. Аналогичная процедура пересчета имеет место и в случае задания на бесконечности вместо моментов индукций моментов напряженностей.

Комплексные потенциалы задачи. Если для решения задачи определения ЭМУС плиты использовать комплексные потенциалы электромагнитоупругости [50], то оно сводится к нахождению из соответствующих граничных условий функций $W_k'(z_k)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$, которые определены в областях S_k, получаемых из области S аффинными преобразованиями (2.54) и ограниченных контурами L_{kl}, соответствующими контурам L_l при этих преобразованиях, и на основании (2.85) имеют вид

$$W_k'\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{L}\left(A_{kl}z_k+B_{kl}\right)\ln\left(z_k-z_{kl}\right)+$$

$$+\sum_{r=1}^{R}\left(A_{kr}^0 z_k+B_{kr}^0\right)\ln\left(z_k-z_{kr}^0\right)+W_k'^0\left(z_k\right), \qquad (3.3)$$

где Γ_k, A_{kl}, B_{kl}, A_{kr}^0, B_{kr}^0 – известные постоянные, определяемые решением систем (2.86), (2.87), (2.88); $W_k'^0(z_k)$ – функции, голоморфные в многосвязных областях S_k, ограниченных контурами L_{kl}. Последние функции можно представить в виде

$$W_k'^0(z_k) = \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} W_{kl}'(z_k), \tag{3.4}$$

в котором $W_{k0}'(z_k)$ – функции, голоморфные внутри внешних контуров L_{k0}; $W_{kl}'(z_k)$ $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ – функции, голоморфные вне контуров отверстий L_{kl}. Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl}, используя формулы [37]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl}\left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}}\right), \tag{3.5}$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k\, y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l) + ib_l(\sin\varphi_l - \mu_k\cos\varphi_l)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l) - ib_l(\sin\varphi_l - \mu_k\cos\varphi_l)}{2R_{kl}}. \tag{3.6}$$

μ_k – корни характеристического уравнения (2.51).

Тогда функции $W_{kl}'(z_k)$ $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$, голоморфные вне отверстий с контурами L_{kl}, включая бесконечно удаленную точку, после конформных отображений (3.5) будут голоморфными вне единичных контуров $|\zeta_{kl}| \geq 1$, включая бесконечно удаленную точку, и их можно разложить в ряды Лорана по неположительным степеням ζ_{kl}, т. е.

$$W_{kl}'(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}. \tag{3.7}$$

Функции $W'_{k0}(z_k)$ голоморфны в односвязных областях, ограниченных контурами L_{k0}, и их можно разложить в ряды по полиномам Фабера для этих областей, или степенными рядами

$$W'_{k0}(z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k0n} \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n , \tag{3.8}$$

в которых R_{k0} – постоянные, определяемые из конформных отображений (3.5) для контуров L_{k0}.

Окончательно для комплексных потенциалов (3.3) имеем

$$W'_k(z_k) = (1-g)a_{k00} + g\Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln}\varphi_{kln}(z_k), \tag{3.9}$$

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} (A_{kl}z_k + B_{kl})\ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^{R} \left(A^0_{kr}z_k + B^0_{kr} \right)\ln\left(z_k - z^0_{kr} \right),$$

$$\varphi_{k0n}(z_k) = \left(\frac{z_k - z_{k0}}{R_{k0}} \right)^n, \quad \varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta^n_{kl}} \quad \left(l = \overline{1,\mathcal{L}} \right);$$

где a_{kln} – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах плиты.

Граничные условия на контуре L_p $\left(p = \overline{g,\mathcal{L}} \right)$ (механические и электромагнитные) для определения комплексных потенциалов имеют вид [53]

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} g_{ikp} W'_k\left(t_{kp} \right) = f_{ip}\left(t_p \right), \tag{3.10}$$

в котором

$$\left(g_{1kp}, g_{2kp}, g_{3kp}, g_{4kp} \right) = \left(p_k/\mu_k, q_k, d_{yk}, b_{yk} \right);$$

$$\left(f_{1p}(t_p), f_{2p}(t_p), f_{3p}(t_p), f_{4p}(t_p) \right) =$$

$$= \left(\int_0^s \left(m_p dy + f_p dx \right) - c_p x + c_{1p}, \right.$$

$$\int_0^s \left(m_p dx - f_p dy\right) + c_p y + c_{2p},$$

$$\left. -\int_0^s m_{dp} ds + c_{3p}, \quad -\int_0^s m_{bp} ds + c_{4p} \right);$$

$$f_p(s) = \int_0^s p_p(s) ds,$$

если контур L_p загружен внешними воздействиями в виде механических изгибающих моментов $M_n = m_p(s)$ и поперечных усилий $N_n = p_p(s)$, изгибающих индукционных моментов $M_{dn} = m_{dp}(s)$, $M_{bn} = m_{bp}(s)$, и

$$\left(g_{1kp}, g_{2kp}, g_{3kp}, g_{4kp}\right) = \left(1, \mu_k, d_{yk}, b_{yk}\right),$$

$$\left(f_{1p}(t_p), f_{2p}(t_p), f_{3p}(t_p), f_{4p}(t_p)\right) =$$

$$= \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} + c_{3p}, \quad -\frac{\partial w_0}{\partial y} + c_{4p}, \right.$$

$$\left. -\int_0^s m_{dp} ds + c_{5p}, \quad -\int_0^s m_{bp} ds + c_{6p} \right),$$

когда контур L_p плиты жестко подкреплен; c_p – вещественные, c_{ip} – комплексные постоянные; $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2.37).

Для многосвязных областей граничным условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, которые не будут содержать аддитивных постоянных, входящих в эти условия. Продифференцировав уравнения (3.10), имеем

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{4} g_{ikp} \delta_{k,s} W_k''(t_{kp}) = \frac{df_{ip}(t_p)}{ds} \quad (i = \overline{1, 4}), \tag{3.11}$$

в котором

$$g_{1kp} = \frac{p_k}{\mu_k}, \quad g_{2kp} = q_k, \quad g_{3kp} = d_{yk}, \quad g_{4kp} = b_{yk};$$

$$\frac{df_{1p}}{ds} = \mp\left(m_p \frac{dy}{ds} + f_p \frac{dx}{ds}\right) - c_p \frac{dx}{ds},$$

$$\frac{df_{2p}}{ds} = \mp\left(m_p \frac{dx}{ds} - f_p \frac{dy}{ds}\right) + c_p \frac{dy}{ds},$$

$$\frac{df_{3p}}{ds} = \pm m_{dp}, \quad \frac{df_{4p}}{ds} = \pm m_{bp};$$

$$f_p(s) = \int_0^s p_p(s)ds;$$

если контур L_p загружен внешними воздействиями в виде механических изгибающих моментов $M_n = m_p(s)$ и поперечных усилий $N_n = p_p(s)$, изгибающих индукционных моментов $M_{dn} = m_{dp}(s)$, $M_{bn} = m_{bp}(s)$, и

$$g_{1kp} = 1, \quad g_{2kp} = \mu_k, \quad g_{3kp} = d_{yk}, \quad g_{4kp} = b_{yk};$$

$$\frac{df_{1p}}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right), \quad \frac{df_{2p}}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right),$$

$$\frac{df_{3p}}{ds} = \pm m_{dp}, \quad \frac{df_{4p}}{ds} = \pm m_{bp};$$

когда контур L_p плиты жестко защемлен или жестко подкреплен; p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk} – постоянные, вычисляемые по формулам (2.62), (2.63); c_p – вещественные постоянные, для внешнего контура принимается, что $c_0 = 0$; верхние знаки в этих формулах относятся к внешнему контуру L_0 области S, нижние – к контурам отверстий; $w_0(x, y)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (2.37);

$$W_k''(z_k) = g\Gamma_k + N_k'(z_k) + \sum_{l=g}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}'(z_k), \tag{3.12}$$

$$N_k'(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \frac{A_{kl} z_k + B_{kl}}{z_k - z_{kl}} \right] +$$

$$+\sum_{r=1}^{R}\left[A_{kr}^{0}\ln\left(z_k-z_{kr}^{0}\right)+\frac{A_{kr}^{0}z_k+B_{kr}^{0}}{z_k-z_{kr}^{0}}\right],$$

$$\delta_{k,s}=\frac{dz_k}{ds};\quad \varphi'_{k0n}\left(z_k\right)=\frac{n\left(z_k-z_{k0}\right)^{n-1}}{R_{k0}^{n}},$$

$$\varphi'_{kln}\left(z_k\right)=-\frac{n}{R_{kl}\zeta_{kl}^{n-1}\left(\zeta_{kl}^{2}-m_{kl}\right)}\ \left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right).$$

Сведение решения задачи к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений. Граничным условиям (3.11) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [19, 67, 138]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p систему точек $M_{pm}\left(x_{pm}, y_{pm}\right)$ $\left(p=\overline{g,\mathcal{L}};\ m=\overline{1,M_p}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (3.12) в граничные условия (3.11) в точках $M_{pm}\left(x_{pm}, y_{pm}\right)$, для определения неизвестных постоянных a_{kln} получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=g}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}g_{ikp}\delta_{k,s}\varphi'_{kln}\left(t_{kpm}\right)a_{kln}=-2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}g_{ikp}\delta_{k,s}\left(g\Gamma_k+\right.$$

$$\left.+N'_k\left(t_{kpm}\right)\right)+\frac{df_{ip}\left(t_{pm}\right)}{ds}\ \left(i=\overline{1,4};\ p=\overline{g,\mathcal{L}};\ m=\overline{1,M_p}\right).\quad (3.13)$$

Кроме уравнений (3.13), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}ia_{kl1}=0\ \left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right),\quad (3.14)$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_l.

Систему (3.13), дополненную уравнениями (3.14), для определения постоянных a_{kln} и c_j, будем решать методом сингулярных разложений [160, 161]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $W'_k(z_k)$ будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического и магнитного полей, перерезывающие силы) изгиба по формулам (2.62), (2.63), (2.65). А если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) по известным формулам [54]

$$k_{1M}^{\pm} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left[p_k \sin^2 \varphi_l + q_k \cos^2 \varphi_l - 2r_k \sin\varphi_l \cos\varphi_l \right] M_k \,,$$

$$k_{2M}^{\pm} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left[\left(q_k - p_k\right)\cos\varphi_l \sin\varphi_l + r_k \left(\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l\right)\right] M_k \,, \qquad (3.15)$$

в которых

$$M_k = \mp \frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \, n \, a_{kln} \,. \qquad (3.16)$$

причем «$+$» и «$-$» у КИМ в локальной системе координат относятся к правому и левому концам трещины соответственно.

3.2. Исследование электромагнитоупругого состояния плит с отверстиями и трещинами

Были выполнены многочисленные исследования концентрации моментов и их изменения в пьезоплитах в зависимости от геометрических параметров отверстий, способов их загружения и подкрепления, физико-механических постоянных материалов плит.

Исследования ЭМУС конечных плит. При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (3.12) и количество точек M_p на каждом из контуров $L_p\left(p = \overline{0, \mathcal{L}}\right)$, в которых удовлетворялись граничные условия при получении уравнений системы (3.13), увеличивались до тех пор, пока граничные условия на контурах не начинали выполняться с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). Для получения таких результатов в описываемых ниже случаях достаточно было оставлять от 10 до 150 членов в каждом из рядов (3.12) и на каждом из контуров брать от 30 до 500 равномерно удаленных по параметру θ параметрического задания (3.1) точек. Исследования проводились для задач ЭМУ, ЭУ, МУ, ТУ. Результаты расчетов представлены только для задач ЭМУ и ТУ. Как показали расчеты, учет электрических свойств материала незначительно влияет на значения основных характеристик ЭМУС (значения величин для задач ЭУ и ТУ близки), тогда как учет магнитных свойств существенно влияет на них (значения величин для задач ЭМУ и МУ близки друг другу). Ниже описаны лишь некоторые из полученных результатов для круговой плиты с отверстиями и трещинами, когда плита по внешнему контуру L_0 изгибается равномерно распределенными механическими моментами интенсивности $M_n = m_0$. Значения всех величин приводятся с точностью до m_0 как множителя.

Круговое кольцо. В таблице А.3.1 для кругового кольца с внешним контуром L_0 радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) и центральным круговым отверстием с контуром L_1 радиуса a_1 ($b_1 = a_1$) (рисунок 3.2) с точностью до m_0 для задач ЭМУ и ТУ в зависимости от отношения a_1 / a_0 и центрального угла контуров кольца θ, отсчитываемого от направления оси Ox против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов (M_s) в точках контуров на площадках, перпендикулярных контурам.

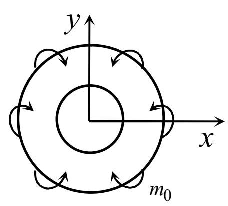


Рисунок 3.2

Из данных таблицы А.3.1 и других полученных результатов следует, что с увеличением радиуса отверстия a_1 (с уменьшением ширины кольца) значения изгибающих моментов около контуров возрастают, приближаясь друг к другу; для отверстия небольшого радиуса ($a_1 / a_0 \le 0{,}1$) влияние одного контура на значения моментов около другого незначительно и им можно пренебречь. Наибольшие изгибающие моменты возникают в плите из «наиболее» анизотропного по упругим свойствам материала М2 («степень анизотропии» характеризуется степенью отличия отношения s_{11}/s_{22} от 1). Учет пьезосвойств материала (сравнить значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ) оказывает значительное влияние на значения изгибающих моментов, особенно в зонах их наибольшей концентрации. Следовательно, при исследованиях концентрации напряжений в элементах конструкций, изготовленных из пьезоматериалов, нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

Круговой диск с трещиной. Как показывают расчеты, при уменьшении отношения b_1/a_1 длин полуосей эллиптического отверстия L_1, значения изгибающих моментов вблизи концов большой оси отверстия бесконечно увеличиваются, на достаточно большом расстоянии от концов малой оси они уменьшаются и незначительно изменяются от точки к точке. Это видно и из данных рисунка Б.3.1, где для круговой плиты с центральным эллиптическим отверстием изображены графики распределения моментов M_s/m_0 около контура отверстия для некоторых значений отношения b_1/a_1 при $a_1/a_0 = 0{,}5$. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые к задаче ТУ. Как показывают расчеты, при $b_1/a_1 \le 10^{-3}$ эллипс можно считать трещиной и вычислять для ее концов КИМ.

В таблице А.3.2 для изготовленной из материала М2 круговой плиты радиуса a_0 ($b_0 = a_0$) с внутренней трещиной длины a_0 (рисунок 3.3, *а*) в зависимости от отношения c/a_0, где c – длина перемычки между концом трещины и контуром плиты, приведены значения моментов в точках контура диска и КИМ для концов трещины. Результаты для c/a_0, равных 0,5 и 0, соответствуют плите с центральной и краевой трещиной. В таблице А.3.3 для той же круговой плиты с краевой трещиной длины l вдоль диаметра (рисунок 3.3, *б*) в зависимости от отношения l/a_0 приведены значения моментов M_s/m_0 в точках контура плиты и КИМ для конца трещины.

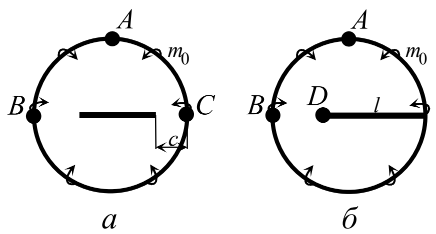


Рисунок 3.3

Как видно из данных таблицы А.3.2 и таблицы А.3.3, при приближении внутренней трещины к контуру плиты значения изгибающих моментов M_s / m_0 около контура плиты и КИМ растут лишь при весьма малых длинах перемычки. В отличие от этого велико влияние длины краевой трещины на значения этих изгибающих моментов и КИМ: с увеличением длины краевой трещины значения моментов около контура плиты в зоне, вблизи перемычки, и КИМ резко растут, достигая весьма больших значений при малых перемычках.

Круговой диск с двумя отверстиями. Большая концентрация моментов возникает и в диске с внутренними отверстиями при увеличении их размеров. Это видно из рисунка Б.3.2, где для изготовленной из материала М2 круговой плиты радиуса a_0 с двумя симметрично расположенными круговыми отверстиями радиусов a_1 с центрами в точках $(-a_0 / 2; 0)$ и $(a_0 / 2; 0)$ изображены графики распределения моментов M_s / m_0 около контура левого отверстия для некоторых значений отношения a_1 / a_0.

Круговой диск с двумя выемами. Для круговой плиты радиуса a_0 с двумя симметричными круговыми выемами радиуса a_1 (рисунок 3.4) в таблице А.3.4 приведены значения моментов M_s / m_0 в точках контура L_1 левого выема для некоторых значений отношения a_1 / a_0 в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от направления горизонтального диаметра против часовой стрелки.

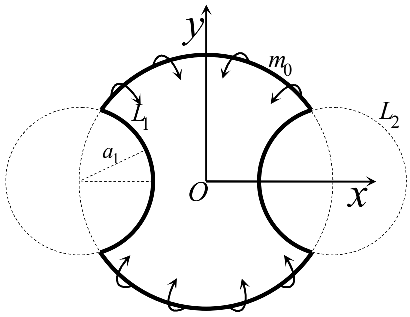


Рисунок 3.4

Как видно, с ростом радиуса выема (с уменьшением длины перемычки между выемами) значения моментов около контуров выемов в зоне перемычки (при $\theta < \pi / 6$) резко растут, незначительно изменяясь вдали от перемычки.

Круговой диск с двумя выемами и центральным отверстием. Для круговой плиты радиуса a_0 с двумя симметричными круговыми выемами радиуса a_1 и центральным отверстием радиуса a_3 (рисунок 3.5) в таблице А.3.5 приведены значения моментов M_s / m_0 в некоторых точках плиты в зависимости от отношения a_3 / a_0.

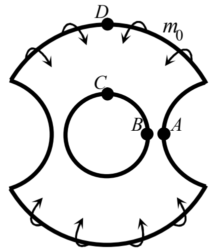


Рисунок 3.5

На рисунке Б.3.3 для круговой плиты с внешним круговым контуром радиуса a_0 с двумя симметричными круговыми выемами радиуса $a_1 = a_0 / 2$ с центрами на внешнем контуре и центральным круговым отверстием радиуса a_3 при изгибе под действием моментов m_0 по внешнему контуру с точностью до множителя m_0 приведены значения изгибающих моментов M_s / m_0 в точках контура центрального кругового отверстия для некоторых значений отношения a_3 / a_0 в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.

Как видно, с ростом радиуса центрального отверстия значения моментов около контура отверстия в зоне перемычек (при $\theta < \pi / 6$) резко растут, незначительно изменяясь вдали от перемычек.

Прямоугольная плита с круговым отверстием. В таблице А.3.6 для изгиба квадратной плиты из материала М2 с центральным круговым отверстием контура L_1 радиуса a_1 равномерно распределенными вдоль горизонтальных сторон изгибающими моментами M_y интенсивности m_0 (рисунок 3.6) в зависимости от отношения от c / a_1, где c – длины перемычек между контуром отверстия и сторонами, и центрального угла θ, отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов M_s / m_0 около L_1 на площадках, нормальных к контуру, а также в некоторых точках сторон. На рисунке Б.3.4 изображены графики распределения этих моментов около контура L_1, причем сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые – к задаче ТУ.

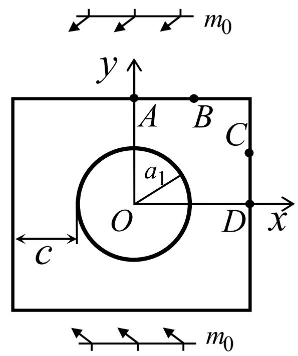


Рисунок 3.6

Исследования ЭМУС бесконечных плит. Были проведены численные исследования электромагнитоупругого состояния для бесконечной плиты с эллиптическими отверстиями и трещинами при их различном взаиморасположении и сочетании, когда на контурах механические изгибающие моменты, поперечные силы, моменты электрической индукции и магнитной индукции равны нулю. Для каждого отверстия оставлялось от 10 до 150 членов в бесконечных рядах (3.12) и брать от 30 до 500 точек M_p на каждом из контуров L_p, в которых удовлетворялись граничные условия при получении системы уравнений (3.13). Ниже описаны лишь некоторые из полученных результатов численных исследований для случаев действия на бесконечности изгибающих моментов $M_y^\infty = m_y$ (при $M_x^\infty = H_{xy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{by}^\infty = M_{by}^\infty = 0$), $M_x^\infty = m_x$ (при $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{by}^\infty = M_{by}^\infty = 0$) или моментов магнитной индукции $M_{by}^\infty = m_{by}$ (при этом $M_x^\infty = M_y^\infty = H_{xy}^\infty = M_{dy}^\infty = M_{by}^\infty = M_{by}^\infty = 0$). Приводимые ниже значения основных характеристик ЭМУС даны с точностью до интенсивности указанных приложенных воздействий как множителя. Исследования проводились для задач ЭМУ, ЭУ, МУ, ТУ. Результаты расчетов описаны только для задач ЭМУ и ТУ, так как, как показали численные исследования, учет электрических свойств материала незначительно влияет на значения основных характеристик ЭМУС (значения величин для задач ЭУ и ТУ близки друг другу), тогда как учет магнитных свойств существенно влияет на эти значения (значения величин для задач ЭМУ и МУ близки друг другу).

Плита с двумя круговыми отверстиями. В таблице А.3.7 для плиты с двумя круговыми отверстиями радиуса a_1 $\left(a_2 = b_2 = b_1 = a_1\right)$ вдоль оси Ox (рисунок 3.7) при действии на бесконечности механических моментов $M_y^\infty = m_y$ с точностью до множителя m_y для задач ЭМУ и ТУ, в зависимости от отношения c / a_1, где c – расстояние между контурами отверстий, и центрального угла отверстия θ, отсчитываемого от линии центров отверстий против часовой стрелки, приведены значения моментов M_s вблизи контура

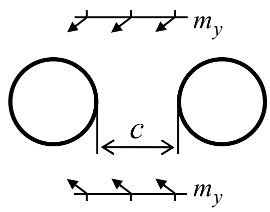


Рисунок 3.7

левого отверстия на площадках, перпендикулярных контуру. При этом расстояние $c = x_{20} - x_{10} - 2a_1$, где x_{10}, x_{20} – аффиксы центров круговых отверстий, значения $c = 0$ и $c < 0$ соответствуют случаям, когда контуры отверстий соответственно касаются друг друга и пересекаются. В таблице А.3.8 и таблице А.3.9 приведены аналогичные значения моментов M_s/m_y и моментов M_n/m_y (в точках контура отверстия на площадках, касательных к контуру) для случая жестко подкрепленных отверстий. На рисунке Б.3.5 и рисунке Б.3.6 в случае плиты из наиболее анизотропного по упругим свойствам материала М2 («степень анизотропии» характеризуется степенью отличия отношения s_{11}/s_{22} от 1) для некоторых значений c / a_1 изображены графики распределения моментов M_s/m_y для случаев свободных и жестко подкрепленных отверстий соответственно. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые – к задаче ТУ.

Из приведенных данных и других полученных результатов следует, что при сближении отверстий друг с другом значения основных характеристик ЭМУС в зоне между отверстиями резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах. В тех случаях, когда контуры отверстий пересекаются, при приближении центров отверстий значения основных характеристик уменьшается, а при совпадении этих центров (когда $x_{20} = x_{10}$, $c = -2a_1$), как и следовало ожидать, значения этих характеристик оказываются такими, как в плите с одним отверстием. При действии механических моментов наибольшие механические изгибающие моменты возникают в плите из наиболее анизотропного по упругим свойствам материала М2. При жестком подкреплении отверстий в зоне перемычки между ними при положительных толщинных координатах z возникает зона сжатия, в отличие от случая плиты со свободными отверстиями. Учет пьезосвойств материала (ср. значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ) значительно влияет на значения изгибающих моментов, особенно в зонах наибольшей концентрации изгибающих моментов. Следовательно, при решении вопросов прочности элементов конструкций с отверстиями из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ. Из описанных результатов также следует, что с увеличением расстояния между отверстиями значения основных характеристик ЭМУС около контуров отверстий уменьшаются и при расстояниях между контурами, больших диаметра отверстия (при $c / a_1 > 2$) влиянием одного отверстия на ЭМУС около другого не значительно и им можно пренебречь и считать плиту ослабленной одним отверстием.

Плита с двумя трещинами. Как показывают расчеты, при уменьшении отношения полуосей эллипса, например отношения b_l / a_l, значения основных характеристик ЭМУС вблизи концов большой оси бесконечно растут, около концов малой оси, на достаточно большом расстоянии от них, они уменьшаются и незначительно изменяются от точки к точке. Как показывают численные исследования, при $b_l / a_l \le 10^{-3}$ эллипс можно считать трещиной и вычислять для ее концов КИМ. Все это видно и из данных рисунка Б.3.7, где для плиты с двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями ($a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$), находящимися друг от друга на расстоянии половины длины большой полуоси эллипса ($c / a_1 = 0,5$), при действии $M_y^\infty = m_y$ для задачи ЭМУ приведены значения моментов M_s вблизи контура левого отверстия для некоторых значений отношения b_1 / a_1.

В таблице А.3.10 и таблице. А.3.11 для плиты из материала М2 с двумя трещинами длины $2a_1$ каждая ($b_2 = b_1 = 10^{-4}$, $a_2 = a_1$) вдоль оси Ox, в зависимости от отношения c / a_1, где c – расстояние между трещинами, в случае механических воздействий $M_y^\infty = m_y$ приведены значения соответствующих изгибающему моменту M_y КИМ k_1^- (для левого конца) и k_1^+ (правого конца) для левой трещины и левого жестко подкрепленного разреза соответственно (рассматриваемых как предельный случай эллипса L_1). Как видно, в первом случае КИМ положительны, а во втором – отрицательны, т.е. при положительных толщинных координатах z напряжения в плите со свободными трещинами положительны и происходит растяжение, а в плите с жестко подкрепленными разрезами наоборот – сжатие. С уменьшением расстояния между трещинами КИМ для их вершин растут, особенно для внутренних вершин трещин; при весьма близких расстояниях между трещинами КИМ для внешних вершин такой же, как для трещины двойной длины $4a_1$. Это следует из того, что для трещины длины $2a_1$ КИМ вычисляется по формуле $k_1^{\pm} = \sqrt{a_1}$, а для трещины двойной длины $4a_1$ по формуле $k_1^{\pm} = \sqrt{2a_1}$, т. е. эти КИМ отличаются друг от друга множителем $\sqrt{2}$, равным 1,414. Последнее видно из изменения k_1^{-} при $c/a_1 \to 0$. Отрицательные значения параметра c/a_1 в таблице А.3.10 и таблице А.3.11 имеют тот же смысл, что отрицательные значения c/a_1 в таблице А.3.7 и таблице А.3.8 для плиты с двумя отверстиями.

Плита с круговым отверстием и трещиной. Большой практический интерес представляет влияние на ЭМУС плиты с отверстием, имеющихся в ней трещин, внутренних и краевых. Для выяснения этого влияния были проведены исследования значений изгибающих моментов M_s вблизи контура отверстия и КИМ для концов трещины в случае плиты из материала М2 от действия моментов $M_y^{\infty} = m_y$.

В таблице А.3.12 для плиты с круговым отверстием радиуса a_1 и внутренней трещиной длины $2a_1$ вдоль диаметра отверстия (рисунок 3.8), находящейся на расстоянии c от контура, в зависимости от отношения c/a_1 приведены значения моментов M_s вблизи контура отверстия и КИМ для концов трещины. Под приводимым в таблице А.3.12 параметром t, для отверстия понимается центральный угол отверстия θ, отсчитываемый от направления трещины (оси Ox) против часовой стрелки, для трещины координаты конца трещины. Видно, что в плите с круговым отверстием и внутренней диаметральной трещиной при приближении трещины к отверстию (при уменьшении c/a_1) значения изгибающих моментов около контура отверстия и КИМ для концов трещины резко растут в зоне между отверстием и трещиной и незначительно изменяются в других зонах. Если трещина удалена от отверстия более, диаметра отверстия (длины трещины в данном случае), взаим-

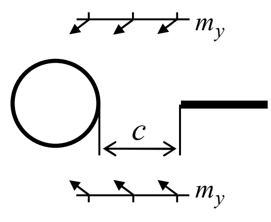


Рисунок 3.8

ным влиянием отверстия и трещины на напряженное состояние плиты можно пренебречь. Из сравнения данных таблицы А.3.12 с данными таблицы А.3.7 и таблицы А.3.10 видим следующее: при одних и тех же расстояниях в плите с отверстием и внутренней трещиной концентрация моментов (соответственно и напряжений) около контура отверстия ниже, чем в плите с двумя отверстиями; в плите с отверстием и трещиной значения КИМ для концов трещины (соответственно и КИН) больше, чем в плите с 2 трещинами.

В таблице А.3.13 для плиты с круговым отверстием радиуса a_1 и краевой трещиной длины l (рисунок 3.9) приведены значения изгибающих моментов M_s около контура отверстия и КИМ для конца трещины в зависимости от отношения l / a_1. Видно, что наличие краевой трещины приводит к резкому уменьшению значений изгибающих моментов в зоне выхода трещины на контур (в окрестности точки $\theta = 0$) и их увеличению в противоположной к трещине зоне около контура отверстия (в окрестности точки $\theta = \pi$), причем с увеличением длины трещины значения моментов в указанной противоположной зоне и КИМ для конца трещины растут . Если длина трещины велика, то значение моментов в близкой окрестности указанной точки тоже велико, а значения КИМ растут, как в случае плиты с одной трещиной, т. е. растет как корень квадратный $\sqrt{l}$. Создание отверстия в конце трещины хотя и снимает бесконечную концентрацию моментов около этого конца трещины, но увеличивает значения КИМ для второго конца трещины, хотя для больших длин трещин и незначительно.

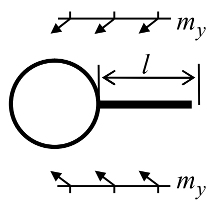


Рисунок 3.9

3.3. Периодическая задача для плиты с отверстиями или трещинами

Пусть тонкая электромагнитоупругая плита ослаблена бесконечным рядом одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий с контурами

L_l $\left(l=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots\right)$ с центрами вдоль одной прямой (рисунок 3.10), принимаемой за ось Ox прямоугольной системы координат Oxy с началом в центре отверстия с контуром L_0, называемого основным. Обозначим полуоси эллипсов через a, b, угол между полуосью a и осью Ox, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, – через φ, расстояние между центрами соседних отверстий – через h_x. Контуры отверстий свободны от загружений или жестко подкреплены, на них внешние воздействия (механические и электромагнитные) отсутствуют, на бесконечности плита находится под действием механических изгибающих и крутящих моментов M_x^∞, M_y^∞, H_{xy}^∞ и моментов индукций M_{dx}^∞, M_{dy}^∞, M_{bx}^∞, M_{by}^∞.

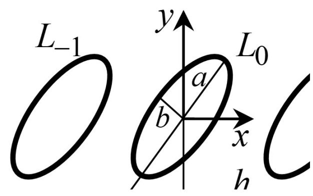


Рисунок 3.10

Исходя из общих представлений комплексных потенциалов (3.3), в рассматриваемом случае производные функций имеют вид

$$W_k'\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kln}\varphi_{kln}\left(z_k\right),$$

$$W_k''\left(z_k\right)=\Gamma_k+\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kln}\varphi_{kln}'\left(z_k\right), \tag{3.17}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.86);

$$\varphi_{kln}\left(z_k\right)=\frac{1}{\zeta_{kl}^n};\quad \varphi_{kln}'\left(z_k\right)=-\frac{n}{R_k\zeta_{kl}^{n-1}\left(\zeta_{kl}^2-m_k\right)}; \tag{3.18}$$

ζ_{kl} – переменные, определяемые из неявных зависимостей [37]

$$z_k=z_{kl}+R_k\left(\zeta_{kl}+\frac{m_k}{\zeta_{kl}}\right), \tag{3.19}$$

в которых $z_{kl}=lh_x$; R_k, m_k – величины, вычисляемые по формулам (3.6), в которых следует опускать в индексах номер l; a_{kln} – неизвестные коэффициенты рядов Лорана.

В силу периодичности ЭМУС механические моменты и моменты индукций в точках z_k и $z_k + h_x$ будут одинаковыми. Тогда из выражений для моментов [53] следуют равенства $W_k''(z_k) = W_k''(z_k + h_x)$, из которых на основании (3.17) получим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k + h_x). \tag{3.20}$$

Из равенств (3.18) и (3.19) следует, что

$$\zeta_{kl}(z_k + h_x) = \zeta_{kl+1}(z_k), \quad \varphi'_{kln}(z_k + h_x) = \varphi'_{kl+1,n}(z_k). \tag{3.21}$$

Подставляя выражения (3.21) в (3.20) и переобозначая индексы суммирования, находим

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kln}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi'_{kl+1,n}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kl-1,n} \varphi'_{kln}(z_k).$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi'_{kln}(z_k)$, будем иметь $a_{kln} = a_{kl-1,n} = a_{kn}$. Тогда для производных комплексных потенциалов окончательно будем иметь

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \psi_{kn}(z_k),$$

$$W_k''(z_k) = \Gamma_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \psi'_{kn}(z_k), \tag{3.22}$$

где

$$\psi_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_{kln}(z_k),$$

$$\psi'_{kn}(z_k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi'_{kln}(z_k). \tag{3.23}$$

Теперь для определения неизвестных постоянных a_{kn} нужно удовлетворять граничным условиям (3.11) лишь на контуре одного, основного отверстия, в качестве которого возьмем контур центрального отверстия L_0. На остальных контурах в силу периодичности комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически.

Граничным условиям (3.11) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [19, 67, 138]. Для этого на контуре L_0 основного отверстия выберем систему точек $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$ $\left(m=\overline{1, M_0}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям. Подставляя функции (3.22) в граничные условия (3.11) в точках $M_{0m}(x_{0m}, y_{0m})$, для определения неизвестных постоянных a_{kn} получаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty} g_{ik0}\delta_{k,s}\psi'_{kn}(t_{km})\,a_{kn} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ik0}\delta_{k,s}\Gamma_k$$

$$\left(i=\overline{1, 4};\ m=\overline{1, M_0}\right). \qquad (3.24)$$

Кроме уравнений (3.24), для контура основного отверстия должно выполняться условие

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} i a_{k1} = 0\,, \qquad (3.25)$$

следующее из однозначности прогиба при полном обходе контура L_0.

Систему (3.24), дополненную уравнением (3.25), для определения постоянных a_{kn}, будем решать методом сингулярного разложения [160, 161]. После нахождения псевдорешений этой системы функции $W'_k(z_k)$ будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (механические изгибающие и крутящий моменты, моменты индукций электрического и магнитного полей, перерезывающие силы) по формулам (2.62), (2.63), (2.65). При этом, если эллипсы переходят в трещины, то для их концов можно вычислить и КИМ по формулам (3.15).

Исследования ЭМУС плиты с периодическим рядом отверстий. Для плиты с периодическим рядом отверстий или трещин были проведены численные исследования распределения основных характеристик и изменения КИМ в зависимости от геометрических характеристик отверстий и расстояний между ними.

При этом количество учитываемых в рядах (3.23) членов, т. е. отверстий в периодической задаче увеличивалось до тех пор, пока значения получаемых изгибающих моментов не переставали изменяться в пятой значащей цифре. Как показывают исследования, для получения таких результатов в случае расстояний c между отверстиями больших их радиуса a $(c > a)$ в рядах Лорана нужно оставлять до 10 членов, на основном контуре L_0 брать до 30 коллокационных точек, в рядах (3.23) учитывать до 15 отверстий по каждую сторону от основного отверстия. Для более близких расстояний между контурами отверстий нужно брать гораздо больше членов в рядах Лорана, коллокационных точек на контуре L_0, отверстий (в периодической задаче) и рядов отверстий (в двоякопериодической задаче). В описываемых ниже случаях в рядах Лорана оставлялось от 10 до 120 (для весьма близких расстояний между отверстиями) членов, на контуре L_0 бралось от 20 до 500 равномерно удаленных (по параметру параметрического задания эллипсов) друг от друга точек, в рядах (3.23) оставлялось до 100 отверстий по каждую сторону от основного отверстия.

Ниже описаны полученные результаты только для плит с круговыми отверстиями или трещинами, когда плиты на бесконечности изгибались односторонними механическими изгибающими моментами $M_x^\infty = m_x$ или $M_y^\infty = m_y$, а также когда на бесконечности действовали одинаковые двусторонние моменты $M_x^\infty = M_y^\infty = m_{xy}$.

В таблице А.3.14 для плиты с периодическим рядом круговых отверстий радиуса a $(b = a)$ при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$ с точностью до множителя m_y в случае задачи ЭМУ, в зависимости от отношения c/a (рисунок 3.11), где c – расстояние между контурами соседних отверстий, и центрального угла θ, отсчитываемого от направления оси Ox против часовой стрелки, приведены значения изгибающих моментов

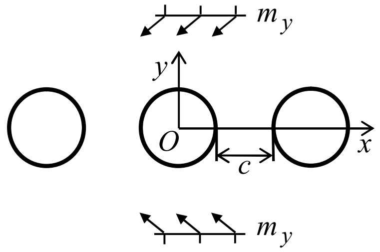


Рисунок 3.11

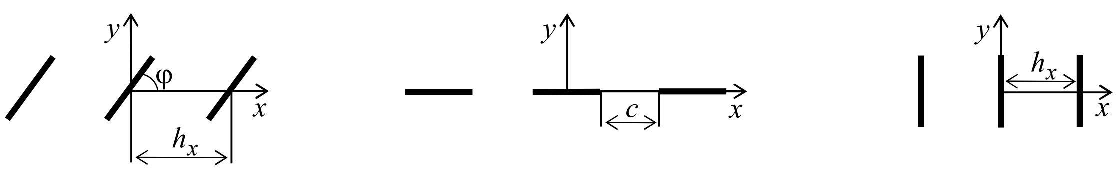
M_s / m_y около контура L_0 на площадках, перпендикулярных к нему. Для некоторых значений c / a на рисунке Б.3.8 изображены графики распределения этих моментов по контуру отверстия. Данные для $c / a = \infty$ относятся к случаю пластинки с одним отверстием.

Из данных таблицы А.3.14 и рисунка Б.3.8 следует, что при сближении отверстий друг с другом наблюдается значительная концентрация моментов (следовательно, и напряжений) около контуров отверстий вблизи перемычек, тогда как вдали от перемычек (в окрестности точки, соответствующей $\theta = \pi / 2$) значения этих моментов изменяются незначительно. Значения моментов вблизи точек перемычек растут с уменьшением длин перемычек, и при расстояниях между соседними отверстиями менее их радиусов $(c \le a)$ здесь возникает очень высокая концентрация моментов. Если расстояние между соседними отверстиями больше двух диаметров отверстий $(c \ge 4a)$, то влияние одного контура на значения моментов около других незначительно, им можно пренебречь и считать плиту ослабленной одним отверстием. Наибольшие изгибающие моменты возникают в плите из «наиболее анизотропного» по упругим свойствам материала М2. Правда, при сближении отверстий друг с другом влияние «степени анизотропии» уменьшается, но оно все время остается.

На получаемые в результате решения задачи значения моментов заметно влияет учет пьезосвойств материала плиты. Это видно из данных таблицы А.3.15 и рисунка Б.3.9. В таблице А.3.15 для некоторых расстояний между круговыми отверстиями периодического ряда, при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$ для задач ЭМУ, ЭУ, МУ и ТУ приведены значения моментов M_s / m_y в точке перемычки, соответствующей углу $\theta = 0$, а на рисунке Б.3.9 для наиболее пьезоактивного материала М3 при $c = a$ представлены графики распределения этих моментов в задачах ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ (штрихпунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия). Видно, что учет пьезосвойств материала оказывает значительное влияние на значения изгибающих моментов M_s / m_y и при исследованиях концентрации моментов в элементах конструкций, изготовленных из пьезоматериалов, нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

Как показывают расчеты, при уменьшении отношения b/a длин полуосей эллиптического отверстия L_0, значения изгибающих моментов M_s вблизи концов большой оси отверстия по модулю бесконечно растут, но на небольшом удалении от этих концов по контуру резко уменьшаются, а затем незначительно изменяются от точки к точке. При $b/a \le 10^{-3}$ эллипсы можно считать трещинами и вычислять для их концов КИМ. При этом КИМ значительно зависят от угла φ наклона трещин к оси Ox.

В таблице А.3.16 для плиты из М3 с периодическим рядом трещин длины $2l$, когда расстояние между их центрами $h_x = 3l$ и плита изгибается моментами $M_y^\infty = m_y$ или $M_x^\infty = m_x$, с точностью до множителей $m_y\sqrt{l}$ или $m_x\sqrt{l}$ приведены значения КИМ в зависмости от угла φ наклона трещин к оси Ox (рисунок 3.12, *а*). При этом для трещин принималось, что $b/a = 10^{-4}$. Как видно, с увеличением угла φ значения КИМ $k_1^\pm$ уменьшаются при действии моментов $M_y^\infty = m_y$ и растут при действии моментов $M_x^\infty = m_x$. Коэффициент $k_1^\pm = 0$, если трещины направлены вдоль направления растягивающих усилий (направления σ_y^∞ или σ_x^∞, которым соответствуют M_y^∞ и M_x^∞), и достигает максимального значения, когда они перпендикулярны направлению растягивающих усилий. Значения $k_2^\pm$ сравнительно малы; для трещин, параллельных и перпендикулярных направлениям растягивающих усилий (для $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$), $k_2^\pm = 0$; в случае действия $M_x^\infty = m_x$ при $\varphi \le \pi/4$ около концов трещин в плите возникают зоны сжатий в



а *б* *в*

Рисунок 3.12

направлении трещин ($k_2^{\pm} < 0$).

Как влияет расстояние между трещинами на значения КИМ, показывают данные таблицы А.3.17 и таблицы А.3.18. В таблице А.3.17 для плиты с периодическим рядом трещин длины $2l$ вдоль оси Ox (рисунок 3.12, *б*), находящейся под действием моментов $M_y^{\infty} = m_y$, с точностью до множителя $m_y\sqrt{l}$ приведены значения КИМ $k_1^{\pm}$ в зависимости от c/l, где $c = h_x - 2l$ – расстояние между вершинами соседних трещин, а в таблице А.3.18 для плиты с периодическим рядом перпендикулярных оси Ox трещин (рисунок 3.12, *в*) при действии моментов $M_x^{\infty} = m_x$ с точностью до множителя $m_x\sqrt{l}$ даны значения тех же КИМ $k_1^{\pm}$, а также моментов M_s / m_x около центров трещин, в зависимости от h_x / l. При этом $k_2^{\pm} = 0$.

Как следует из данных таблицы А.3.17 и таблицы А.3.18 при сближении друг с другом расположенных вдоль одной линии трещин, значения КИМ растут, и при близких расстояниях между трещинами эти значения становятся весьма большими, что может приводить к разрушению плиты. При сближении параллельных друг другу трещин КИМ для их концов наоборот уменьшаются, а моменты в точках перемычек сначала также уменьшаются, а затем при весьма близких расстояниях между трещинами растут.

3.4. Двоякопериодическая задача для плиты с отверстиями или трещинами

Пусть теперь плита имеет m $(m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ одинаковых бесконечных рядов одинаковых и одинаково ориентированных эллиптических отверстий или трещин с контурами L_{ml} $\left(m, l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...\right)$, полуосями a, b (рисунок 3.13). Как и выше, расстояния между центрами соседних отверстий в горизонтальных рядах обозначим через h_x, расстояния между центрами отверстий в вертикальных рядах – через h_y, угол между полуосями a и осью Ox – через φ. Контуры отверстий свободны от загружений или жестко подкреплены, на них внешние механические и электромагнитные воздействия отсутствуют, на бесконечности плита находится под действием механических M_x^∞, M_y^∞, H_{xy}^∞ и моментов индукций M_{dx}^∞, M_{dy}^∞, M_{bx}^∞, M_{by}^∞.

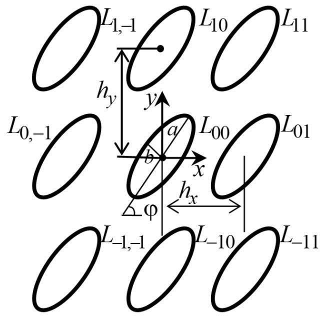


Рисунок 3.13

Для плиты с двоякопериодической системой отверстий производные комплексных потенциалов имеют вид

$$W_k'\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kmln}\left(z_k\right)a_{kmln},$$

$$W_k''\left(z_k\right)=\Gamma_k+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kmln}'\left(z_k\right)a_{kmln}, \tag{3.26}$$

где

$$\varphi_{kmln}\left(z\right)=\frac{1}{\zeta_{kml}^{n}},\quad \varphi_{kmln}'\left(z_k\right)=-\frac{n}{R_k\zeta_{kml}^{\,n-1}\left(\zeta_{kml}^2-m_k\right)}; \tag{3.27}$$

ζ_{kml} – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k=z_{kml}+R_k\left(\zeta_{kml}+\frac{m_k}{\zeta_{kml}}\right), \tag{3.28}$$

причем $z_{kml}=lh_x+\mu_k mh_y$; R_k, m_k – величины, вычисляемые по формулам (3.6), в которых следует опускать в индексах номер l; a_{kmln} – неизвестные коэффициенты рядов Лорана.

В силу двоякопериодичности ЭМУС механические моменты и моменты индукций в точках z и $z+h_x+\mu_k h_y$ будут одинаковыми. Тогда из выражений для моментов [53] следует, что $W_k''\left(z_k\right)=W_k''\left(z_k+h_x+\mu_k h_y\right)$, и на основании (3.26) находим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kmln}\varphi'_{kmln}\left(z_k\right)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kmln}\varphi'_{kmln}\left(z_k+h_x+\mu_k h_y\right). \qquad (3.29)$$

Как и в случае периодической задачи в данном случае из (3.28) и (3.27) легко увидеть, что

$$\zeta_{kml}\left(z_k+h_x+\mu_k h_y\right)=\zeta_{km+1,l+1}\left(z_k\right),$$

$$\varphi'_{kmln}\left(z_k+h_x+\mu_k h_y\right)=\varphi'_{km+1,l+1,n}\left(z_k\right). \qquad (3.30)$$

С учетом зависимостей (3.30) преобразуем равенства (3.29). Имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kmln}\varphi'_{kmln}\left(z_k\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{kmln}\varphi'_{km+1,l+1,n}\left(z_k\right)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{km-1,l-1,n}\varphi'_{kmln}\left(z_k\right).$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых функциях $\varphi'_{kmln}\left(z_k\right)$, будем иметь $a_{kmln}=a_{km-1,l-1,n}=a_{kn}$. Тогда для комплексных потенциалов окончательно будем иметь выражения

$$W'_k\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\xi_{kn}\left(z_k\right),$$

$$W''_k\left(z_k\right)=\Gamma_k+\sum_{n=1}^{\infty}a_{kn}\xi'_{kn}\left(z_k\right), \qquad (3.31)$$

где

$$\xi_{kn}\left(z_k\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_{kmln}\left(z_k\right),$$

$$\xi'_{kn}\left(z_k\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi'_{kmln}\left(z_k\right). \qquad (3.32)$$

Для определения неизвестных постоянных a_{kn} удовлетворим граничным условиям (3.11) лишь на контуре основного отверстия L_0. На остальных контурах, в силу двоякопериодичности комплексных потенциалов, граничные условия будут удовлетворены автоматически. Как и в случае периодической задачи, учитывая функции (3.31), из граничных условий на контуре основного отверстия обобщенным методом наименьших квадратов для определения коэффициентов рядов получим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty} g_{ik0}\delta_{k,s}\xi'_{kn}\left(t_{km}\right)a_{kn} = -2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ik0}\delta_{k,s}\Gamma_k$$

$$\left(i=\overline{1,4};\; m=\overline{1,M_0}\right). \qquad (3.33)$$

Данная система, дополненная уравнением (3.25), опять решается методом сингулярного разложения и после ее решения вычисляются основные характеристики ЭМУС по формулам (2.62), (2.63), (2.65), а в случае трещин и КИМ для их концов по формулам (3.15).

Исследования ЭМУС плиты с двоякопериодической системой отверстий. Для бесконечной плиты с двоякопериодической системой отверстий в рядах Лорана оставлялось от 10 до 80 (для весьма близких расстояний между отверстиями) членов, на контуре L_0 бралось от 20 до 400 равномерно удаленных (по параметру параметрического задания эллипсов) друг от друга точек, в рядах (3.32) оставлялось до 50 отверстий по вертикали и по горизонтали от основного отверстия.

Для плиты с двоякопериодической системой круговых отверстий радиуса a $(b=a)$ из материала М2 при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$ (односторонний изгиб) или $M_x^\infty = M_y^\infty = m_{xy}$ (двухсторонний изгиб) в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от положительного направления оси Ox, и отношения c/a, где c – расстояние между контурами соседних отверстий, в таблице А.3.19 даны значения изгибающих моментов M_s/m_y или M_s/m_{xy} около контуров на площадках, перпендикулярных к нему.

Как видно из данных таблице А.3.19, в случае двоякопериодической задачи при одностороннем изгибе плиты в зонах высокой концентрации моментов вблизи точек горизонтальных перемычек (при $\theta=0$) значения моментов как и в случае периодической задачи растут, но для близких расстояний между контурами отверстий они значительно меньше, чем в случае периодической задачи (ср. данные таблицы А.3.19 с соответствующими данными таблицы А.3.14). В случае двустороннего изгиба плиты с двоякопериодической системой отверстий значения моментов в точках горизонтальных перемычек (в окрестности точки, соответствующей $\theta = 0$) несколько увеличиваются по сравнению с односторонним изгибом, а в зонах вертикальных перемычек (в окрестности точки, соответствующей $\theta = \pi / 2$) они значительно выше, чем при одностороннем изгибе.

В заключение отметим, что полученные числовые результаты для анизотропной плиты с периодическим или двоякопериодическим рядами круговых отверстий (задача ТУ) хорошо согласуются с известными из литературы.

3.5. Выводы к разделу 3

В данном разделе с использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит получены решение задач об изгибе конечной и бесконечной плит с произвольными отверстиями и трещинами, плиты с периодическим рядом или двоякопериодической системой отверстий или трещин. При этом с помощью конформных отображений, разложений голоморфных функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера и удовлетворения граничным условиям на контурах плиты обобщенным методом наименьших квадратов задачи сведены к решению переопределенных систем линейных алгебраических уравнений методом сингулярных разложений.

Описаны результаты численных исследований для круговой плиты с круговым отверстием, круговой плиты с внутренней или краевой трещиной, для плиты с двумя внутренними отверстиями или внешними выемами, для бесконечной с двумя эллиптическими отверстиями или трещинами, с отверстием и трещиной, в том числе краевой, а также для бесконечной плиты с периодическим рядом круговых отверстий или трещин, и двоякопериодической системой отверстий.

Выявлено влияние физико-механических свойств материалов плиты, геометрических размеров отверстий и трещин, их количества, сочетания и месторасположения на значения основных характеристик ЭМУС и КИМ. Установлено, что влияние учета пьезосвойств материала на значения изгибающих моментов в плите велико и ими при исследовании напряженно-деформированного состояния пренебрегать нельзя, то есть нужно решать задачу электромагнитоупругости, а не задачу классической теории изгиба анизотропной плиты, к тому же при действии только электромагнитного поля в пьезоплите возникают достаточно большие изгибающие моменты (следовательно напряжения и деформации) и их можно найти только решая задачу электромагнитоупругости. Также установлено, что с уменьшением расстояния между отверстиями и трещинами значения основных характеристик ЭМУС и КИМ существенно растут. Определено, при каких расстояниях между контурами влияние одного из них на напряженно-деформированное состояние около другого незначительно и им можно пренебречь.

По результатам, представленным в разделе 3, опубликованы работы [41, 46, 48, 56, 59, 63, 64, 66, 126–129].

ГЛАВА 4

МНОГОСВЯЗНЫЕ ПОЛУПЛОСКОСТЬ И ПОЛОСА

4.1. Решение задачи для полуплоскости с точным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе

Постановка задачи. Пусть пьезоплита занимает многосвязную нижнюю полуплоскость S^- с прямолинейной границей L^+ и эллиптическими отверстиями с контурами L_l $\left(l = \overline{1, \mathcal{L}}\right)$ (рисунок 4.1). Выберем систему координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы L^+ и осью Ox, параллельной этой границе. Обозначим полуоси эллипса L_l через a_l, b_l, угол между полуосью a_l и осью Ox, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки, – через φ_l, координаты центра L_l – через x_{0l}, y_{0l}. При этом некоторые из эллипсов могут быть прямолинейными разрезами; при наличии отверстий с криволинейными контурами последние можно аппроксимировать совокупностями дуг эллипсов и берегов разрезов. На отрезке $\left[c^+, d^+\right]$ прямолинейной границы L^+ приложены механические изгибающие моменты $m^+(t)$, поперечные силы $p^+(t)$, моменты электрической индукции $m_d^+(t)$ и магнитной индукции $m_b^+(t)$, остальная ее часть не загружена и не подкреплена. На контурах отверстий L_l $\left(l = \overline{1, \mathcal{L}}\right)$ действуют механические изгибающие моменты $m_l(t)$, поперечные силы $p_l(t)$, моменты электрической индукции $m_{dl}(t)$ и магнитной индукции $m_{bl}(t)$ так, что на каждом контуре равны нулю главные векторы и компоненты

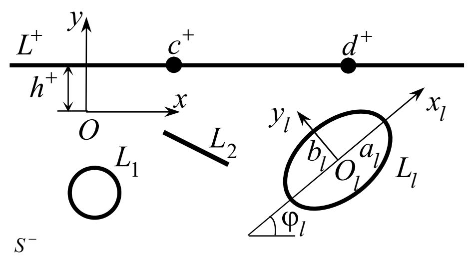


Рисунок 4.1

главных моментов поперечных внешних усилий, а также суммарные моменты электрической и магнитной индукций по контурам (т. е. $P_l = M_{xl} = M_{yl} = M_{Dl} = M_{Bl} = 0$), или контуры L_l жестко подкреплены. В полуплоскости нет точек z_r^0, где действуют сосредоточенные механические и электромагнитные воздействия (т. е. $P_r^0 = M_{xr}^0 = M_{yr}^0 = M_{Dr}^0 = M_{Br}^0 = 0$). На бесконечности полуплоскость не загружена или действуют механические моменты M_x^∞ и моменты индукций M_{dx}^∞, M_{bx}^∞, остальные моменты равны нулю.

Общие представления комплексных потенциалов. Если задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [53], то она сводится к нахождению функций $W_k'(z_k)$ $\left(k = \overline{1, 4}\right)$ обобщенных комплексных переменных (2.54) из граничных условий (3.10).

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы (2.85) имеют вид

$$W_k'\left(z_k\right) = \Gamma_k z_k + W_{k0}'\left(z_k\right) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W_{kl}'\left(z_k\right), \tag{4.1}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k,\, q_k,\, r_k,\, d_{xk},\, d_{yk},\, b_{xk},\, b_{yk},\, \frac{1}{\mu_k}\right)\Gamma_k =$$

$$= \left(-M_x^\infty,\, 0,\, 0,\, -M_{dx}^\infty,\, 0,\, -M_{bx}^\infty,\, 0,\, 0\right); \tag{4.2}$$

r_k, d_{xk}, b_{xk} – постоянные, вычисляемые по формулам (2.62), (2.63); μ_k – корни характеристического уравнения (2.51); $W_{k0}'\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях S_k^-, получаемых из заданной области S^- аффинными преобразованиями (2.54); $W_{kl}'\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} областей S_k^-, соответствующих эллипсам L_l области S^- при аффинных преобразованиях

(2.54) и после конформных отображений внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} [37]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl}\left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}}\right), \tag{4.3}$$

где

$$z_{kl} = x_{0l} + \mu_k\, y_{0l},$$

$$R_{kl} = \frac{a_l\left(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l\right) + ib_l\left(\sin\varphi_l - \mu_k \cos\varphi_l\right)}{2},$$

$$m_{kl} = \frac{a_l\left(\cos\varphi_l + \mu_k \sin\varphi_l\right) - ib_l\left(\sin\varphi_l - \mu_k \cos\varphi_l\right)}{2R_{kl}}. \tag{4.4}$$

эти функции можно разложить в ряды Лорана вида

$$W'_{kl}\left(z_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln}\varphi_{kln}(z_k), \tag{4.5}$$

где a_{kln} – неизвестные коэффициенты рядов,

$$\varphi_{kln}\left(z_k\right) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n(z_k)} \quad \left(l = \overline{1, \mathcal{L}}\right).$$

Для прямолинейной границы L^+, на конечном отрезке которой заданы механические изгибающие моменты m^+, поперечные силы p^+, моменты электрической индукции m_d^+ и магнитной индукции m_b^+ (для этого случая коэффициенты перед комплексными потенциалами в граничных условиях обозначим индексом нуль вверху), на основании (3.10) имеем граничные условия вида

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ik}^0 W'_k\left(t_k\right) = f_i^+\left(t\right), \tag{4.6}$$

где

$$g_{1k}^0 = \frac{p_k}{\mu_k},\;\; g_{2k}^0 = q_k,\;\; g_{3k}^0 = d_{yk},\;\; g_{4k}^0 = b_{yk},$$

$$\left(f_1^+(t),\, f_2^+(t),\, f_3^+(t),\, f_4^+(t)\right) = \left(\int_0^s \left(m^+ dy + f^+ dx\right) - c^+ x + c_1^+,\right.$$

$$\int_0^s \left(m^+ dx - f^+ dy\right) + c^+ y + c_2^+ ,\ -\int_0^s m_d^+ ds + c_3^+ ,\ -\int_0^s m_b^+ ds + c_4^+ \Bigg),$$

$f^+(s) = \int_0^s p^+(s) ds$; c^+ – вещественная, c_i^+ – комплексные постоянные.

Тогда граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде системы

$$g_{1k}^0 W_k'(t_k) + g_{1k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{1k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) +$$
$$+ g_{1k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = f_1^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{1k+q-1}^0}\, \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})},$$

$$g_{2k}^0 W_k'(t_k) + g_{2k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{2k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) +$$
$$+ g_{2k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = f_2^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{2k+q-1}^0}\, \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})},$$

$$g_{3k}^0 W_k'(t_k) + g_{3k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{3k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) +$$
$$+ g_{3k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = f_3^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{3k+q-1}^0}\, \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})},$$

$$g_{4k}^0 W_k'(t_k) + g_{4k+1}^0 W_{k+1}'(t_{k+1}) + g_{4k+2}^0 W_{k+2}'(t_{k+2}) +$$
$$+ g_{4k+3}^0 W_{k+3}'(t_{k+3}) = f_4^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{4k+q-1}^0}\, \overline{W_{k+q-1}'(t_{k+q-1})}, \qquad (4.7)$$

с определителем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{1k}^0 & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ g_{2k}^0 & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ g_{3k}^0 & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ g_{4k}^0 & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^4 g_{ik}^0 M_{ik},$$

в котором M_{ik} – алгебраические дополнения элементов первого столбца g_{ik}^0. При этом k – индекс, принимающий значения $1-4$, причем значения индекса $k+q-1$, большие 4, формально полагаются равными $k+q-5$.

Решая систему (4.7), найдем

$$W'_k(t_k)=\frac{\Delta_{fk}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_{fk}=\begin{vmatrix} f_1^+(t)-\sum\limits_{q=1}^{4}\overline{g_{1k+q-1}^0}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ f_2^+(t)-\sum\limits_{q=1}^{4}\overline{g_{2k+q-1}^0}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ f_3^+(t)-\sum\limits_{q=1}^{4}\overline{g_{3k+q-1}^0}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ f_4^+(t)-\sum\limits_{q=1}^{4}\overline{g_{4k+q-1}^0}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix}$$

или

$$W'_k(t_k)=\frac{1}{\Delta_k}\sum_{i=1}^{4}\left[f_i^+(t)-\sum_{q=1}^{4}\overline{g_{ik+q-1}^0}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})}\right]M_{ik}.$$

Окончательно граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде

$$W'_k(t_k)=\sum_{i=1}^{4}\frac{M_{ik}}{\Delta_k}f_i^+(t)-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{W'_{k+q-1}(t_{k+q-1})}\ \left(k=\overline{1,4}\right), \tag{4.8}$$

где

$$\overline{r_{kk+q-1}}=\sum_{i=1}^{4}\frac{\overline{g_{ik+q-1}^0}}{\Delta_k}M_{ik}.$$

Для точек прямолинейной границы L^+ имеем

$$x=t,\quad y=h^+,\quad z=x+iy=t+i\,h^+,\quad =t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+$$

$$z_k=t_k=x+\mu_k y=t+\mu_k h^+,$$

$$\overline{t_k}=t+\overline{\mu_k}h^+=t+\mu_k h^+ +(\overline{\mu_k}-\mu_k)\,h^+ =t_k+(\overline{\mu_k}-\mu_k)\,h^+,$$

$$\overline{t_{k+q-1}}=t+\overline{\mu_{k+q-1}}h^+=t+\mu_k h^+ +(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+=$$

$$=t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\ \left(q=\overline{1,4}\right). \tag{4.9}$$

Подставив функции (4.1) в граничные условия (4.8) на прямолинейной границе L^{+}, получим

$$W'_{k0}\left(t_k\right)+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W'_{kl}\left(z_k\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{M_{ik}}{\Delta_k} f_i^{+}(t)-$$

$$-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\left[\overline{W'_{k+q-1,0}\left(t_{k+q-1}\right)}+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\overline{W'_{k+q-1l}\left(t_{k+q-1}\right)}\right]. \qquad (4.10)$$

Здесь учтено, что на основе системы уравнений (4.2)

$$\Gamma_k t_k-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{\Gamma_{k+q-1}}\,\overline{t_{k+q-1}}=0\,.$$

На прямолинейной границе для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\overline{W'_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})}=\overline{W'_{k+q-1,0}}(\overline{t_{k+q-1}})=\overline{W'_{k+q-1,0}}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)\,h^{+}\right)$$

$$\overline{W'_{k+q-1l}\left(t_{k+q-1}\right)}=\overline{W'_{k+q-1l}}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^{+}\right)=$$

$$=W'^{+}_{k+q-1l}\left(t_k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a_{k+q-1ln}}}{\left[\zeta^{+}_{k+q-1l}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^{+}\right)\right]^{n}}\,.$$

Кроме того, при переходе в конформных отображениях (4.3) к сопряженным величинам и замене граничных значений по формулам (4.9) для граничных значений переменных находим

$$\overline{z_{k+q-1}}=t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)\,h^{+}=$$

$$=\overline{z_{k+q-1l}}+\overline{R_{k+q-1l}}\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}+\frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta^{+}_{k+q-1l}}\right)\left(q=\overline{1,4}\right).$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения t_k переменными z_k областей S_k, приходим к конформным отображениям

$$z_k=-(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)\,h^{+}+\overline{z_{k+q-1l}}+$$

$$+\overline{R_{k+q-1l}}\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}+\frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\zeta^{+}_{k+q-1l}}\right)\ \left(q=\overline{1,4}\right), \qquad (4.11)$$

где переменная $\overline{\zeta}$ для лучшего восприятия заменена на ζ^{+}, что подчеркивает ее происхождение от условий на границе L^{+}.

Равенства (4.11) представляют собой конформные отображения внешностей единичных кругов $\left|\zeta^{+}_{k+q-1l}\right|\geq 1$ на внешности контуров L^{+}_{k+q-1l} верхней (относительно границы L^{+}_{k}) полуплоскости S^{+}_{k} переменной z_k. Следовательно, функции $W'^{+}_{k+q-1l}\left(z_k\right)$ являются функциями, голоморфными вне контуров L^{+}_{k+q-1l} верхних полуплоскостей S^{+}_{k} (а следовательно, они голоморфны в нижних полуплоскостях S^{-}_{k}) и для них имеют место разложения в ряды Лорана вида

$$W'^{+}_{k+q-1l}\left(z_k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_{k+q-1ln}}\,\varphi^{+}_{k+q-1ln}\left(z_k\right), \qquad (4.12)$$

где

$$\varphi^{+}_{k+q-1ln}\left(z_k\right)=\frac{1}{\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}\right)^{n}},$$

ζ^{+}_{k+q-1l} – переменные, определяемые из конформных отображений (4.11).

Исходя из указанных свойств входящих в условия (4.10) функций, умножив обе части этих условий на ядро Коши $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{t-z_k}$ и вычислив интегралы типа Коши от них по бесконечной прямой L^{+}, получим

$$W'_{k0}\left(z_k\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{M_{ik}}{\Delta_k}\frac{1}{2\pi i}\int_{c^{+}}^{d^{+}}\frac{f^{+}_{i}(t)dt}{t-z_k}-$$

$$-\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{W'_{k+q-1l}}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^{+}\right).$$

Подставив это значение функции $W'_{k0}\left(z_k\right)$ в (4.1), для комплексных потенциалов получим

$$W_k'\left(z_k\right)=\sum_{i=1}^{4}\frac{M_{ik}}{\Delta_k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c^+}^{d^+}\frac{f_i^+(t)dt}{t-z_k}+\Gamma_k z_k+$$

$$+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\left[W_{kl}'\left(z_k\right)-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{W_{k+q-1l}'}\left(t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\right)\right],$$

а затем на основе разложений (4.5) и (4.12) будем иметь выражение

$$W_k'\left(z_k\right)=F^+(z_k)+\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{kln}\varphi_{kln}(z_k)-\right.$$

$$\left.-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{a_{k+q-1ln}}\varphi_{k+q-1ln}^{+}(z_k)\right], \tag{4.13}$$

в котором

$$F^+(z_k)=\sum_{i=1}^{4}\frac{M_{ik}}{\Delta_k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c^+}^{d^+}\frac{f_i^+(t)dt}{t-z_k},$$

$$\varphi_{kln}(z_k)=\frac{1}{\zeta_{kl}^n},\quad \varphi_{k+q-1ln}^{+}\left(z_k\right)=\frac{1}{\left(\zeta_{k+q-1l}^{+}\right)^n}.$$

Функции (4.13) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе L^+. Но они содержат неизвестные коэффициенты рядов a_{kln} $\left(k=\overline{1,4};\ l=\overline{1,\mathcal{L}},\ n=1,\,2,...\right)$. Для определения этих коэффициентов используем граничные условия (3.10) на контурах отверстий, предварительно продифференцировав их, чтобы исключить входящие в их правые части постоянные. Имеем

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}g_{ikp}\delta_{k,s}W_k''\left(t_k\right)=\frac{df_{ip}\left(t\right)}{ds}, \tag{4.14}$$

где $\delta_{k,s}=\dfrac{dt_k}{ds}=\dfrac{x'+\mu_k y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$; x', y' – производные переменных (3.2) по параметру θ параметрического задания эллипсов (3.1); s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки;

$$W_k''\left(z_k\right)=F'^{+}(z_k)+\Gamma_k+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi'_{kln}(z_k)a_{kln}-\right.$$

$$\left.-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\varphi'^{+}_{k+q-1ln}(z_k)\,\overline{a_{k+q-1ln}}\right], \qquad (4.15)$$

$$\varphi'_{kln}(z_k)=-\frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1}R_{kl}\left(\zeta_{kl}^{2}-m_{kl}\right)},$$

$$\varphi'^{+}_{k+q-1ln}\left(z_k\right)=-\frac{n}{\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}\right)^{n-1}\overline{R_{k+q-1l}}\left(\left(\zeta^{+}_{k+q-1l}\right)^{2}-\overline{m_{k+q-1l}}\right)},\ \left(q=\overline{1,4}\right).$$

Определение неизвестных постоянных. Граничным условиям (4.14) на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [19, 67, 138]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p области S^{-} систему точек $M_{pm}\left(x_{pm},\,y_{pm}\right)$ $\left(m=\overline{1,M_p},\,p=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (4.15). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}g_{ikp}\delta_{k,s}\left[\varphi'_{kln}\left(t_{kpm}\right)a_{kln}-\sum_{q=1}^{4}\overline{r_{kk+q-1}}\,\varphi'^{+}_{k+q-1ln}\left(t_{kpm}\right)\overline{a_{k+q-1ln}}\right]=$$

$$=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}g_{ikp}\delta_{k,s}\left[F'^{+}(z_k)+\Gamma_k\right]\ \left(i=\overline{1,4};\ m=\overline{1,M_p};\ p=\overline{1,\mathcal{L}}\right). \qquad (4.16)$$

Кроме уравнений (4.16), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения (3.14) следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$.

Систему (4.16), дополненную уравнениями (3.14), будем решать с использованием сингулярных разложений [160, 161]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln}, а, следовательно, и функции $W_k'(z_k)$, будут известными. После определения этих функций из граничных условий на контурах пластинки комплексные потенциалы будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, для механических моментов и моментов индукций (векторов индукций) имеют место формулы (2.62), (2.63).

Зная основные характеристики, можно найти также моменты на произвольных площадках с нормалью n и касательной s, используя формулы (2.30)–(2.32).

При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в частности, на основе известных формул (3.15).

Исследование ЭМУС многосвязной полуплоскости. Численные исследования были проведены для изгиба полуплоскости усилиями $M_x^{\infty} = m_x$ в случаях полуплоскости с круговым отверстием или вертикальной трещиной, с круговым отверстием и внутренней вертикальной трещиной в перемычке, с круговым отверстием, имеющим краевую трещину в перемычке.

При проведении исследований количество членов в бесконечных рядах (4.15) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (4.16), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 150 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 500 «коллокационных точек».

Полуплоскость с круговым отверстием или трещиной. В таблице А.4.1 для задач ЭМУ и ТУ изгиба моментами $M_x^{\infty} = m_x$ полуплоскости из различных материалов с круговым отверстием радиуса a_1 (рисунок 4.2) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c / a_1, где c – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. При этом характерными

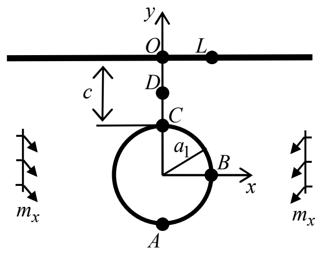


Рисунок 4.2.

были точки $A(0,-a_1)$, $B(a_1,0)$, $C(0,a_1)$ $D(0,a_1+c/2)$, $O(0,a_1+c)$, $L(a_1,a_1+c)$. Здесь и далее для полуплоскости из М1, близкого по упругим свойствам к изотропному материалу, значения величин в задачах ЭМУ и ТУ в указанных точках совпадают, отличаясь друг от друга лишь в точке B менее, чем на 2%, данные приведены лишь для задачи ЭМУ. На рисунке Б.4.1 для полуплоскости из наиболее пьезоактивного материала М2 для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения M_s/m_x по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, причем сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ. На рисунке Б.4.2 представлены графики распределения M_x/m_x вдоль границы полуплоскости из материалов М2 и М3.

Как следует из таблицы А.4.1, рисунка Б.4.1 и рисунка Б.4.2, с приближением отверстия к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в остальных точках. Концентрация моментов наблюдается и вблизи точки перемычки на прямолинейной границе, причем при удалении от этой точки значения моментов резко уменьшаются, а затем растут до значения, соответствующего случаю полуплоскости без отверстия $\left(M_x/m_x=1\right)$. Эта закономерность отличает изгиб полуплоскости от растяжения (плоская задача) [52, 58], когда при уменьшении длины перемычки значения напряжений в точке перемычки на прямолинейной границе уменьшаются, затем при удалении от этой точки наблюдается их увеличение, и лишь затем их снижение до значений в сплошной полуплоскости. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала (ср. значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ), особенно в зоне перемычки между отверстием и прямолинейной границей. В точках высокой концентрации напряжений значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ отличаются друг от друга около 15%. Поэтому при исследованиях концентрации напряжений (следовательно, и моментов) в элементах конструкций из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

В таблице А.4.2 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости с вертикальной трещиной полудлины l_1 (рисунок 4.3) с точностью до множителя m_x приведены значения КИМ k_1 (КИМ $k_2 = 0$) для концов $E\,(0, -l_1)$, $F\,(0, l_1)$ трещины и изгибающих моментов M_x в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c / l_1, где c – длина перемычки между трещиной и границей полуплоскости. При этом характерными точками были $D\,(0, l_1 + c/2)$, $O\,(0, l_1 + c)$, $L\,(l_1, l_1 + c)$. Как следует из данных этой таблицы, при приближении трещины к границе полуплоскости значения изгибающих моментов в точках перемычки резко растут; вдоль прямолинейной границы уже при небольшом удалении от перемычки влияние трещины на значения моментов мало и при $x / l_1 \geq 1$ этого влияния почти нет; значение КИМ для ближайшей к границе полуплоскости вершины F резко растет, тогда как для дальней вершины E оно изменяется незначительно. Как и в предыдущем случае, на значения моментов существенно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в точке перемычки вблизи прямолинейной границы, где для близких расстояний между трещиной и границей полуплоскости значения изгибающих моментов в задаче ЭМУ на 20% больше, чем в соответствующей задаче ТУ; в отличие от изгибающих моментов, на значения КИМ учет пьезосвойств влияет незначительно.

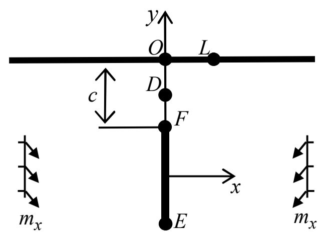


Рисунок 4.3

Полуплоскость с круговым отверстием и трещиной в перемычке. В таблице А.4.3 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 с центром на расстоянии диаметра от границы ($h^+ = 2a_1$) и вертикальной центральной трещиной переменной длины $2l_2$ (с центром в точке $(0, a_1 + a_1/2)$) (рисунок 4.4) с точностью до множителя m_x приведены значения КИМ для вершин трещины (в точках $E\,(0, a_1 + c)$, $F\,(0, a_1 + c + 2l_2)$)

и изгибающих моментов M_x / m_x в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения $2l_2 / a_1$. При этом длины перемычек между трещиной и другими границами $c = (a_1 - 2l_2)/2$, а характерными точками были $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$ $D(0, a_1 + c/2)$, $I(0, 2a_1 - c/2)$, $O(0, 2a_1)$. Как следует из данных таблицы А.4.3, в случае трещины в перемычке полуплоскости с круговым отверстием с увеличением длины трещины значения изгибающих моментов около контура отверстия, в точках перемычки и прямолинейной границы вблизи перемычки резко возрастают. Как и в предыдущем случае, значительное влияние на значения изгибающих моментов оказывает учет пьезосвойств материала плиты, особенно в точке перемычки на прямолинейной границе. С увеличением длины трещины также растут значения КИМ для обоих её концов.

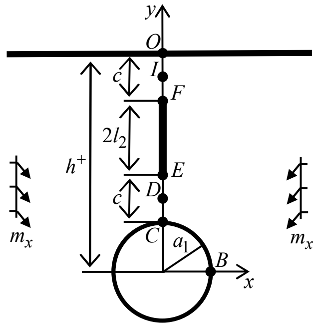


Рисунок 4.4

Полуплоскость с круговым отверстием и краевой трещиной. В таблице А.4.4 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 и вертикальной краевой трещиной из контура отверстия длины $l_2 = a_1$ (рисунок 4.5) с точностью до множителя m_x в зависимости от c / a_1, где c – длина перемычки между вершиной трещины и границей полуплоскости, приведены значения КИМ для вершины трещины и изгибающих моментов M_x / m_x в некоторых характерных точках полуплоскости. При этом характерными точками были $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $D(0, 2a_1 + c/2)$, $O(0, 2a_1 + c)$.

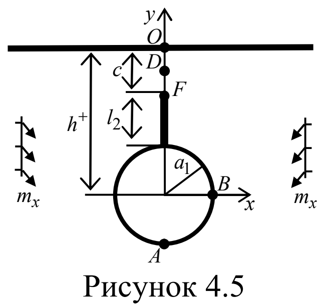


Рисунок 4.5

На рисунке Б.4.3 для некоторых значений c / a_1 изображены графики распределения моментов M_s / m_x по контуру отверстия для полуплоскости из материала М2. Как следует из данных таблицы А.4.4 и рисунка Б.4.3, приближение кругового отверстия с краевой трещиной к границе полуплоскости ведет к весьма существенному росту концентрации изгибающих моментов в точках перемычки, около контура отверстия и около прямолинейной границы вблизи перемычки.

4.2. Решение задачи для полуплоскости с приближенным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе

Рассмотрим пьезоплиту в виде нижней полуплоскости S^- с отверстиями с контурами L_l $\left(l = \overline{1, \mathcal{L}}\right)$ (рисунок 4.6), отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от ее границы L^+ и осью Ox, параллельной этой границе. Будем считать контуры L_l эллипсами с полуосями a_l, b_l. Тогда их уравнения в системе Oxy записываются в виде (3.2). В частном случае эллипсы могут переходить в прямолинейные разрезы, пересекать прямолинейную границу и пересекаться между собой, совокупности их дуг могут аппроксимировать криволинейные контуры отверстий произвольной конфигурации. Прямолинейная граница L^+ не загружена, на контурах L_l действуют механические изгибающие моменты $m_l(t)$, поперечные силы $p_l(t)$, моменты электрической индукции $m_{dl}(t)$ и магнитной индукции $m_{bl}(t)$ так, что их главные векторы и главные моменты на каждом из них равны нулю. На бесконечности полуплоскость не загружена или изгибается механическими моментами M_x^∞ и моментами индукций M_{dx}^∞, M_{bx}^∞; моменты M_y^∞, H_{xy}^∞, M_{dy}^∞, M_{by}^∞ в силу незагруженности прямолинейной границы равны нулю.

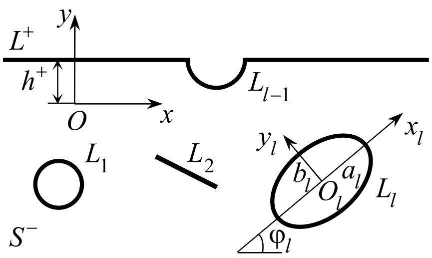


Рисунок 4.6

Если задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [53], то она сводится к нахождению функций $W_k'(z_k)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ обобщенных комплексных переменных (2.54) из граничных условий (3.10).

Комплексные потенциалы $W_k'(z_k)$ определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k, получаемых из заданной области S аффинными преобразованиями (2.54) и ограниченных прямолинейными границами L_k^+ и контурами L_{kl}, соответствующими границе L^+ и контурам L_l при этих аффинных преобразованиях. На основе общих представлений комплексных потенциалов [53] их можно представить в виде

$$W_k'\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}W_{kl}'\left(z_k\right)+W_k'^{+}\left(z_k\right), \tag{4.17}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений (4.2); $W_{kl}'\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные вне L_{kl}; $W_k'^{+}\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с границами L_k^+.

Используя конформные отображения (4.3) внешности единичных кругов $\left|\zeta_{kl}\right|\ge 1$ на внешности эллипсов L_{kl}, функции $W_{kl}'\left(z_k\right)$, голоморфные вне контуров L_{kl}, представим рядами Лорана вида

$$W_{kl}'(z_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} \tag{4.18}$$

с неизвестными коэффициентами a_{kln}.

Для точек прямолинейных границ L^+ и L_k^+

$$x=t,\ y=ih^+,\ t_k=x+\mu_k y=t+\mu_k h^+,$$

$$\overline{t_{k+q-1}}=x+\overline{\mu_{k+q-1}}y=x+\mu_k h^+ +(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+ =$$

$$=t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\ \left(q=\overline{1,4}\right). \tag{4.19}$$

Учитывая эти равенства, подставляя функции (4.17) в граничные условия (4.6) на прямолинейной границе L^+ и применяя к получаемым равенствам метод интегралов типа Коши, для функций, голоморфных в нижних полуплоскостях, получаем выражения

$$W_k'^{+}\left(z_k\right) = -\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{4}\frac{\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{a_{k+q-1ln}}}{\left(\zeta_{k+q-1l}^{+}\right)^{n}}, \tag{4.20}$$

в которых ζ_{k+q-1l}^{+} – переменные, определяемые из конформных отображений (4.11) внешностей соответствующих контуров L_{k+q-1l}^{+} верхних полуплоскостей с границами L_k^{+} на внешности единичных кругов $\left|\zeta_{k+q-1l}^{+}\right| \geq 1$.

При приближенном решении задачи в функциях (4.17) комплексные потенциалы $W_k'^{+}\left(z_k\right)$, голоморфные в нижних полуплоскостях с границей L_k^{+} выберем не в виде совокупности 4 функций как по формуле (4.13), а ограничимся лишь первыми функциями (при $q = 1$), т. е. в виде

$$W_k'^{+}\left(z_k\right) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{kln}}{\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^{n}}, \tag{4.21}$$

где $b_{kln} = \overline{r_{kk}}\,\overline{a_{kln}}$ – неизвестные постоянные, а ζ_{kl}^{+} – переменные, определяемые из конформных отображений [52, 58]

$$z_k = \overline{z_{kl}} - (\overline{\mu_k} - \mu_k)h^{+} + \overline{R_{kl}}\left(\zeta_{kl}^{+} + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^{+}}\right) \tag{4.22}$$

внешностей единичных кругов $\left|\zeta_{kl}^{+}\right| \geq 1$ на внешности контуров L_{kl}^{+} верхней (относительно границы L_k^{+}) полуплоскости S_k^{+}, симметричных относительно прямолинейных границ L_k^{+} контурам L_{kl}.

Окончательно для комплексных потенциалов (4.17) будем иметь выражения

$$W_k'\left(z_k\right) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{kln}\varphi_{kln}(z_k) + b_{kln}\varphi_{kln}^{+}(z_k)\right], \tag{4.23}$$

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^{n}}, \quad \varphi_{kln}^{+}\left(z_k\right) = \frac{1}{\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^{n}}; \tag{4.24}$$

ζ_{kl}, ζ_{kl}^{+} – функции, вычисляемые из неявных зависимостей (4.3), (4.22); a_{kln}, b_{kln} – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана (4.18), (4.21).

Неизвестные постоянные a_{kln}, b_{kln} $\left(k=\overline{1,4};\ l=\overline{1,\mathcal{L}},\ n=1,2,...\right)$ определим из граничных условий на прямолинейной границе L^{+} и на контурах отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать указанные выше комплексные постоянные c_l. При дифференцировании по дуге контуров области на основе (3.10) эти условия имеют вид

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikp}\delta_{k,s}W_k''\left(t_{kp}\right)=\frac{df_{ip}(t)}{ds}\quad\left(p=\overline{1,\ \mathcal{L}+1}\right),\tag{4.25}$$

где $\delta_{k,s}=\dfrac{dt_k}{ds}=\dfrac{x'+\mu_k y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$; x', y' – производные переменных (3.2) по параметру θ параметрического задания эллипсов (3.1); s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки, причем для прямолинейной границы L^{+}, где $f_{i\mathcal{L}+1}(t)=0$ и производная $\delta_{k,s}=1$, правая часть уравнений $\dfrac{df_{i\mathcal{L}+1}(t)}{ds}=0$.

Граничным условиям (4.25) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [19, 67, 138]. Для этого выберем на прямолинейной границе L^{+} и контурах отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\ \mathcal{L}}\right)$ заданной области S систему точек $M_{pm}\left(x_{pm},\,y_{pm}\right)$ $\left(m=\overline{1,\ M_p},\ p=\overline{1,\ \mathcal{L}+1}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (4.23). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} и b_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp}\delta_{k,s}\left[\varphi_{kln}'\left(t_{kpm}\right)a_{kln}+\varphi_{kln}'^{+}\left(t_{kpm}\right)b_{kln}\right]=$$

$$=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikp}\delta_{k,s}\Gamma_k\quad\left(i=\overline{1,4};\ m=\overline{1,M_p};\ p=\overline{1,\ \mathcal{L}+1}\right).\tag{4.26}$$

Кроме уравнений (4.26), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения (3.14), следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_l.

Систему (4.26), дополненную уравнениями (3.14), будем решать с использованием сингулярных разложений [160, 161]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln} и b_{kln}, а, следовательно, и функции $W_k'(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, для механических моментов и моментов индукций (векторов индукций) имеют место формулы (2.62), (2.63).

Зная основные характеристики, можно найти также моменты на произвольных площадках с нормалью n и касательной s, используя формулы (2.30)–(2.32).

При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ), в частности, на основе известных формул (3.15).

Исследование ЭМУС полуплоскости. Численные исследования были проведены для изгиба полуплоскости усилиями $M_x^\infty = m_x$ в случаях полуплоскости с круговым отверстием, в том числе выходящим на прямолинейную границу (случай полуплоскости с выемом), или полуплоскости с круговым отверстием и краевой трещиной из нее в перемычке, в том числе выходящей на прямолинейную границу (случай полуплоскости с круговым отверстием и разрезом между отверстием и границей полуплоскости). Исследования проводились с целью сравнения значений величин, получаемых при точном (изложенным в п.4.1 методом интегралов типа Коши) и приближенном (предложенным в п.4.2 обобщенным методом наименьших квадратов) удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе, а также решения новых задач, когда отверстия пересекают границу полуплоскости.

При проведении исследований количество членов в бесконечных рядах (4.23) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этих контурах и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы, для которых составлялись уравнения (4.16), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах отверстий и на прямолинейной границе не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационном отрезке» прямолинейной границы брать от 100 до 500 «коллокационных точек». В качестве «коллокационного отрезка» прямолинейной границы выбирался отрезок длины от 1 до 4 диаметров отверстия (длины трещины) по каждую сторону от точки перемычки. Как показывают исследования, за этим отрезком не наблюдаются существенные изменения концентрации моментов (следовательно, и напряжений), то есть значения этих величин здесь практически такие же как в полуплоскости без отверстий и трещин.

Полуплоскость с круговым отверстием. В таблице А.4.5 для задач ЭМУ и ТУ изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из различных материалов с внутренним круговым отверстием радиуса a_1 (рисунок 4.7) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c / a_1, где c – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. При этом характерными были точки $A\,(0,-a_1)$, $B\,(a_1, 0)$, $C\,(0, a_1)$ $D\,(0,\, a_1 + c/2)$, $O\,(0,\, a_1 + c)$, $L\,(a_1,\, a_1 + c)$, $M\,(2a_1,\, a_1 + c)$. Вариант $c / a_1 = 0$, соответствует случаю, когда контур отверстия выходит на границу полуплоскости (касается прямолинейной границы), при $c / a_1 < 0$ контур отверстия пересекает границу полуплоскости, то есть имеет место полуплоскость с круговым выемом различной глубины, например, при $c / a_1 = -1$ центр кругового выема оказывается на прямолинейной границе и выемом является полукруг.

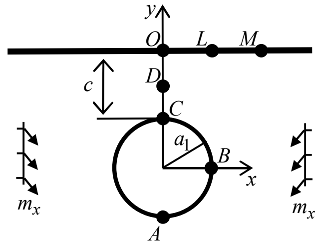


Рисунок 4.7

Как показывают расчеты, для полуплоскости из материала М1, близкого по упругим свойствам к изотропному материалу, значения изгибающих моментов в задачах ЭМУ и ТУ оказываются весьма близкими, отличаясь друг от друга лишь в точке B, и то менее чем на 2%. Поэтому значения величин в остальных точках приведены лишь для задачи ЭМУ. На рисунке Б.4.4 для полуплоскости из более пьезоактивного материала М2, для некоторых значений c/a_1 изображены графики распределения M_s/m_x по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, причем сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ.

Как следует из данных таблицы А.4.5 и рисунка Б.4.4, с приближением отверстия к прямолинейной границе значения моментов в точках перемычки и прямолинейной границы вблизи перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в остальных точках. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала (ср. значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ), особенно в зоне перемычки между отверстием и прямолинейной границей. В точках высокой концентрации напряжений значения моментов в задачах ЭМУ и ТУ отличаются друг от друга около 15%. Поэтому при исследованиях концентрации напряжений (следовательно, и моментов) в элементах конструкций из пьезоматериалов нельзя ограничиваться решением задачи ТУ, а нужно решать задачу ЭМУ.

Полуплоскость с круговым отверстием и краевой трещиной. В таблице А.4.6 для изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полуплоскости из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 и вертикальной краевой трещиной из контура отверстия длины $l_2 = a_1$ в перемычке (рисунок 4.8) с точностью до множителя m_x в зависимости от c/a_1, где c – длина перемычки между вершиной трещины и границей полуплоскости, приведены значения КИМ для вершины трещины и изгибающих моментов M_x/m_x в некоторых характерных точках полуплоскости. При этом характерными точками были $A\,(0, -a_1)$, $B\,(a_1, 0)$, $F\,(0, 2a_1)$, $D\,(0, 2a_1 + c/2)$, $O\,(0, 2a_1 + c)$, $L\,(a_1, 2a_1 + c)$,

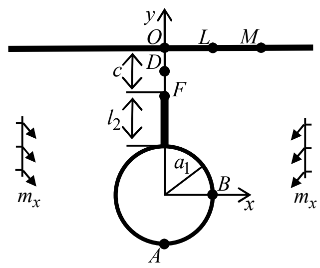


Рисунок 4.8

$M\ (2a_1,\, 2a_1 + c)$. На рисунке Б.4.5 для некоторых значений $c\,/\,a_1$ изображены графики распределения моментов $M_s\,/\,m_x$ по контуру отверстия для полуплоскости из материала М2.

Как следует из данных таблице А.4.6 и рисунке Б.4.5, приближение кругового отверстия с краевой трещиной к границе полуплоскости ведет к весьма существенному росту концентрации изгибающих моментов в точках перемычки, около контура отверстия и около прямолинейной границы вблизи перемычки. Выход трещины на прямолинейную границу (случай разреза между контуром отверстия и границей полуплоскости) резко снижает значения моментов в точках перемычки и незначительно изменяет их вблизи прямолинейной границы. Незначительное уменьшение значений моментов наблюдается и с уменьшением длины разреза.

4.3. Решение задачи для многосвязной полосы

Рассмотрим пьезополосу, занимающую многосвязную область, ограниченную прямолинейными границами L^+ (верхней), L^-(нижней) и контурами эллиптических отверстий L_l $\left(l = \overline{1,\, \mathcal{L}}\right)$ с полуосями a_l, b_l (рисунок 4.9). Эллипсы могут переходить в прямолинейные разрезы-трещины, пересекать прямолинейные границы, пересекаться между собой, аппроксимировать контуры отверстий произвольной конфигурации. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полосы и осью Ox, параллельной прямолинейным границам. Обозначим расстояния от начала координат до прямолинейных границ L^+, L^- соответственно через h^+ и h^-. Выберем локальные системы коорди-

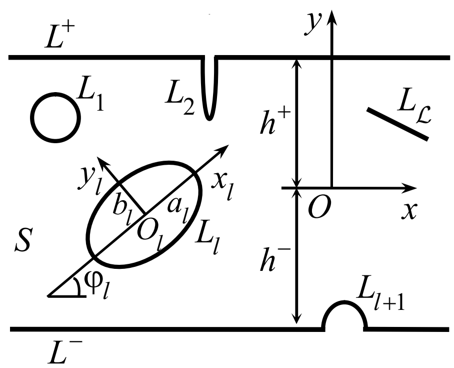


Рисунок 4.9

нат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l, отсчитываемых от положительного направления Ox против часовой стрелки. Тогда в системе Oxy уравнения L_l записываются в виде (3.2).

Будем считать, что прямолинейные границы L^+, L^- не загружены, на контурах L_l действуют механические изгибающие моменты $m_l(t)$, поперечные силы $p_l(t)$, моменты электрической индукции $m_{dl}(t)$ и магнитной индукции $m_{bl}(t)$ так, что их главные векторы и главные моменты на каждом из контуров равны нулю. На бесконечности полоса не загружена или изгибается механическими моментами M_x^∞ и моментами индукций M_{dx}^∞, M_{bx}^∞; моменты M_y^∞, H_{xy}^∞, M_{dy}^∞, M_{by}^∞ в силу незагруженности прямолинейной границы равны нулю.

Задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полосы будем решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [53]. В таком случае она сводится к нахождению функций $W_k'(z_k)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ обобщенных комплексных переменных (2.54) из граничных условий (3.10).

Обозначим исходную многосвязную область, ограниченную прямолинейными границами и контурами отверстий через S, верхнюю полуплоскость с границей L^+ – через S^+, нижнюю полуплоскость с границей L^- – через S^-. В областях комплексных переменных z_k $\left(k=\overline{1,4}\right)$ исходной области S соответствуют многосвязные полосы S_k с прямолинейными границами L_k^+, L_k^- и контурам отверстий контуры L_{kl}.

Функции $W_k'\left(z_k\right)$ определены в многосвязных областях S_k и на основе общих представлений комплексных потенциалов [53] их можно представить в виде

$$W_k'\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}} W_{kl}'\left(z_k\right)+W_k'^{+}\left(z_k\right)+W_k'^{-}\left(z_k\right), \tag{4.27}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений (4.2); $W_{kl}'\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные вне L_{kl}; $W_k'^{+}\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с границами L_k^+; $W_k'^-(z_k)$ – функции, голоморфные в верхних полуплоскостях с границами L_k^-.

Используя конформные отображения (4.3) внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl}, функции $W_{kl}'(z_k)$, голоморфные вне контуров L_{kl}, представим рядами Лорана вида

$$W_{kl}'(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} \tag{4.28}$$

с неизвестными коэффициентами a_{kln}.

По аналогии с приближенным решением задачи для полуплоскости, комплексные потенциалы $W_k'^+(z_k)$, голоморфные в нижних полуплоскостях с границей L_k^+ выберем в виде

$$W_k'^+(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{kln}}{\left(\zeta_{kl}^+\right)^n}, \tag{4.29}$$

где b_{kln} – неизвестные постоянные, а ζ_{kl}^+ – переменные, определяемые из неявных зависимостей (4.22).

Аналогичным образом выберем представления голоморфных в верхних полуплоскостях с границами L_k^- функций

$$W_k'^-(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{kln}}{\left(\zeta_{kl}^-\right)^n}, \tag{4.30}$$

в которых c_{kln} – неизвестные постоянные; ζ_{kl}^- – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k = (\overline{\mu_k} - \mu_k)h^- + \overline{z_{kl}} + \overline{R_{kl}}\left(\zeta_{kl}^- + \frac{\overline{m_{kl}}}{\zeta_{kl}^-}\right). \tag{4.31}$$

Окончательно для комплексных потенциалов (4.27) будем иметь выражения

$$W_k'(z_k) = \Gamma_k z_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{kln}\varphi_{kln}(z_k) + b_{kln}\varphi_{kln}^+(z_k) + c_{kln}\varphi_{kln}^-(z_k) \right], \tag{4.32}$$

$$\varphi_{kln}(z_k)=\frac{1}{\zeta_{kl}^n},\quad \varphi_{kln}^{+}(z_k)=\frac{1}{\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^n},\quad \varphi_{kln}^{-}(z_k)=\frac{1}{\left(\zeta_{kl}^{-}\right)^n};\tag{4.33}$$

ζ_{kl}, ζ_{kl}^{+}, ζ_{kl}^{-} – функции, вычисляемые из неявных зависимостей (4.3), (4.22), (4.31) ; a_{kln}, b_{kln}, c_{kln} – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана (4.28), (4.29), (4.30).

Неизвестные постоянные a_{kln}, b_{kln}, c_{kln} $\left(k=\overline{1,4};\ l=\overline{1,\mathcal{L}},\ n=1,2,...\right)$ определим из граничных условий на прямолинейных границах L^{+}, L^{-} и на контурах отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать указанные выше комплексные постоянные c_l. На основе равенств (3.10) эти условия при дифференцировании по дуге контуров области имеют вид

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikp}\delta_{k,s}W_k''\left(t_{kp}\right)=\frac{df_{ip}(t)}{ds},\ \left(p=\overline{1,\ \mathcal{L}+2}\right).\tag{4.34}$$

При этом для точек контуров отверстий $\delta_{k,s}=\dfrac{dt_k}{ds}=\dfrac{x'+\mu_k y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$; x', y' – производные переменных (3.2) по параметру θ параметрического задания эллипсов (3.1); s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки; для прямолинейных границ L^{+}, L^{-}, где $f_{ip}(t)=0$, $\delta_{k,s}=1$, правые части уравнений (4.34) равны нулю.

Граничным условиям (4.34) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [19, 67, 138]. Для этого выберем «коллокационные отрезки» на прямолинейных границах L^{+} и L^{-}, затем на них и на контурах отверстий и трещин L_l $\left(l=\overline{1,\ \mathcal{L}}\right)$ систему точек $M_{pm}\left(x_{pm},y_{pm}\right)$ $\left(m=\overline{1,\ M_p},\ p=\overline{1,\ \mathcal{L}+2}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (4.32). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln}, b_{kln} и c_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp}\delta_{k,s}\left[\varphi'_{kln}\left(t_{kpm}\right)a_{kln}+\varphi'^{+}_{kln}\left(t_{kpm}\right)b_{kln}+\varphi'^{-}_{kln}\left(t_{kpm}\right)c_{kln}\right]=$$

$$=-2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikp}\delta_{k,s}\Gamma_k \quad \left(i=\overline{1,4};\ m=\overline{1,M_p};\ p=\overline{1,\mathcal{L}+2}\right). \qquad (4.35)$$

Кроме уравнений (4.35), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения (3.14), следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_l.

Систему (4.35), дополненную уравнениями (3.14), будем решать использованием сингулярных разложений [160, 161]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln}, b_{kln} и c_{kln}, а, следовательно, и функции $W'_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках). В частности, для механических моментов и моментов индукций (векторов индукций) имеют место формулы (2.62), (2.63).

По основным характеристикам можно найти также моменты на произвольных площадках. При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ) по формулам (3.15).

Исследование ЭМУС полосы. Численные исследования были проведены для полосы с круговым отверстием, в том числе выходящим на одну из прямолинейных границ, для полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке, в том числе выходящей на прямолинейную границу.

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (4.16) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этих контурах и на «коллокационных отрезках» прямолинейных границ, для которых составлялись уравнения (4.16), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах отверстий и на прямолинейных границах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В качестве «коллакационных отрезков» на прямолинейных границах выбирались отрезки, за пределами которых влияние отверстий и трещин на значения исследуемых величин незначительно. В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационных отрезках» прямолинейной границы брать от 50 до 500 «коллокационных точек». При этом в качестве «коллокационных отрезков» на прямолинейных границах были отрезки длины 1–3 диаметра основного концентратора моментов с центром в точке, где наиболее существенно влияние отверстий и трещин.

Полоса с круговым отверстием. В таблице А.4.7 для задач ЭМУ и ТУ изгиба моментами $M_x^\infty = m_x$ полосы с центральным круговым отверстием радиуса a_1 (рисунок 4.10) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c_1 / a_1, где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и границами полосы. При этом характерными были точки $B\,(a_1, 0)$, $C\,(0, a_1)$ $D\,(0, a_1 + c_1/2)$, $E^+\,(0, a_1 + c_1)$,

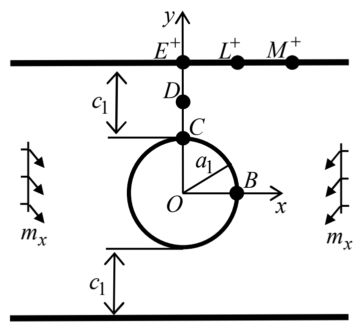


Рисунок 4.10

$L^+\,(a_1, a_1 + c_1)$, $M^+\,(2a_1, a_1 + c_1)$. Для наиболее пьезоактивного материала М2 во всех точках приведены значения моментов как для задачи ЭМУ, так для задачи ТУ. Для М1 и М3 эти значения даны лишь в точке B, где они претерпевают наибольшие изменения, и в точке C, где наблюдается наибольшая концентрация моментов.

На рисунке Б.4.6 для полосы из наиболее пьезоактивного материала М2, для некоторых значений c_1 / a_1 изображены графики распределения M_s / m_x по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, а на рисунке Б.4.7 изображены графики распределения моментов M_x / m_x по отрезку прямолинейной границы L^+.

В таблице А.4.8 для задачи ЭМУ об изгибе моментами $M_x^\infty = m_x$ полосы из

M2 с круговым отверстием радиуса a_1 (рисунок 4.11, *а*) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках в зависимости от отношения c_1 / a_1, где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $6a_1$, $c_2 = 4a_1 - c_1$, а характерными были точки $A\,(0, -a_1)$,

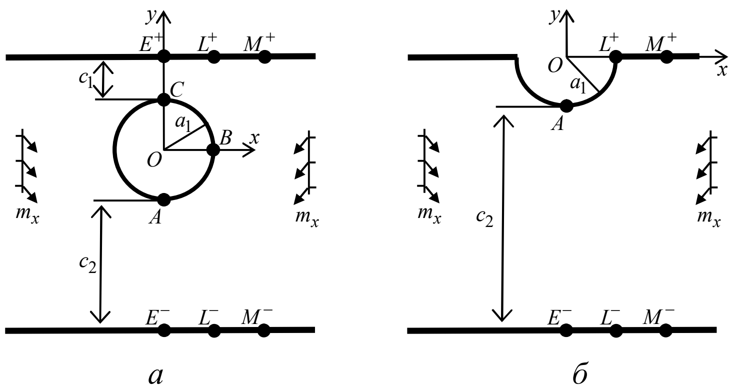


Рисунок 4.11

$B\,(a_1, 0)$, $C\,(0, a_1)$, $E^+\,(0, a_1 + c_1)$, $L^+\,(a_1, a_1 + c_1)$, $M^+\,(2a_1, a_1 + c_1)$, $E^-\,(0, -a_1 - c_2)$, $L^-\,(a_1, -a_1 - c_2)$, $M^-\,(2a_1, -a_1 - c_2)$. Отрицательные значения c_1 / a_1 относятся к случаям полосы с выемом, например, $c_1/a_1 = -1$ соответствует случаю, когда отверстие выходит на край до его горизонтального диаметра (рисунок 4.11, *б*).

Из данных таблицы А.4.7, таблицы А.4.8, рисунка Б.4.6 и рисунка Б.4.7 следует, что 1) влияние прямолинейных границ полосы на напряженное состояние около отверстия значительно, если отверстие находится на расстоянии менее диаметра отверстия от них $(c_i/a_1 < 2,\ i = 1,2)$; 2) сближение отверстия с некоторой прямолинейной границей приводит к значительному росту концентрации моментов (следовательно, и напряжений) в зоне между отверстием и этой прямолинейной границей с незначительными изменениями в других зонах; 3) при сближении отверстия с некоторой прямолинейной границей концентрация напряжений наблюдается и вблизи этой прямолинейной границы на расстояниях до радиуса отверстия; 4) при выходе отверстия на прямолинейную границу (рисунок 4.11, *б*) концентрация моментов резко уменьшается вблизи выема как около контура отверстия, так и в точках прямолинейной границы; 5) на значения получаемых при решении задачи моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала полосы; так для полосы из М1 с центральным круговым отверстием при $c_i/a_1 = 0{,}1$ $(i = 1{,}2)$ значения моментов в точке В для задачи ЭМУ отличаются от значений тех же моментов в задаче ТУ не более чем на 10%, для полосы из М2 это отличие составляет уже 65%, а для полосы из М3 эти моменты оказываются разных знаков – небольшое сжатие вблизи этой точки в задаче ТУ меняется на значительное растяжение в задаче ЭМУ; 6) в полосе с отверстием (при учете влияния обеих прямолинейных границ) значения моментов получаются несколько выше, чем в полуплоскости (при учете влияния только одной прямолинейной границы).

Полоса с круговым отверстием и краевой трещиной. В таблицы А.4.9 для задачи ЭМУ об изгибе моментами $M_x^\infty = m_x$ полосы из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 и краевой трещиной длины $l_2 = a_1$ (рисунок 4.12, *а*) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов и КИМ k_1^+ в некоторых характерных точках полосы в зависимости от отношения c_1 / a_1, где c_1 – длина перемычки между вершиной трещины и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $7a_1$, а $c_2 = 4a_1 - c_1$. Характерными были точки $A\,(0, -a_1)$, $B\,(a_1, 0)$, $F\,(0, 2a_1)$, $E^+\,(0, 2a_1 + c_1)$, $L^+\,(a_1, 2a_1 + c_1)$, $M^+\,(2a_1, 2a_1 + c_1)$, $E^-\,(0, -a_1 - c_2)$, $L^-\,(a_1, -a_1 - c_2)$, $M^-\,(2a_1, -a_1 - c_2)$. Отрицательные значения c_1 / a_1 относятся к случаям разреза между отверстием и верхней границей полосы (рисунок 4.12, *б*), например, $c_1/a_1 = -0{,}5$ относится к случаю, когда длина разреза равна половине радиуса отверстия.

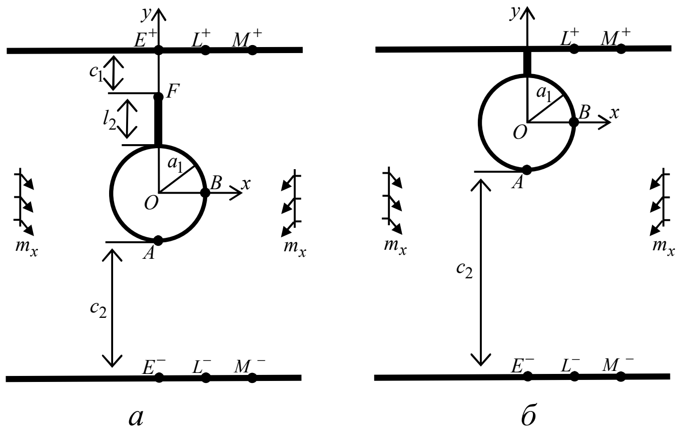


Рисунок 4.12

Из данных таблицы А.4.9 и других полученных результатов следует, что сближение отверстия с краевой трещиной с границей полосы приводит к весьма высокой концентрации моментов в точках перемычки и в точках прямолинейной границы вблизи перемычки; при этом значительно увеличиваются значения КИМ для конца трещины; при выходе трещины на прямолинейную границу (полоса с отверстием и разрезом между ним и прямолинейной границей) концентрация моментов резко уменьшается.

4.4. Выводы к разделу 4

В данном разделе решены задачи об изгибе пьезоплиты в виде полуплоскости или полосы с отверстиями и трещинами. Вначале для полуплоскости с внутренними отверстиями или трещинами методом интегралов типа Коши получены общие представления комплексных потенциалов, точно удовлетворяющих граничным условиям на прямолинейной границе и приближенно, с использованием метода наименьших квадратов, на контурах отверстий. На этой основе для более общего случая, когда контуры отверстий могут пересекать прямолинейную границу, выбраны общие представления комплексных потенциалов, содержащие постоянные, определяемые из граничных условий методом наименьших квадратов как на контурах отверстий, так и на прямолинейной границе. Последний подход распространен и случай полосы с отверстиями и трещинами. Решения всех указанных задач для полуплоскости и полосы сведены к решениям систем линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных, входящих в комплексные потенциалы. Численными исследованиями установлена высокая эффективность предложенных методик решения задач, устойчивость получаемых результатов. Показано, что для внутренних отверстий и трещин результаты, получаемые при использовании приближенного удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе, практически совпадают с аналогичными данными, найденными при точном удовлетворении этим условиям.

Решен ряд задач для полуплоскости и полосы с произвольно расположенными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на прямолинейные границы. Численные исследования проведены для полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, в том числе выходящими на прямолинейную границу (случай полуплоскости с выемом), полуплоскости с круговым отверстием и внутренней трещиной в перемычке, с круговым отверстием, имеющим краевую трещину в перемычке, в том числе выходящей на прямолинейную границу (случай полуплоскости с круговым отверстием и разрезом между отверстием и границей полуплоскости), для полосы с круговым отверстием, в том числе выходящим на одну из прямолинейных границ, для полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке, в том числе выходящей на прямолинейную границу. Во всех задачах исследовано влияние геометрических характеристик и физико-механических свойств материалов на значения основных характеристик ЭМУС и КИМ. Установлено, что при сближении отверстий (трещин) с прямолинейными границами значения указанных величин резко возрастают. Наличие второй прямолинейной границы (случай полосы) приводит к значительному увеличению значений указанных величин. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зонах высокой концентрации изгибающих моментов, поэтому в этих случаях нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости об изгибе плиты, а нужно решать задачу электромагнитоупругости.

По результатам, представленным в разделе 4, опубликованы работы [44, 47, 60–62, 65].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных в диссертационной работе исследований разработаны методы решения задач об изгибе электромагнитоупругих тонких плит, даны их приложения к решениям различных классов задач для односвязных и многосвязных конечных и бесконечных плит, полуплоскости или полосы с отверстиями, трещинами и выемами.

Основные научные результаты и выводы, полученные в работе, следующие:

1. Исследованы основные соотношения теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит.

2. Показано введение обобщенных комплексных потенциалов теории изгиба электромагнитоупругих тонких плит, сведение краевых задач теории изгиба электромагнитоупругих плит к граничным условиям по определению комплексных потенциалов, нахождение основных характеристик ЭМУС по комплексным потенциалам.

3. Даны точные аналитические решения ряда задач для односвязных плит.

4. С использованием методов конформных отображений, разложений функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, обобщенного метода наименьших квадратов разработан численно-аналитический метод определения комплексных потенциалов для конечной или бесконечной многосвязной плиты с произвольно расположенными отверстиями и трещинами (в том числе с пересекающимися контурами), приводящий задачи к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярных разложений.

5. Предложен, основанный на использовании метода интегралов типа Коши, подход решения задач электромагнитоупругости для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами с точным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе и приближенным удовлетворением (обобщенным методом наименьших квадратов) на контурах отверстий и трещин.

6. Предложен, основанный на приближенном удовлетворении граничным условиям на всех границах многосвязных полуплоскости и полосы, метод, поз-

воляющая решать задачи не только для случая внутренних отверстий и трещин, но и когда последние пересекают прямолинейные границы.

7. Получены теоретические решения ряда задач с их алгоритмизацией.

8. На алгоритмическом языке C++ составлены комплексы программ численной реализации полученных решений.

9. Численными исследованиями установлена эффективность разработанных методик решения различных классов задач, устойчивость и достоверность получаемых результатов.

10. Проведены численные исследования по решению ряда задач, с помощью которых установлены новые закономерности влияния на значения основных характеристик ЭМУС физико-механических свойств материалов рассматриваемых плит, их геометрических характеристик. В частности, установлено, что учет электромагнитных свойств материалов тонких плит вносит значительный вклад в значения основных характеристик ЭМУС, следовательно, при исследованиях нельзя пренебрегать пьезосвойствами материалов, решая классическую задачу изгиба тонких анизотропных плит, а нужно решать общую задачу электромагнитоупругости. Это влияние особенно велико в зонах высоких концентраций моментов, где значения основных характеристик ЭМУС с учетом и без учета пьезосвойств могут даже в несколько раз отличаться друг от друга. Установлено также значительное влияние на значения основных характеристик ЭМУС геометрических характеристик рассматриваемых плит, в частности, расстояние между отверстиями и трещинами, способ их подкрепления, их геометрические характеристики. При сближении границ (отверстий, трещин, бесконечных прямолинейных границ) значения основных характеристик ЭМУС в точках перемычек, а в случае трещин и КИМ резко растут, иногда в десятки раз.

11. Результаты, представленных в диссертационной работе исследований, имеют как теоретический, так и практический интерес. Предложенные методы решения задач могут использоваться для решения разнообразных инженерных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксентян, О.К. Напряженное состояние плиты малой толщины / О.К. Аксентян, И.И. Ворович // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, №. 6. – С. 1057–1074.

2. Аксентян, О.К. Построение уточненных прикладных теорий для плиты на основе уравнений теории упругости / О.К. Аксентян, Ю.А. Устинов // Прикладная математика и механика – 1972. – Т. 36, № 2. – С. 272–281.

3. Амбарцумян, С.А. О некоторых вопросах развития исследований в области электромагнитоупругости тонких тел / С.А. Амбарцумян // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1974. – № 2. – С. 175–188.

4. Астров, Д.Н. Магнитоэлектрический эффект в окиси хрома / Д.Н. Астров // ЖЭТФ. – 1961. – Т. 40. – С. 1035–1041.

5. Бардзокас, Д.И. Электроупругость кусочно-однородных тел / Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский. – Сумы: Университетская книга, 2000. – 308 с.

6. Баренблатт, Г.И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении / Г.И. Баренблатт // Прикладная математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 4. – С. 706–721.

7. Берлинкур, Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.

8. Бичурин, М.И. Влияние электрического поля на спектр антиферромагнитного резонанса в борате железа / М.И. Бичурин, В.М. Петров // ФТТ. – 1987. – Т. 29. – № 8. – С. 2509–2510.

9. Бучельников, В.Д. Новые типы поверхностных волн в антиферромагнетиках с магнитоэлектрическим эффектом / В.Д. Бучельников, В.Г. Шавров // ЖЭТФ. – 1996. – Т. 109. – № 2. – С. 706–716. – EDN: YSCQSL.

10. Ватульян, А.О. Градиентные модели деформирования составных электроупругих тел / А.О. Ватульян, С.А. Нестеров // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 5. – С. 5–16. – DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.01. – EDN:

MSKRGO.

11. Ватульян, А.О. Новая формулировка граничных интегральных уравнений первого рода в электроупругости / А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, вып. 6. – С. 860–868. – EDN: HCDUPZ.

12. Ватульян, А.О. О реконструкции плоских трещин в анизотропном упругом теле / А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69. № 3. – С. 533–542. – EDN: HSHRCD.

13. Ватульян, А.О. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектроупругости / А.О. Ватульян, А.Ю. Кирютенко, А.В. Наседкин // Прикладная механика и техническая физика. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 135–142. – EDN: ZLZRBC.

14. Ватульян, А.О. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел / А.О. Ватульян, А.Н. Соловьев. – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008. – 176 с. – ISBN 978-5-9275-0500-5. – EDN: QJWQCT.

15. Веневцев, Ю.Н. Сегнетомагнетики / Ю.Н. Веневцев, В.В. Гагулин, В.Н. Любимов. – М.: Наука, 1982. – 224 с.

16. Вовк, Л.П. Моделирование распространения полуэллиптической продольной трещины на внешней поверхности полого цилиндра / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 1(74). – С. 5–15. – EDN: PGWRUT.

17. Вовк, Л.П. Моделирование распространения трещины острого v-образного выреза модели, ослабленной разгружающим отверстием / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – № 1(66). – С. 18–30. – EDN: WJHUVY.

18. Вовк, Л.П. Определение параметров разрушения пластины с трещиной при наличии концентраторов напряжения в процессе упругопластического деформирования / Л.П. Вовк, Е.С. Кисель // Вестник Донецкого национального технического университета. – 2018. – № 4(14). – С. 8–15. – EDN: YRIUIX.

19. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры /

В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

20. Ворович, И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / И.И. Ворович // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикладной механике. Механика твердого тела. – М.: Наука, 1966. – С. 116–136.

21. Ворович, И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек / И.И. Ворович // Материалы I Всесоюз. шк. по теории и численным расчетам оболочек и пластин. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. – С. 51–149.

22. Ворович, И.И. О точности асимптотических разложений решения задачи теории упругости для толстой плиты / И.И. Ворович, О.С. Малкина // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1967. – Вып. 5. – С. 92–102.

23. Ву, Э.М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред / Э.М. Ву // Композиционные материалы. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – С. 401–491.

24. Глушанков, Е.С. Действие линейного потока тепла в многосвязной полуплоскости из пьезоматериала / Е.С. Глушанков // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2020. – № 1(70). – С. 16–27. – EDN: DTMKCG.

25. Гринченко, В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка. – 1989. – 280 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 5).

26. Гузь, А.Н. Акустоэлектромагнитоупругость / А.Н. Гузь, Ф.Г. Махорт. – К.: Наук. думка, 1988. – 288 с. (Механика связных полей в элементах конструкций: В 5 т., Т. 3).

27. Гузь, А.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – К.: Вища школа, 1982. – 352 с.

28. Гузь, А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / А.Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1983. – 295 с.

29. Гуревич, Л.Э. К теории линейного магнитоэлектрического эффекта в антиферромагнетиках / Л.Э. Гуревич, Д.А. Филиппов // ФТТ. – 1986. – Т. 28. – № 9. – С. 2696–2699.

30. Гуревич, Л.Э. Нелинейный магнитоэлектрический эффект / Л.Э. Гуревич, Д.А. Филиппов // ФТТ. – 1987. – Т. 29. – № 11. – С. 3446–3448.

31. Дзялошинский, И.Е. К вопросу о магнитоэлектрическом эффекте в антиферромагнетиках / И.Е. Дзялошинский // ЖЭТФ. – 1959. – Т. 37. – С. 881–882.

32. Иванов, Г.М. Напряженное состояние изотропной эллиптической плиты с эллиптическим упругим ядром / Г.М. Иванов, Т.В. Смоляга. – В кн.: «Механика твердого тела», 1973. – Вып. 5. – С. 54–68.

33. Иванов, Г.М. Чистый изгиб анизотропной эллиптической плиты с отверстием / Г.М. Иванов, В.В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1969. – Вып. 4. – С. 111–115.

34. Идентификация повреждений в упругих структурах: подходы, методы, анализ / В.А. Акопьян, Е.В. Рожков, А.Н. Соловьев [и др.]. – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2015. – 74 с. – ISBN 978-5-9275-1517-2. – EDN: XCLZSZ.

35. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с. – ISBN 5-211-00940-1.

36. Исследование колебаний композитного магнитоэлектроупругого биморфа в зависимости от объемных долей его компонентов на основе прикладной теории / А.Н. Соловьев, Т.Б. До, В.А. Чебаненко [и др.] // Advanced Engineering Research. – 2022. – Т. 22, № 1. – С. 4–13. – DOI: 10.23947/2687-1653-2022-22-1-4-13. – EDN: WCAONU.

37. Калоеров, С.А. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами / С.А. Калоеров, Е.С. Горянская // Теорет. и прикл. Механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.

38. Калоеров, С.А. Двумерные задачи термоэлектроупругости и термомагнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2006. – №. 2. – С. 89–100.

39. Калоеров, С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных сред / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: ООО

«Юго-Восток, Лтд», 2007. – 268 с. – ISBN 978-966-374-281-6.

40. Калоеров, С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго–Восток, 2011. – 232 с. – ISBN 978-966-374-576-3.

41. Калоеров, С.А. Задача изгиба тонкой электромагнитоупругой плиты с периодическим рядом отверстий или трещин / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Донецкие чтения 2023: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VIII Международной научной конференции, Донецк, 25-27 октября 2023 года. – Донецк: Донецкий государственный университет, 2023. – С. 55–57. – EDN: OLTDVC.

42. Калоеров, С.А. Изгиб многосвязных анизотропных плит с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.И. Занько // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 456–464. – DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-4-456-464. – EDN: XHPYJL.

43. Калоеров, С.А. Изгиб тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Современные проблемы механики сплошной среды: тезисы докладов XX Международной конференции, Ростов-на-Дону, 18-21 июня 2020 года. – Ростов-на-Дону - Таганрог: Южный федеральный университет, 2020. – С. 81. – EDN: RULLEG.

44. Калоеров, С.А. Изгиб тонкой электроупругой многосвязной полуплоскости / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов, А.Б. Мироненко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 3(84). – С. 44–60. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-3-44-60. – EDN: JHSYGU.

45. Калоеров, С.А. Исследование изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 2. – С. 151–165. – DOI: 10.15372/PMTF20220214. – EDN: WUCJZS.

46. Калоеров, С.А. Исследование электромагнитоупругого состояния конечной многосвязной тонкой плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 4. – С. 34–44. – DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.04. –

EDN: ANPNLC.

47. Калоеров, С.А. Исследование электромагнитоупругого состояния многосвязной полуплоскости при ее поперечном изгибе / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции, Донецк, 15-17 октября 2024 г.– Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. – Т. 1. –С. 48–50. – EDN: KFRJCC.

48. Калоеров, С.А. Исследование электромагнитоупругого состояния тонкой многоугольной плиты с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов, А.Б. Мироненко // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2023. – № 1(82). – С. 5–20. – DOI:10.24412/0136-4545-2023-1-5-20. – EDN: APLKBS.

49. Калоеров, С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных анизотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикладная механика. – 2012. – Вып. 4(50). – С. 113–132.

50. Калоеров, С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 3–4. – С 37–57. – EDN: MUDEYB.

51. Калоеров, С.А. Краевые задачи прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 1. – С. 42–58. – EDN: VFEFJG.

52. Калоеров, С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.

53. Калоеров, С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. – 2022. – № 1. – С. 22–40. – EDN: EZZZBN.

54. Калоеров, С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных электроупругих сред / С.А. Калоеров // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

55. Калоеров, С.А. Определение термоэлектромагнитоупругого состояния многосвязных кусочно-однородных пьезопластин / С.А. Калоеров,

Е.С. Глушанков // ПМТФ. – 2018. – Т. 59, № 6. – С. 88–101. – DOI: 10.15372/PMTF20180609. – EDN: YPHTBJ.

56. Калоеров, С.А. Решение задач изгиба тонких пьезоплит с отверстиями и трещинами методом комплексных потенциалов электромагнитоупругости / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Международная конференция «Математика в созвездии наук». К юбилею ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовничего: Тезисы докладов / Орг. комитет: В.А. Садовничий, А.И. Шафаревич, И.А. Соколов [и др.]. – Москва: Издательство Московского университета, 2024. – С. 409–411.

57. Калоеров, С.А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Теорет. и прикладная механика. – 2014. – Вып. 55. – С. 99–138.

58. Калоеров, С.А. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы / С.А. Калоеров, Е.С. Глушанков, А.Б. Мироненко // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37. – DOI: 10.31857/S0572329922600438. – EDN: JLIYSC.

59. Калоеров, С.А. Решение задачи изгиба конечной многосвязной тонкой пьезоплиты с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Донецкие чтения 2022: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: материалы VII Международной научной конференции, посвящённой 85-летию Донецкого национального университета, Донецк, 27-28 октября 2022 года. Том 1. – Донецк: Донецкий национальный университет, 2022. – С. 56–58. – EDN: LVLHWW.

60. Калоеров, С.А. Решение задачи о поперечном изгибе полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2023. – № 3. – С. 3–20. – EDN: GZBAPP.

61. Калоеров, С.А. Решение задачи о поперечном изгибе электромагнитоупругой полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2025. – № 1. – С. 20–33. – DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.02.

62. Калоеров, С.А. Решение задачи об изгибе многосвязной пьезополуплос-

кости с приближенным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естеств. науки. – 2024. – № 1. – С. 28–41. – DOI: 10.5281/zenodo.12527097. – EDN: BYCRBC.

63. Калоеров, С.А. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе многосвязной плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 143–155. – DOI: 10.15372/PMTF20220415. – EDN: LWKFFP.

64. Калоеров, С.А. Решение задачи об электромагнитоупругом изгибе тонкой плиты с отверстиями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко, А.В. Сероштанов // Донецкие чтения 2021: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: материалы VI Международной научной конференции, Донецк, 26-27 октября 2021 года. Том 1. – Донецк: Донецкий национальный университет, 2021. – С. 44–47. – EDN: VYNLYQ.

65. Калоеров, С.А. Решение задачи электроупругости об изгибе полуплоскости с произвольными отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2024. – № 2(87). – С. 41–54. – DOI: 10.24412/0136-4545-2024-2-41-54. – EDN: ELCOHA.

66. Калоеров, С.А. Решения периодической и двоякопериодической задач об изгибе тонкой пьезоплиты с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2025. – № 2. – С. 28–45. – DOI: 10.31857/S1026351925020029. – EDN: AMQILM.

67. Калоеров, С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / А.С. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С. 103–116.

68. Калоеров, С.А. Термоэлектроупругое состояние анизотропной полуплоскости с отверстиями и трещинами / С.А. Калоеров, К.Г. Хорошев // Прикладные пробл. мех. и мат. – 2006. – Вып. 4. – С. 75–83.

69. Калоеров, С.А. Точные аналитические решения задач изгиба тонких электромагнитоупругих односвязных плит / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Донецкие чтения 2020: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Ма-

териалы V Международной научной конференции, Донецк, 17-18 ноября 2020 года / Под общей редакцией С.В. Беспаловой. Том 1. Часть 1. – Донецк: Донецкий национальный университет, 2020. – С. 71–73. – EDN: JESRLK.

70. Калоеров, С.А. Электромагнитоупругое состояние пластинки с криволинейными отверстиями / С.А. Калоеров, А.Б. Мироненко, М.А. Полянский // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – № 4(77). – С. 20–34. – EDN: VKXCWJ.

71. Каминский, А.А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами / А.А. Каминский. – К.: Наук. думка, 1990. – 312 с. – ISBN 5-12-001282-5.

72. Каминский, А.А. Хрупкое разрушение вблизи отверстий / А.А. Каминский. – К.: Наук. думка, 1982. – 158 с.

73. Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 311 с.

74. Керамоматричные пьезокомпозиты: микроструктурные особенности и диэлектрические свойства / А.Н. Рыбянец, А.В. Наседкин, Н.А. Швецова [и др.] // Известия РАН. Серия Физическая. – 2023. – Т. 87, № 9. – С. 1301–1307. – DOI: 10.31857/S0367676523702290. – EDN: JELGLO.

75. Кильчевский, Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач оболочек / Н.А. Кильчевский// Теория пластин и оболочек: Тр. II Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – Киев, 1962. – С. 58–69.

76. Копнина, В.И. Изгиб анизотропной эллиптической плиты / В.И. Копнина, Е.С. Губина // Математика. Механика. – 2009. – № 11. – С. 114–117. – EDN: UISADF.

77. Копнина, В.И. Изгиб кусочно-однородной эллиптической плиты / В.И. Копнина // Математика. Механика. – 2000. – № 2. – С. 168–170. – EDN: SHVDAB.

78. Космодамианский, А.С. Изгиб тонких многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк, 1973. – 264 с.

79. Космодамианский, А.С. Напряженное состояние пластинок с отвер-

стиями в трехмерной постановке / А.С. Космодамианский, В.Н. Ложкин, Ю.В. Мысовский, В.А. Шалдырван. – Донецк.: Изд-во Донецк. гос. ун-та, 1970. – 255 с.

80. Космодамианский, А.С. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин / А.С. Космодамианский, В.Н. Ложкин // Прикладная механика. – 1975. – Т. 11, № 5. – С. 45–53.

81. Космодамианский, А.С. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин / А.С. Космодамианский, В.Н. Ложкин // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 10. – С. 75–79.

82. Космодамианский, А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластниках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К., Донецк: Вища шк., 1983. – 160 с.

83. Кричевцов, Б.Б. Невзаимное преломление света в борацитах $R_3B_7O_{13}X$ $(R = Co, Cu, Ni,\ X = I, Br)$ / Б.Б. Кричевцов // ФТТ. – 2001. – Т. 43. – № 1. – С. 75–79.

84. Кричевцов, Б.Б. Невзаимные оптические явления в антиферромагнетике Cr_2O_3 в электрических и магнитных полях / Б.Б. Кричевцов, В.В. Павлов, Р.В. Писарев // ЖЭТФ. – 1988. – Т. 94. – № 2. – С. 284–295.

85. Кричевцов, Б.Б. Электромагнитооптический эффект в феррите-гранате иттрия $Y_3Fe_5O_{12}$ / Б.Б. Кричевцов, Р.В. Писарев, А.Г. Селицкий // Письма в ЖЭТФ. – 1985. – Т. 41. – № 6. – С. 259–261.

86. Кудрявцев, Б.А. Магнитотермоупругое поле в теле с полубесконечным разрезом / Б.А. Кудрявцев, В.З. Партон, Б.Д. Рубинский // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т. 44, № 5. – С. 916–922.

87. Кудрявцев, Б.А. Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником / Б.А. Кудрявцев, В.З. Партон, В.И. Ракитин // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 1. – С. 149–159.

88. Кэди, У. Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 719 с. – ISBN 978-5-4458-4507-2.

89. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 532 с.

90. Лехницкий, С.Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит / С.Г. Лехницкий // Прикладная математика и механика. Нов. сер. – 1938. – Т. 2, Вып. 2. – С. 181–210.

91. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977.– 416 с.

92. Лихачев, В.А. Изгиб упругой пластинки в виде эллиптического кольца / В.А. Лихачев // Прикладная математика и механика. – 1955. – Т. XIX, вып. 2. – С. 255–256.

93. Ложкин, В.Н. Напряженное состояние тонкой пьезоэлектрической пластинки с эллиптическим отверстием / В.Н. Ложкин, Л.Н. Олейник // Механика твердого тела. – 1976. – № 8. – С. 127–130.

94. Лурье, А.И. К задаче о равновесии пластины с опертыми краями / А.И. Лурье // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. – 1928. – Т. 31. – С. 305–320.

95. Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с. – ISBN 978-5-4460-5984-3.

96. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, В.А. Филиппов [и др.]. – М.: Акад. Естествозн., 2006. – 296 с. – ISBN 5-98654-021-2. – EDN: QJRLSN.

97. Магнитоэлектрические материалы. Физические свойства на сверхвысоких частотах (по данным отечественной и зарубежной печати 1968–1985 гг.) / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Н.Н. Фомич, Ю.М. Яковлев. – М.: ЦНИИ «Электроника», 1985. – 80 с.

98. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Том 2 / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобин, Н.А. Сеник, М.Л. Фильштинский. – М.: КомКнига, 2005. – 312 с. – ISBN 5-484-00072-6. – EDN: RASOFZ.

99. Меглинский, В.В. Изгиб анизотропной эллиптической плиты с эллиптическим отверстием, подкрепленным жестким кольцом / В.В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации

упругих тел (СГУ). – 1964. – Вып. 1. – С. 98–101.

100. Меглинский, В.В. Концентрация напряжений около жестких включений в анизотропной плите / В.В. Меглинский // Механика деформируемых сред. – 1971. – Вып. 1. – С. 35–42.

101. Меглинский, В.В. Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит / В.В. Меглинский // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел (СГУ). – 1967. – Вып. 3. – С. 97–127.

102. Моисеенко, А.А. Изгиб изотропной круглой плиты с упругим ядром / А.А. Моисеенко // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1970. – Вып. 12. – С. 119–133.

103. Моисеенко, А.А. Напряженно-деформированное состояние изотропной круглой плиты с криволинейным упругим ядром / А.А. Моисеенко // Теорет. и прикладная механика. – 1971. – Вып. 2. – С. 29–39.

104. Можен, Ж. Механика электромагнитных сплошных сред / Ж. Можен; пер. с англ. Кирюшин В.В.; ред. пер. Дунаев И.М., Партон В.З. – М.: Мир, 1991. – 560 с. – ISBN 5-03-002227-9.

105. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

106. Най, Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц / Дж. Най. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 388 с.

107. Наседкин, А.В. Анализ влияния поверхностных напряжений на эффективные свойства нанопористых пьезокомпозитов / А.В. Наседкин // Проблемы прочности и пластичности. – 2019. – Т. 81, № 1. – С. 5–18. – DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-1-5-18. – EDN: BZZRJL.

108. Наседкин, А.В. О моделях наноразмерных пьезоэлектрических материалов со связанными поверхностными эффектами / А.В. Наседкин, В.А. Еремеев // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Т. 79, № 4. – С. 375–384. – EDN: ZWTKMV.

109. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий // Пер. с польск. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

110. Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий; пер. с польск. В.А. Шачнева; под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Мир, 1986. – 159 с.

111. Остащенко, А.Ю. Магнитоэлектрический эффект в многослойных плёночных структурах ферромагнетик-пьезоэлектрик: специальность 05.27.01 «Твердотельная электроника, радиоэлектронные компоненты, микро- и наноэлектроника, приборы на квантовых эффектах»: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук / Остащенко Артем Юрьевич. – Москва, 2006. – 149 с. – EDN: NOCQWR.

112. Панасюк, В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1991. – 411 с. – ISBN 5-12-001634-0.

113. Панасюк, В.В. Основы механики разрушения материалов / В.В. Панасюк, Ф.Е. Андрейкив, В.З. Партон. – К.: Наук. думка, 1988. – 488 с. – ISBN 5-12-000301-X. (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т., Т. 1).

114. Партон, В.З. Динамическая механика разрушения / В.З. Партон, В.Г. Борисковский. – М.: Наука, 1985. – 264 с.

115. Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Наука, 1985. – 504 с.

116. Партон, В.З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с. – ISBN 5-02-013804-5.

117. Подильчук, Ю.Н. Напряженно-деформированное состояние упругого ферромагнетика с эллипсоидальным включением при действии однородного магнитного поля / Ю.Н. Подильчук, О.Г. Дашко // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 7. – С. 64–74.

118. Подильчук, Ю.Н. Представление общего решения уравнений статики электроупругости трансверсально-изотропного пьезокерамического тела через

гармонические функции / Ю.Н. Подильчук // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 20–26.

119. Подильчук, Ю.Н. Электроупругое равновесие трансверсально-изотропных пьезокерамических сред с полостями, включениями и трещинами / Ю.Н. Подильчук // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 10. – С. 109–119.

120. Подстригач, Я.С. Магнитотермоупругость электропроводных тел / Я.С. Подстригач, Я.Й. Бурак, В.Ф. Кондрат. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.

121. Пятаков, А.П. Магнитоэлектрические материалы и мультиферроики / А.П. Пятаков, А.К. Звездин // Успехи физических наук. – 2012. – Т. 182, № 5. – С. 593–620. – DOI: 10.3367/UFNr.0182.201206b.0593. – EDN: TLOZJV.

122. Пятаков, А.П. Нанокомпозиты для магнитной электроники / А.П. Пятаков // Бюллетень «МАГО». – 2007. – Т. 8, № 1. – С. 1–3.

123. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

124. Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1994. – Т. 1. – 528 с. – ISBN 5-02-007052-1.

125. Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1994. – Т. 2. – 560 с. – ISBN 5-02-007053-X.

126. Сероштанов, А.В. Решение задачи изгиба прямоугольной электромагнитоупругой многосвязной плиты с отверстиями и трещинами / А.В. Сероштанов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2023» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2023. – ISBN 978-5-317-06952-0.

127. Сероштанов, А.В. Решение задачи об изгибе тонкой многосвязной плиты из пьезоматериалов / А.В. Сероштанов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2021. – ISBN 978-5-317-06593-5.

128. Сероштанов, А.В. Решение задачи об изгибе электромагнитоупругой

многосвязной тонкой плиты с жестко подкрепленными отверстиями / А.В. Сероштанов // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естеств. науки. – 2025. – № 1. – С. 12–20. – DOI: 10.5281/zenodo.14922486. – EDN: WYOOQV.

129. Сероштанов, А.В. Решение периодической и двоякопериодической задачи изгиба электромагнитоупругой пластинки с эллиптическими отверстиями или трещинами / А.В. Сероштанов // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2022» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова. [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2022. – ISBN 978-5-317-06824-0.

130. Соловьев, А.Н. Идентификация переменных свойств пористого пьезоэлектрического функционально-градиентного биморфа / А.Н. Соловьев, В.А. Чебаненко // Наука Юга России. – 2024. – Т. 20, № 1. – С. 12–20. – DOI: 10.7868/25000640240103. – EDN: UGSRVF.

131. Соловьев, А.Н. Определение упругих свойств армированных композиционных материалов на основе конечно-элементного моделирования / А.Н. Соловьев, Е.Н. Зиборов, С.Н. Шевцов // Наука Юга России. – 2016. – Т. 12, № 2. – С. 3–10. – EDN: WWWRSX.

132. Соловьев, А.Н. Прикладная теория изгибных колебаний пьезоактивного биморфа в рамках несвязной краевой задачи термоэлектроупругости / А.Н. Соловьев, В.А. Чебаненко, М.С. Германчук // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2023. – Т. 69, № 2. – С. 364–374. – DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374. – EDN: UZSLLN.

133. Тамм, И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – 9-е изд., испр. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

134. Тарасенко, С.В. Влияние внешнего электрического поля на структуру магнонного спектра ограниченного диэлектрика / С.В. Тарасенко // ФТТ. – 2002. – Т. 44, № 5. – С. 872–880.

135. Тимошенко, С.П. История науки о сопротивлении материалов / С.П. Тимошенко; пер. с англ. В. И. Контовта; под ред. А.Н. Митинского. – М.: Гостехиздат, 1957. – 536 с.

136. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко; пер. с англ. Н.А. Шошина. – М.: ОНТИ, 1937. – 451 с.

137. Устинов, Ю.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода в теории плит и оболочек / Ю.А. Устинов, М.А. Шленев // Расчет оболочек и пластин. – Ростов н/Д, 1976. – С. 3–27.

138. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

139. Хома, И.Ю. Об одном способе построения уравнений магнитоупругости нетонких пластин / И.Ю. Хома // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 3–7.

140. Хома, И.Ю. Общее решение уравнений равновесия нетонких трансверсально-изотропных пьезокерамических пластин, поляризованных по толщине / И.Ю. Хома // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 185–193.

141. Черепанов, Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.

142. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

143. Шульга, Н.А. Эффективные магнитоупругие свойства слоистых композитов / Н.А. Шульга // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 46–68.

144. A magnetoelectroelastic medium with an elliptical cavity under combined mechanical-electric-magnetic loading / M.H. Zhao, H. Wang, F. Yang, T. Liu // Theoretical and applied fracture mechanics. – 2006. – V. 45. – P. 227–237. – DOI: 10.1016/j.tafmec.2006.03.006.

145. A Transversely Isotropic Magneto-Electro-Elastic Circular Kirchhoff Plate Model Incorporating Microstructure Effect / W. Shen, G. Zhang, S. Gu, Y. Cong // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2022. – V. 35. – P. 185–197. – DOI: 10.1007/s10338-021-00271-7. – EDN: ORECZF.

146. Aladadi, Y.T. Classification and characterization of electromagnetic materials / Y.T. Aladadi, M.A.S. Alkanhal // Scientific reports. – 2020. – V. 10, No. 1. – P. 11406. – DOI: 10.1038/s41598-020-68298-3. – EDN: CHGOEZ.

147. Alblas, J.B. Electro-Magneto-Elasticity / J.B. Alblas // Topics in Applied Continuum Mechanics / Ed. by J.L. Zeman, F. Ziegler. – Wien: Springer-Verlag, 1974. – P. 71–114. – DOI: 10.1007/978-3-7091-4188-5_5.

148. Alexander, S. On the origin of axial magnetoelectric effect on Cr_2O_3 / S. Alexander, S. Shtrikman // Sol. State. Comm. – 1966. – V. 4, No. 3 – P. 115–117. – DOI: 10.1016/0038-1098(66)90206-7.

149. An in situ grown eutectic magnetoelectric composite material: Part 1 Composition and unidirectional solidification / J. Van den Boomgaard, D.R. Terrell, R.A.J. Born, H.F.G.I. Giller // J. Mater. Sci. – 1974. – V. 9. – P. 1705–1709. – DOI: 10.1007/BF00540770.

150. Arefi, M. Thermo-electro-mechanical bending behavior of sandwich nanoplate integrated with piezoelectric face-sheets based on trigonometric plate theory / M. Arefi, A.M. Zenkour // Composite structures. – 2017. – V. 162. – P. 108–122. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.11.071.

151. Ayatollahi, M. Multiple mixed-mode cracks in magmeto-electro-elastic half-plane under in-plane loading / M. Ayatollahi, M. Nourazar // Engineering Fracture Mechanics. – 2020. – V. 232. – P. 107009. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2020.107009.

152. Bending analysis of magnetoelectroelastic nanoplates resting on Pasternak elastic foundation based on nonlocal theory / W. Feng, Z. Yan, J. Lin, C.Z. Zhang // App. Math. and Mech. (Engl. Ed.) – 2020. – V. 41, No. 12. – P. 1769–1786. – DOI: 10.1007/s10483-020-2679-7. – EDN: ZKJDKL.

153. Bichurin, M. Magnetoelectic composites: modeling and application / M. Bichurin, R. Petrov, A. Tatarenko // Advances in Materials. – 2020. – V. 9, No. 2. – P. 15–27. – DOI: 10.11648/j.am.20200902.11.

154. Bichurin, M.I. The microscopic mechanism of the magnetoelectric effect in the maicrowave range / M.I. Bichurin, D.A. Filippov // Ferroelectric. – 1997. – V. 204, No. 1-4. – P. 225–232. – DOI: 10.1080/00150199708222203.

155. Bichurin, M.I. Theory of low-frequency magnetoelectric coupling in magnetostrictive-piezoelectric bilayers / M.I. Bichurin, V.M. Petrov, G. Srinivasan // Phys. Rev. B. – 2003. – V. 68, No. 5. – P. 054402. – DOI: 10.1103/PhysRevB.68.054402. –

EDN: LHTTXZ.

156. Boussinesque, M.J. Compliments a une etude sur la theorie de lequilibre et du mouvement des solides elastiques // J. Math, pures et appl. – 1879. – V. 5, No. 3. – P. 163-194 and 329-344.

157. Curie, P. Sur la symétrie dans les phénomenes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique / P. Curie // J. Phys. 3 (Ser. III). – 1894. – P. 393– 415.

158. Dai, M. An anisotropic piezoelectric half-plane containing an elliptical hole or crack subjected to uniform in-plane electromechanical loading / M. Dai, C.-F. Gao, P. Schiavone // Journal of mechanics of materials and structures. – 2016. – V. 11, No. 4. – P. 433–448. – DOI: 10.2140/jomms.2016.11.433. – EDN: XZGMUN.

159. Dong, S. Longitudinal and transverse magnetoelectric voltage coefficients of magnetostrictive/piezoelectric laminate composite: Theory / S. Dong, J.F. Li, D. Viehland // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and frequency control. – 2003. – V. 50, No. 10. – P. 1253–1261. – DOI: 10.1109/TUFFC.2003.1244741. – EDN: MDUJPP.

160. Drmač, Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I / Z. Drmač, K. Veselič // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 2008. – V. 29, № 4. – P. 1322–1342. – DOI: 10.1137/050639193.

161. Drmač, Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II / Z. Drmač, K. Veselič // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 2008. – V. 29, № 4. – P. 1343–1362. – DOI: 10.1137/05063920X. – EDN: LYPVRB.

162. Electromagnetic metamaterials: from classical to quantum / J. You, Q. Ma, L. Zhang [et al.] // Electromagnetic Science. – 2023. – V. 1, No. 1. – P. 0010051. – DOI: 10.23919/emsci.2022.0005.

163. Eringen, A.C. Electrodynamics of continua / A.C. Eringen, G.A. Maugin. – New York: Springer-Verlag, 1990. – V. 2. – 363 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-3226-1.

164. Eringen, A.C. Electromagnetic theory of microstretch elasticity and bone modelling / A.C. Eringen // International Journal of Engineering Science. – 2004. – V. 42, No. 3-4. – P. 231–242. – DOI: 10.1016/S0020-7225(03)00288-X.

165. Eringen, A.C. Theory of electromagnetic elastic plates / A.C. Eringen // International Journal of Engineering Science. – 1989. – V. 27, No. 4. – P. 363–375. –

DOI: 10.1016/0020-7225(89)90128-6.

166. Fang, D. Fracture mechanics of piezoelectric and ferroelectric solids / D. Fang, J. Liu. – Springer Berlin, Heidelberg, 2013. – 417 p. – ISBN 978-3-642-30086-8. – DOI: 10.1007/978-3-642-30087-5.

167. Folen, V.J. Anysotropy of the magnetoelectric effect in Cr_2O_3 / V.J. Folen, G.T. Rado, E.W. Stalder // Phys. Rev. Lett. – 1961. – V. 6, No. 11. – P. 607–608. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.6.607.

168. Gales, C. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elastity / C. Gales, N. Baroiu // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – V. 94, No. 1-2. – P. 55–71. – DOI: 10.1002/zamm.201200219.

169. Gehring, F.D. De acquationibus differentialibus quibuacquilibrium et modus laminae crystallinae definiutur. Ph.D. dissertation / F.D. Gehring. – Berlin, 1860. – 150 p.

170. Harshe, G. Theoretical modeling of multilayer magnetoelectric composites / G. Harshe, J.P. Dougherty, R.E. Newnham // International journal of applied electromagnetics in materials. – 1993. – V. 4, No. 2. – P. 145.

171. Hou, P.-F. A spheroidal inclusion in an infinite magneto-electro-elastic material / P.-F. Hou, A.Y.T. Leung // International Journal of Engineering Science. – 2004. – V. 42, No. 11-12. – P. 1255–1273. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2003.12.001. – EDN: LMQYHT.

172. Hou, P.-F. Greens functions for transversely isotropic magnetoelectroelastic media / P.-F. Hou, H.-J. Ding, J.-Y. Chen // International Journal of Engineering Science. – 2005. – V. 43. – P. 826-858. – DOI: 10.1016/j.ijengsci.2004.08.015.

173. Hou, P.-F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.-F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mechanics of Materials. – 2009. – V. 41. – P. 329–338. – DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

174. Huber, M.T. Einige Anwendungen der Biegung Theorie orthotroper Platten / M.T. Huber // Zeitschr. f. Angew. Math. und Mech. –1926. – Bd. 6. – P. 24–54.

175. Huber, M.T. Probleme der statik technisch wichtiger orthotroper platten: gastvorlesungen in der eidgenössischen technischen hochschule zürich / M.T. Huber. – Warschau, 1929. – 165 p.

176. Hwu, C. Stroh formalism for various types of materials and deformations / C. Hwu, W. Becker // Journal of Mechanics. – 2022. – V. 38. – P. 433–444. – DOI: 10.1093/jom/ufac031. – EDN: WDALJL.

177. Khomskii, D. Classifying multiferroics: mechanisms and effects / D. Khomskii // Physics. – 2009. – V. 2. – P. 20. – DOI: 10.1103/Physics.2.20.

178. Kirchhoff, G.R. Note relative à la théorie de l'équilibreet du mouvement d'une plaque élastique / G.R. Kirchhoff // Comptes Rendus Mathematique (Paris). – 1848. – V. XXVII. – P. 394–397.

179. Kirchhoff, G. R. Uber das gleichgewichi und die bewegung einer elastishem scheibe / G.R. Kirchhoff // J. Fuer die Reine und Angewandte Mathematik. – 1850. – V. 40. – P. 51–88.

180. Magnetoelectric bilayer and multilayer structures of magnetostrictive and piezoelectric oxides / G. Srinivasan, E.T. Rasmussen, J. Gallegos [et al.] // Phys. Rev. B. – 2001. – V. 64, No.21. – P. 214408. – DOI: 10.1103/PhysRevB.64.214408. – EDN: MQBZDR.

181. Magnetoelectic composites / M.I. Bichurin, V.M. Petrov, R.V. Petrov, A.S. Tatarenko. – New York: Jenny Stenford Publishing, 2019. – 296 p. – ISBN 9789814800044 – DOI: 10.1201/9780429488672.

182. Magnetoelectric effect in composites of magnetostrictive and piezoelectric materials / Ju. Ryu, Sh. Priya, K. Uchino, H.Ee. Kim // Journal of Electroceramics. – 2002. – V. 8. – P. 107–119. – EDN: BCJDBD.

183. Maxwell, J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism / J.C. Maxwell // In 2 vol.: Vol. II. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – XXIV, 445 p.

184. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions / C.-W. Nan, M.I. Bichurin, S. Dong [et al.] // Journal of Applied Physics. – 2008. – V. 103, No. 3. – P. 031101. – DOI: 10.1063/1.2836410. – EDN: LLLMAJ.

185. Ohasi, Y. Bending of a thin elliptic plate of an orthotropic material sup-

ported at its periphery and submitted to a uniform lateral load / Y. Ohasi // Mem. Fac. Engng. Nagoa Univ. – 1957. – No. 1. –P. 23–34.

186. Pan, E. Exact solutions for magneto-electro-elastic laminates in cylindrical bending / E. Pan, P. Heyliger // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – V. 40. – P. 6859–6876. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2003.08.003. – EDN: ERWBTJ.

187. Rado, G.T. Mechanism of the magnetoelectric effect in antiferromagnetic / G.T. Rado // Phys. Rev. Lett. – 1961. – V. 6, No. 11. – P. 609–610. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.6.609.

188. Rado, G.T. Present status of the theory of magnetoelectric effect / G.T. Rado // Magnetoelectric interaction phenomena in crystals / Eds. A.I. Freeman, H. Schmid. – London, N.-Y., Paris: Gordon and Breach. – 1975. – P. 3–16.

189. Rado, G.T. Statistical theory of the magnetoelectric effects in antiferromagnetics / G.T. Rado // Phys. Rev. – 1962. – V. 128, No. 6. – P. 2546–2556. – DOI: 10.1103/physrev.128.2546.

190. Rice, J.R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture / J.R. Rice // Fracture. – New York, London: Acad. press, 1968. – V. 2. – P. 191–311.

191. Rontgen, W.C. Ueber die durch Bewegung eines im homogenen electrischen Felde befindlichen Dielectricums hervorgerufene electrodynamische Kraft / W.C. Rontgen // Ann. Phys. – 1888. – V. 35. – P. 264–270.

192. Schmid, H. On a Magnetoelectric Classification of Materials / H. Schmid // Int. J. Magn. – 1973. – V. 4, No. 4. – P. 337–361.

193. Self-biased magnetoelectric composites: an overview and future perspectives / Y. Zhou, D. Maurya, Y. Yan [et al.] // Energy Harvesting and Systems. – 2016. – V. 3, No. 1. – P. 1–42. – DOI: 10.1515/ehs-2015-0003. – EDN: LUTDBM.

194. Suchar, M. General form of the surface of deflection of a thin anisotropic plate in a multi-connected region / M. Suchar // Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn. – 1960. – V. 8, No. 2. – P. 33–40.

195. Tellegen, B.D.H. The Gyrator, a new electric network element / B.D.H. Tellegen // Philips Res. Rep. – 1948. – V. 3. – P. 81–101.

196. Tian, W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic

solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. – 2004. – V. 23. – P. 599–614. – DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002.

197. Van den Boomgaard, J. A sintered magnetoelectric composite material $BaTiO_3$ - $Ni(Co, Mn)Fe_2O_4$ / J. Van den Boomgaard, R.A.J. Born // Journal of Materials Science. – 1978. – V. 13, No. 7. – P. 1538–1548. – DOI: 10.1007/BF00553210. – EDN: KWYIBV.

198. Van den Boomgaard, J. Piezoelectric-piezomagnetic composites with magnetoelectric effect / J. Van den Boomgaard, A.M.J.G. Van Run, J. Van Suchtelen // Ferroelectrics. – 1976. – V. 14, No. 1. – P. 727–728. – DOI: 10.1080/00150197608236711.

199. Van Run, A.M.J.G. An in situ grown eutectic magnetoelectric composite material: Part 2 Physical properties / A.M.J.G. Van Run, D.R. Terrell, J.H. Scholing // J. Mater. Sci. – 1974. – V. 9. – P. 1710–1714. – DOI: 10.1007/bf00540771.

200. Van Suchtelen, J. Non structural application of composite materials / J. Van Suchtelen // Ann. Chem. Fr. – 1980. – V. 5. – P. 139–145.

201. Van Suchtelen, J. Product properties: a new application of composite materials / J. Van Suchtelen // Philips Res. Rep. – 1972. – V. 27, No. 1. – P. 28–37.

202. Volakis, J.L. Finite Element Method for Electromagnetics / J.L. Volakis, A. Chatterjee, L.C. Kempel. – New York: Wiley-IEEE Press, 1998. – 368 p. – ISBN 0-7803-3425-6.

203. Vopsaroiu, M. A new magnetic recording read head technology based on the magneto-electric effect / M. Vopsaroiu, J. Blackburn, M.G. Cain // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2007. – V. 40, No. 17. – P. 5027–5033. – DOI: 10.1088/0022-3727/40/17/003. – EDN: MMCASZ.

204. Vopson, M.M. Fundamentals of multiferroic materials and their possible applications / M.M. Vopson // Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences. – 2015. – V. 40, No. 4. – P. 223–250. – DOI: 10.1080/10408436.2014.992584. – EDN: UODZFR.

205. Wang, C.-C. Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism / C.-C. Wang // In 2 parts, part A: Analytical and Continuum Mechanics. – New York: Plenum, 1979. – 216 p. – DOI: 10.1007/978-1-4684-3536-8.

206. Wang, F. Nonlinear bending of rectangular magnetoelectroelastic thin plates with linearly varying thickness / F. Wang, Y.-F. Zheng, C.-P. Chen // IJNSNS. – 2018. – V. 19, No. 3-4. – P. 351–356. – DOI: 10.1515/ijnsns-2015-0105.

207. Wang, R. An analytical solution for a multilayered magneto-electro-elastic circular plate under simply supported lateral boundary conditions / R. Wang, Q. Han, E. Pan // Smart Mater. Struct. – 2010. – V. 19. – P. 065025. – DOI: 10.1088/0964-1726/19/6/065025.

208. Wilson, H.A. On the Electric Effect of Roating a Dielectric in a Magneti Field / H.A. Wilson // Phil. Trans. A. – 1904. – V. 204. – P. 121–137. – DOI: 10.1098/rsta.1905.0003.

209. Xu, S.-P. Bending of piezoelectric plates with circular hole / S.-P. Xu, W. Wang // Acta Mech. – 2009. – V. 203, No. 3. – P. 127–135. – DOI: 10.1007/s00707-008-0025-7. – EDN: MQIZFG.

210. Yamamoto, Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Sci. North Holland, 1987. – 434 p. – ISBN 0-444-70231-8.

211. Yang, Y. Bending and free vibration of a circular magnetoelectroelastic plate with surface effects / Y. Yang, X.-F. Li // International Journal of Mechanical Sciences. – 2019. – V. 157–158. – P. 858–871. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.05.029. – EDN: OSAUSW.

212. Zheng, Y-F. Nonlinear bending analysis of magnetoelectroelastic rectangular plates using higher order shear deformation theory / Y-F. Zheng, L.-L. Xu, C.-P. Chen // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2021. – V. 35, No. 3. – P. 1099–1108. – DOI: 10.1007/s12206-021-0223-y. – EDN: PIWAGG.

П Р И Л О Ж Е Н И Я

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.2.1 – Значения изгибающих моментов M_s/m_y на контуре кругового отверстия в бесконечной плите из различных материалов.

Материал	Задача	θ, рад						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
М1	ЭМУ	1,845	1,725	1,400	0,970	0,570	0,305	0,215
	ТУ	1,835	1,717	1,399	0,975	0,577	0,308	0,215
М2	ЭМУ	2,184	2,003	1,457	0,767	0,336	0,230	0,231
	ТУ	1,876	1,752	1,424	0,990	0,565	0,258	0,146
М3	ЭМУ	1,719	1,720	1,537	1,130	0,600	0,158	-0,008
	ТУ	1,507	1,492	1,411	1,218	0,851	0,299	-0,048

Таблица А.2.2 – Значения изгибающих моментов M_s/m_x на контуре кругового отверстия в бесконечной плите из различных материалов.

Материал	Задача	θ, рад						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
М1	ЭМУ	0,231	0,322	0,586	0,978	1,392	1,700	1,813
	ТУ	0,227	0,319	0,587	0,980	1,394	1,701	1,813
М2	ЭМУ	0,609	0,583	0,558	0,767	1,230	1,652	1,811
	ТУ	0,220	0,341	0,650	1,032	1,384	1,626	1,713
М3	ЭМУ	0,125	0,521	0,901	1,106	1,269	1,407	1,464
	ТУ	-0,070	0,373	0,935	1,234	1,368	1,414	1,421

Таблица А.2.3 – Значения изгибающих моментов M_n/m_y на контуре жестко подкрепленного кругового отверстия в бесконечной плите из различных материалов.

Материал	Задача	θ, рад						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
М1	ЭМУ	-2,200	-1,804	-0,725	0,751	2,226	3,306	3,701
	ТУ	-2,202	-1,806	-0,726	0,751	2,227	3,308	3,704
М2	ЭМУ	-1,920	-1,559	-0,574	0,772	2,118	3,104	3,464
	ТУ	-1,977	-1,603	-0,580	0,816	2,213	3,235	3,610
М3	ЭМУ	-1,846	-1,474	-0,456	0,934	2,324	3,341	3,714
	ТУ	-1,901	-1,506	-0,427	1,047	2,522	3,601	3,996

Таблица А.2.4 – Значения изгибающих моментов M_s/m_y на контуре жестко подкрепленного кругового отверстия в бесконечной плите из различных материалов.

Материал	Задача	θ, рад						
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
M1	ЭМУ	-0,772	-0,645	-0,266	0,282	0,797	1,111	1,208
	ТУ	-0,758	-0,633	-0,262	0,274	0,784	1,107	1,209
M2	ЭМУ	-0,748	-0,711	-0,400	0,353	0,959	1,046	0,987
	ТУ	-0,849	-0,663	-0,218	0,275	0,680	0,939	1,028
M3	ЭМУ	-0,721	-0,363	-0,184	-0,090	0,260	0,696	0,878
	ТУ	-0,653	-0,158	0,072	-0,256	-0,376	0,288	0,945

Таблица А.3.1 – Значения изгибающих моментов M_s/m_0 в точках контуров кольца на площадках, перпендикулярным контурам, в зависимости от a_1/a_0 .

Материал	θ, рад	Задача	a_1/a_0							
			0,1	0,5	0,9	0,99	0,1	0,5	0,9	0,99
			На контуре L_1				На контуре L_0			
М1	0	ЭМУ	2,097	2,752	10,60	100,58	1,018	1,629	9,456	99,43
		ТУ	2,082	2,735	10,59	100,56	1,019	1,636	9,469	99,44
	$\pi/12$	ЭМУ	2,067	2,719	10,58	100,55	1,019	1,644	9,483	99,46
		ТУ	2,057	2,708	10,56	100,54	1,019	1,649	9,493	99,47
	$\pi/6$	ЭМУ	2,006	2,651	10,51	100,49	1,021	1,676	9,541	99,52
		ТУ	2,005	2,650	10,51	100,49	1,021	1,676	9,541	99,52
	$\pi/4$	ЭМУ	1,967	2,608	10,47	100,45	1,022	1,694	9,575	99,55
		ТУ	1,975	2,617	10,48	100,46	1,021	1,691	9,568	99,55
	$\pi/3$	ЭМУ	1,982	2,625	10,49	100,47	1,021	1,685	9,560	99,54
		ТУ	1,990	2,634	10,50	100,48	1,021	1,681	9,552	99,53
	$5\pi/12$	ЭМУ	2,026	2,674	10,54	100,51	1,020	1,660	9,517	99,49
		ТУ	2,029	2,678	10,54	100,51	1,020	1,658	9,514	99,49
	$\pi/2$	ЭМУ	2,049	2,700	10,56	100,53	1,019	1,646	9,495	99,47
		ТУ	2,049	2,700	10,56	100,53	1,019	1,646	9,495	99,47
М2	0	ЭМУ	2,820	3,572	11,32	101,20	1,004	1,342	8,916	98,82
		ТУ	2,117	2,767	10,61	100,58	1,019	1,644	9,459	99,43
	$\pi/12$	ЭМУ	2,612	3,345	11,09	101,02	1,008	1,445	9,051	98,99
		ТУ	2,114	2,766	10,61	100,58	1,019	1,641	9,457	99,43
	$\pi/6$	ЭМУ	2,037	2,699	10,52	100,51	1,019	1,644	9,508	99,49
		ТУ	2,094	2,746	10,60	100,57	1,019	1,638	9,464	99,44
	$\pi/4$	ЭМУ	1,550	2,146	10,03	100,04	1,026	1,761	9,935	99,96
		ТУ	2,042	2,692	10,55	100,53	1,019	1,647	9,500	99,48
	$\pi/3$	ЭМУ	1,581	2,140	10,02	100,01	1,021	1,831	9,982	99,98
		ТУ	1,969	2,615	10,48	100,46	1,020	1,674	9,559	99,54
	$5\pi/12$	ЭМУ	1,896	2,429	10,28	100,26	1,024	1,857	9,769	99,75
		ТУ	1,904	2,547	10,43	100,41	1,022	1,707	9,613	99,60
	$\pi/2$	ЭМУ	2,057	2,590	10,41	100,39	1,045	1,828	9,647	99,62
		ТУ	1,879	2,520	10,40	100,38	1,023	1,721	9,635	99,62
М3	0	ЭМУ	1,862	2,472	10,32	100,29	1,025	1,765	9,729	99,71
		ТУ	1,456	2,123	10,08	100,09	1,035	1,890	9,906	99,91
	$\pi/12$	ЭМУ	2,262	2,917	10,76	100,70	1,024	1,712	9,421	99,32
		ТУ	1,891	2,631	10,61	100,58	1,021	1,733	9,509	99,43
	$\pi/6$	ЭМУ	2,462	3,124	10,92	100,90	1,018	1,576	9,126	99,11
		ТУ	2,379	3,192	11,15	101,12	1,006	1,389	8,914	98,88
	$\pi/4$	ЭМУ	2,259	2,891	10,73	100,72	1,011	1,449	9,285	99,28
		ТУ	2,486	3,316	11,26	101,25	1,001	1,188	8,761	98,75
	$\pi/3$	ЭМУ	1,891	2,521	10,41	100,40	1,008	1,563	9,603	99,60
		ТУ	2,250	3,061	11,02	101,00	1,003	1,362	9,039	99,01
	$5\pi/12$	ЭМУ	1,586	2,250	10,16	100,15	1,023	1,885	9,864	99,85
		ТУ	1,738	2,484	10,46	100,44	1,020	1,748	9,609	99,57
	$\pi/2$	ЭМУ	1,477	2,163	10,08	100,06	1,058	2,014	9,958	99,94
		ТУ	1,393	2,086	10,06	100,06	1,040	1,923	9,937	99,94

Таблица А.3.2 – Значения некоторых величин для различных значений отношения c/a_0 для круговой плиты из материала М2 с внутренней трещиной длины a_0

Величина	c/a_0					
	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
$M_s\,/\,m_0$ в т. А	1,022	1,021	1,016	1,005	0,853	0,931
$M_s\,/\,m_0$ в т. В	1,285	1,218	1,172	1,139	1,191	1,174
$M_s\,/\,m_0$ в т. С	1,285	1,388	1,562	1,912	2,908	–
КИМ k_1^-	0,822	0,817	0,822	0,835	0,844	1,242
КИМ k_1^+	0,822	0,835	0,865	0,920	0,927	–

Таблица А.3.3 – Значения некоторых величин для различных значений отношения l/a_0 длины краевой трещины к радиусу кругового диска из материала М2

Величина	l/a_0					
	0,1	0,5	1,0	1,5	1,8	1,9
$M_s\,/\,m_0$ в т. А	1,001	1,001	0,931	1,018	1,011	2,125
$M_s\,/\,m_0$ в т. В	1,000	1,017	1,174	2,046	5,299	13,692
КИМ k_1^-	0,323	0,775	1,242	1,918	3,007	3,497

Таблица А.3.4 – Значения моментов M_s в точках контура L_1 выема в зависимости от значений отношения a_1/a_0 радиуса выема к радиусу диска из материала М2 для задачи ЭМУ

θ, рад	a_1/a_0					
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9
0	2,809	2,681	2,666	3,023	3,721	6,144
$\pi/12$	2,614	2,492	2,462	2,715	3,174	4,483
$\pi/6$	2,054	1,954	1,899	1,958	2,077	2,324
$\pi/4$	1,507	1,426	1,354	1,301	1,280	1,261
$\pi/3$	1,348	1,258	1,171	1,094	1,062	1,030

Таблица А.3.5 – Значения некоторых величин для различных отношений a_3/a_0 радиуса внутреннего отверстия к радиусу диска их материала М2

Величина	a_3/a_0				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45
M_s в т. A	2,776	3,216	4,487	8,878	17,695
M_s в т. B	3,493	3,929	5,093	9,185	17,829
M_s в т. C	0,970	1,024	1,110	1,227	1,301
M_s в т. D	0,731	0,783	0,848	0,924	0,971

Таблица А.3.6 – Значения моментов M_s/m_0 вблизи контура кругового отверстия и в некоторых точках сторон изгибаемой по горизонтальным сторонам плиты из материала М2 моментами $M_y = m_0$ в зависимости от длины перемычек c/a_1 и угла θ

$\frac{c}{a_1}$	Задача	θ, рад					Точки			
		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	A	B	C	D
∞	ЭМУ	2,184	1,457	0,767	0,336	0,231	0,000	0,000	1,000	1,000
	ТУ	1,876	1,424	0,990	0,565	0,146	0,000	0,000	1,000	1,000
10	ЭМУ	2,198	1,467	0,773	0,337	0,230	0,005	-0,001	1,013	1,014
	ТУ	1,890	1,434	0,996	0,569	0,146	-0,002	0,001	1,011	1,021
5	ЭМУ	2,233	1,492	0,786	0,340	0,225	0,013	-0,004	1,044	1,047
	ТУ	1,924	1,459	1,013	0,577	0,146	-0,008	0,004	1,036	1,071
2	ЭМУ	2,400	1,608	0,850	0,358	0,203	0,021	-0,013	1,184	1,223
	ТУ	2,092	1,577	1,087	0,612	0,146	-0,030	0,016	1,157	1,305
1	ЭМУ	2,765	1,838	0,983	0,415	0,170	-0,006	-0,002	1,457	1,649
	ТУ	2,473	1,814	1,226	0,678	0,144	-0,061	0,032	1,409	1,788
0,5	ЭМУ	3,626	2,255	1,219	0,557	0,146	-0,065	0,050	1,981	2,643
	ТУ	3,371	2,268	1,462	0,798	0,137	-0,092	0,046	1,982	2,804
0,3	ЭМУ	4,876	2,715	1,456	0,724	0,116	-0,069	0,068	2,590	4,015
	ТУ	4,656	2,761	1,682	0,929	0,132	-0,105	0,053	2,521	4,154
0,1	ЭМУ	11,454	3,931	1,931	1,223	0,091	-0,079	0,077	4,461	10,730
	ТУ	11,274	4,128	2,139	1,305	0,124	-0,116	0,070	4,345	10,843
0,01	ЭМУ	106,93	-2,489	-2,839	2,189	3,546	-4,191	3,351	9,893	87,995
	ТУ	101,13	5,981	2,537	1,833	0,096	-0,095	0,142	7,221	100,77

Таблица А.3.7 – Значения моментов M_s/m_y вблизи контура левого отверстия в пластинке с двумя круговыми отверстиями при действии механических моментов $M_y^\infty = m_y$

Материал	$\frac{c}{a_1}$	Задача	θ, рад						
			0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
М1	∞	ЭМУ	1,845	1,400	0,570	0,215	0,570	1,400	1,845
	2	ЭМУ	2,075	1,500	0,551	0,203	0,600	1,466	1,924
	1	ЭМУ	2,416	1,580	0,516	0,203	0,630	1,513	1,976
	0,5	ЭМУ	3,039	1,633	0,460	0,207	0,665	1,563	2,032
	0,1	ЭМУ	6,051	1,343	0,305	0,218	0,732	1,658	2,134
	0,01	ЭМУ	18,223	0,551	0,174	0,225	0,779	1,725	2,207
	-0,5	ЭМУ	–	–	0,126	0,223	0,754	1,679	2,153
	-1	ЭМУ	–	–	–	0,218	0,701	1,594	2,058
М2	∞	ЭМУ	2,184	1,457	0,336	0,231	0,336	1,457	2,184
		ТУ	1,876	1,424	0,565	0,146	0,565	1,424	1,876
	2	ЭМУ	2,378	1,547	0,324	0,218	0,341	1,517	2,267
		ТУ	2,110	1,531	0,554	0,139	0,599	1,492	1,957
	1	ЭМУ	2,703	1,646	0,317	0,219	0,354	1,568	2,332
		ТУ	2,454	1,617	0,519	0,138	0,632	1,540	2,010
	0,5	ЭМУ	3,381	1,737	0,304	0,225	0,373	1,629	2,406
		ТУ	3,082	1,676	0,458	0,141	0,669	1,592	2,067
	0,1	ЭМУ	6,971	1,509	0,243	0,237	0,419	1,755	2,554
		ТУ	6,147	1,386	0,281	0,148	0,743	1,691	2,174
	0,01	ЭМУ	21,846	0,659	0,165	0,243	0,457	1,853	2,667
		ТУ	18,606	0,570	0,129	0,152	0,795	1,761	2,249
	-0,5	ЭМУ	–	–	0,122	0,240	0,451	1,808	2,605
		ТУ	–	–	0,081	0,151	0,768	1,714	2,195
	-1	ЭМУ	–	–	–	0,235	0,418	1,702	2,475
		ТУ	–	–	–	0,148	0,710	1,626	2,096
М3	∞	ЭМУ	1,719	1,538	0,600	-0,008	0,600	1,538	1,719
	2	ЭМУ	1,967	1,672	0,601	-0,007	0,651	1,617	1,798
	1	ЭМУ	2,317	1,782	0,563	-0,006	0,695	1,671	1,846
	0,5	ЭМУ	2,921	1,860	0,483	-0,005	0,744	1,728	1,894
	0,1	ЭМУ	5,711	1,536	0,234	-0,005	0,838	1,832	1,980
	0,01	ЭМУ	16,881	0,611	0,015	-0,006	0,906	1,904	2,037
	-0,5	ЭМУ	–	–	-0,043	-0,007	0,870	1,851	1,987
	-1	ЭМУ	–	–	–	-0,007	0,793	1,755	1,904

Таблица А.3.8 – Значения моментов M_s / m_y вблизи контура левого жестко подкрепленного отверстия в плите с двумя круговыми отверстиями при действии механических моментов $M_y^\infty = m_y$

Материал	$\frac{c}{a_1}$	Задача	θ, рад						
			0	π / 6	π / 3	π / 2	2π / 3	5π / 6	π
М1	∞	ЭМУ	-0,772	-0,266	0,797	1,208	0,797	-0,266	-0,772
	2	ЭМУ	-0,625	-0,330	0,596	1,088	0,756	-0,255	-0,745
	1	ЭМУ	-0,562	-0,431	0,490	1,059	0,749	-0,260	-0,751
	0,5	ЭМУ	-0,658	-0,508	0,433	1,050	0,741	-0,274	-0,767
	0,1	ЭМУ	-1,483	-0,473	0,428	1,051	0,719	-0,314	-0,811
	0,01	ЭМУ	-5,064	-0,227	0,486	1,059	0,699	-0,351	-0,850
	-0,5	ЭМУ	–	–	0,364	1,048	0,701	-0,350	-0,849
	-1	ЭМУ	–	–	–	1,035	0,719	-0,325	-0,825
М2	∞	ЭМУ	-0,747	-0,400	0,959	0,987	0,959	-0,400	-0,747
		ТУ	-0,849	-0,218	0,680	1,028	0,680	-0,218	-0,849
	2	ЭМУ	-0,614	-0,453	0,742	0,900	0,915	-0,383	-0,722
		ТУ	-0,714	-0,284	0,525	0,932	0,644	-0,212	-0,825
	1	ЭМУ	-0,542	-0,579	0,611	0,875	0,906	-0,389	-0,726
		ТУ	-0,649	-0,382	0,439	0,907	0,638	-0,217	-0,831
	0,5	ЭМУ	-0,630	-0,688	0,544	0,866	0,894	-0,407	-0,740
		ТУ	-0,736	-0,467	0,391	0,899	0,632	-0,230	-0,849
	0,1	ЭМУ	-1,480	-0,622	0,553	0,867	0,865	-0,460	-0,780
		ТУ	-1,636	-0,453	0,386	0,899	0,615	-0,268	-0,898
	0,01	ЭМУ	-4,859	-0,287	0,629	0,874	0,841	-0,504	-0,812
		ТУ	-5,696	-0,225	0,435	0,907	0,598	-0,304	-0,945
	-0,5	ЭМУ	–	–	0,482	0,866	0,845	-0,500	-0,810
		ТУ	–	–	0,338	0,898	0,598	-0,304	-0,945
	-1	ЭМУ	–	–	–	0,855	0,867	-0,470	-0,789
		ТУ	–	–	–	0,887	0,614	-0,279	-0,914

Таблица А.3.9 – Значения моментов M_n/m_y на контуре левого жестко подкрепленного отверстия в плите с двумя круговыми отверстиями при действии механических моментов $M_y^\infty = m_y$

Материал	$\frac{c}{a_1}$	Задача	θ, рад						
			0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
М1	∞	ЭМУ	-2,199	-0,725	2,225	3,700	2,225	-0,724	-2,199
	2	ЭМУ	-1,790	-0,898	1,665	3,334	2,109	-0,695	-2,125
	1	ЭМУ	-1,618	-1,172	1,369	3,246	2,089	-0,710	-2,142
	0,5	ЭМУ	-1,892	-1,383	1,209	3,216	2,068	-0,748	-2,188
	0,1	ЭМУ	-4,255	-1,287	1,198	3,219	2,007	-0,857	-2,312
	0,01	ЭМУ	-14,533	-0,618	1,362	3,244	1,949	-0,957	-2,425
	-0,5	ЭМУ	–	–	1,023	3,212	1,953	-0,953	-2,423
	-1	ЭМУ	–	–	–	3,172	2,007	-0,885	-2,351
М2	∞	ЭМУ	-1,920	-0,574	2,118	3,464	2,118	-0,574	-1,920
		ТУ	-1,977	-0,580	2,212	3,609	2,213	-0,580	-1,977
	2	ЭМУ	-1,634	-0,718	1,670	3,158	2,012	-0,559	-1,867
		ТУ	-1,661	-0,754	1,709	3,273	2,098	-0,564	-1,920
	1	ЭМУ	-1,478	-0,969	1,404	3,072	1,991	-0,572	-1,881
		ТУ	-1,510	-1,016	1,430	3,186	2,077	-0,578	-1,935
	0,5	ЭМУ	-1,671	-1,195	1,259	3,042	1,971	-0,605	-1,920
		ТУ	-1,712	-1,240	1,274	3,155	2,057	-0,612	-1,976
	0,1	ЭМУ	-3,724	-1,162	1,251	3,046	1,918	-0,700	-2,029
		ТУ	-3,808	-1,205	1,258	3,158	2,001	-0,712	-2,090
	0,01	ЭМУ	-12,783	-0,577	1,403	3,070	1,866	-0,791	-2,132
		ТУ	-13,260	-0,597	1,417	3,183	1,946	-0,809	-2,199
	-0,5	ЭМУ	–	–	1,106	3,039	1,867	-0,790	-2,131
		ТУ	–	–	1,099	3,152	1,948	-0,807	-2,199
	-1	ЭМУ	–	–	–	3,002	1,916	-0,726	-2,064
		ТУ	–	–	–	3,113	1,999	-0,740	-2,128

Таблица А.3.10 – Значения КИМ для концов левой трещины в плите из М2 с 2 трещинами

КИМ	c/a_1							
	∞	1	0,5	0,1	0,01	0,001	0	-1
k_1^-	1,000	1,052	1,081	1,151	1,224	1,268	1,414	1,225
k_1^+	1,000	1,112	1,229	1,795	3,843	9,254	–	–

Таблица А.3.11 – Значения КИМ для концов левого разреза в плите из материала М2 с двумя жестко подкрепленными разрезами

КИМ	c/a_1						
	∞	1	0,5	0,1	0,01	0	-1
k_1^-	-0,529	-0,557	-0,572	-0,609	-0,648	-0,747	-0,665
k_1^+	-0,529	-0,589	-0,650	-0,950	-2,032	–	–

Таблица А.3.12 – Значения моментов M_s около контура отверстия и КИМ для концов трещины для плиты из материала М2 с круговым отверстием и внутренней трещиной

Величина	Параметр t	c/a_1			
		2	1	0,5	0,1
M_s	0	2,304	2,501	2,937	6,299
	π/6	1,516	1,581	1,639	1,374
	π/3	0,335	0,334	0,330	0,287
	π/2	0,229	0,233	0,239	0,247
	2π/3	0,344	0,354	0,369	0,400
	5π/6	1,495	1,526	1,563	1,636
	π	2,233	2,271	2,314	2,396
k_1^-	$a_1 + c$	1,081	1,186	1,357	1,992
k_1^+	$3a_1 + c$	1,047	1,087	1,136	1,244

Таблица А.3.13 – Значения моментов M_s вблизи контура отверстия в плите из материала М2 с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от длины трещины

Величина	θ, рад	l/a_1						
		0	0,1	0,5	1	2	5	10
M_s	π/180	2,183	0,370	0,140	0,090	0,057	0,022	-0,004
	π/12	2,003	1,833	0,879	0,531	0,281	0,007	-0,200
	π/6	1,457	1,413	0,970	0,621	0,306	-0,076	-0,385
	π/4	0,767	0,751	0,581	0,405	0,205	-0,086	-0,348
	π/3	0,336	0,331	0,276	0,224	0,160	0,039	-0,093
	π/2	0,231	0,231	0,233	0,241	0,258	0,275	0,272
	2π/3	0,336	0,338	0,361	0,399	0,468	0,619	0,787
	5π/6	1,457	1,460	1,510	1,603	1,800	2,317	2,991
	π	2,184	2,187	2,241	2,348	2,582	3,226	4,090
k_1^+	$a_1 + l$	–	0,635	1,115	1,283	1,518	1,902	2,521

Таблица А.3.14 – Значения моментов M_s около контуров круговых отверстий в зависимости от c/a

Материал	θ, рад.	c/a							
		∞	10	5	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	0	1,845	1,889	1,987	2,410	3,284	5,186	20,63	181,74
	π/6	1,400	1,430	1,493	1,733	2,126	2,747	4,482	5,213
	π/3	0,570	0,574	0,582	0,609	0,647	0,693	0,761	0,746
	π/2	0,215	0,208	0,195	0,167	0,153	0,151	0,156	0,169
М2	0	2,184	2,223	2,308	2,678	3,476	5,322	20,89	187,19
	π/6	1,457	1,480	1,531	1,734	2,093	2,671	4,277	5,068
	π/3	0,336	0,333	0,328	0,321	0,330	0,350	0,387	0,412
	π/2	0,231	0,223	0,208	0,179	0,164	0,162	0,168	0,193
М3	0	1,719	1,767	1,871	2,320	3,228	5,158	20,56	179,82
	π/6	1,537	1,577	1,658	1,962	2,451	3,207	5,280	6,143
	π/3	0,600	0,614	0,641	0,721	0,810	0,897	1,008	0,980
	π/2	-0,008	-0,008	-0,009	-0,009	-0,008	-0,006	-0,005	-0,002

Таблица А.3.15 – Значения моментов M_s в контурной точке перемычки плиты с круговыми отверстиями в зависимости от c/a для различных задач

Материал	Задача	c/a				
		∞	1	0,5	0,1	0,01
М1	ЭМУ	1,845	3,284	5,186	20,63	181,74
	ЭУ	1,845	3,284	5,186	20,63	181,74
	МУ	1,835	3,277	5,179	20,62	181,55
	ТУ	1,835	3,277	5,180	20,62	181,55
М2	ЭМУ	2,184	3,476	5,322	20,89	187,19
	ЭУ	2,063	3,414	5,281	20,83	186,26
	МУ	2,113	3,424	5,283	20,85	186,80
	ТУ	1,876	3,325	5,225	20,68	182,37
М3	ЭМУ	1,719	3,228	5,158	20,56	179,82
	ЭУ	1,565	3,144	5,076	20,29	172,98
	МУ	1,694	3,211	5,144	20,53	179,03
	ТУ	1,508	3,106	5,039	20,20	170,95

Таблица А.3.16 – Значения КИМ для вершин периодического ряда наклоненных под углом φ трещин в плите из материала М3

Способ загружения	КИМ	φ						
		0	π/12	π/6	π/4	π/3	5π/12	π/2
$M_y^{\infty} = m_y$	$k_1^{\pm}$	1,284	1,097	0,768	0,461	0,215	0,056	0,000
	$k_2^{\pm}$	0,000	0,048	0,084	0,128	0,148	0,114	0,000
$M_x^{\infty} = m_x$	$k_1^{\pm}$	0,000	0,078	0,280	0,526	0,749	0,901	0,955
	$k_2^{\pm}$	0,000	-0,130	-0,176	-0,095	0,120	0,338	0,000

Таблица А.3.17 – Значения КИМ $k_1^{\pm}$ для вершин трещин вдоль оси Ox в зависимости от c/l в плите из материала М3

c/l							
∞	10	5	2	1	0,5	0,1	0,01
1,0	1,012	1,036	1,128	1,286	1,564	2,984	9,009

Таблица А.3.18 – Значения КИМ $k_1^{\pm}$ для вершин и моментов M_s около центров трещин, перпендикулярных оси Ox в зависимости от h_x/l при действии моментов $M_x^{\infty} = m_x$

Материал	Величина	h_x/l				
		∞	1	0,5	0,1	0,01
М1	$k_1^{\pm}$	1,000	0,625	0,446	0,208	0,095
	M_s	0,231	0,042	0,006	0,018	0,154
М2	$k_1^{\pm}$	1,000	0,622	0,447	0,209	0,082
	M_s	0,609	0,131	0,022	0,035	0,314
М3	$k_1^{\pm}$	1,000	0,776	0,586	0,272	0,114
	M_s	0,125	0,039	0,013	0,016	0,115

Таблица А.3.19 – Значения моментов M_s около контуров круговых отверстий в зависимости от c / a в плите из материала М2 с двоякопериодической системой отверстий

θ, рад.	c / a									
	∞	1	0,5	0,1	0,01	∞	1	0,5	0,1	0,01
	Изгиб моментами $M_y^{\infty} = m_y$					Изгиб моментами $M_x^{\infty} = M_y^{\infty} = m_{xy}$				
0	2,184	2,342	2,743	5,029	14,65	2,793	2,798	3,246	6,325	19,20
$\pi/12$	2,002	2,092	2,314	2,847	1,803	2,586	2,559	2,831	3,649	2,412
$\pi/6$	1,457	1,413	1,409	1,091	0,429	2,015	1,876	1,910	1,545	0,629
$\pi/4$	0,767	0,650	0,587	0,361	0,123	1,534	1,270	1,162	0,726	0,253
$\pi/3$	0,336	0,254	0,233	0,158	0,058	1,567	1,424	1,359	0,958	0,348
$5\pi/12$	0,230	0,195	0,198	0,284	0,198	1,881	2,044	2,209	2,607	1,581
$\pi/2$	0,231	0,203	0,197	0,516	1,716	2,042	2,351	2,671	4,790	13,53

Таблица А.4.1 – Значения изгибающих моментов в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от c/a_1.

Материал	Точка	Момент	Задача	c/a_1					
				∞	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	A	M_x	ЭМУ	1,813	1,854	1,894	1,946	2,061	2,152
	B	M_y	ЭМУ	0,231	0,228	0,224	0,216	0,193	0,175
			ТУ	0,227	0,224	0,219	0,211	0,189	0,172
	C	M_x	ЭМУ	1,813	1,898	2,059	2,408	4,388	12,83
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,335	1,662	2,150	4,287	12,80
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,230	1,536	2,044	4,240	12,79
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,154	1,218	1,180	0,777	0,326
М2	A	M_x	ЭМУ	1,811	1,847	1,886	1,938	2,054	2,144
			ТУ	1,713	1,753	1,791	1,838	1,939	2,016
	B	M_y	ЭМУ	0,609	0,600	0,589	0,567	0,506	0,458
			ТУ	0,220	0,217	0,212	0,205	0,184	0,169
	C	M_x	ЭМУ	1,811	1,876	2,023	2,378	4,356	12,66
			ТУ	1,713	1,800	1,964	2,310	4,180	12,01
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,328	1,657	2,151	4,266	12,63
			ТУ	1,000	1,341	1,654	2,113	4,105	11,99
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,322	1,625	2,105	4,244	12,62
			ТУ	1,000	1,246	1,553	2,036	4,073	11,98
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,133	1,160	1,097	0,682	0,249
			ТУ	1,000	1,147	1,184	1,122	0,714	0,299
М3	A	M_x	ЭМУ	1,464	1,503	1,533	1,566	1,628	1,672
			ТУ	1,421	1,458	1,487	1,518	1,575	1,614
	B	M_y	ЭМУ	0,125	0,122	0,121	0,121	0,120	0,119
			ТУ	-0,070	-0,069	-0,068	-0,067	-0,064	-0,062
	C	M_x	ЭМУ	1,464	1,576	1,749	2,062	3,587	9,809
			ТУ	1,421	1,526	1,699	2,012	3,490	9,473
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,331	1,585	1,961	3,552	9,800
			ТУ	1,000	1,343	1,592	1,948	3,468	9,467
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,344	1,612	1,977	3,555	9,800
			ТУ	1,000	1,290	1,556	1,925	3,459	9,465
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,088	1,035	0,907	0,498	0,173
			ТУ	1,000	1,094	1,053	0,932	0,541	0,234

Таблица А.4.2 – Значения КИМ k_1 и моментов M_x / m_x в некоторых точках полуплоскости с вертикальной трещиной в зависимости от c / l_1.

Материал	Точка	Величина	Задача	c / l_1					
				∞	2	1	0,5	0,1	0,01
М1	E	k_1^-	ЭМУ	1,000	1,013	1,029	1,054	1,126	1,211
	F	k_1^+	ЭМУ	1,000	1,018	1,050	1,117	1,502	3,027
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,191	1,451	1,964	5,476	34,60
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,117	1,306	1,708	4,607	28,97
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,071	1,076	1,006	0,837	0,726
М2	E	k_1^-	ЭМУ	1,000	1,010	1,023	1,043	1,106	1,185
			ТУ	1,000	1,013	1,029	1,053	1,124	1,209
	F	k_1^+	ЭМУ	1,000	1,014	1,040	1,095	1,444	2,906
			ТУ	1,000	1,018	1,049	1,115	1,498	3,020
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,187	1,443	1,953	5,497	35,11
			ТУ	1,000	1,191	1,451	1,964	5,479	34,64
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,154	1,400	1,916	5,550	35,66
			ТУ	1,000	1,119	1,311	1,719	4,657	29,33
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,045	1,053	1,009	0,869	0,775
			ТУ	1,000	1,060	1,046	0,975	0,834	0,744
М3	E	k_1^-	ЭМУ	1,000	1,010	1,024	1,044	1,108	1,188
			ТУ	1,000	1,012	1,028	1,052	1,122	1,206
	F	k_1^+	ЭМУ	1,000	1,015	1,041	1,098	1,451	2,921
			ТУ	1,000	1,017	1,048	1,112	1,492	3,006
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,188	1,444	1,955	5,497	35,07
			ТУ	1,000	1,190	1,450	1,963	5,484	34,72
	O	M_x	ЭМУ	1,000	1,149	1,387	1,889	5,428	34,81
			ТУ	1,000	1,123	1,320	1,740	4,749	29,99
	L	M_x	ЭМУ	1,000	1,004	0,972	0,940	0,889	0,853
			ТУ	1,000	1,013	0,974	0,934	0,881	0,845

Таблица А.4.3 – Значения КИМ k_1 и моментов M_x / m_x в некоторых точках полуплоскости из М2 с круговым отверстием и центральной трещиной длины $2l_2$ в перемычке в зависимости от $2l_2 / a_1$.

Точка	Величина	Задача	$2l_2 / a_1$				
			0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
E	k_1^-	ЭМУ	0,372	0,668	0,919	1,231	1,963
		ТУ	0,372	0,670	0,927	1,255	2,036
F	k_1^+	ЭМУ	0,369	0,648	0,877	1,160	1,863
		ТУ	0,368	0,648	0,881	1,178	1,916
B	M_y	ЭМУ	0,588	0,587	0,585	0,580	0,569
		ТУ	0,212	0,212	0,211	0,210	0,206
C	M_x	ЭМУ	2,047	2,251	2,784	4,172	10,93
		ТУ	1,982	2,142	2,562	3,666	9,129
D	M_x	ЭМУ	1,837	2,115	2,703	4,100	10,69
		ТУ	1,825	2,101	2,688	4,082	10,63
I	M_x	ЭМУ	1,644	1,879	2,415	3,721	10,05
		ТУ	1,613	1,847	2,382	3,684	9,893
O	M_x	ЭМУ	1,648	1,845	2,358	3,683	10,15
		ТУ	1,571	1,726	2,132	3,188	8,401

Таблица А.4.4 – Значения КИМ k_1 для конца трещины и моментов M_x / m_x в некоторых точках полуплоскости из М2 с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от c / a_1.

Точка	Величина	Задача	c / a_1				
			0,9	0,7	0,5	0,3	0,1
F	k_1^+	ЭМУ	1,422	1,474	1,562	1,742	2,354
		ТУ	1,469	1,523	1,614	1,798	2,429
A	M_x	ЭМУ	1,969	1,984	2,005	2,036	2,097
		ТУ	1,864	1,877	1,896	1,924	1,979
B	M_y	ЭМУ	0,611	0,605	0,596	0,583	0,562
		ТУ	0,220	0,218	0,215	0,211	0,204
D	M_x	ЭМУ	1,993	2,283	2,789	3,915	9,004
		ТУ	1,975	2,259	2,754	3,859	8,844
O	M_x	ЭМУ	2,007	2,299	2,809	3,948	9,122
		ТУ	1,736	1,969	2,379	3,301	7,502

Таблица А.4.5 – Значения изгибающих моментов в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от c / a_1.

Мате-риал	Точ-ка	Мо-мент	За-дача	c / a_1							
				2	1	0,1	0,01	-0,01	-0,1	-0,5	-1
М1	A	M_x	ЭМУ	1,854	1,894	2,061	2,152	2,200	2,167	2,021	1,814
	B	M_y	ЭМУ	0,228	0,224	0,193	0,175	0,166	0,164	0,150	0,001
			ТУ	0,224	0,219	0,189	0,172	0,164	0,161	0,148	0,020
	C	M_x	ЭМУ	1,898	2,059	4,388	12,83	–	–	–	–
	D	M_x	ЭМУ	1,335	1,662	4,287	12,80	–	–	–	–
	O	M_x	ЭМУ	1,230	1,536	4,240	12,79	–	–	–	–
	L	M_x	ЭМУ	1,154	1,218	0,777	0,326	0,085	0,088	0,058	0,001
	M	M_x	ЭМУ	1,041	0,966	0,686	0,581	0,532	0,552	0,650	0,801
М2	A	M_x	ЭМУ	1,847	1,886	2,054	2,144	2,181	2,158	2,014	1,802
			ТУ	1,753	1,791	1,939	2,016	2,047	2,026	1,896	1,714
	B	M_y	ЭМУ	0,600	0,589	0,506	0,458	0,438	0,430	0,393	0,020
			ТУ	0,217	0,212	0,184	0,169	0,163	0,160	0,147	0,023
	C	M_x	ЭМУ	1,876	2,023	4,356	12,66	–	–	–	–
			ТУ	1,800	1,964	4,180	12,01	–	–	–	–
	D	M_x	ЭМУ	1,328	1,657	4,266	12,63	–	–	–	–
			ТУ	1,341	1,654	4,105	11,99	–	–	–	–
	O	M_x	ЭМУ	1,322	1,625	4,244	12,62	–	–	–	–
			ТУ	1,246	1,553	4,073	11,98	–	–	–	–
	L	M_x	ЭМУ	1,133	1,160	0,682	0,249	0,060	0,026	-0,006	0,020
			ТУ	1,147	1,184	0,714	0,299	0,123	0,088	0,058	0,023
	M	M_x	ЭМУ	1,006	0,949	0,711	0,616	0,579	0,588	0,671	0,813
			ТУ	1,021	0,941	0,704	0,620	0,588	0,601	0,696	0,830

Таблица А.4.6 – Значения КИМ k_1 для конца трещины и моментов M_x / m_x в некоторых точках полуплоскости из М2 с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от c / a_1.

Точка	Величина	Задача	c / a_1							
			0,9	0,7	0,5	0,3	0,1	0	-0,1	-0,5
F	k_1^+	ЭМУ	1,422	1,474	1,562	1,742	2,354	–	–	
		ТУ	1,469	1,523	1,614	1,798	2,429	–	–	
A	M_x	ЭМУ	1,969	1,984	2,005	2,036	2,097	2,582	2,486	2,311
		ТУ	1,864	1,877	1,896	1,924	1,979	2,343	2,323	2,203
B	M_y	ЭМУ	0,611	0,605	0,596	0,583	0,562	0,528	0,526	0,502
		ТУ	0,220	0,218	0,215	0,211	0,204	0,174	0,173	0,170
D	M_x	ЭМУ	1,993	2,283	2,789	3,915	9,004	–	–	
		ТУ	1,975	2,259	2,754	3,859	8,844	–	–	
O	M_x	ЭМУ	2,007	2,299	2,809	3,948	9,122	–	–	
		ТУ	1,736	1,969	2,379	3,301	7,502	–	–	
L	M_x	ЭМУ	1,164	1,147	1,106	1,025	0,866	-0,061	0,251	0,317
		ТУ	1,187	1,163	1,117	1,039	0,892	0,122	0,103	0,117
M	M_x	ЭМУ	0,959	0,934	0,903	0,861	0,793	0,407	0,535	0,594
		ТУ	0,961	0,934	0,900	0,855	0,783	0,433	0,436	0,496

Таблица А.4.7 – Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы с центральным круговым отверстием в зависимости от c_1 / a_1.

Материал	Точка	Момент	Задача	c_1 / a_1				
				∞	2	1	0,5	0,1
М1	B	M_y	ЭМУ	0,231	0,232	0,233	0,232	0,214
			ТУ	0,227	0,227	0,226	0,224	0,195
	C	M_x	ЭМУ	1,813	1,998	2,341	3,151	9,608
			ТУ	1,810	1,994	2,335	3,143	9,589
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,403	1,889	2,813	9,387
	E^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,290	1,743	2,674	9,281
	L^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,209	1,371	1,513	1,596
	M^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,084	1,057	1,008	0,885
М2	B	M_y	ЭМУ	0,611	0,613	0,618	0,618	0,558
			ТУ	0,220	0,220	0,221	0,220	0,197
	C	M_x	ЭМУ	1,810	1,974	2,306	3,122	9,467
			ТУ	1,713	1,908	2,267	3,098	9,377
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,397	1,890	2,825	9,278
			ТУ	1,000	1,420	1,909	2,835	9,208
	E^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,389	1,850	2,764	9,236
			ТУ	1,000	1,317	1,791	2,730	9,136
	L^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,190	1,313	1,424	1,439
			ТУ	1,000	1,209	1,353	1,472	1,477
	M^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,050	1,044	1,004	0,874
			ТУ	1,000	1,068	1,036	0,991	0,852
М3	B	M_y	ЭМУ	0,126	0,117	0,114	0,113	0,100
			ТУ	-0,070	-0,097	-0,078	-0,068	-0,066
	C	M_x	ЭМУ	1,463	1,696	2,101	2,977	9,268
			ТУ	1,421	1,646	2,048	2,912	8,963
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,429	1,903	2,832	9,178
	E^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,447	1,936	2,855	9,187
	L^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,167	1,237	1,295	1,238
	M^+	M_x	ЭМУ	1,000	0,993	0,975	0,957	0,839

Таблица А.4.8 – Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы из материала М2 с круговым отверстием в зависимости от c_1/a_1.

Точка	Момент	c_1/a_1						
		2	1	0,5	0,1	0,01	-0,5	-1
A	M_x	1,974	1,973	2,013	2,132	2,233	2,056	1,882
B	M_y	0,613	0,602	0,580	0,518	0,472	0,398	0,003
C	M_x	1,974	2,103	2,458	4,501	13,11	–	–
E^+	M_x	1,389	1,690	2,176	4,387	13,07	–	–
L^+	M_x	1,190	1,203	1,129	0,706	0,255	0,011	0,003
M^+	M_x	1,050	0,981	0,891	0,730	0,637	0,687	0,750
E^-	M_x	1,389	1,275	1,254	1,278	1,310	1,200	1,042
L^-	M_x	1,326	1,244	1,231	1,257	1,289	1,147	1,029
M^-	M_x	1,050	1,067	1,074	1,091	1,105	1,060	1,013

Таблица А.4.9 – Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы из материала М2 с круговым отверстием и краевой трещиной из него в зависимости от c_1/a_1.

Точка	Момент	c_1/a_1					
		2	1	0,5	0,1	-0,1	-0,5
A	M_x	2,044	2,064	2,103	2,112	2,621	2,461
B	M_y	0,625	0,629	0,615	0,549	0,535	0,526
F	k_1^+	1,392	1,853	2,215	2,533	–	–
D	M_x	1,482	2,008	2,937	9,008	–	–
E^+	M_x	1,569	2,045	3,022	9,053	–	–
L^+	M_x	1,146	1,221	1,148	0,865	0,121	0,012
M^+	M_x	1,084	1,006	0,946	0,790	0,502	0,406
E^-	M_x	1,487	1,344	1,282	1,258	1,468	1,351
L^-	M_x	1,251	1,192	1,231	1,184	1,370	1,275
M^-	M_x	1,085	1,097	1,123	1,074	1,200	1,142

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

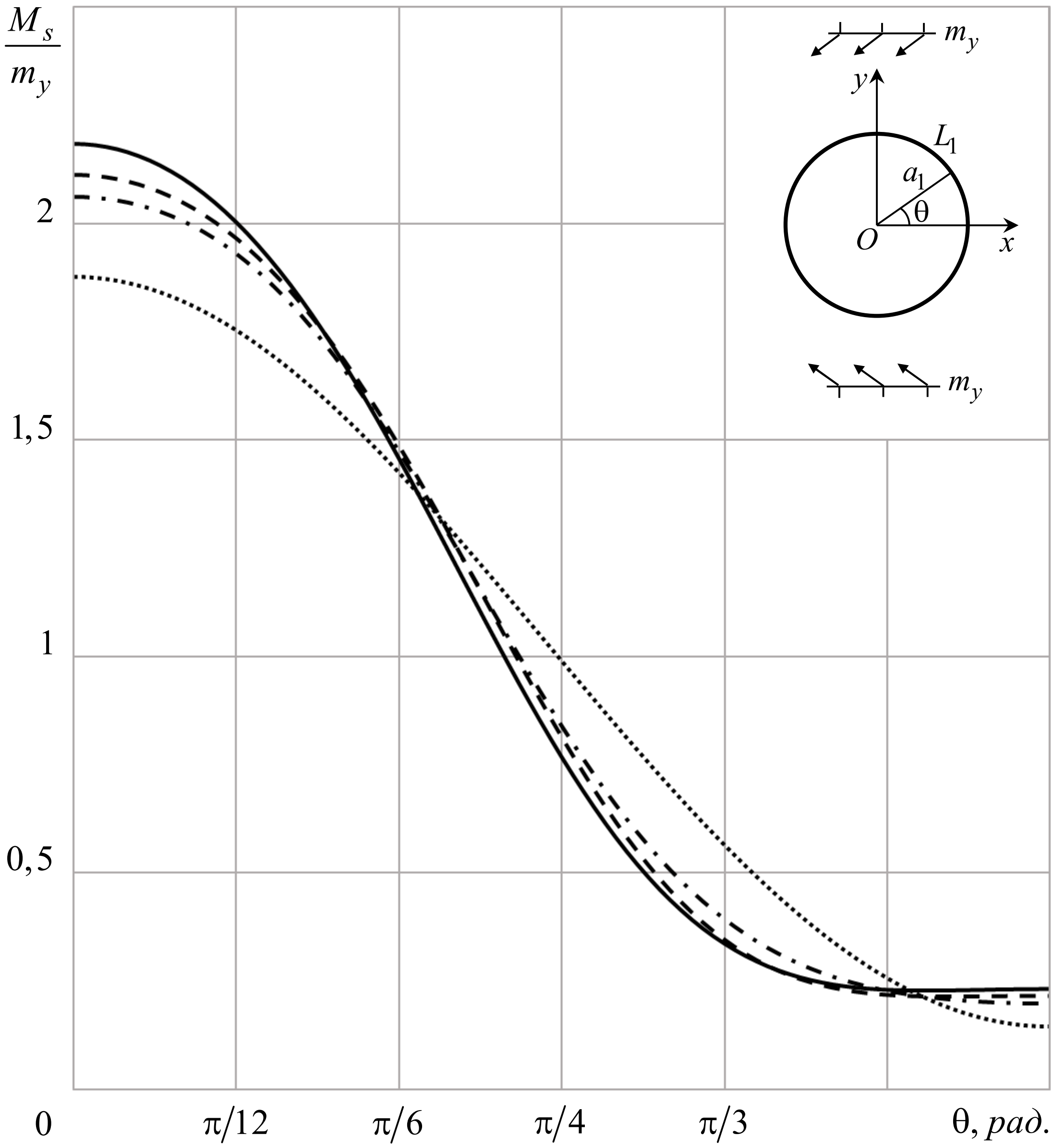


Рисунок Б.2.1 – Графики распределения моментов M_s/m_y около контура кругового отверстия в плите из материала М2 для случаев задач ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ(штрих-пунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия) при действии на бесконечности механических моментов $M_y^{\infty} = m_y$.

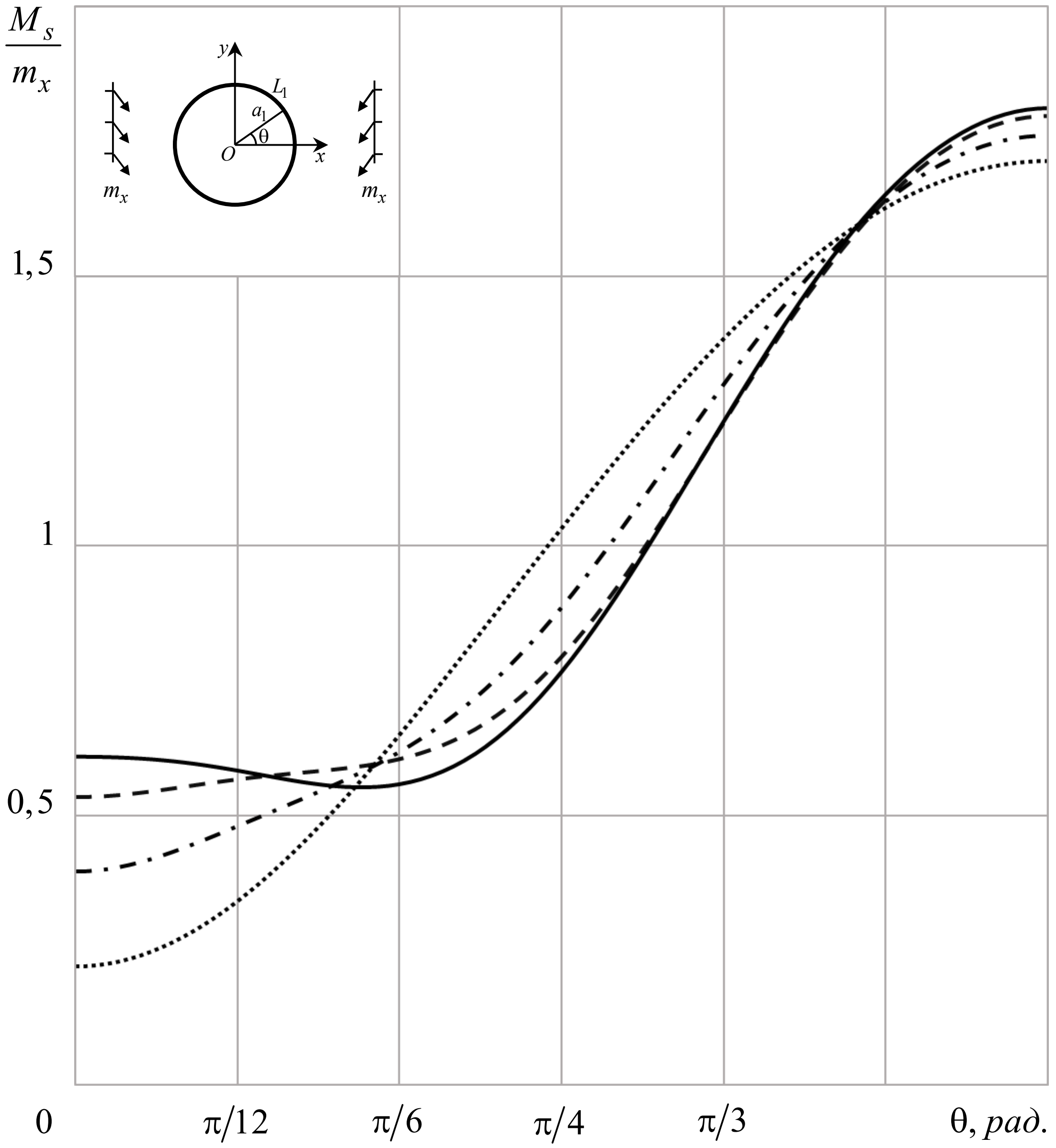


Рисунок Б.2.2 – Графики распределения моментов M_s/m_x около контура кругового отверстия в плите из материала М2 для случаев задач ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ(штрих-пунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия) при действии на бесконечности механических моментов $M_x^\infty = m_x$.

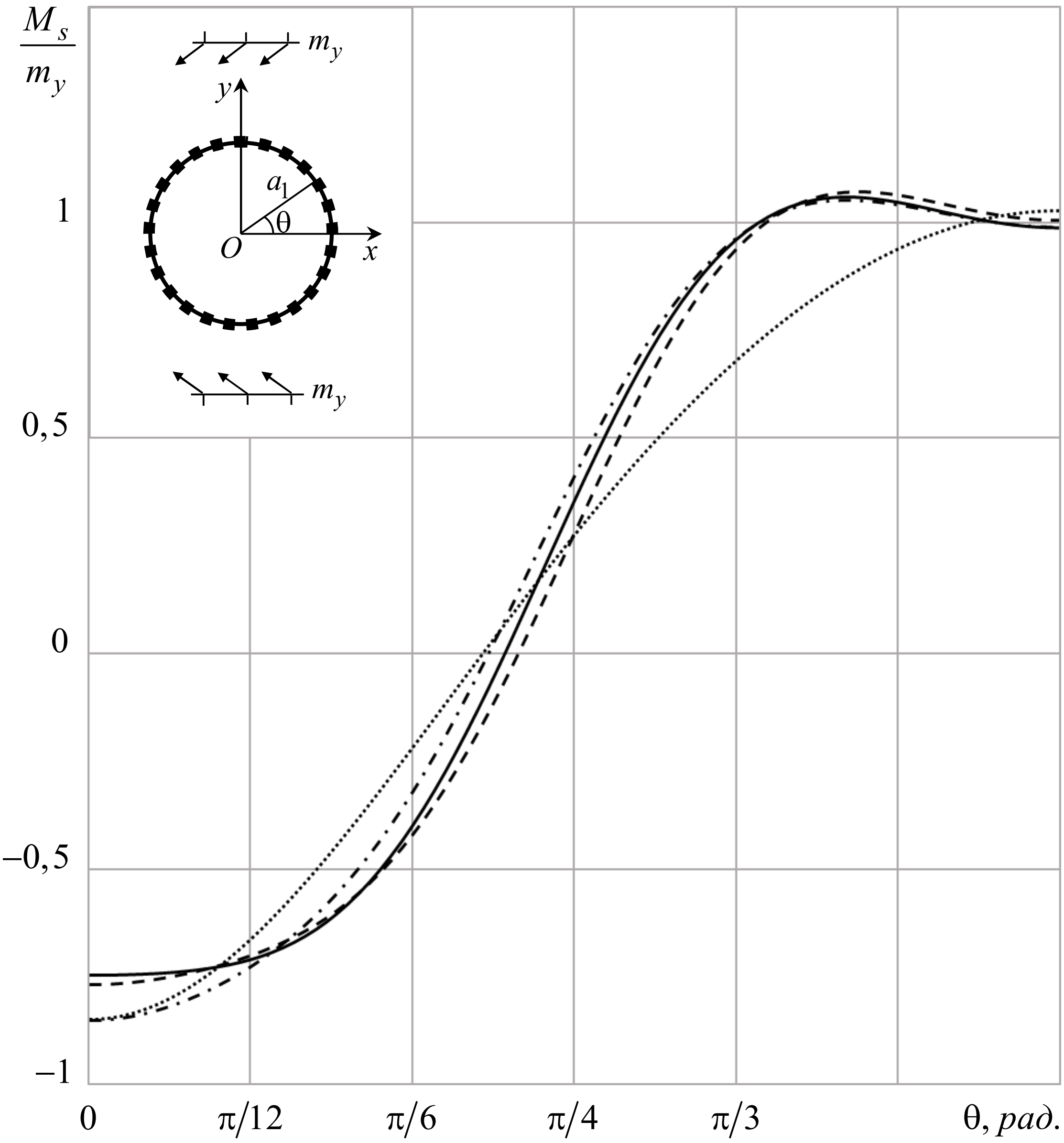


Рисунок Б.2.3 – Графики распределения моментов M_s/m_y около контура жестко подкрепленного кругового отверстия в плите из материала М2 для случаев задачЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ(штрих-пунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия) при действии на бесконечности механических моментов $M_y^\infty = m_y$.

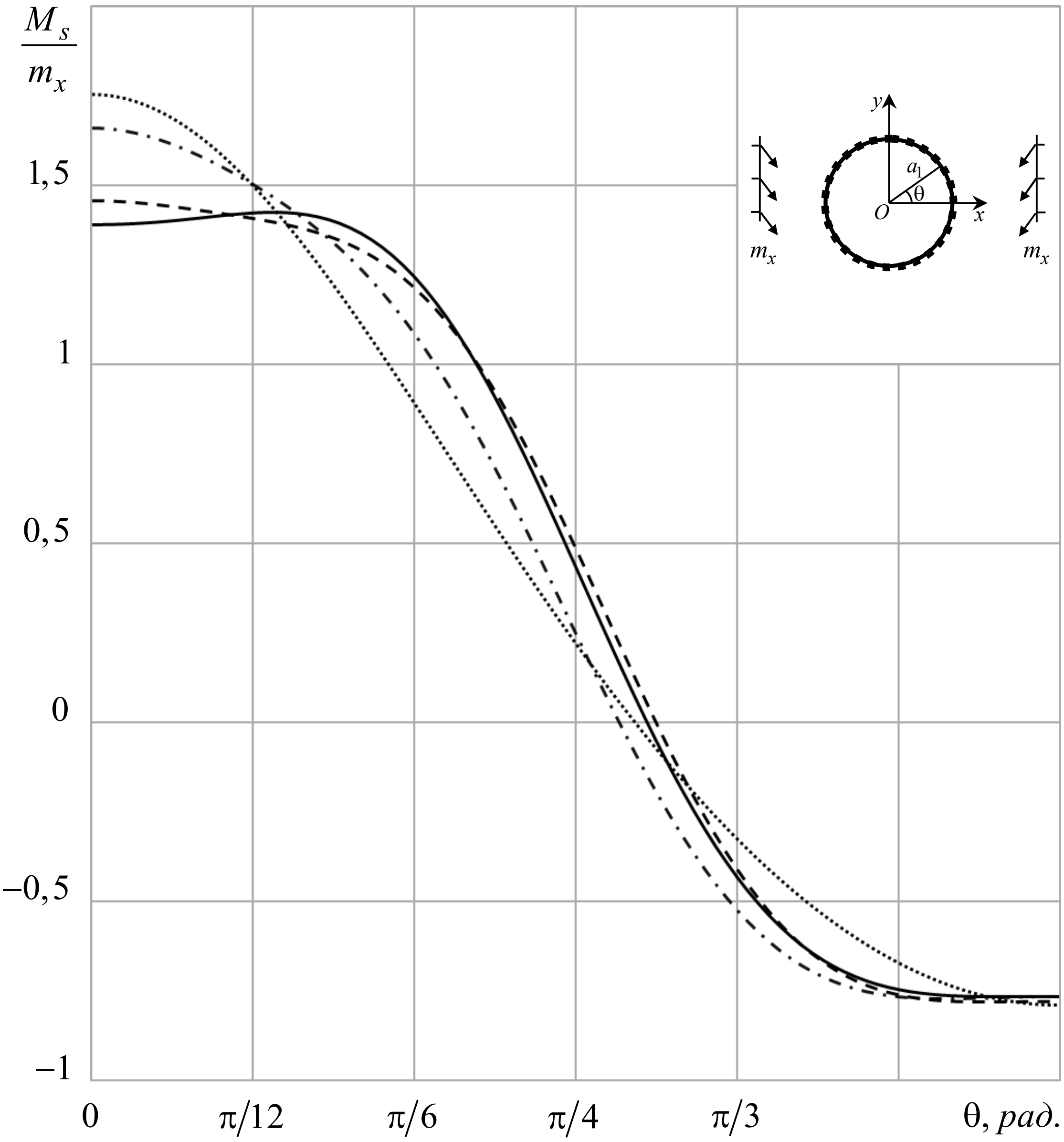


Рисунок Б.2.4 – Графики распределения моментов M_s/m_x около контура жестко подкрепленного кругового отверстия в плите из материала М2 для случаев задач ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ(штрих-пунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия)при действии на бесконечности механических моментов $M_x^{\infty} = m_x$.

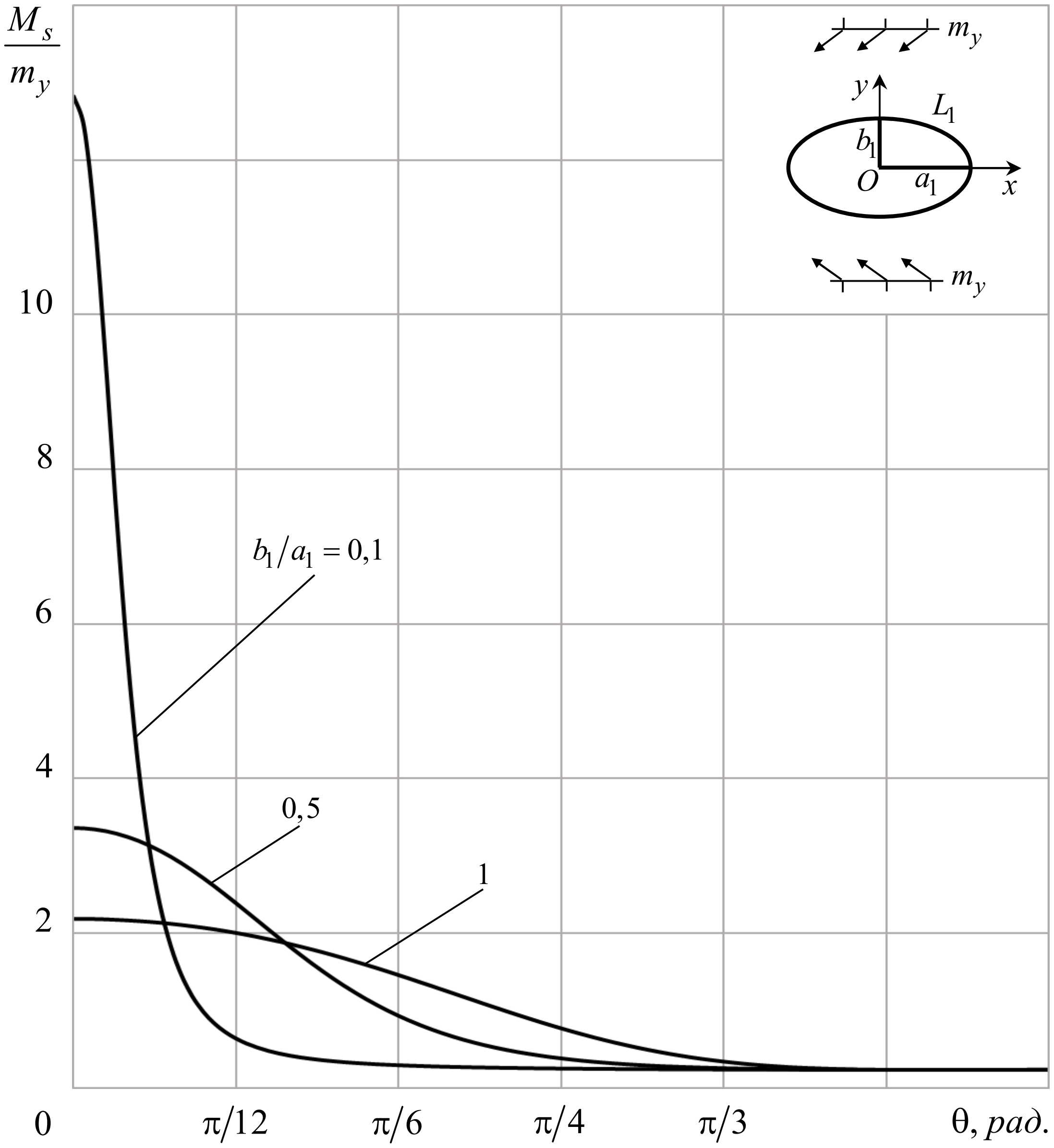


Рисунок Б.2.5 – Графики распределения моментов M_s/m_y около контура эллиптического отверстия в плите из материала М2 для некоторых значений отношения полуосей b_1/a_1 при действии на бесконечности механических моментов $M_y^\infty = m_y$.

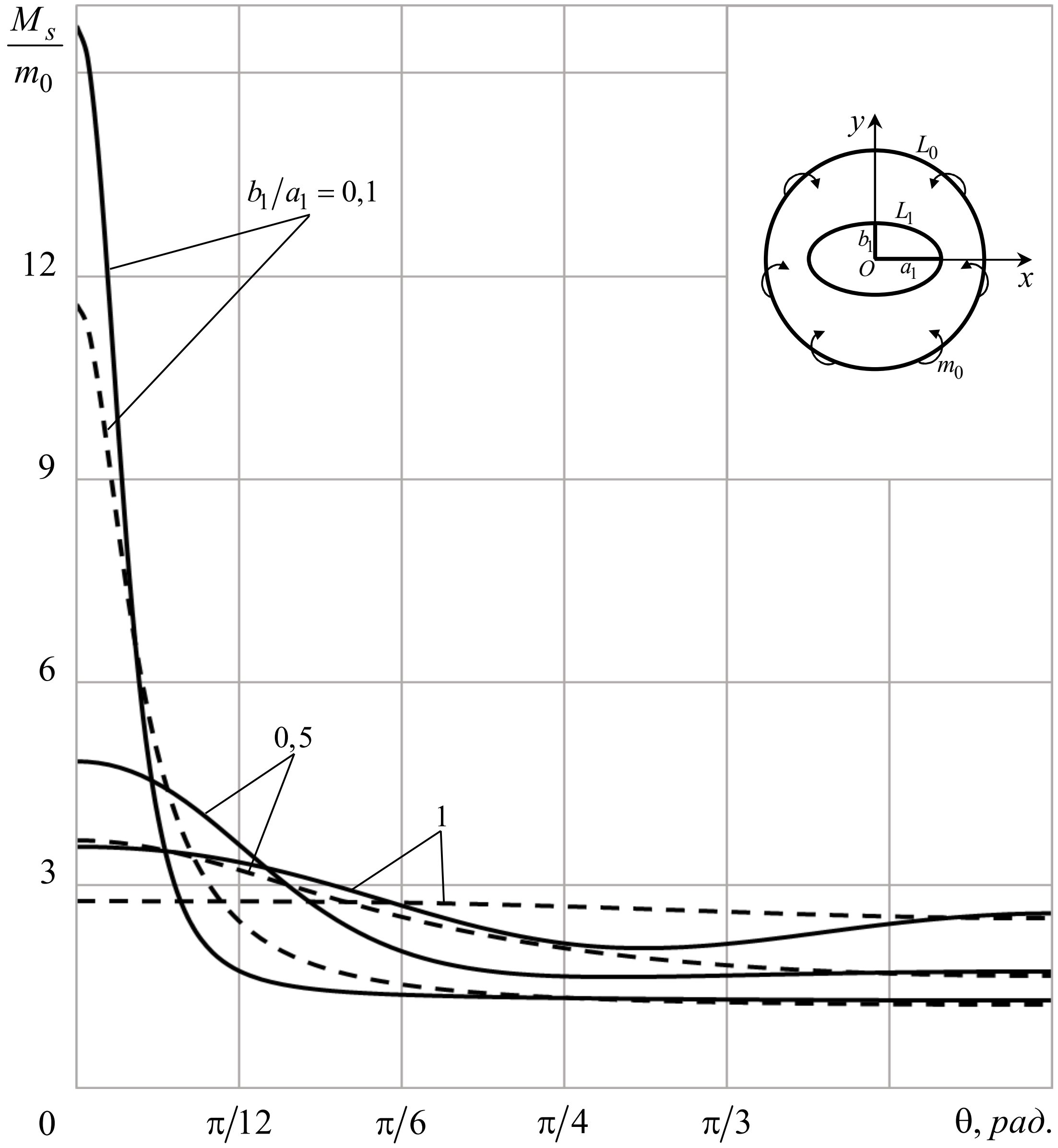


Рисунок Б.3.1 – Графики распределения моментов M_s/m_0 вблизи контура центрального эллиптического отверстия в круговом диске из материала М2 для некоторых значений b_1/a_1 .

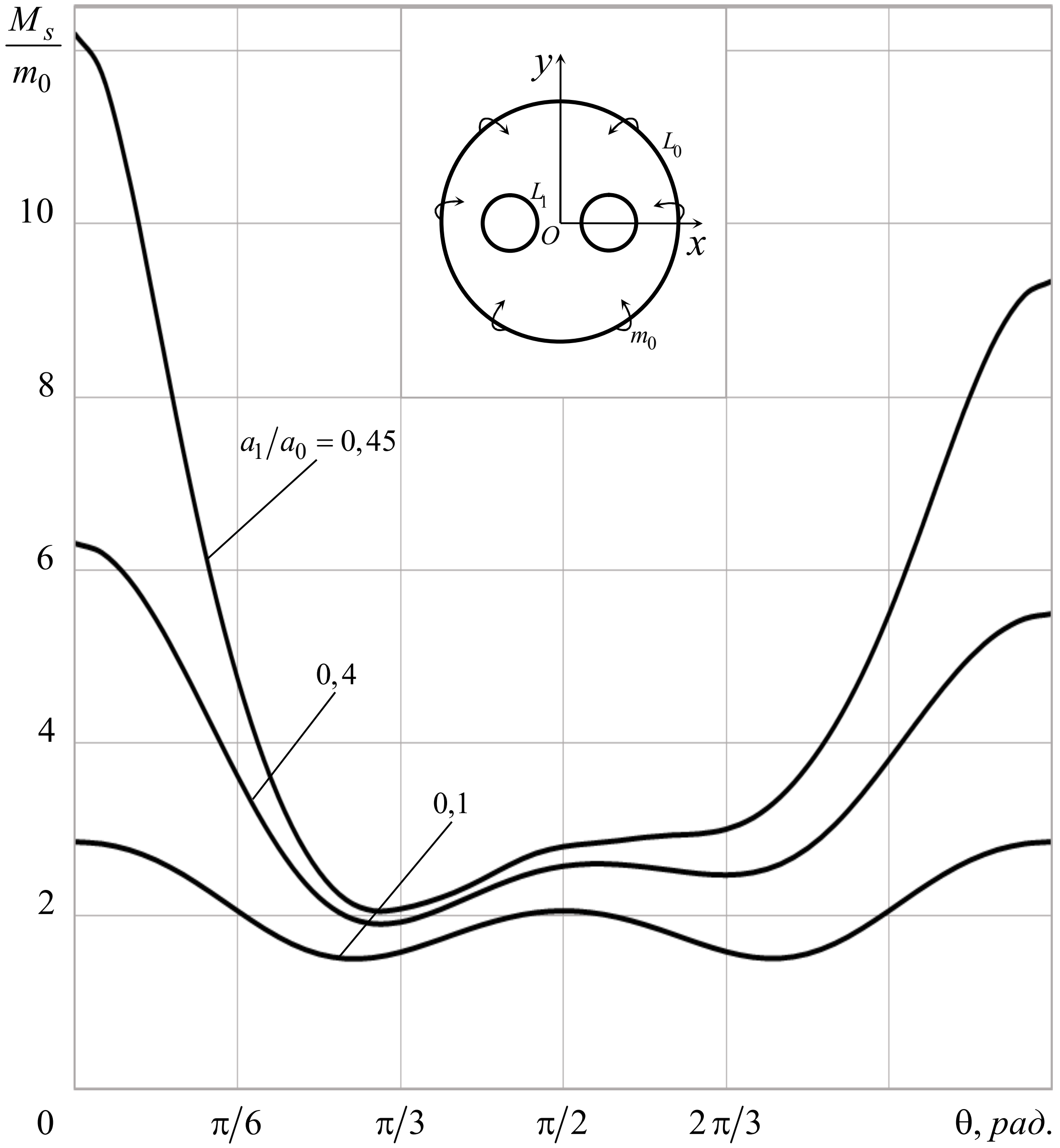


Рисунок Б.3.2 – Графики распределения моментов M_s/m_0 вблизи контура L_1 в круговом диске из М2 для некоторых значений отношения a_1/a_0 .

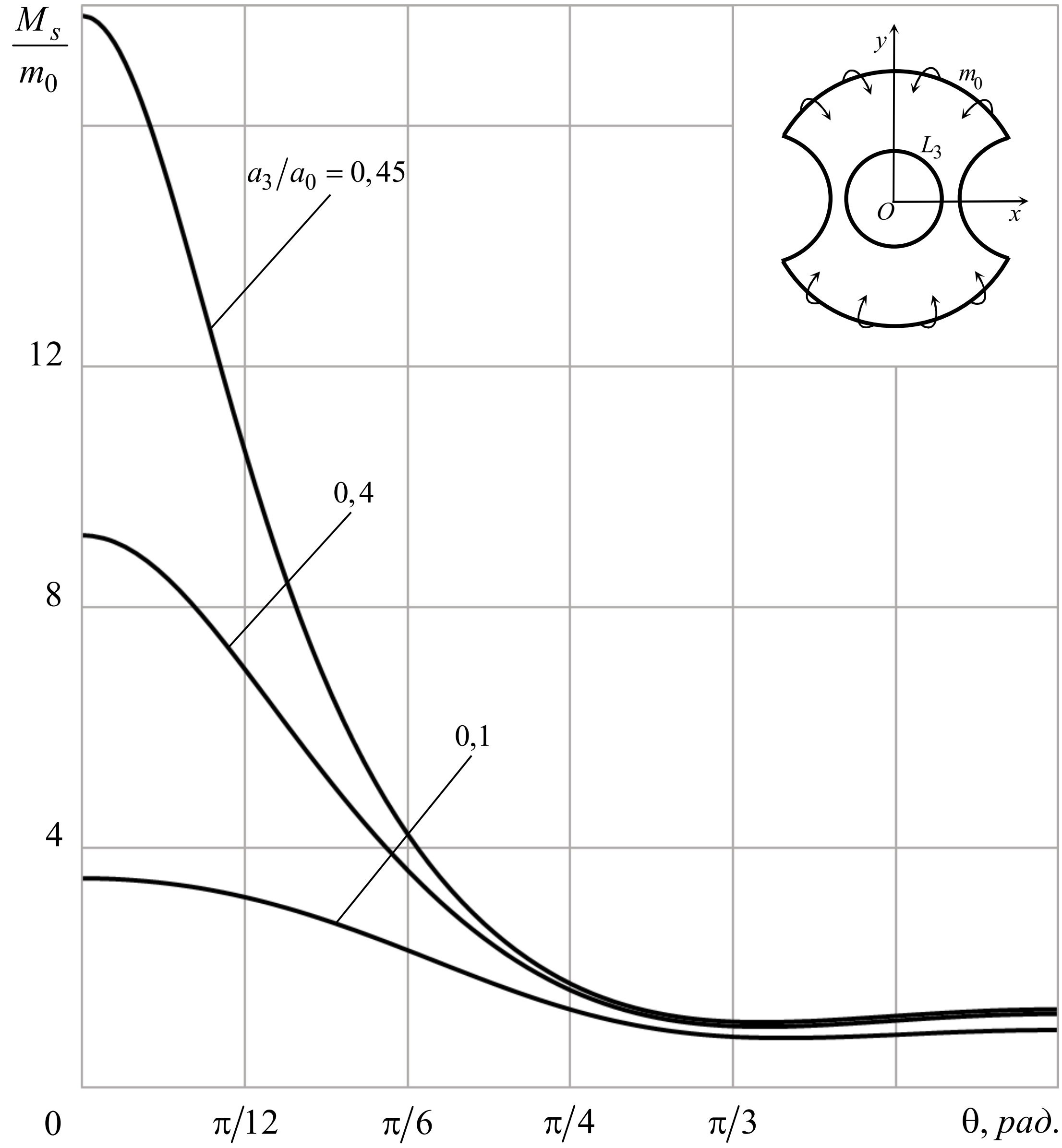


Рисунок Б.3.3 – Графики распределения моментов M_s/m_0 вблизи центрального контура L_3 в круговом диске с двумя симметричными круговыми выемами для некоторых значений отношения a_3/a_0 .

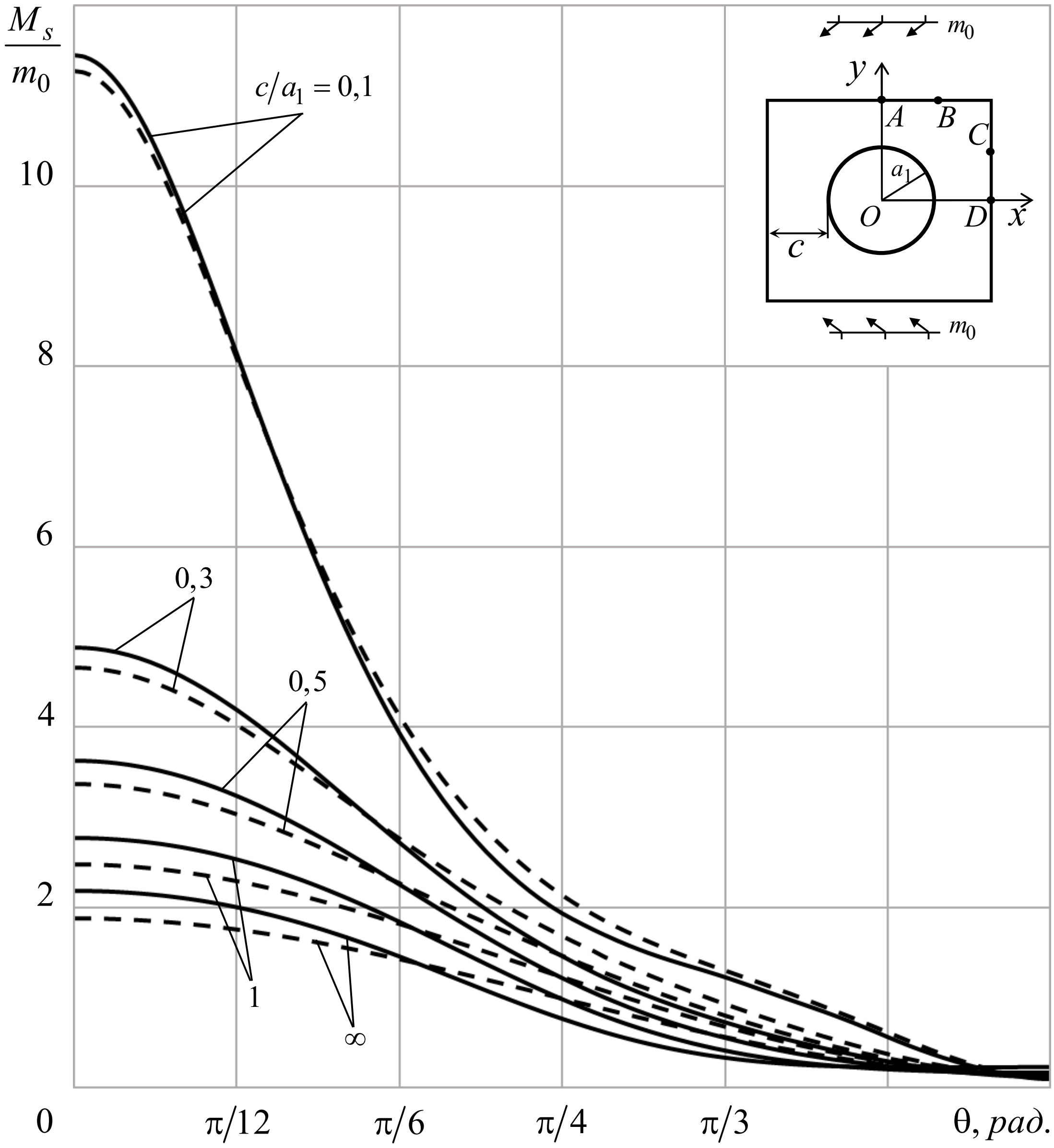


Рисунок Б.3.4 – Графики распределения моментов M_s/m_0 вблизи контура центрального кругового отверстия в квадратной плите из материала М2 для некоторых значений c/a_1. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, а штриховые – ТУ.

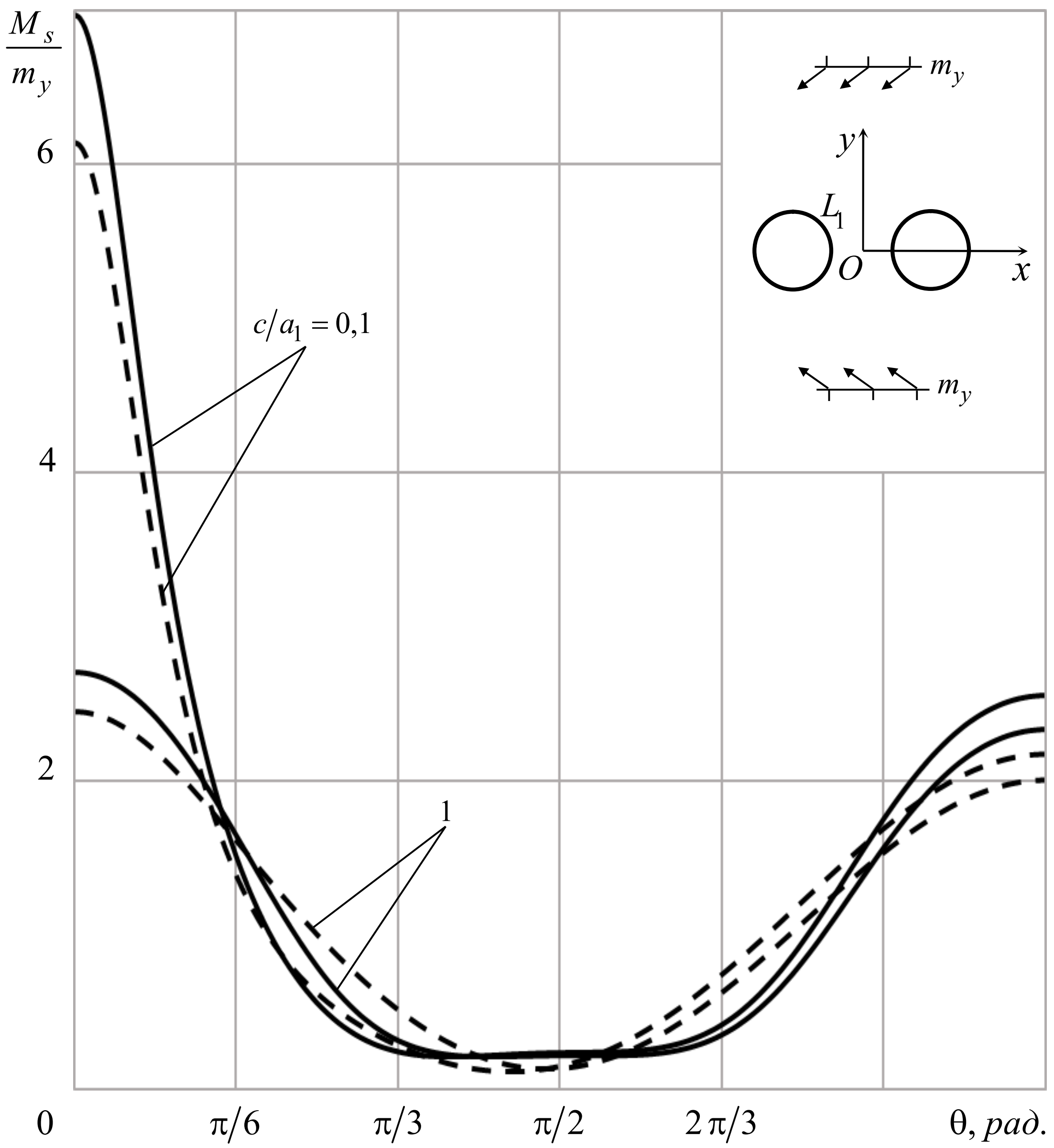


Рисунок Б.3.5 – Графики распределения моментов M_s/m_y вблизи контура левого отверстия в пластинке из материала М2 с двумя круговыми отверстиями при действии на бесконечности механических моментов $M_y^\infty = m_y$.

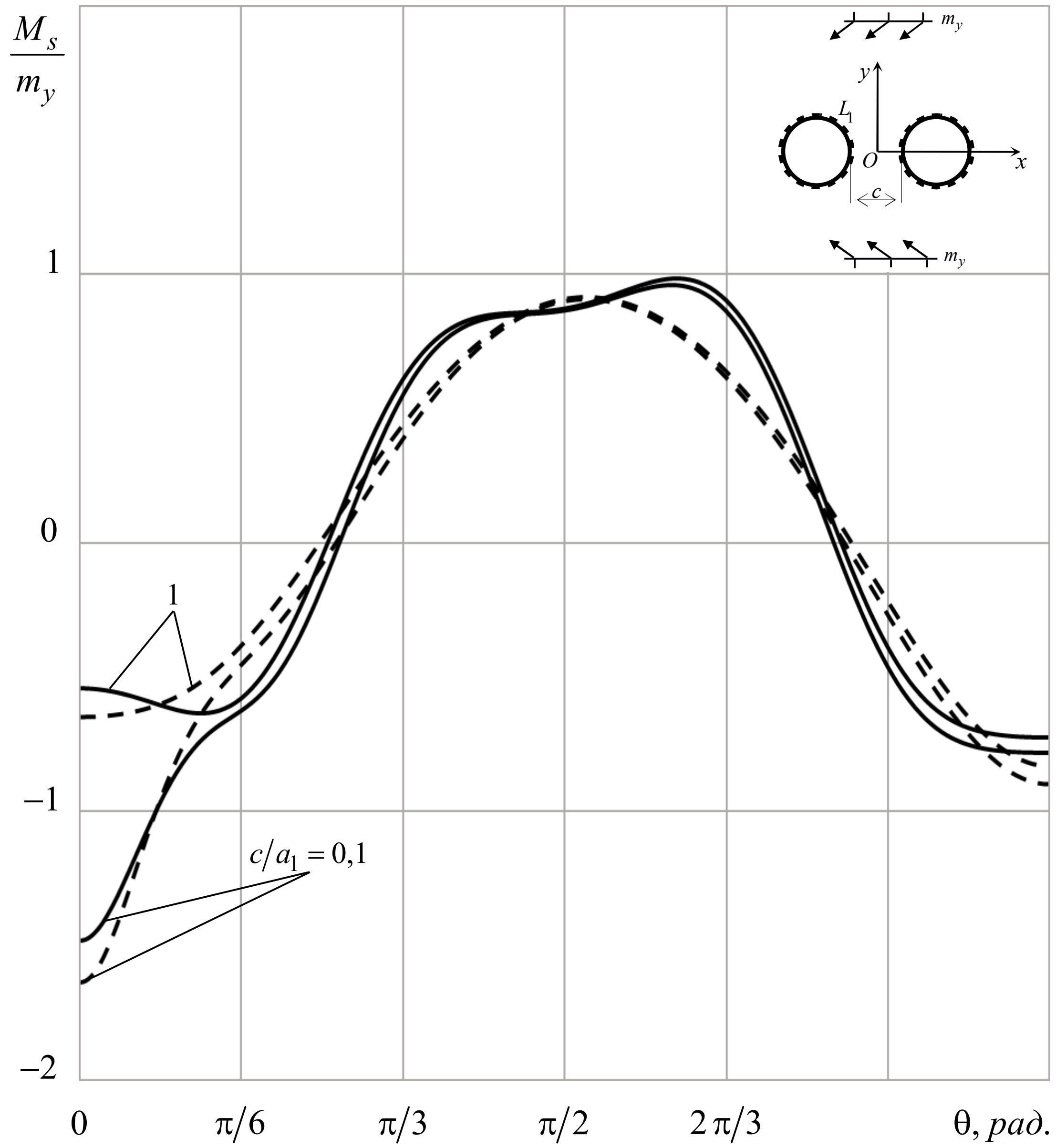


Рисунок Б.3.6 – Графики распределения моментов M_s/m_y вблизи контура левого отверстия в пластинке из материала М2 с двумя круговыми жестко подкрепленными отверстиями при действии механических моментов $M_y^\infty = m_y$.

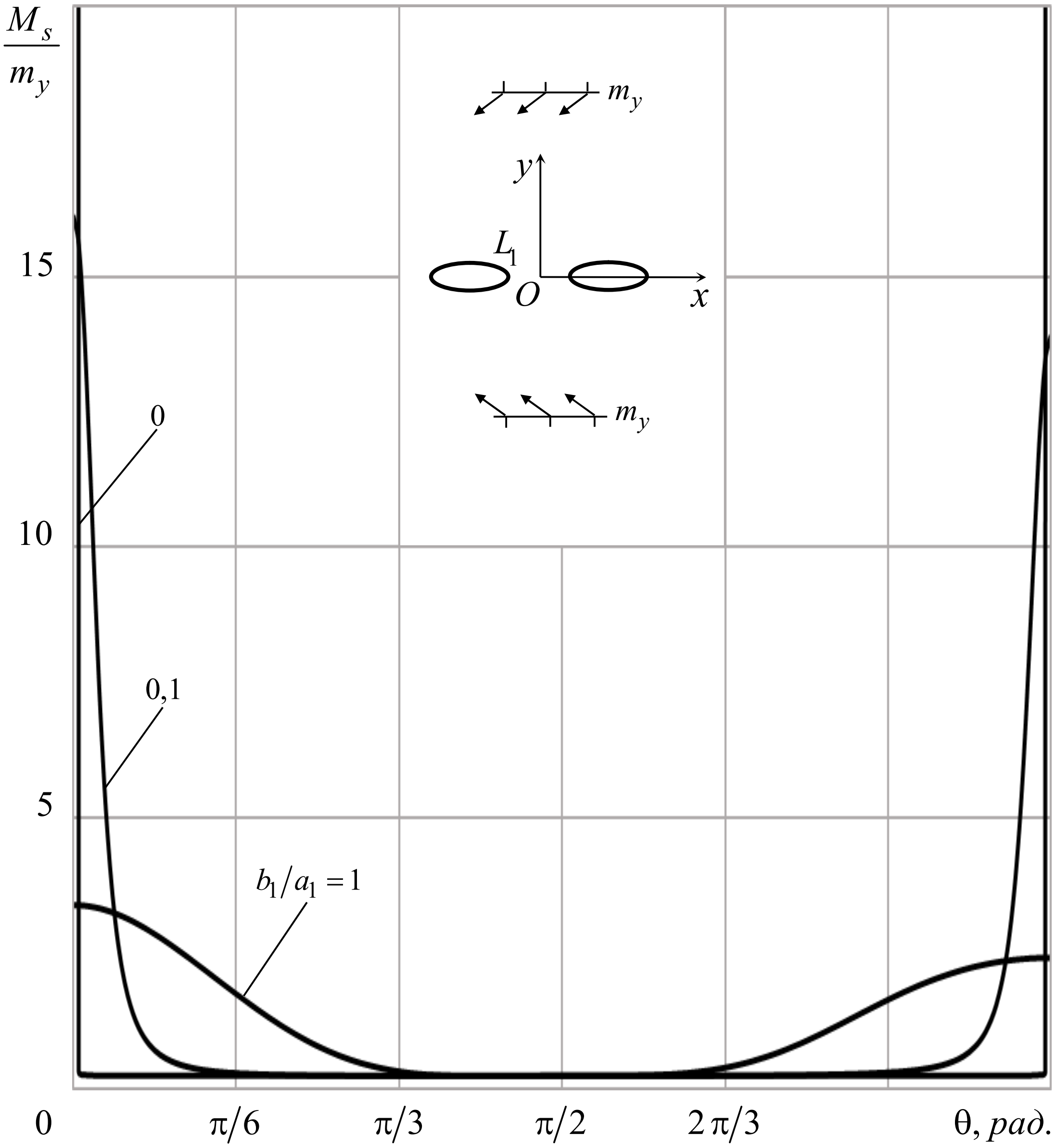


Рисунок Б.3.7 – Графики распределения моментов M_s / m_y вблизи контура левого отверстия для плиты с двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями ($a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$) из материала М2 для некоторых значений отношения b_1 / a_1 при действии моментов $M_y^\infty = m_y$, при $c / a_1 = 0{,}5$.

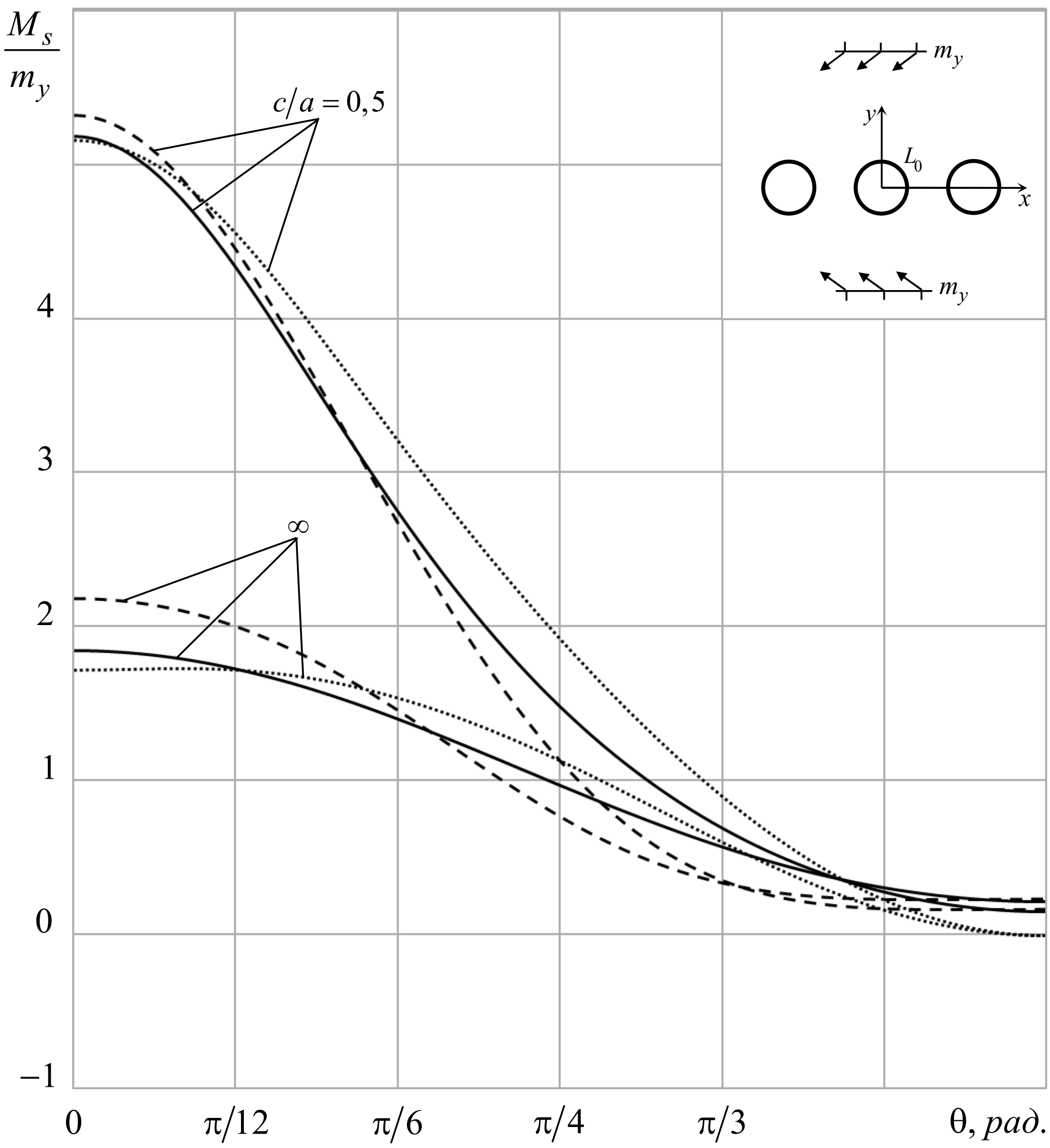


Рисунок Б.3.8 – Графики распределения моментов M_s/m_y вблизи контура кругового отверстия L_0 при действии на бесконечности моментов $M_y^\infty = m_y$. Сплошные, штриховые и пунктирные линии относятся к плите из материалов М1, М2 и М3 соответственно.

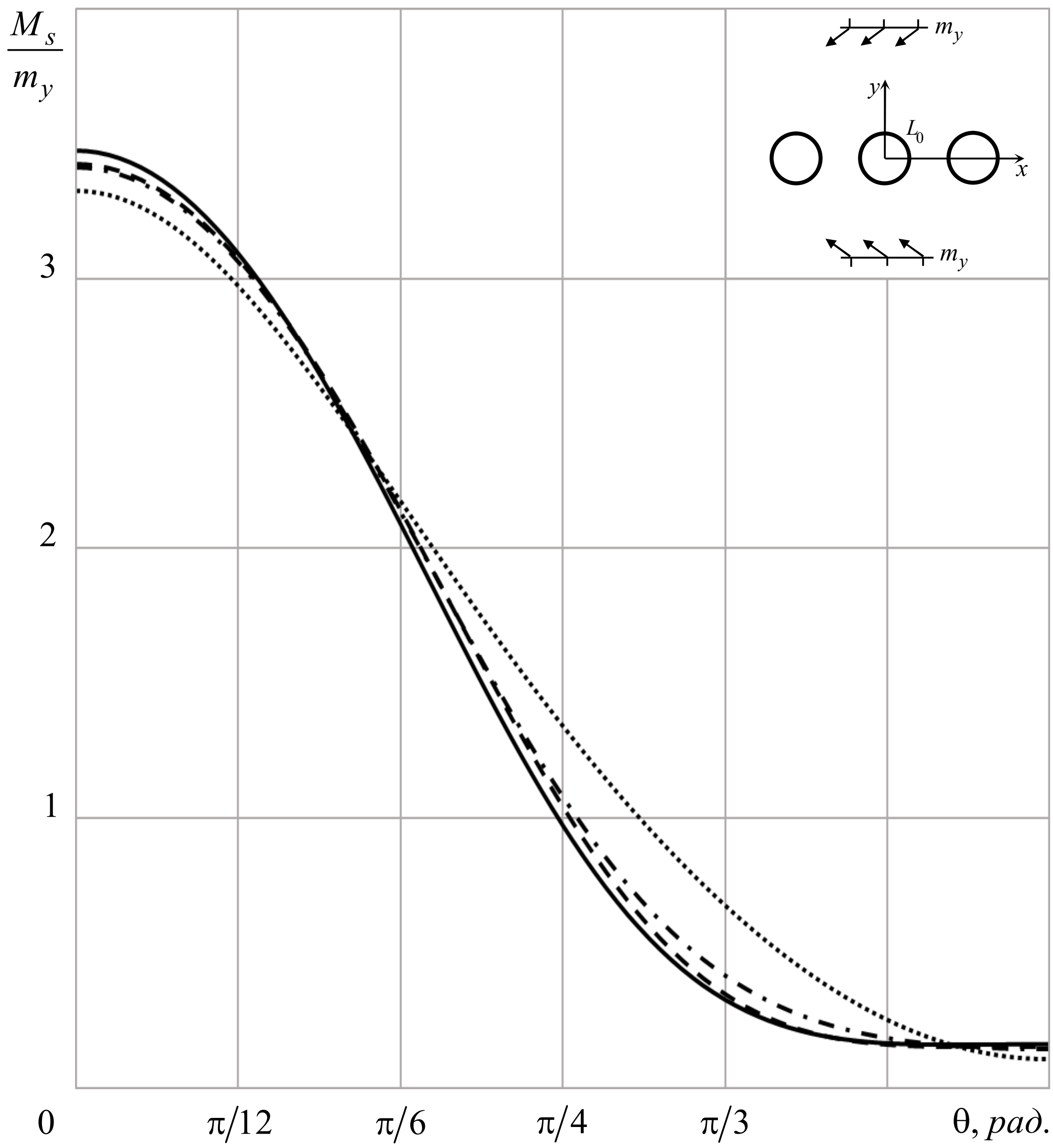


Рисунок Б.3.9 – Графики распределения моментов M_s/m_y около контура отверстия L_0 в плите из материала М3 с круговыми отверстиями для задач ЭМУ (сплошная линия), МУ (штриховая линия), ЭУ(штрих-пунктирная линия) и ТУ (пунктирная линия)

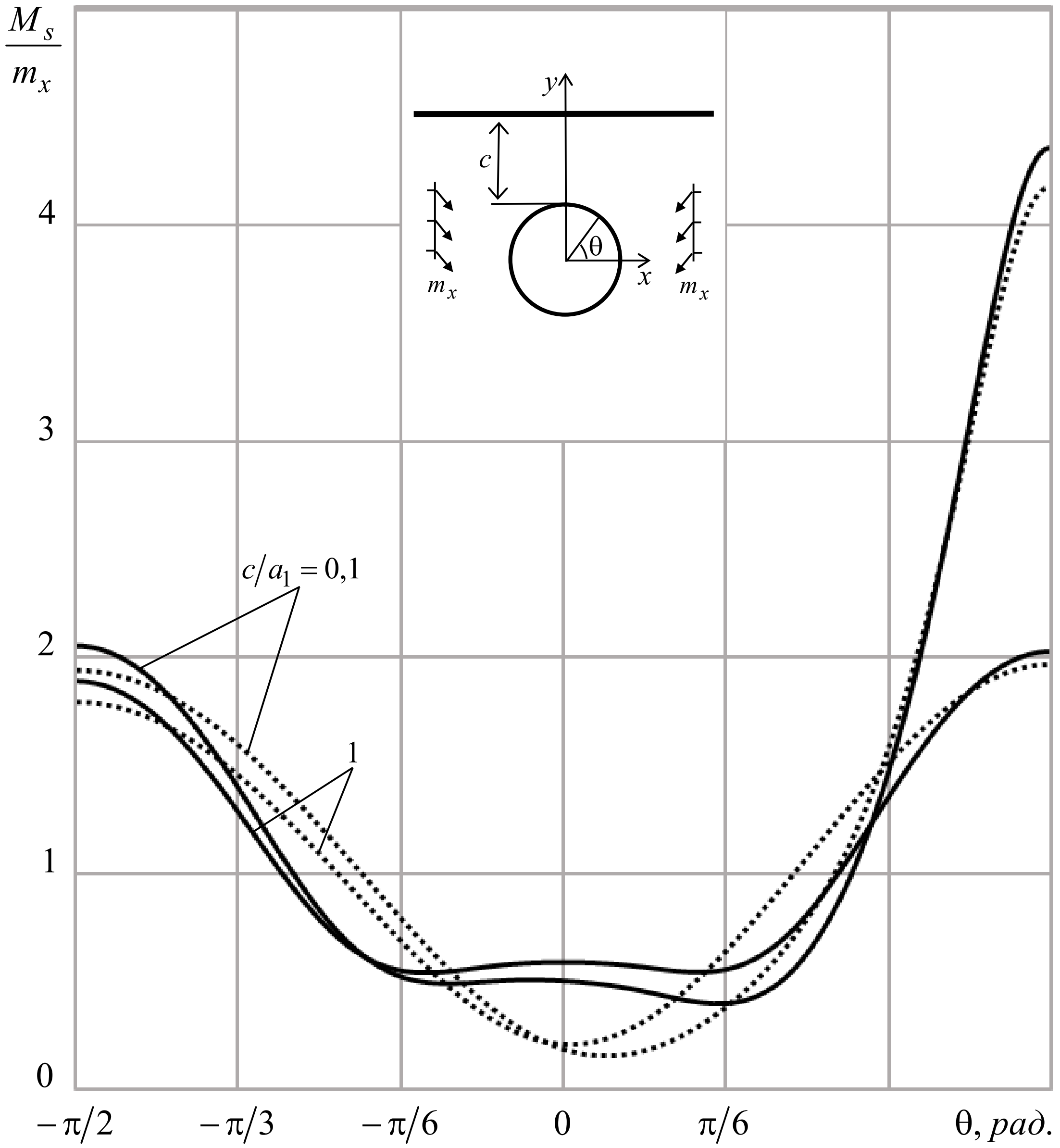


Рисунок Б.4.1 – Графики распределения моментов M_s / m_x около контура кругового отверстия в полуплоскости из М2. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ.

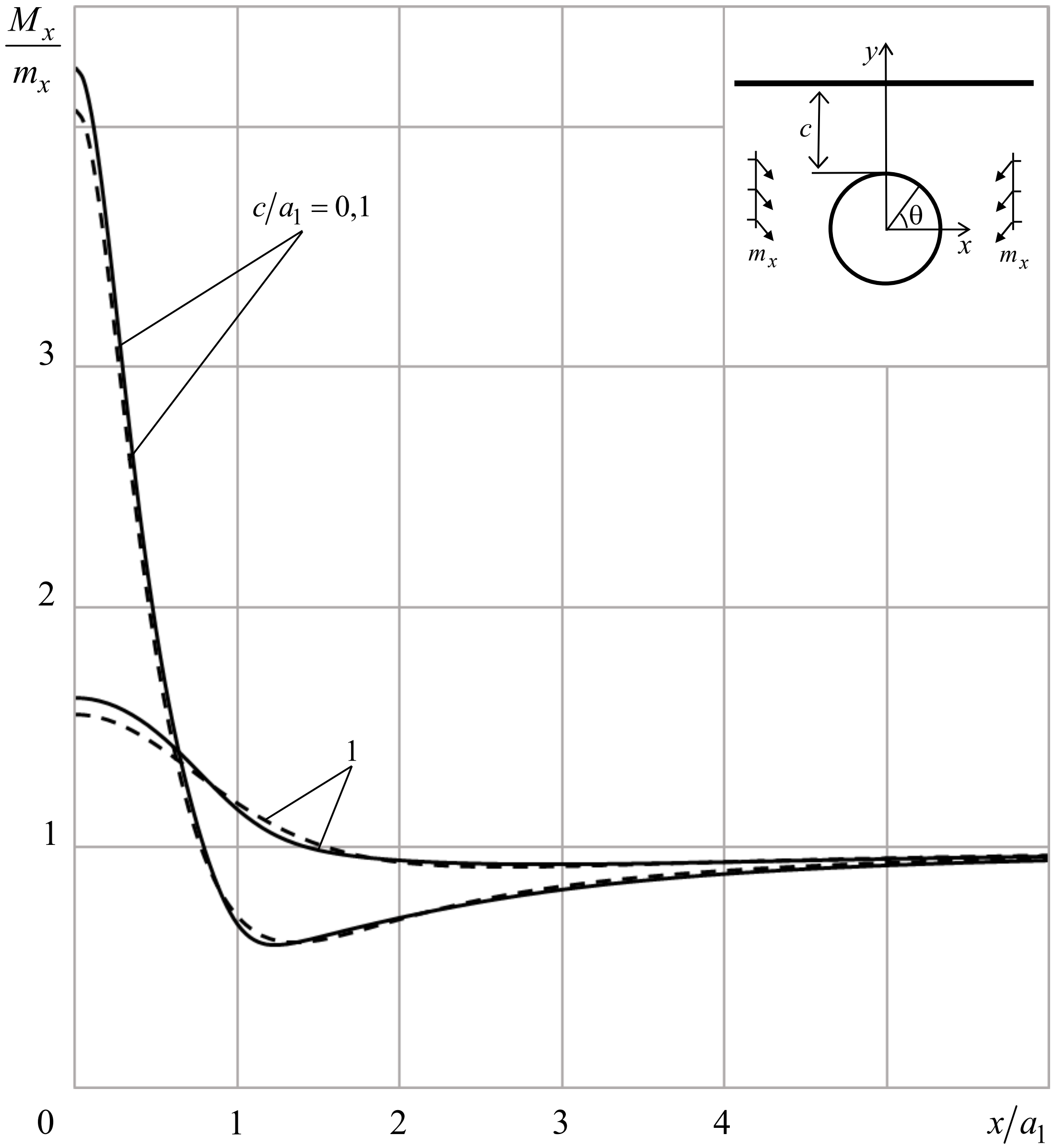


Рисунок Б.4.2 – Графики распределения M_x / m_x по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений c / a_1. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ.

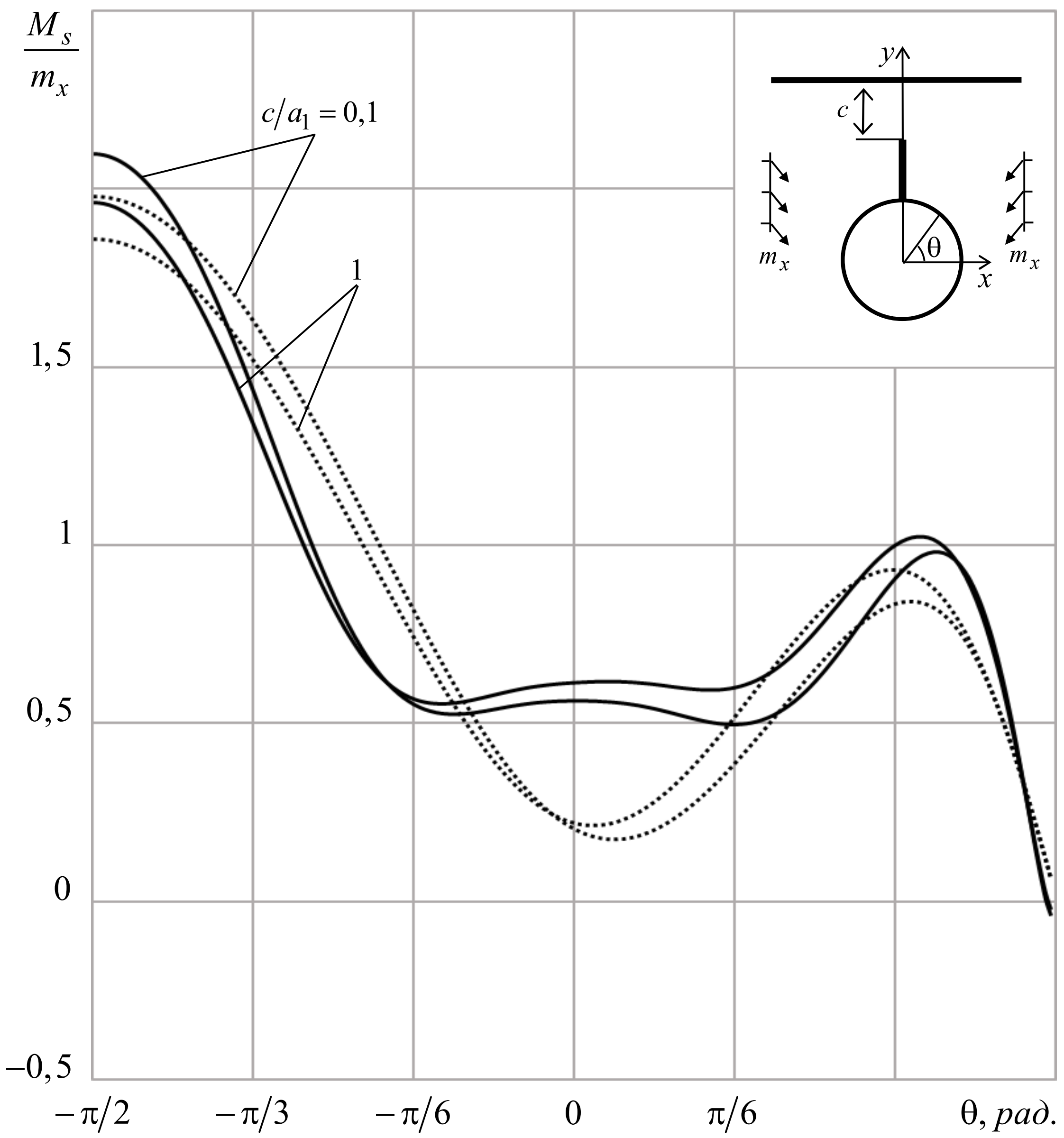


Рисунок Б.4.3 – Графики распределения моментов $M_s \,/\, m_x$ около контура кругового отверстия с краевой трещиной в полуплоскости из материала М2 для некоторых значений отношения $c \,/\, a_1$. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые – к задаче ТУ.

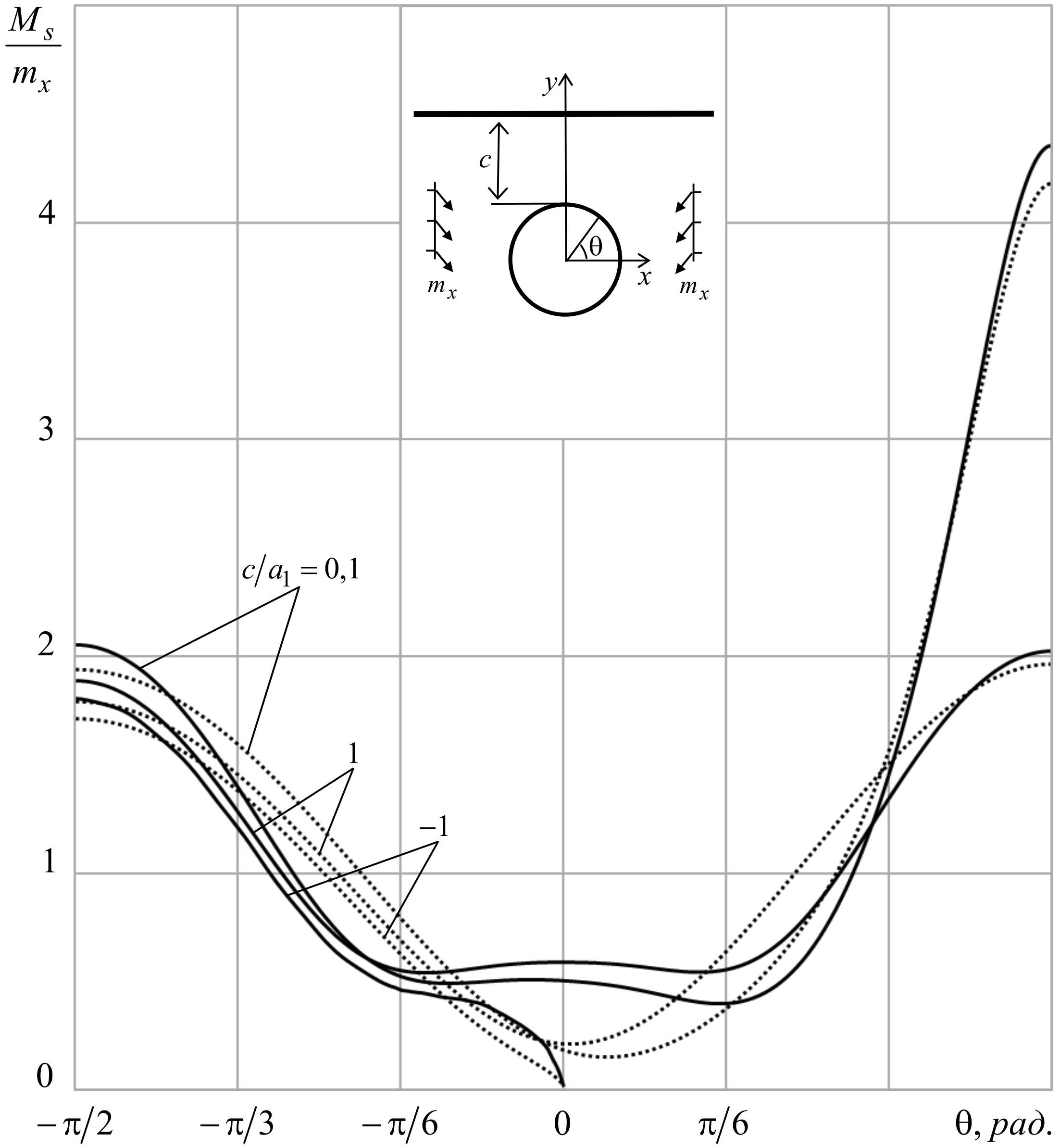


Рисунок Б.4.4 – Графики распределения моментов M_s / m_x около контура кругового отверстия в полуплоскости из М2. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, пунктирные – к задаче ТУ.

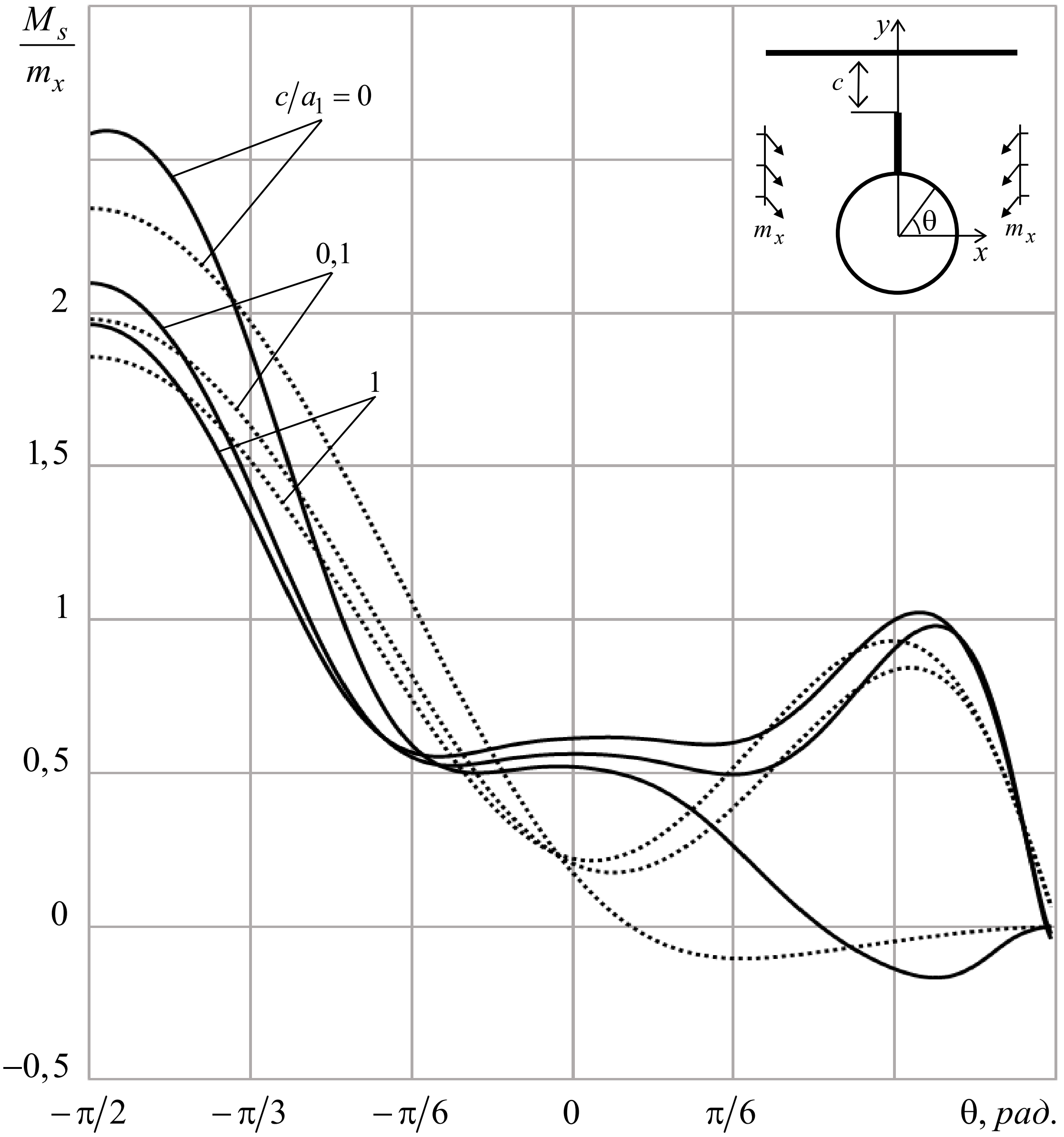


Рисунок Б.4.5 – Графики распределения моментов M_s / m_x около контура кругового отверстия с краевой трещиной в полуплоскости из материала М2 для некоторых значений отношения c / a_1. Сплошные линии относятся к задаче ЭМУ, штриховые – к задаче ТУ.

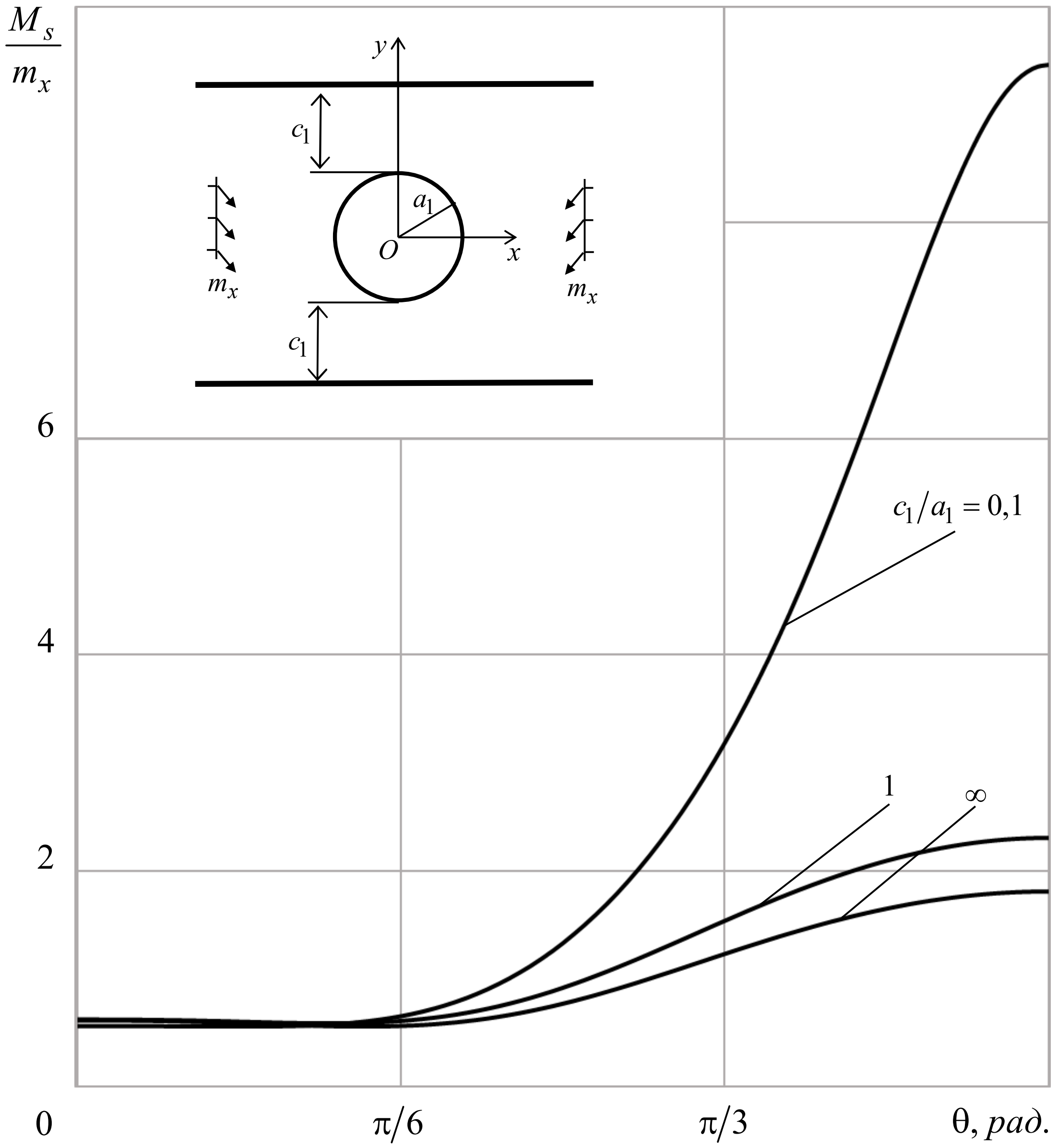


Рисунок Б.4.6 – Графики распределения моментов M_s / m_x около контура кругового отверстия в полосе из материала М2 для некоторых значений отношения c / a_1.

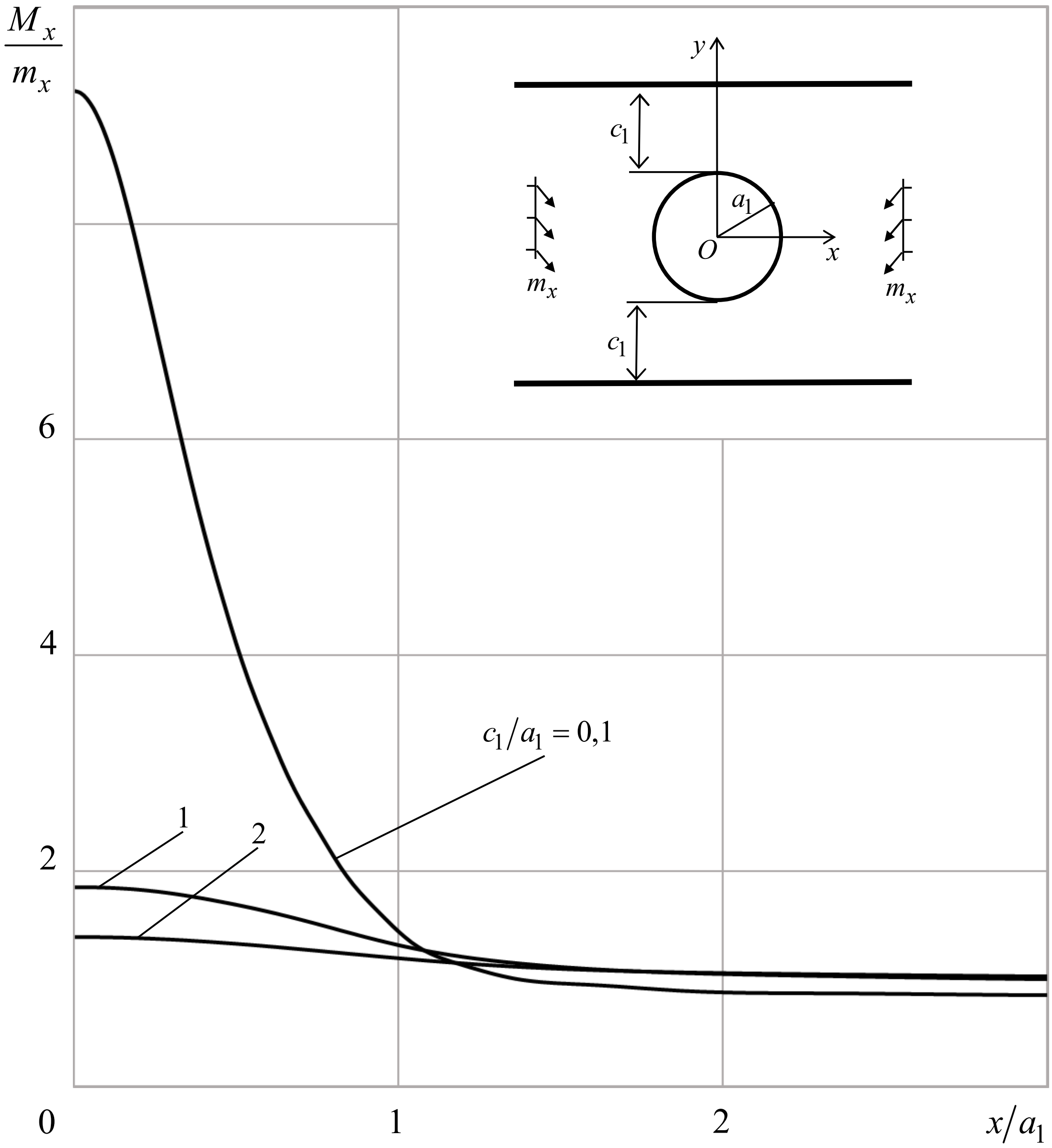


Рисунок Б.4.7 – Графики распределения $M_x \,/\, m_x$ по отрезку прямолинейной границы L^{+} в полосе с круговым отверстием из материала М2 для некоторых значений c_1/a_1 .